Данный файл представлен исключительно в ознакомительных целях.

Уважаемый читатель!
Если вы скопируете данный файл,
Вы должны незамедлительно удалить его сразу после ознакомления с содержанием.
Копируя и сохраняя его Вы принимаете на себя всю ответственность, согласно действующему международному законодательству .
Все авторские права на данный файл сохраняются за правообладателем.
Любое коммерческое и иное использование кроме предварительного ознакомления запрещено.

Публикация данного документа не преследует никакой коммерческой выгоды. Но такие документы способствуют быстрейшему профессиональному и духовному росту читателей и являются рекламой бумажных изданий таких документов.

Н.В.ЯКОВЛЕВ ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Н.В.ЯКОВЛЕВ

ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Н.В.ЯКОВЛЕВ

ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебника
для студентов геодезических
специальностей вузов

МОСКВА "НЕДРА" 1989

ББК 26.11
Я 47
УДК 528.2/.3(075.8)

Рецензенты:

проф. О. С. РАЗУМОВ,
кафедра высшей геодезии НИИГАиК

Яковлев Н. В.

Я 47 Высшая геодезия: Учебник для вузов.— М.: Недра, 1989.— 445 с.: ил.

ISBN 5-247-00467-1

Изложены основные задачи высшей геодезии. Приведены сведения о фигуре и гравитационном поле Земли. Показана связь высшей геодезии с другими науками. Рассмотрены теоретические основы создания опорных геодезических сетей и методы закрепления их на местности. Дано описание высокоточных приборов, проанализированы источники ошибок измерений. Особое внимание уделено геометрическому и тригонометрическому нивелированию. Изложена теория математической обработки результатов измерений, методы уравнивания геодезических сетей на плоскости, включая оценку точности уравненных элементов.

Для студентов геодезических специальностей вузов.

Я $\frac{1802020000\text{-}393}{043(01)\text{-}89}$ 25-89 **ББК 26.11**

ISBN 5-247-00467-1

© Издательство «Недра», 1989

Предисловие

В учебнике рассматривается теория и практика построения государственной геодезической и нивелирной сетей СССР. Учебник написан в соответствии с программой курса «Высшая геодезия» для студентов вузов.

В постановке основных геодезических работ в нашей стране и подготовке высококвалифицированных специалистов в области высшей геодезии на протяжении нескольких десятилетий сыграл огромную роль фундаментальный труд крупнейшего советского ученого-геодезиста, члена-корреспондента АН СССР, профессора Ф. Н. Красовского «Руководство по высшей геодезии», изданное в двух частях в 1938—1942 гг.

В 1967 г. вышло в свет учебное пособие профессора А. И. Дурнева «Высшая геодезия», предназначенное для подготовки специалистов, выполняющих основные геодезические работы. В первой части этого пособия приведены начальные сведения о фигуре и гравитационном поле Земли, поверхностях относимости; рассмотрена схема и программа построения государственной геодезической сети, способы предварительной оценки точности и методы уравнивания геодезических сетей на плоскости в проекции Гаусса—Крюгера. Во вторую часть предполагалось включить вопросы, связанные с изучением приборов, методов и технологии выполнения полевых геодезических работ в государственной геодезической сети, а также методы и средства создания нивелирной сети СССР. Однако данная работа не была завершена.

Учебное пособие «Высшая геодезия» профессора А. М. Вировца предполагалось издать в двух частях. В 1970 г. была подготовлена и издана только первая часть, в которой приведены общие сведения о фигуре и гравитационном поле Земли, поверхностях относимости; рассмотрены методы, а также схема и программа построения государственной геодезической сети; изложены вопросы проектирования, рекогносцировки и закрепления сети на местности, предварительная оценка точности и т. п.; кроме того, дано подробное описание применяемых в то время высокоточных теодолитов и методов их исследований.

Настоящий учебник состоит из пяти разделов. При написании его учтен многолетний опыт чтения автором данного курса на геодезическом факультете МИИГАиК.

В первом разделе приведены общие сведения о фигуре и гравитационном поле Земли, поверхностях относимости, геодезических и астрономических координатах, дано понятие редукционной задачи. Эти сведения необходимы для научного обоснования основных положений о построении государственных опорных геодезических сетей высокой точности в единой для всей страны системе координат и высот с учетом неоднородностей гравитационного поля Земли и кривизны ее поверхности.

Во втором разделе рассмотрены принципы и методы построения государственной геодезической сети СССР, включая проектирование, рекогносцировку и закрепление ее на местности, априорную оценку точности, пути дальнейшего совершенствования и повышения точности сети.

В третьем разделе дано краткое описание отечественных и зарубежных высокоточных теодолитов, включая электронные; рассмотрены основные их исследования; проанализированы разнообразные погрешности высокоточных угловых измерений, а также методы исключения или ослабления их влияний; изложена теория и дано описание методов угловых измерений в геодезических сетях.

В четвертом разделе рассмотрены теория и практика построения высокоточной нивелирной сети СССР, включая ее схему и программу, проектирование и закрепление сети на местности, приборы и методы измерений, анализ источников ошибок, предварительную обработку результатов измерений, методы уравнивания нивелирных сетей. Отдельная глава посвящена тригонометрическому нивелированию с учетом влияния рефракции, уклонений отвесных линий и превышений квазигеоида на вычисляемые разности нормальных высот точек земной поверхности.

В пятом разделе изложено содержание предварительных вычислений и теория уравнивания геодезических сетей на плоскости в проекции Гаусса—Крюгера коррелатным и параметрическим способами.

Введение

Высшая геодезия — наука, занимающаяся определением формы, размеров и гравитационного поля Земли, созданием государственных опорных геодезических сетей, изучением геодинамических явлений, решением геодезических задач на поверхности земного эллипсоида и в пространстве.

Задачи высшей геодезии принято подразделять на научные и научно-технические. Главной научной задачей высшей геодезии и смежных с ней наук (гравиметрии и теории фигуры Земли, космической геодезии и астрономии) является определение параметров фигуры Земли (ее формы и размеров), внешнего гравитационного поля и их изменений во времени. В настоящее время под фигурой Земли в высшей геодезии понимают фигуру, ограниченную физической поверхностью Земли, т. е. поверхностью ее твердой оболочки на суше и невозмущенной поверхностью морей и океанов. Под гравитационным полем Земли понимают поле силы тяжести, являющейся равнодействующей силы притяжения (тяготения) и центробежной силы, вызванной суточным вращением Земли.

Изучение гравитационного поля Земли по своей сути — геофизическая проблема, как и изучение других физических полей Земли. Однако в силу особой важности для геодезии и с учетом того, что параметры фигуры и гравитационного поля Земли определяются из совместной обработки комплекса астрономо-геодезических, гравиметрических, спутниковых и других измерений и совместно используются при решении многих задач высшей геодезии, изучение гравитационного поля Земли является одной из главных научных задач геодезии.

Под воздействием физических процессов, протекающих в недрах Земли и на ее поверхности, медленно перемещаются литосферные плиты, возникают упругие напряжения в земной коре, происходят землетрясения, постепенно деформируется земная поверхность, причем по-разному в разных местах, изменяется положение полюсов Земли, ее гравитационное поле, угловая скорость вращения и т. д. Все это оказывает влияние на точность определения координат и высот пунктов геодезических сетей и ведет к их изменению с течением времени. Поэтому при решении разнообразных задач, требующих геодезического обеспечения наивысшей точности, возникает необходимость

изучения Земли как планеты. В связи с этим к числу важнейших научных задач высшей геодезии относятся такие, как определение геодезическими методами количественных характеристик деформаций земной поверхности, изучение вековых поднятий или опусканий крупных блоков земной коры, а также закономерностей перемещений литосферных плит, определение и учет движений полюсов Земли и вариаций ее угловой скорости вращения, изучение современных движений земной поверхности в сейсмически активных районах с целью поиска предвестников и последующего прогноза крупных землетрясений, изучение техногенных движений земной поверхности, обусловленных активной деятельностью человека, определение разностей уровней морей и океанов и др.

Основная научно-техническая задача высшей геодезии и смежных с ней наук состоит в создании глобальной (общеземной) и национальных (на территории государства) опорных геодезических сетей высокой точности. К национальным опорным сетям относятся: государственная геодезическая сеть (основная, часто называемая плановой), государственная нивелирная сеть (высотная) и государственная гравиметрическая сеть. Эти сети тесно взаимосвязаны, дополняют одна другую и при совместном использовании комплекса выполняемых в них астрономо-геодезических и гравиметрических измерений позволяют однозначно определять координаты и высоты пунктов в единой для страны системе, а также параметры Земли, характеризующие ее фигуру и гравитационное поле в пределах территории страны. Выполняя повторные измерения в этих сетях, можно уточнять координаты и высоты пунктов, а также изучать геодинамические явления.

Практика показывает, что с течением времени требования к точности построения опорных геодезических сетей непрерывно возрастают. Они уже и теперь достаточно высоки, а в ближайшем будущем будут несравненно выше. Поэтому в настоящее время возникает необходимость разработки теорий и методов создания прецизионных опорных геодезических сетей (глобальной и национальных) с использованием для этих целей всего комплекса астрономо-геодезических, гравиметрических, гравиинерциальных и других видов измерений, а также наблюдений искусственных спутников Земли (ИСЗ), космических летательных аппаратов (КЛА), внегалактических источников радиоизлучения (квазаров) и т. п.

При создании и последующем совершенствовании опорных геодезических сетей возникает большой круг научно-технических проблем и задач, включающих в том числе разработку:

научно обоснованных программных и методических вопросов построения опорных геодезических сетей с наивысшей точ-

ностью, доступной при использовании новейших достижений геодезической науки и техники;

средств и методов надежного закрепления геодезических сетей на местности, создаваемых в различных физико-географических и климатических зонах с учетом длительного срока их службы;

наиболее совершенных методов и точных приборов, автоматизированных комплексов для производства высокоточных астрономо-геодезических, гравиметрических, спутниковых, гравиинерциальных, радиоинтерферометрических и других видов измерений в опорных геодезических сетях наивысшей точности;

эффективных математически строгих теорий и методов совместной обработки результатов всего комплекса этих измерений с целью наиболее точного определения координат и высот геодезических пунктов, а также параметров фигуры и гравитационного поля Земли;

эффективных методов и средств определения учета влияний внешней среды на результаты астрономо-геодезических, спутниковых и других измерений;

наиболее точных и в то же время достаточно простых методов решения геодезических задач на поверхности земного эллипсоида, принимаемого за геометрическую или физическую модель Земли, а также в трехмерном пространстве с использованием новейшей вычислительной техники;

методов научной организации работ, охраны труда и техники безопасности на всех этапах построения и дальнейшего совершенствования опорных геодезических сетей и др.

Научные и научно-технические задачи высшей геодезии тесно взаимосвязаны. Без знания параметров фигуры и гравитационного поля Земли невозможно математически строго совместно обработать результаты всего комплекса разнообразных измерений, выполняемых при создании опорных геодезических сетей, а следовательно, однозначно и с высокой точностью определить в единой системе координаты и высоты пунктов. И наоборот, для изучения фигуры и гравитационного поля Земли необходима сеть опорных геодезических пунктов, координаты и высоты которых определены в единой системе. Это свидетельствует о том, что научные и научно-технические задачи высшей геодезии должны решаться совместно, методом приближений, что и происходит в действительности.

Высшая геодезия непрерывно развивается и совершенствуется. Она тесно взаимодействует с такими научными дисциплинами, как теория фигуры Земли, гравиметрия, геодезическая астрономия, космическая геодезия и др.

Курс высшей геодезии состоит из трех основных разделов, дополняющих друг друга: «Основные геодезические работы», «Сфероидическая геодезия» и «Теоретическая геодезия». В раз-

деле «Основные геодезические работы» рассматриваются вопросы построения государственных геодезических сетей (плановых и высотных) в неоднородном (реальном) гравитационном поле Земли, в том числе методы их создания, проектирование и закрепление сетей на местности, приборы и методы высокоточных геодезических измерений разного состава, источники ошибок измерений и методы учета их влияний, методы математической обработки результатов измерений с учетом кривизны земной поверхности и неоднородностей гравитационного поля. В разделе «Сфероидическая геодезия» изучается геометрия земного эллипсоида, методы решения геодезических задач на его поверхности и в трехмерном пространстве, а также теория отображения поверхности эллипсоида на шаре и на плоскости. «Теоретическая геодезия» занимается разработкой теорий и методов решения основных научных проблем и задач высшей геодезии, используя для этих целей весь комплекс современных астрономо-геодезических, гравиметрических, спутниковых и других видов высокоточных измерений, выполняемых в опорных геодезических сетях и при необходимости повторяемых в том или ином объеме через определенные промежутки времени при решении геодинамических и других задач.

Для успешного решения научных и научно-технических задач высшей геодезии все измерения в государственных геодезических сетях 1 класса необходимо выполнять с наивысшей точностью достигаемой при массовых (не единичных) измерениях при использовании новейшей измерительной техники. В настоящее время в геодезических сетях 1 класса горизонтальные углы измеряются со средней квадратической ошибкой 0,5—0,7″ (вычисленной по невязкам треугольников), длины сторон — с относительной ошибкой $2 \cdot 10^{-6}$, превышения при нивелировании — со случайной ошибкой 0,5 мм/км, астрономические широты, долготы и азимуты — со случайными ошибками 0,3″; $0{,}03^{s}$ и 0,5″ соответственно (вычисленными по колебаниям результатов измерений в приемах), ускорение силы тяжести — с относительной ошибкой порядка $3 \cdot 10^{-8}$. Достижению такой высокой точности измерений, выполняемых в сложнейших физико-географических и климатических условиях, предшествовал огромный труд советских ученых-геодезистов, приборостроителей и других специалистов.

Высшая геодезия в своих исследованиях широко использует новейшие достижения таких фундаментальных наук, как физика, математика, астрономия и других, а при разработке высокоточной измерительной техники — прикладной оптики, точного приборостроения, радиоэлектроники, лазерной техники и т. п. При математической обработке результатов измерений широко применяются теория вероятностей, математическая статистика, метод наименьших квадратов и т. п. Все вычисления

выполняются с использованием новейшей электронной вычислительной техники. Для решения научных задач, связанных с изучением Земли как планеты, необходима тесная взаимосвязь высшей геодезии с такими науками о Земле, как геология, тектоника, геофизика и др.

Результаты исследований высшей геодезии имеют важное научное и народнохозяйственное значение. Например, государственные геодезические сети широко используются при освоении космического пространства, изучении природных ресурсов, картографировании территории страны в разных масштабах, промышленном и сельскохозяйственном освоении значительных по площади территорий и т. д. На основе повторных измерений, выполненных в нивелирных сетях СССР и других социалистических стран, впервые в истории наук о Земле геодезисты составили и в 1971 г. опубликовали Карту современных вертикальных движений земной коры Восточной Европы, которая имеет важное научное и прикладное значение. Теперь такие карты составляются во многих странах.

РАЗДЕЛ I

Фигура Земли и поверхности относимости

Глава 1

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ФИГУРЕ И ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

§ 1. СИЛА ТЯЖЕСТИ И УРОВЕННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

При построении государственных геодезических сетей высокой точности выполняют угловые и линейные измерения, определяют астрономические широты, долготы и азимуты, измеряют силу тяжести и превышения между пунктами, ведут наблюдения искусственных спутников Земли и т. п. При производстве высокоточных астрономо-геодезических измерений всякий раз тщательно совмещают вертикальную ось измерительного прибора с отвесной линией в точке его установки. Направление отвесной линии в каждой точке пространства совпадает с направлением действия силы тяжести. Сила тяжести является равнодействующей двух основных сил: силы земного притяжения F и центробежной силы P, возникающей вследствие суточного вращения материальной точки вокруг оси вращения Земли.

В каждой данной точке (рис. 1) вектор силы тяжести $\vec{g}$ равен сумме векторов $\vec{F}$ и $\vec{P}$, т. е.

$$\vec{g}=\vec{F}+\vec{P}. \tag{1.1}$$

При очень высокой точности измерений учитывают еще силу притяжения небесных тел F_1 (в основном Луны и в значительно меньшей мере Солнца), величина которой по сравнению с силой F мала ($F_1<F\cdot 10^{-7}$).

Сила земного притяжения F зависит от формы, размеров и массы Земли, а также от распределения аномальных плотностей. Если Землю в первом приближении принять за шар, состоящий из концентрических слоев одинаковой плотности, меняющейся скачком при переходе от одного слоя к другому, то сила притяжения F будет направлена к центру масс Земли

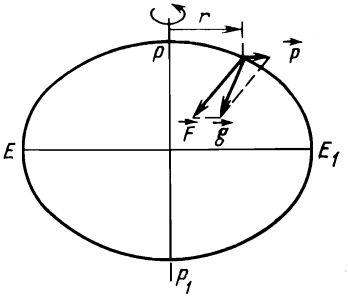


Рис. 1. Сила тяжести и ее составляющие

и согласно закону всемирного тяготения будет определяться по формуле

$$F = f\frac{Mm}{R^2}, \tag{1.2}$$

где f — универсальная гравитационная постоянная; M — масса Земли; m — масса материальной точки; R — радиус земного шара. Для реальной Земли сила притяжения F не равна значению, вычисленному по формуле (1.2), и направлена не к центру масс Земли.

Центробежная сила P направлена вдоль радиуса параллели, на которой находится материальная точка, и определяется по формуле

$$P = mr\omega^2, \tag{1.3}$$

где m — масса материальной точки; r — радиус параллели; ω — угловая скорость вращения Земли.

Наибольшей величины центробежная сила достигает на экваторе: $P = ma\omega^2$, где a — большая полуось Земли, а наименьшей — на полюсах Земли: $P = 0$, так как $r = 0$. На экваторе сила P в 288 раз меньше силы F, но еще велика и ощутимо влияет на значение силы тяжести g.

Силы F и P имеют противоположные знаки. Сила P при переходе от экватора к полюсам Земли уменьшается. Поэтому сила тяжести g изменяется по широте и достигает наибольшей величины на полюсах, а наименьшей — на экваторе Земли.

За единицу ускорения силы тяжести в Международной системе единиц СИ принята величина 1 м·с^2. В гравиметрии широко применяется единица, называемая галом (1 Гал = 1 см$\times$ $\times$с^2 = 0,01 м·с^2. Обычно вместо выражения «ускорение силы тяжести» допускается употреблять выражение «сила тяжести».

В гравиметрии при измерении величин, характеризующих гравитационное поле Земли, для описания поля силы тяжести используют скалярную функцию — потенциал. Потенциал вектора — это такая функция координат, частные производные

которой по прямоугольным координатам равны проекциям вектора на соответствующие координатные оси.

Потенциал силы тяжести W равен сумме потенциала V силы притяжения F и потенциала Q центробежной силы P, т. е.

$$W = V + Q. \tag{1.4}$$

Производная от потенциала силы тяжести W по любому направлению s в точке равна проекции этой силы на данное направление, т. е.

$$\frac{dW}{ds} = g\cos(g,\ s), \tag{1.5}$$

где g — значение силы тяжести в точке; $(g,\ s)$ — угол между направлением действия силы тяжести и направлением s, по которому перемещается единичная масса.

Рассмотрим два частных случая формулы (1.5). Предположим сначала, что материальная точка A перемещается под прямым углом к вектору силы тяжести $\vec{g}$. В этом случае угол $(g,\ s)$ равен 90° (рис. 2, *а*), $\cos(g,\ s) = 0$ и поэтому

$$\frac{dW}{ds} = 0, \text{ или } dW = 0. \tag{1.6}$$

Проинтегрировав выражение (1.6), получим уравнение семейства поверхностей

$$W = C = \text{const}. \tag{1.7}$$

Поверхность, во всех точках которой потенциал силы тяжести имеет одно и то же значение ($W = \text{const}$), называется уровенной поверхностью Земли.

Принимая различные значения постоянной C в выражении (1.7), получим соответствующие уровенные поверхности (рис. 3). Через каждую точку пространства проходит только одна уровенная поверхность. В каждой точке уровенной поверхности вектор силы тяжести направлен по нормали к ней. Уровенные поверхности являются поверхностями равновесия, так как составляющая силы тяжести по касательной к уровенной поверхности в любой ее точке равна нулю. Следует отметить, что поверхность воды в спокойном состоянии, находящаяся под действием только силы тяжести, совпадает с одной из уровенных поверхностей. Кривая, пересекающая уровенные поверхности W_1, W_2, ... под прямыми углами, называется силовой линией гравитационного поля Земли. Касательные во всех точках силовой линии совпадают с направлением действия силы тяжести и перпендикулярны к уровенным поверхностям.

Рассмотрим второй частный случай формулы (1.5). Пусть материальная точка A с одной уровенной поверхности W пере-

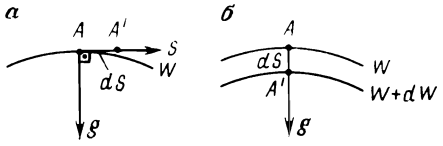


Рис. 2. Схемы перемещения материальной точки перпендикулярно к вектору силы тяжести (*а*) и вдоль него (*б*)

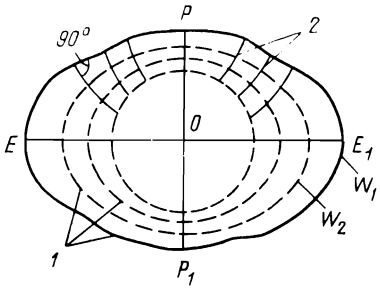


Рис. 3. Уровенные поверхности Земли (*1*) и силовые линии гравитационного поля (*2*)

местится по направлению вектора силы тяжести g на другую поверхность $W_1 = W + dW$, находящуюся на бесконечно малом расстоянии $ds = dh$ (см. рис. 2,*б*). В этом случае угол (g, s) равен нулю; $\cos(g, s) = 1$ и поэтому уравнение (1.5) примет вид

$$\frac{dW}{ds} = \frac{dW}{dh} = g \text{ или } dW = g dh. \tag{1.8}$$

Из выражения (1.8) следует, что дифференциал dh расстояния между двумя бесконечно близкими уровенными поверхностями W и $W_1 = W + dW$ равен величине

$$dh = \frac{dW}{g}. \tag{1.9}$$

Анализируя формулу (1.9) и рис. 3, можно сделать следующие общие выводы:

1. Уровенные поверхности Земли нигде не соприкасаются между собой и не пересекаются.

2. Уровенные поверхности Земли не параллельны между собой: на полюсе они сближаются, а на экваторе, наоборот, удаляются одна от другой.

3. Уровенные поверхности Земли имеют волнообразный вид из-за наличия внутри Земли аномальных по плотности масс.

§ 2. ГЕОИД И КВАЗИГЕОИД

Понятие фигуры Земли неоднозначно и может трактоваться по-разному в зависимости от того, какие требования предъявляются к точности решения тех или иных задач, требующих знания формы и размеров Земли. В одних случаях Землю можно принять за шар, в других, например, при решении многих задач геодезии и картографии — за двухосный эллипсоид вращения с малым полярным сжатием и т. п.

Выше отмечалось, что при решении задач высшей геодезии под фигурой Земли в настоящее время понимают фигуру, ограниченную физической поверхностью Земли, т. е. поверхностью ее твердой оболочки на суше и невозмущенной поверхностью морей и океанов.

Суша составляет около $^1/_3$ земной поверхности. Возвышается она над уровнем моря в среднем на 900 м, т. е. на очень малую величину по сравнению со средним радиусом Земли ($R=6371$ км). Более 70 % земной поверхности покрыто морями и океанами. Поэтому за фигуру Земли в первом приближении можно принять фигуру, ограниченную невозмущенной поверхностью морей и океанов и продолженную под материками так, чтобы отвесные линии во всех ее точках были перпендикулярны к ней. Такую фигуру Земли по предложению немецкого физика Листинга называют геоидом. Изучением геоида геодезисты занимаются более ста лет. В настоящее время на акватории Мирового океана геоид с высокой точностью (до 0,1—0,3 м по высоте) изучают методом спутниковой альтиметрии, измеряя расстояния от спутника до подспутниковых точек на поверхности морей и океанов. Эти измерения показали, что невозмущенная морская поверхность не везде совпадает с уровенной поверхностью потенциала силы тяжести: в отдельных районах отклонения по высоте достигают $\pm$ (1,5—2) м. Поэтому при теоретически строгом подходе под геоидом понимают фигуру Земли, ограниченную уровенной поверхностью потенциала силы тяжести, проходящей через начало отсчета высот, совпадающее с некоторым средним уровнем Мирового океана.

При изучении фигуры геоида на суше метод спутниковой альтиметрии не работает, а другие методы космической геодезии дают недостаточную точность определения его поверхности. Для того чтобы изучить фигуру геоида по наземным измерениям с высокой точностью, необходимо силу тяжести измерять непосредственно на его поверхности, что не осуществимо. Следовательно, как доказал известный советский ученый М. С. Молоденский, изучить фигуру геоида с высокой точностью по наземным измерениям невозможно. По результатам комплекса наземных астрономо-геодезических и гравиметрических измерений теоретически безупречно может быть определена другая вспомогательная поверхность, получившая название поверхности квазигеоида, которая незначительно отклоняется от поверхности геоида: в равнинной местности на 2—4 см, а в горах — не более 2 м. На морях и океанах поверхности геоида и квазигеоида полностью совпадают.

Фигуру Земли, ограниченную поверхностью квазигеоида, называют квазигеоидом. Определив из обработки наземных измерений параметры квазигеоида и измерив относительно него высоты точек земной поверхности, можно теоретически строго

изучить фигуру реальной Земли, ограниченную ее твердой оболочкой на суше и невозмущенной поверхностью морей и океанов. Теория М. С. Молоденского изучения фигуры и гравитационного поля Земли получила признание среди геодезистов всего мира и подробно рассматривается в курсах геодезической гравиметрии и теории фигуры Земли.

§ 3. ОБЩИЙ ЗЕМНОЙ ЭЛЛИПСОИД

При изучении фигуры Земли с давних пор поступают следующим образом. Сначала определяют форму и размеры некоторой модели Земли, поверхность которой сравнительно проста, хорошо изучена в геометрическом отношении, удобна для решения на ней разнообразных задач геодезии и картографии и наиболее полно характеризует в первом приближении форму и размеры реальной Земли. Затем, приняв поверхность этой модели Земли за отсчетную, определяют относительно нее высоты точек поверхности изучаемой фигуры — геоида (квазигеоида) или реальной Земли — и таким образом получают данные, характеризующие форму и размеры конкретной фигуры.

При решении задач высшей геодезии за такую модель Земли принимают эллипсоид вращения с малым полярным сжатием, называемый общим земным эллипсоидом (рис. 4). Его поверхность может быть получена вращением полуэллипса PEP_1 вокруг его малой оси PP_1.

Форма и размеры земного эллипсоида характеризуются большой a и малой b полуосями, а чаще большой полуосью a и полярным сжатием α,

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \tag{1.10}$$

или большой полуосью a и первым эксцентриситетом e меридианного эллипса:

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}. \tag{1.11}$$

Для того чтобы общий земной эллипсоид возможно точнее характеризовал форму и размеры всей Земли, его параметры a, α определяют с учетом следующих условий:

1) центр общего земного эллипсоида должен совпадать с центром масс Земли, а его малая ось — с осью вращения Земли[1];

[1] Имеются в виду средние положения центра масс и оси вращения в теле Земли.

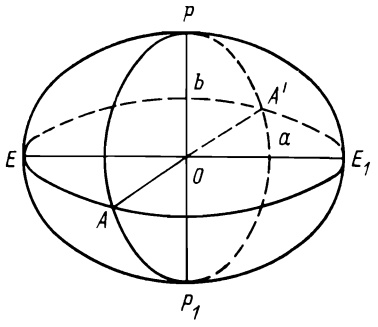


Рис. 4. Земной эллипсоид

2) объем эллипсоида должен быть равен объему геоида (квазигеоида);

3) сумма квадратов отклонений по высоте поверхности эллипсоида от поверхности геоида (квазигеоида) должна быть наименьшей.

До недавнего времени, т. е. до начала освоения человеком космического пространства, параметры земного эллипсоида получали, выполняя так называемые градусные измерения. С этой целью прокладывали ряды триангуляции по направлению меридианов и параллелей на разных широтах, на конечных пунктах которых определяли астрономические широты, долготы, а также азимуты сторон. Для вывода надежных значений параметров общего земного эллипсоида градусные измерения, в принципе, необходимо было выполнить на всей поверхности Земли, включая Мировой океан. Кроме того, астрономические широты, долготы и азимуты следовало исправить поправками за влияние уклонений отвесных линий, которые, как правило, были неизвестны.

В прошлом градусные измерения велись только на материках, т. е. на незначительной части земной поверхности. Градусные измерения разных стран не имели общих связей, выполнялись по разным программам с разной точностью, обрабатывались в разных системах координат. Все это затрудняло их совместное использование и отрицательно сказывалось на точности выводов размеров земного эллипсоида.

В течение полутора веков ученые многих стран занимались определением размеров земного эллипсоида, используя имеющиеся в разном объеме разной точности и содержания градусные измерения. Приведем некоторые результаты таких определений (табл. 1).

Эллипсоид Деламбра имеет только лишь историческое значение как основа для установления метрической системы мер. На поверхности эллипсоида Деламбра расстояние от полюса до экватора точно составляет 10000 км, так как в то время 1 м

Таблица 1

Ученый	Государство	Год	a, м	α
Деламбр	Франция	1800	6 375 653	1 : 334,0
Бессель	Германия	1841	6 377 397	1 : 299,2
Кларк	Великобритания	1866	6 378 206	1 : 294,98
Хейфорд	США	1910	6 378 388	1 : 297
Красовский	СССР	1940	6 378 245	1 : 298,3

был принят равным одной десятимиллионной части четверти дуги меридиана данного эллипсоида.

Все остальные эллипсоиды до сих пор используются в топографо-геодезических и картографических работах разных стран. Так например, эллипсоид Бесселя, кроме Германии и ряда других стран, применялся также и в Советском Союзе вплоть до 1942 г., когда начался переход к эллипсоиду Красовского.

Эллипсоид Кларка (1866 г.) применяется в США, странах Латинской и Центральной Америки, включая Кубу, а также в ряде других стран.

Эллипсоид Хейфорда используется в ряде европейских стран. Он в 1942 г. в Мадриде на II Генеральной ассамблее Международной ассоциации геодезии был рекомендован в качестве международного. Параметры этого эллипсоида выведены из градусных измерений, выполненных только на территории США, и содержат значительные ошибки. В этом легко убедиться, если сравнить параметры эллипсоида Хейфорда с параметрами земного эллипсоида, полученными в результате обработки спутниковых наблюдений: $a = 6\,378\,137$ м, $\alpha = 1 : 298{,}257$.

Эллипсоид Красовского является наиболее точным из всех эллипсоидов, полученных из обработки наземных измерений. Его размеры близки к размерам общего земного эллипсоида, полученным по данным наблюдений ИСЗ: сжатие практически одинаковое, а большие полуоси отличаются всего лишь на 108 м. Эллипсоид Красовского применяется в СССР и ряде других стран.

§ 4. НОРМАЛЬНАЯ ЗЕМЛЯ И ФИГУРА РЕАЛЬНОЙ ЗЕМЛИ

Нормальная земля

Фигура и гравитационное поле Земли тесно взаимосвязаны и их изучение представляет собой по существу одну задачу. Сложная структура гравитационного поля, обусловленная неправильностями фигуры Земли и особенностями распределения плотностей масс, создает значительные трудности при определении потенциала силы тяжести W. Задача определения по-

тенциала W существенно облегчается, если гравитационное поле Земли представить в виде двух полей: основного, или нормального и остаточного, или аномального и каждое из них изучать отдельно.

За физическую модель Земли при этом принимают так называемый уровенный эллипсоид вращения, внешняя поверхность которого является уровенной и сила тяжести в каждой точке ее направлена по нормали к ней.

Центр уровенного эллипсоида совмещают с центром масс Земли, а ось его вращения — с осью вращения Земли. Гравитационное поле, создаваемое уровенным эллипсоидом на его поверхности и во внешнем пространстве, называют нормальным гравитационным полем, а силу тяжести — нормальной и обозначают буквой γ.

Определив параметры уровенного эллипсоида, можно вычислить нормальный потенциал U и другие элементы нормального поля силы тяжести на его поверхности и во внешнем пространстве. Приняв поверхность уровенного эллипсоида за отсчетную, задачу изучения фигуры Земли можно свести к определению отклонений ее физической поверхности от поверхности эллипсоида, а задачу определения потенциала W реальной силы тяжести к определению небольших разностей $T = W - U$, называемых возмущающим потенциалом Земли в точках земной поверхности.

Уровенный эллипсоид, принимаемый за физическую модель Земли при определении ее фигуры и гравитационного поля, принято называть Нормальной Землей. При решении ряда задач геодезии, геофизики и небесной механики широкое распространение получило представление потенциала V притяжения Земли (включая ее атмосферу) в виде разложения в ряд шаровых функций геоцентрических координат r, Φ и L, т. е. геоцентрических радиуса, широты и долготы соответственно. Потенциал притяжения V_0 Нормальной Земли (уровенного эллипсоида) имеет вид [21]:

$$V_0 = \frac{fM_0}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} J_{2n}^0 P_{2n}(\sin\Phi)\right], \qquad (1.12)$$

где индексом «0» отмечены параметры Нормальной Земли; f — универсальная гравитационная постоянная; M_0 — масса уровенного эллипсоида; r — геоцентрический радиус-вектор точек его поверхности; a — большая полуось эллипсоида; $J_{2n}{}^0$ — зональные гармонические коэффициенты второй степени при полиномах Лежандра $P_{2n}(\sin\Phi)$.

Параметры Нормальной Земли в зависимости от их величины и важности классифицируют следующим образом.

Параметры нулевого порядка: геоцентрическая гравитационная постоянная fM; нормальный потенциал силы тяжести на поверхности Нормальной Земли U_0; экваториальный радиус Земли a; нормальная сила тяжести на экваторе γ_e.

Параметры порядка сжатия: нормальный гармонический коэффициент геопотенциала второй степени J_2; геометрическое сжатие Земли $\alpha=(a-b)/a$; гравиметрическое сжатие Земли $\beta=(\gamma_p-\gamma_e)/\gamma_e$, где γ_p — нормальная сила тяжести на полюсе; малые параметры, являющиеся функцией угловой скорости вращения Земли ω, и параметры нулевого порядка, а именно:

$$q=\omega^2 a/\gamma_e; \tag{1.13}$$

$$\bar{q}=\omega^2 a^3/fM. \tag{1.14}$$

Параметры высших порядков: коэффициент β_1 в формуле нормальной силы тяжести; гармонические коэффициенты нормального потенциала притяжения J_4^0, J_6^0, ... и т. д.

Фундаментальные геодезические постоянные

Из-за особой важности некоторые параметры Нормальной Земли получили название фундаментальных геодезических постоянных. К ним в настоящее время относят следующие величины: fM, a, J_2, ω, где ω — угловая скорость вращения Земли. Другие параметры Нормальной Земли являются производными постоянными. Их можно получить, используя известные соотношения между различными параметрами.

К числу фундаментальных постоянных относят также: скорость света в вакууме c, геоцентрическую гравитационную постоянную для атмосферы fM_A и универсальную гравитационную постоянную f.

Фундаментальные геодезические постоянные определяют, используя результаты наблюдений ИСЗ, далеких КЛА, а также результаты астрометрических и гравиметрических измерений.

Параметры Нормальной Земли определяют, соблюдая следующие условия:

1) центр уровенного эллипсоида вращения должен совпадать с центром масс Земли, а его главная ось инерции, являющаяся осью его вращения, — с осью вращения Земли;

2) угловые скорости ω вращения уровенного эллипсоида и реальной Земли должны быть одинаковыми;

3) масса M_0 уровенного эллипсоида должна быть равна массе M реальной Земли ($fM_0=fM$);

4) зональные гармонические коэффициенты геопотенциала второй степени для уровенного эллипсоида J_2^0 и реальной Земли J_2 должны совпадать ($J_2^0=J_2$);

5) нормальный потенциал U_0 силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида должен быть равен реальному потенциалу силы тяжести W_0 на поверхности геоида.

При решении ряда задач геодезии вместо U_0 в число фундаментальных геодезических постоянных включают большую полуось a уровенного эллипсоида. Тогда пятое условие формулируют иначе: большая полуось a уровенного эллипсоида должна быть подобрана таким образом, чтобы его объем равнялся объему геоида.

С течением времени по мере накопления измерительной информации фундаментальные геодезические постоянные постепенно уточняются. В соответствии с рекомендациями XVII Генеральной ассамблеи Международного геодезического и геофизического союза (МГГС) и входящей в него Международной ассоциации геодезии (МАГ), состоявшейся в Канберре (Австралия, 1979 г.), приняты следующие значения фундаментальных геодезических постоянных:

$fM = (3\,896\,005 \pm 0{,}5) \cdot 10^8$ м^{3}с$^{-2}$;

$J_2 = (108\,263 \pm 0{,}5)\,10^{-8}$;

$a = 6\,378\,137 \pm 2$ м;

$\omega = 7\,292\,115 \cdot 10^{-11}$ рад$\cdot$с$^{-1}$.

Эти постоянные являются исходными для принятой геодезической референц-системы 1980 г.

Зная фундаментальные геодезические постоянные, можно вычислить другие параметры Нормальной Земли по точным формулам [1]. Приведем некоторые формулы, устанавливающие связи между разными параметрами Нормальной Земли с точностью до малых величин второго порядка, что вполне достаточно для решения многих задач высшей геодезии на современном этапе [26].

Сжатие Земли α связано с параметрами J_2 и $\bar{q}$ формулой

$$\alpha = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} \bar{q} + \frac{9}{8} J_2^2 - \frac{11}{56} \bar{q}^2 - \frac{3}{14} J_2 \bar{q},$$

где $\bar{q}$ определяется по формуле (1.14).

Нормальный потенциал U_0 на поверхности уровенного эллипсоида равен

$$U_0 = \frac{fM_0}{a}\left(1 + \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{15}\alpha^2\right) + \frac{1}{3}\omega^2 a^2.$$

Масса эллипсоида M_0 и нормальная сила тяжести на экваторе γ_e связаны соотношением

$$fM_0 = a^2\gamma_e(1-\alpha) + \frac{3}{2}\omega^2 a^3\left(1 - \frac{5}{7}\alpha - \frac{1}{441}\alpha^2\right).$$

Нормальная сила тяжести γ_0 на поверхности уровенного эллипсоида на широтах B может быть вычислена по формуле

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B), \tag{1.15}$$

где

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = 0{,}005\,302\,48; \tag{1.16}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{8}\alpha^2 - \frac{1}{4}\alpha\beta = 0{,}000\,005\,85. \tag{1.17}$$

Нормальную силу тяжести γ (мГал) во внешнем пространстве находят по формуле

$$\gamma = \gamma_0 - 0{,}3086H, \tag{1.18}$$

где H — высота над эллипсоидом, м.

Приведенным выше фундаментальным геодезическим постоянным соответствуют следующие значения полярного сжатия Земли α и нормальной силы тяжести γ_e на экваторе уровенного эллипсоида:

$$\alpha = 1 : 298{,}257 \pm 0{,}001; \quad \gamma_e = 978\,033 \pm 1 \text{ мГал}.$$

Фигура реальной Земли

При известных параметрах и ориентировке земного эллипсоида в теле Земли задача изучения ее фигуры сводится к определению геодезических высот точек земной поверхности, отсчитываемых от поверхности эллипсоида по нормалям к нему, т. е. к определению отрезков $H_M^г = MC$ (рис. 5, *а*) в точках с известными координатами на эллипсоиде. Однако геодезическую высоту любой точки измерить непосредственно нельзя. Поэтому ее раскладывают на две составляющие и каждую из них опреде-

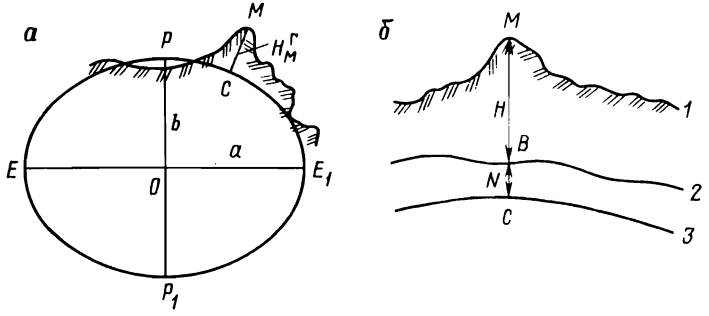


Рис. 5. Геодезическая высота точки (*а*) и ее составляющие (*б*):
1 — физическая поверхность Земли; *2* — квазигеоид (геоид); *3* — эллипсоид

ляют раздельно, используя разную измерительную информацию.

В соответствии с теорией М. С. Молоденского геодезическую высоту H_M^{Γ} любой точки M земной поверхности вычисляют по формуле

$$H_M^{\Gamma} = \zeta_M + H_M^{\gamma}, \tag{1.19}$$

где ζ_M — аномалия высоты; H_M^{γ} — нормальная высота данной точки. Аномалии высот ζ сравнительно малы и, как правило, не превышают 100 м, а нормальные высоты точек в горах могут достигать нескольких километров.

Аномалию высоты ζ_M любой точки M представляют в виде

$$\zeta_M = \frac{T_M}{\gamma_m} + \frac{U_0 - W_0}{\gamma_m}, \tag{1.20}$$

где $T_M = W_M - U_M$ — возмущающий потенциал Земли в точке M; W_M и W_0 — значения потенциала реальной силы тяжести в точке M и на поверхности геоида; U_M и U_0 — значения потенциала нормальной силы тяжести в этих же точках; γ_m — значение нормальной силы тяжести на высоте $H = \frac{1}{2} H_M^{\gamma}$ над эллипсоидом, вычисляемой по формуле (1.18).

Нормальную высоту H_M^{γ} любой точки M можно определить по формуле

$$H_M^{\gamma} = \frac{1}{\gamma_m} \int_0^M g dh; \tag{1.21}$$

она определяется из геометрического нивелирования, сопровождаемого измерениями силы тяжести. В формуле (1.21) γ_m—значение нормальной силы тяжести на высоте $H = \frac{1}{2} H_M^{\gamma}$ над эллипсоидом; g — значения реальной силы тяжести в точках нивелирной линии; dh — элементарные превышения.

Через точку M земной поверхности (рис. 5, *б*) проведем нормаль MC к поверхности земного эллипсоида и обозначим: $N = BC$ — высота квазигеоида над эллипсоидом; $H = MB$ — высота этой точки над квазигеоидом. Для каждой конкретной точки M земной поверхности высота N квазигеоида численно равна аномалии высоты ζ_M, т. е. $N = \zeta_M$, а высота H этой точки над квазигеоидом численно равна нормальной высоте H_M^{γ}, т. е. $H = H_M^{\gamma}$. Поэтому вместо выражения (1.19) с такой же строгостью и точностью можно написать

$$H^{\Gamma} = N + H. \tag{1.22}$$

Формулой (1.22) обычно и пользуются на практике, но значения $N = \zeta_M$ и $H = H_M^{\gamma}$ вычисляют по формулам (1.20) и (1.21),

хотя физический смысл величин ζ и N, а также H_M^ν и H соответственно разный. Строго говоря, при вычислениях в формуле (1.19) нормальные высоты H_M^ν отсчитываются от поверхности эллипсоида, а по формуле (1.22) высоты H отсчитываются от поверхности квазигеоида. Обе эти формулы дают одно и то же значение геодезической высоты H^Γ и являются теоретически строгими.

Для определения высот N квазигеоида (аномалий высот ζ) в континентальной части земного шара выполняют комплекс геодезических, астрономических, гравиметрических, а теперь еще спутниковых и гравиинерциальных измерений.

Из обработки градусных измерений, включая спутниковые определения, установлено, что поверхность геоида (квазигеоида) является достаточно сложной вследствие неоднородностей гравитационного поля Земли. Относительно поверхности земного эллипсоида она имеет крупные (порядка 1000 км и более) и сравнительно небольшие (порядка 100 км и менее) волны широтного и долготного простирания. При этом наибольшие отрицательные высоты геоида наблюдаются в районе Индийского океана (около —105 м) и вблизи Антарктиды (в море Росса до —61 м), а наибольшие положительные высоты в Тихом океане (вблизи Новой Гвинеи до +77 м) и в Северной Атлантике (до +66 м). Установлено также, что фигура Земли имеет грушевидную форму: северное полушарие несколько вытянуто к полюсу, а южное, наоборот, сплюснуто. Экватор Земли имеет эллиптичность с долготой большой полуоси около 15° к западу.

Глава 2

ПОВЕРХНОСТИ ОТНОСИМОСТИ. РЕДУКЦИОННАЯ ЗАДАЧА

§ 5. ПОВЕРХНОСТИ ОТНОСИМОСТИ. РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИД КРАСОВСКОГО

Физическая поверхность Земли имеет очень сложный вид, особенно в горных районах. Уравнение этой поверхности неизвестно, поэтому при математической обработке результатов геодезических измерений используют другую, сравнительно простую в геометрическом отношении вспомогательную поверхность, подбираемую и ориентируемую в теле Земли определенным образом, и редуцируют на нее измеренные на физической поверхности Земли расстояния между пунктами, горизонтальные направления и углы, азимуты земных предметов и т. п. Эту поверхность принято называть поверхностью относимости.

При выборе той или иной поверхности относимости необходимо иметь в виду следующее.

Поверхность относимости должна быть сравнительно простой по форме и хорошо изученной в геометрическом отношении. Это необходимо для того, чтобы можно было сравнительно просто и с требуемой точностью решать на ее поверхности геодезические задачи при любых расстояниях между точками на ней.

Поверхность относимости должна незначительно отличаться от поверхности квазигеоида в пределах территории той страны или группы стран, для которой она подбирается; расхождения по высоте должны быть наименьшими. В этом случае расхождения между непосредственно измеренными величинами (расстояниями, направлениями и т. д.) и их проекциями на поверхности относимости будут малы. Это важно с практической точки зрения и, кроме того, в данном случае исходные аргументы, необходимые для редукции измеренных величин на поверхность относимости, достаточно определять с гораздо меньшей точностью, чем при несоблюдении данного требования.

Поверхность относимости должна быть ориентирована определенным образом в теле Земли, причем так, чтобы можно было осуществлять однозначный переход от измеренных элементов к их проекциям на поверхность относимости и наоборот, от проекций элементов — к их измеренным значениям.

При решении геодезических задач в масштабе всей Земли за поверхность относимости целесообразно принять поверхность общего земного эллипсоида (Нормальной Земли). При решении топографо-геодезических и картографических задач в пределах одной или группы стран каждое государство за поверхность относимости обычно принимает земной эллипсоид, имеющий определенные размеры и ориентировку в теле Земли, называемый референц-эллипсоидом.

Практически во всех странах топографо-геодезические и картографические работы были начаты задолго до того, как были получены надежные значения параметров общего земного эллипсоида. Поэтому для территории каждой страны или группы стран был подобран или определен наиболее подходящий референц-эллипсоид.

Форму, размеры и ориентировку референц-эллипсоида определяют, соблюдая следующие требования:

1) параметры референц-эллипсоида должны возможно меньше отличаться от параметров общего земного эллипсоида;

2) ось вращения референц-эллипсоида должна быть параллельна оси вращения Земли, а плоскость его экватора — плоскости экватора Земли;

3) в пределах территории страны или группы стран, для которой подбирается референц-эллипсоид, сумма квадратов от-

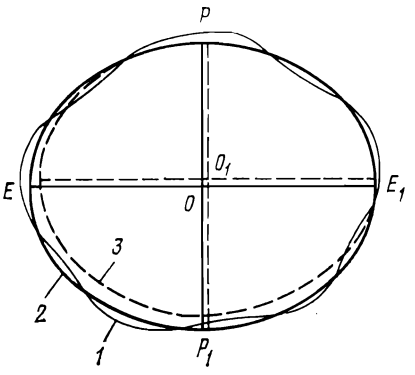


Рис. 6. Поверхности относимости:
1 — геоид; *2* — общий земной эллипсоид; *3* — референц-эллипсоид

клонений поверхности квазигеоида (геоида) от поверхности референц-эллипсоида должна быть наименьшей.

Для стран с небольшой территорией первое требование не является обязательным.

Так как размеры референц-эллипсоида отличаются от размеров общего земного эллипсоида, то его центр O_1 не совпадает с центром O общего земного эллипсоида (рис. 6). В случае, если большая полуось или сжатие референц-эллипсоида определены с большими ошибками, поверхность референц-эллипсоида может существенно отличаться от поверхности общего земного эллипсоида, как например, на участке EP_1E_1, хотя на другом участке PE_1 эти поверхности почти точно совпадают между собой.

В СССР, как отмечалось выше, до 1942 г. при топографо-геодезических и картографических работах применялся референц-эллипсоид Бесселя. В начале тридцатых годов проф. Ф. Н. Красовский, обрабатывая ряды триангуляции 1 класса от Прибалтики до Дальнего Востока, обнаружил, что по мере удаления на восток систематически возрастают величины уклонений отвесных линий. Это указывало на то, что большая полуось эллипсоида Бесселя определена недостаточно точно и поэтому для огромной территории СССР, простирающейся по долготе почти на 150°, эллипсоид Бесселя не подходит.

Используя градусные измерения, выполненные в СССР, странах Западной Европы и США, а также, учитывая данные гравиметрической съемки в СССР, проф. Ф. Н. Красовский при участии проф. А. А. Изотова к 1940 г. вывел новые, самые точные по тому времени параметры земного эллипсоида: $a = 6\,378\,245$ м, $\alpha = 1 : 298{,}3$, которые незначительно отличаются от современных данных.

Земной эллипсоид с этими размерами в 1946 г. был утвержден в качестве референц-эллипсоида для использования его

в топографо-геодезических и картографических работах СССР, а эллипсоиду было присвоено имя Красовского.

Для решения многих практических задач геодезии, картографии и ряда других наук поверхность земного эллипсоида оказывается достаточно сложной, поэтому земной эллипсоид делят на зоны и каждую из них изображают на плоскости в той или иной проекции и затем на плоскости решают разнообразные инженерные задачи. Измеренные в геодезических сетях величины редуцируют с эллипсоида на плоскость. В СССР, начиная с 1932 г., применяется проекция Гаусса — Крюгера.

§ 6. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И АСТРОНОМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ И АЗИМУТЫ

При решении задач высшей геодезии положение любой точки M земной поверхности определяют в системе геодезических координат B, L, $H^г$ (рис. 7) принятого референц-эллипсоида, где B — геодезическая широта; L — геодезическая долгота; $H_M{}^г$ — геодезическая высота точки.

Геодезической широтой точки $M(m)$ (см. рис. 7) называют угол B между плоскостью экватора ECE_1 и нормалью Mn к поверхности эллипсоида, проходящей через эту точку. Геодезические широты отсчитывают от плоскости экватора к северному полюсу со знаком плюс, а к южному полюсу — со знаком минус, причем в обоих случаях от 0 до 90°.

Геодезической долготой точки $M(m)$ называют двугранный угол L между плоскостью PEP_1 начального (Гринвичского) меридиана и плоскостью PmP_1 геодезического меридиана данной точки $M(m)$. Долготы отсчитываются от начального меридиана: в СССР с запада на восток от 0 до 360°, в некоторых странах в обратном направлении.

Геодезическим азимутом A направления mk называют двугранный угол Pmk в точке m между плоскостью геодезического меридиана PmP_1 данной точки и плоскостью nmk, содержащей

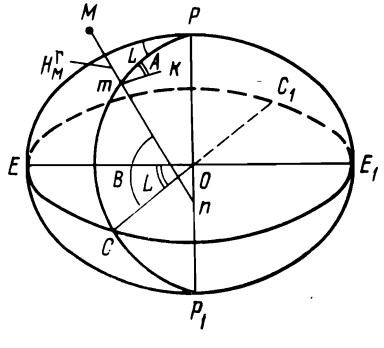


Рис. 7. Геодезические координаты и азимуты

нормаль mn к эллипсоиду и проходящей через точку k. Азимуты отсчитывают от 0 до 360° по ходу часовой стрелки.

Геодезической высотой точки M называют расстояние $H^г = mM$ между поверхностью эллипсоида и данной точкой, отсчитываемое по нормали к нему в этой точке. Точки, находящиеся выше поверхности эллипсоида, имеют положительные высоты, а ниже — отрицательные. Точки, лежащие на поверхности эллипсоида, имеют геодезические высоты, равные нулю ($H^г = 0$). Геодезические координаты непосредственно измерены быть не могут, их получают путем вычисления и суммирования приращений координат относительно исходного пункта государственной геодезической сети, имеющего координаты B_0, L_0, H_0.

На земной поверхности из наблюдений звезд определяют астрономические широты φ, долготы λ и азимуты α.

Астрономической широтой φ точки M называют угол между отвесной линией в данной точке и плоскостью экватора Земли.

Астрономической долготой λ точки M называют двугранный угол между плоскостью начального (Гринвичского) меридиана и плоскостью астрономического меридиана данной точки. Под плоскостью астрономического меридиана точки понимают плоскость, проходящую через отвесную линию в данной точке и располагающуюся параллельно оси вращения Земли. Эта плоскость в общем случае не проходит через полюсы Земли.

Астрономическим азимутом направления Mk называется угол α между плоскостью астрономического меридиана в данной точке M и вертикальной плоскостью, проходящей через точку k.

§ 7. УКЛОНЕНИЯ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ

Геодезические координаты B, L и астрономические координаты φ, λ для одной и той же точки не равны между собой вследствие того, что в каждой точке Земли направление нормали к поверхности эллипсоида и направление отвесной линии не совпадают. Покажем для какой-либо точки M на поверхности Земли отвесную линию Mg и нормаль Mn к поверхности земного эллипсоида (рис. 8). Угол u между нормалью к поверхности эллипсоида и отвесной линией в данной точке называют астрономо-геодезическим уклонением отвесной линии в этой точке (от нормали к эллипсоиду). Различают абсолютные и относительные уклонения отвесных линий.

Под *абсолютным уклонением отвесной линии* в точке M понимают угол u_1 между нормалью Mn_1 к общему земному эллипсоиду и направлением отвесной линии Mg в данной точке M. Величины абсолютных уклонений отвесных линий зависят главным образом от особенностей распределения масс в теле Земли и, в первую очередь, в земной коре. Поэтому определение абсо-

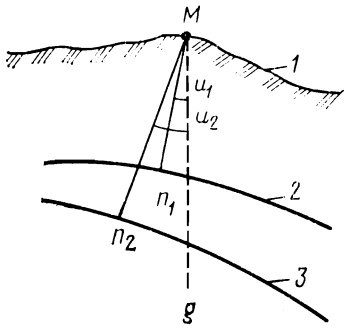
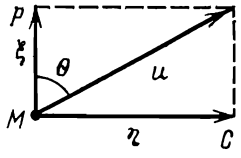


Рис. 8. Абсолютные и относительные уклонения отвесных линий:
1 — физическая поверхность Земли; *2* — общий земной эллипсоид; *3* — референц-эллипсоид

Рис. 9. Составляющие полного уклонения отвесной линии в плоскости меридиана и первого вертикала



лютных уклонений отвесных линий имеет важное значение для изучения внутреннего строения Земли и обнаружения аномальных масс в земной коре.

Относительным уклонением отвесной линии в точке M называется угол u_2 между нормалью Mn_2 к поверхности референц-эллипсоида и отвесной линией Mg в данной точке M. Величины относительных уклонений отвесных линий обусловлены особенностями распределения масс в теле Земли, погрешностями размеров принятого референц-эллипсоида, погрешностями ориентирования референц-эллипсоида в теле Земли. В общем случае относительные уклонения отвесных линий по величине больше абсолютных.

При решении геодезических задач величину полного уклонения отвесной линии u (рис. 9) в каждой данной точке M представляют в виде двух составляющих: ξ — в плоскости меридиана MP данной точки и η — в плоскости MC первого вертикала, перпендикулярной к плоскости меридиана. При известных значениях ξ и η полное уклонение отвесной линии вычисляют по формуле

$$u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \qquad (2.1)$$

Азимут θ плоскости, в которой лежит полное уклонение отвесной линии, находят следующим образом

$$\operatorname{tg}\theta = \eta/\xi. \qquad (2.2)$$

Составляющие ξ и η уклонения отвесной линии в какой-либо точке M, лежащей на поверхности Земли или земного эллипсоида можно определить, если для этой точки известны одновременно и геодезические B, L и астрономические φ, λ координаты. Пусть точка M лежит на поверхности референц-эллипсоида (рис. 10). Обозначим Mn нормаль к эллипсоиду, а Mg —

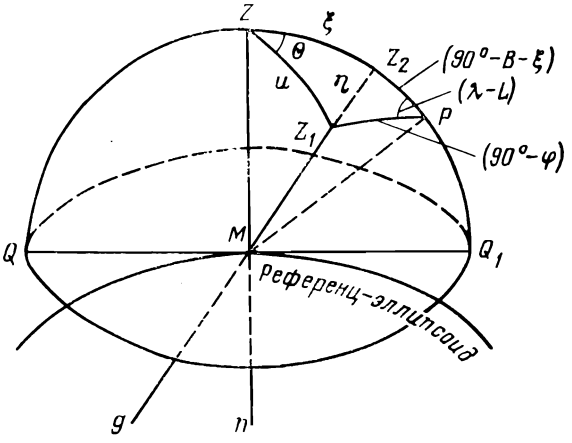


Рис. 10. Взаимосвязь геодезических и астрономических координат и азимутов

отвесную линию в этой точке. Построим вспомогательную сферу единичного радиуса с центром в точке M. Продолжим нормаль Mn до пересечения с вспомогательной сферой в точке Z — геодезическом зените точки M. Отвесную линию Mg продолжим до пересечения со сферой в точке Z_1 — астрономическом зените точки M. Через точку M проведем линию, параллельную оси вращения Земли, точку пересечения ее со сферой обозначим P (полюс Мира); точку Z_1 соединим дугами большого круга с точками Z и P. В треугольнике ZPZ_1 дуга PZ_1 равна астрономическому полярному расстоянию точки M, т. е. $PZ_1 = 90° - \varphi$; дуга PZ представляет собой геодезическое полярное расстояние точки M, т. е. $PZ = 90° - B$; сторона ZZ_1 — полное уклонение отвесной линии в точке M, т. е. $ZZ_1 = u$. Угол θ равен геодезическому азимуту плоскости MZZ_1, в которой лежит полное уклонение отвесной линии. Спроектируем полное уклонение отвесной линии u на плоскость геодезического меридиана MZP точки M и на плоскость первого вертикала MZ_1Z_2. Дуги $\xi = ZZ_2$ и $\eta = Z_1Z_2$ являются составляющими полного уклонения отвесной линии в меридиане и первом вертикале точки M. Дуга $Z_1P = 90° - \varphi$, где φ — астрономическая широта точки M, а дуга $Z_2P = 90° - B - \xi$; угол Z_2PZ_1 при полюсе мира P равен разности астрономической и геодезической долготы точки M, т. е. $\angle Z_2PZ_1 = \lambda - L$.

Решив сферический треугольник Z_1Z_2P, напишем

$$\cos(\lambda - L) = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{ctg}(B + \xi); \quad \sin\eta = \sin(\lambda - L)\cos\varphi.$$

Разложив тригонометрические функции от η и $\lambda - L$ в ряды и ограничиваясь первыми членами разложения, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(B + \xi); \quad \eta = (\lambda - L)\cos\varphi. \tag{2.3}$$

Отсюда, заменив с достаточной точностью $\cos\varphi$ на $\cos B$, окончательно найдем

$$\xi = \varphi - B; \quad \eta = (\lambda - L)\cos B. \tag{2.4}$$

В том случае, когда составляющие уклонений отвесных линий определяют из обработки только гравиметрических измерений, их называют гравиметрическими и обозначают $\xi_{гр}$, $\eta_{гр}$. Связь между астрономо-геодезическими уклонениями отвеса (2.4), которые обозначим через $\xi_{аг}$, $\eta_{аг}$ и гравиметрическими уклонениями отвеса устанавливается формулами [18]:

$$\xi_{аг} = \xi_{гр} + 0{,}171H \sin 2B = \varphi - B; \quad \eta_{аг} = \eta_{гр} = (\lambda - L)\cos B, \tag{2.5}$$

где H — высота точки над эллипсоидом, км.

Следует отметить, что астрономо-геодезические уклонения отвесных линий вычисляются в системе принятого референц-эллипсоида, а гравиметрические уклонения — в системе уровенного эллипсоида. Поэтому значения тех и других уклонений отвесных линий для одних и тех же точек земной поверхности не равны между собой.

Наибольшие отклонения поверхности геоида (квазигеоида) от поверхности общего земного эллипсоида не превышают 120 м, т. е. они сравнительно малы, поэтому сравнительно малы и абсолютные уклонения отвесных линий. В равнинной местности уклонения отвесных линий составляют в среднем 3—5″; иногда они достигают 10—15″, как например, в районе Московской гравитационной аттракции; в горных районах, например, в горах Кавказа, в районе озера Байкал уклонения отвесных линий значительно больше и достигают нередко 30″. Самые большие уклонения отвесных линий на земном шаре обнаружены в районе Гавайских островов ($\approx 97''$).

Относительные уклонения отвесных линий несколько больше абсолютных вследствие дополнительного влияния на последние ошибок определения параметров референц-эллипсоида и погрешностей ориентирования его в теле Земли.

Уклонения отвесных линий на пунктах государственной геодезической сети необходимо знать для решения многих задач высшей геодезии, в том числе таких как:

определение формы и размеров земного эллипсоида из градусных измерений, выполняемых методом триангуляции;

определение высот квазигеоида и высот земной поверхности относительно поверхности принятого референц-эллипсоида;

установление связей между различными системами координат: астрономическими, геодезическими, прямоугольными геоцентрическими и другими, применяемыми в геодезии, картографии, астрономии, космонавтике и ряде других наук;

математически строгое редуцирование измеренных линий (базисов), азимутов, горизонтальных направлений и т. п. с фи-

зической поверхности Земли на поверхность референц-эллипсоида, а следовательно, корректное выполнение обработки измерений в геодезических сетях, а также математически строгое решение разнообразных задач на поверхности эллипсоида и в пространстве;

повышение точности тригонометрического нивелирования, особенно в горных районах и т. п.

§ 8. АЗИМУТЫ ЛАПЛАСА

В том случае, когда на пункте триангуляции с известными геодезическими координатами B и L определены из наблюдений звезд астрономические координаты φ и λ, а также астрономический азимут α направления на земной предмет, можно вычислить по формулам (2.4) составляющие уклонений отвесных линий на пункте ξ и η. Геодезический азимут A данного направления определяют по формуле

$$A = \alpha - (\lambda - L)\sin\varphi + (\eta\cos A - \xi\sin A)\operatorname{ctg} z, \qquad (2.6)$$

где z — зенитное расстояние наблюдаемой цели (предмета).

В равнинной местности при $z = 89°30' \div 90°30'$, как это имеет место при длинах сторон триангуляции 10—30 км, $\operatorname{ctg} z \leqslant 0{,}01$ и поэтому величина третьего члена в формуле (2.6) обычно не превосходит 0,02—0,03″. Следовательно, третьим членом в данном случае можно пренебречь. Тогда формула (2.6) примет вид

$$A = \alpha - (\lambda - L)\sin\varphi. \qquad (2.7)$$

Геодезический азимут, вычисленный по формуле (2.7), называют азимутом Лапласа. Второй член в этой формуле является следствием несовпадения на данном пункте плоскостей астрономического и геодезического меридианов.

В формуле (2.6) третий член можно рассматривать как поправку в азимут Лапласа за уклонение вертикальной оси теодолита от нормали к поверхности принятого референц-эллипсоида в точке стояния теодолита. Эту поправку следует вносить во все измеряемые горизонтальные направления на пунктах геодезической сети.

Покажем, что азимуты Лапласа, полученные на разных пунктах триангуляции, можно считать практически независимыми друг от друга. Из формулы (2.7) следует, что ошибка m_A азимута Лапласа зависит от ошибок определения астрономического азимута m_α, астрономической m_λ и геодезической m_L долготы пункта; ошибкой m_φ можно пренебречь. Случайные ошибки определений азимута α и долготы λ на пунктах Лапласа следующие: $m_\alpha \leqslant 0{,}5''$, $m_\lambda \leqslant 0{,}03^s \leqslant 0{,}45''$. Продольный сдвиг звена триангуляции 1 класса длиной 200 км, проложенного вдоль

параллели на средних широтах, равен в среднем 0,7 м. Это дает ошибку в геодезической долготе $m_L = 0{,}04''$. Таким образом, можно сделать вывод о том, что ошибки в геодезической долготе в десять раз меньше ошибок m_α и m_λ астрономических определений. Поэтому ошибкой m_L можно пренебречь и в соответствии с выражением (2.7) записать

$$m_A = \sqrt{m_\alpha^2 + m_\lambda^2 \sin^2 \varphi}. \qquad (2.8)$$

При случайных ошибках $m_\alpha = 0{,}5''$ и $m_\lambda = 0{,}45''$ получим для средних широт $\varphi = 45°$ случайную ошибку геодезического азимута $m_A = 0{,}6''$. Кроме случайных ошибок результаты измерений содержат систематические ошибки. Реальная точность определения азимутов Лапласа характеризуется средней квадратической ошибкой $\approx 1{,}0''$.

§ 9. ПОНЯТИЕ О РЕДУКЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

Под редукционной задачей высшей геодезии принято понимать комплекс проблем, связанных с разработкой математически строгого метода редуцирования измеренных величин с физической поверхности Земли на поверхность принятого референц-эллипсоида и необходимых для этого методов определения уклонений отвесных линий, а также геодезических высот пунктов над эллипсоидом.

В каждой стране принятый референц-эллипсоид должен быть ориентирован относительно оси вращения Земли и однозначно «закреплен» в теле Земли при помощи так называемых исходных геодезических дат, за которые принимают геодезические координаты B_0, L_0, H_0 исходного пункта астрономо-геодезической сети. Исходные геодезические даты определяют, используя измерительную информацию всей астрономо-геодезической сети. Методы их определения рассматриваются в курсе теоретической геодезии [21].

Все измеренные в геодезической сети величины: горизонтальные направления, длины и азимуты сторон и т. п. редуцируют на поверхность референц-эллипсоида, применяя предложенный в 1934 г. Ф. Н. Красовским теоретически строгий метод проектирования. Проектирование измеренных величин осуществляется по нормалям к поверхности эллипсоида. Измеренные же величины (направления, азимуты и т. п.) связаны с отвесными линиями. Поэтому для редукции измеренных элементов на эллипсоид необходимо знать уклонения отвесных линий на пунктах геодезической сети, а также высоты пунктов над эллипсоидом.

При решении редукционной задачи необходимо соблюдать следующие основные требования:

редукционные поправки должны определяться с такой точностью, чтобы их ошибки были пренебрегаемо малы по сравнению с ошибками измерений редуцируемых величин. Другими словами, ошибки определения редукционных поправок и их влияние должны быть в пять—десять раз меньше ошибок самих измерений;

формулы, используемые для вычисления редукционных поправок, должны быть получены с такой точностью, чтобы их погрешности не оказывали влияния на результаты вычисления редукций;

аргументы, необходимые для вычисления соответствующих редукций: астрономо-геодезические уклонения отвесных линий $\xi_{аг}$, $\eta_{аг}$, геодезические высоты пунктов над эллипсоидом $H^{г}$, аномалии ускорений силы тяжести g—γ, т. е. разности между реальной и нормальной силой тяжести, должны быть получены с достаточной точностью, причем не на основе каких-либо гипотетических данных, а по результатам конкретных измерений.

Уклонения отвесных линий при работах в горных районах должны быть известны для всех пунктов 1—3 классов. В астрономо-геодезической сети определяют астрономические широты φ и долготы λ на отдельных пунктах в среднем через 70—100 км. Вычислив для этих пунктов геодезические широты B и долготы L, определяют по формулам (2.4) искомые уклонения отвесных линий. Для промежуточных пунктов их определяют путем косвенного интерполирования полученных уклонений с учетом нелинейности их изменений между пунктами. Для этого выполняют гравиметрическую съемку местности по определенной программе и для всех пунктов вычисляют сначала гравиметрические уклонения отвесных линий $\xi_{гр}$, $\eta_{гр}$, а затем с учетом их находят искомые уклонения $\xi_{аг}$, $\eta_{аг}$ [18]. Зная астрономо-геодезические уклонения отвесных линий $\xi_{аг}$, $\eta_{аг}$ и расстояния между пунктами, определяют превышения квазигеоида и его высоты N над эллипсоидом (аномалии высот ζ). Определив в результате нивелирования нормальные высоты пунктов H_{γ}, вычисляют их геодезические высоты по формуле (1.19).

Идея метода косвенного интерполирования астрономо-геодезических уклонений отвесных линий с использованием данных гравиметрической съемки и последующего вычисления превышений геоида предложена Ф. Н. Красовским в 1934 г. Этот метод был назван методом астрономо-гравиметрического нивелирования. Позднее он был развит в работах М. С. Молоденского применительно к предложенной им теории изучения фигуры и гравитационного поля Земли.

Астрономо-гравиметрический метод определения уклонений отвесных линий и превышений квазигеоида требует выполнения в большом объеме геодезических, астрономических и гравимет-

рических измерений. А следовательно, для его реализации необходимы и значительные затраты труда, средств и времени, которые особенно велики при работах в горах. В настоящее время в связи с бурным развитием науки и техники разрабатываются и постепенно внедряются высокоточные геодезические гравиинерциальные системы, позволяющие непосредственно, в кратчайшие сроки и с высокой точностью порядка 0,1″ измерять приращения астрономо-геодезических уклонений отвесных линий при переходе от одного пункта к другому, в том числе и в горных условиях. Измерив приращения астрономо-геодезических уклонений отвесных линий и зная расстояния между пунктами, можно вычислить превышения квазигеоида (геоида) между ними с достаточно высокой точностью. Данный метод изучения поверхности квазигеоида (геоида) целесообразно назвать *методом гравиинерциального нивелирования*. Этот метод может стать наиболее эффективным и точным методом изучения поверхности квазигеоида (геоида) особенно в континентальной части земного шара, где метод спутниковой альтиметрии не пригоден.

Определив на пунктах геодезической сети уклонения отвесных линий, а также геодезические высоты пунктов, вычисляют поправки в измеренные расстояния, горизонтальные направления, азимуты и т. п. за редукцию их к поверхности референц-эллипсоида по формулам, приведенным в учебнике [21]. Затем измеренные величины редуцируют с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса—Крюгера по формулам сфероидической геодезии.

РАЗДЕЛ II

Опорные геодезические сети

Глава 3

ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ СССР

§ 10. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СЕТИ. ИХ НАЗНАЧЕНИЕ

Геодезической сетью называют систему закрепленных на местности точек земной поверхности, положение которых определено в общей для них системе координат и высот.

Геодезические сети могут создаваться как на малых, так и на огромных площадях земной поверхности. По территориальному признаку их можно подразделить на глобальную (общеземную) геодезическую сеть, покрывающую весь земной шар; национальные (государственные) геодезические сети, создаваемые в пределах территории каждой отдельной страны в единой системе координат и высот, принятой в данной стране; сети сгущения, предназначенные для создания съемочного обоснования топографических съемок; местные геодезические сети, т. е. сети на локальных участках, используемые для решения различных задач в местной системе координат.

По геометрической сущности различают плановые, высотные и пространственные геодезические сети. В плановой сети в результате обработки измерений вычисляют координаты пунктов на принятой поверхности относимости (на поверхности эллипсоида или на плоскости); в высотной (нивелирной) сети получают высоты пунктов относительно отсчетной поверхности, например, поверхности квазигеоида; в пространственных сетях из обработки измерений определяют взаимное положение пунктов в трехмерном пространстве.

Глобальная геодезическая сеть создается в настоящее время методами космической геодезии с использованием наблюдений ИСЗ, поэтому ее часто называют спутниковой или космической геодезической сетью. Положение пунктов в этой сети вычисляют в геоцентрической системе прямоугольных координат XYZ, начало которой совмещено с центром масс Земли, ось Z — с осью вращения ее, а плоскость ZY — с плоскостью начального меридиана. Глобальную геодезическую сеть

используют для решения научных и научно-технических проблем и задач высшей геодезии, геодинамики, астрономии и других наук. К числу таких проблем и задач относятся, например, следующие:

уточнение фундаментальных геодезических постоянных;

изучение фигуры и гравитационного поля Земли;

определение движений полюсов Земли;

задание единой для всей Земли системы геоцентрических пространственных прямоугольных или геодезических координат;

определение положения референц-эллипсоидов разных стран относительно центра масс Земли;

изучение перемещений и деформаций литосферных плит земной коры;

изучение закономерностей изменения во времени координат пунктов общеземной геодезической сети вследствие динамики земной поверхности и приведение их мгновенных значений к определенной эпохе, например, к эпохе 2000 г. [1].

Глобальная геодезическая сеть должна непрерывно совершенствоваться для достижения наивысшей точности определения «мгновенного» положения ее пунктов в геоцентрической системе координат. По мере повышения точности глобальной геодезической сети будут постепенно расширяться возможности решения новых научных проблем и задач геодезии, прикладной космонавтики, геодинамики, астрономии и многих других наук.

Национальные геодезические сети подразделяются, как отмечалось выше, на три вида: государственную геодезическую сеть (плановую), государственную нивелирную сеть (высотную), государственную гравиметрическую сеть.

Государственная геодезическая сеть предусматривает определение с наивысшей точностью взаимного положения геодезических пунктов в плановом отношении на избранной поверхности относимости (на референц-эллипсоиде или плоскости); высоты пунктов сети определяются с гораздо более низкой точностью, особенно в горных районах.

Государственная нивелирная сеть служит для определения с наивысшей точностью высоты каждого пункта относительно поверхности квазигеоида; плановое положение пунктов этой сети на поверхности относимости определяется приближенно.

Государственная гравиметрическая сеть предназначена для определения с наивысшей точностью ускорений силы тяжести на пунктах; положение пунктов этой сети в плановом и высотном отношении должно быть определено с требуемой точностью.

Государственные геодезические сети, создаваемые на территории каждой отдельной страны, предназначаются для следующих целей:

детального изучения фигуры и гравитационного поля Земли, их изменений во времени (в пределах территории страны);

распространения единой системы координат и высот на всей территории страны;

картографирования территории страны в разных масштабах в единой системе координат и высот;

решения геодезическими методами разного рода научных и инженерно-технических задач народнохозяйственного значения.

В силу специфических средств и методов построения геодезических сетей разного вида пункты плановой геодезической сети обычно располагают на наиболее высоких участках местности; пункты нивелирной сети — на равнинных и холмистых участках местности, в долинах рек и т. п.

Государственные геодезические сети всех трех видов строятся раздельно, но они тесно взаимосвязаны между собой и дополняют одна другую. Отдельные пункты могут быть общими для всех трех видов сетей, что позволяет более эффективно решать многие задачи геодезии, геодинамики и т. п.

В связи с тем, что государственные геодезические сети имеют важное научное и народнохозяйственное значение, они должны быть надежно закреплены на местности, рассчитаны на длительный срок службы, а по точности должны удовлетворять требованиям науки, задачам народного хозяйства страны, причем не только ближайшего, но и сравнительно отдаленного будущего.

История развития геодезии показывает, что с течением времени требования к точности построения государственных геодезических сетей непрерывно возрастают. Вместе с тем, сама по себе государственная геодезическая сеть, если ее систематически не обновлять и не совершенствовать, постепенно стареет, утрачивается часть пунктов, теряется точность в отдельных ее частях, особенно из-за современных движений земной коры.

Для того чтобы государственные геодезические сети страны всегда находились на уровне современных требований, а также требований ближайшего будущего, необходимо:

систематически проводить полевое обследование (осмотр) всех пунктов сети, восстанавливать или заново определять утраченные пункты;

периодически, например, через 25—30 лет выполнять повторные или дополнительные измерения в значительной или, во всяком случае, в той части сети, которая наиболее сильно подвержена деформациям из-за современных движений земной поверхности или вследствие других причин;

повторные или дополнительные измерения, проводимые для дальнейшего совершенствования и повышения точности государственной геодезической сети, необходимо осуществлять на

базе новейших достижений в области высокоточной измерительной техники и методов измерений;

по мере накопления новой измерительной информации в результате повторных или дополнительных измерений на значительной части территории необходимо примерно через 25—30 лет заново выполнять повторное уравнивание сети как плановой, так и высотной, с целью получения новых, более точных значений координат и высот, относящихся к данной эпохе наблюдений.

При создании современных государственных геодезических сетей выполняют комплекс основных геодезических работ, которые включают в себя: проектирование геодезических сетей, рекогносцировку пунктов, постройку геодезических знаков, закладку подземных центров и реперов; выполнение угловых и линейных измерений; определение астрономических широт, долгот и азимутов; производство нивелирных работ; измерение ускорений силы тяжести, наблюдений ИСЗ и т. п. и, наконец, математическую обработку результатов измерений.

В последние годы достигнуты значительные успехи в деле повышения точности определения координат пунктов по результатам наблюдений ИСЗ. В связи с этим наблюдения ИСЗ начинают все шире использоваться при создании государственных геодезических сетей высокой точности.

Для того чтобы государственные геодезические сети могли служить интересам науки и народного хозяйства страны в течение длительного времени, их необходимо строить на строго научной основе, причем с наивысшей точностью, достигаемой в массовых измерениях при использовании новейших методов и высокоточной измерительной техники.

Местные геодезические сети. В ряде случаев на локальных участках местности необходимо решать сложные научные и инженерно-технические задачи, требующие определения взаимного положения точек в плане и по высоте с наивысшей точностью на каждый момент времени. В этих случаях создают специальные геодезические сети предельно высокой точности и выполняют в них прецизионные измерения повторно через определенные интервалы времени. Математическую обработку измерений в таких сетях выполняют в местной системе координат, подбираемой таким образом, чтобы редукционные поправки за переход от измеренных величин к их проекциям на местную поверхность относимости были как можно меньше. Такие сети используют, например, в сейсмоактивных районах для поиска предвестников и последующего прогноза крупных землетрясений, при строительстве и эксплуатации мощных радиотелескопов, ускорителей элементарных частиц, гидростанций и т. д.

§ 11. ОСНОВНОЙ ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

При создании государственной геодезической сети неизбежно возникают три основных вопроса, имеющие принципиальное значение: выбор схемы построения государственной геодезической сети на всей территории страны; установление плотности геодезических пунктов, а также точности определения взаимного положения смежных пунктов в сети. Каждый из этих вопросов необходимо рассматривать совместно, причем с двух точек зрения: с точки зрения решения основных научных задач геодезии, а также задач картографирования территории страны. Это связано с тем, что при решении этих задач предъявляются разные требования к опорной геодезической сети. Поэтому необходимо найти в определенном смысле оптимальный вариант построения сети, позволяющий на должном научном уровне и с требуемой точностью решать задачи обеих групп.

Используя методы космической геодезии, получают достаточно обобщенные, т. е. сглаженные характеристики фигуры и гравитационного поля всей Земли в целом. Более детально фигуру Земли в пределах территории одной страны или группы стран изучают путем создания астрономо-геодезических сетей, в которых выполняют комплекс геодезических, астрономических и гравиметрических измерений. До недавнего времени в странах с большой территорией астрономо-геодезические сети строились в виде рядов триангуляции, прокладываемых по направлениям меридианов и параллелей и образующих замкнутые полигоны. В результате совместной математической обработки всех видов измерений, выполняемых в астрономо-геодезической сети, получают высоты квазигеоида и его профили вдоль рядов триангуляции 1 класса. При этом внутри каждого полигона форма поверхности квазигеоида остается неизученной. Для устранения этого недостатка необходимо создавать на территории страны не полигональную, а сплошную астрономо-геодезическую сеть с более или менее равномерным распределением пунктов по всей территории.

Для геодезического обеспечения топографических съемок, выполняемых в целях картографирования всей территории страны, необходимо на ее поверхности построить сплошную опорную геодезическую сеть. При этом расстояния между соседними пунктами должны быть гораздо меньше, чем в астрономо-геодезической сети, особенно при крупномасштабном картографировании.

Таким образом, для решения как научных, так и практических задач геодезии и картографии необходимо иметь на территории страны сплошную государственную геодезическую сеть с выделенной в ней астрономо-геодезической сетью как

главной и наиболее точной, используемой для решения как практических, так и научных задач геодезии, в том числе, связанных с детальным изучением фигуры и гравитационного поля Земли в пределах территории одной или группы стран.

В высшей геодезии сложился и хорошо оформился определенный принцип или схема построения государственной геодезической сети, предназначенной для решения как научных, так и инженерно-технических задач народнохозяйственного значения. Государственную геодезическую сеть создают поэтапно, постадийно, соблюдая принцип перехода от общего к частному. Сначала строят главную, т. е. астрономо-геодезическую сеть, состоящую из крупных геодезических построений в виде либо замкнутых полигонов, либо сравнительно больших треугольников. Измерения в астрономо-геодезической сети выполняют с наивысшей возможной точностью. Затем данную сеть принимают за исходную и на ее основе строят геодезическую сеть второго порядка с более детальными геометрическими построениями и с меньшей относительной точностью измерений, однако, с сохранением величины абсолютной ошибки определения взаимного положения смежных пунктов, как и в сети первого порядка. При этом имеются в виду среднестатистические значения ошибок. Далее сеть второго порядка принимают за исходную и на ее основе создают сеть третьего порядка с еще большей детализацией геометрических построений при меньшей относительной точности измерений, но, как и ранее, с той же абсолютной ошибкой определения взаимного положения смежных пунктов. Так поступают до тех пор, пока не будет построена геодезическая сеть с требуемой плотностью пунктов.

Таким образом, при соблюдении принципа перехода от общего к частному государственную геодезическую сеть неизбежно подразделяют на геодезические сети разных классов 1, 2, 3... Число классов рекомендуется свести к минимуму для уменьшения влияния ошибок исходных данных на уравненные элементы сети низшего класса.

§ 12. ПЛОТНОСТЬ ПУНКТОВ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

При рассмотрении вопроса о необходимой плотности пунктов в государственной геодезической сети следует иметь в виду одну из основных научных проблем геодезии, связанную с детальным изучением фигуры Земли, а именно, задачу детального изучения поверхности квазигеоида в пределах всей территории страны. Выше уже отмечалось, что в результате построения полигональной астрономо-геодезической сети в виде рядов триангуляции остается неизученной поверхность квазигеоида находящаяся внутри каждого отдельного полигона. Эти

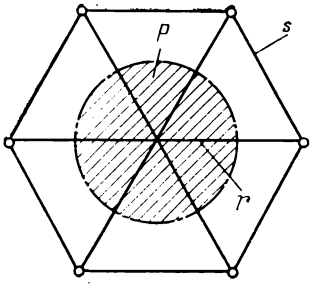


Рис. 11. Площадь, обслуживаемая одним геодезическим пунктом

Таблица 2

Масштаб топографической съемки	Площадь съемочной трапеции, км²	Площадь P на один пункт, км²	Расстояние s между пунктами, км
1 : 25 000	75	50—60	7—8
1 : 10 000	18	50—60	7—8
1 : 5 000	4,5	20—30	4—5
1 : 2 000	1,1	5—15	2—4

«белые» пятна могут быть ликвидированы в результате построения сплошной астрономо-геодезической сети на всей территории страны. Чем детальнее надо изучить поверхность квазигеоида, тем больше должна быть плотность пунктов астрономо-геодезической сети. В горной местности плотность пунктов должна быть несравненно выше, чем в равнинной местности, так как в горных районах поверхность квазигеоида гораздо сложнее чем в равнинных. В целях изучения поверхности квазигеоида определяют на многих пунктах астрономо-геодезической сети астрономические широты и долготы, а также ведут гравиметрическую съемку территории по определенной программе. В равнинной и слегка холмистой местности астрономические пункты размещают в среднем через каждые 70—100 км. Между этими пунктами поверхность квазигеоида изучают, применяя метод астрономо-гравиметрического нивелирования [21].

В горных районах вследствие сложного строения гравитационного поля Земли и, следовательно, сложной формы квазигеоида в принципе следовало бы на каждом пункте астрономо-геодезической сети определить астрономо-геодезические уклонения отвесных линий с ошибками порядка 1″.

Требуемая плотность геодезических пунктов при общегосударственном картографировании территории страны зависит от масштаба топографической съемки, методов ее выполнения, а также от методов создания съемочного геодезического обоснования.

Установим зависимость расстояний s между пунктами геодезической сети от площади P, обслуживаемой одним пунктом при топографических съемках местности [8]. Допустим, что геодезическая сеть (рис. 11) состоит из равносторонних треугольников с длинами сторон s. Вокруг каждого пункта опишем окружность радиусом $r=s/2$ и вычислим площадь P круга по формуле

$$P=\pi r^2=\frac{\pi}{4}s^2, \tag{3.1}$$

откуда

$$s = \frac{2}{\pi}\sqrt{P} = 1{,}13\sqrt{P} \approx \sqrt{P}\,. \qquad (3.2)$$

По формуле (3.2) вычислим длины сторон треугольников триангуляции в случае топографических съемок разных масштабов (табл. 2).

Создавая государственную геодезическую сеть в соответствии с принципом перехода от общего к частному, необходимо соблюдать определенные соотношения между средними значениями длин сторон треугольников при переходе от одного класса триангуляции к другому. Сделаем необходимые расчеты.

Допустим, что геодезическая сеть 1 класса состоит из равносторонних треугольников с длинами сторон s. Сеть 2 класса построим путем вставки пунктов в центр каждого треугольника 1 класса. Соединив соседние пункты 2 класса, а также пункты 2 и 1 классов прямыми линиями, в итоге получим сеть треугольников триангуляции 2 класса с длинами сторон s_2. Далее в каждый треугольник 2 класса аналогичным образом вставим по одному пункту и таким образом получим сеть триангуляции 3 класса, состоящую из равносторонних треугольников с длинами сторон s_3. Точно таким же образом построим сеть триангуляции 4 класса с длинами сторон треугольников s_4.

Нетрудно показать, что при таком постадийном построении геодезической сети должны соблюдаться следующие приближенные соотношения между длинами сторон треугольников разных классов

$$\begin{aligned} &s_1 = s_1;\quad s_2 = s_1/\sqrt{3} = 0{,}58s_1;\\ &s_3 = s_2/\sqrt{3} = 0{,}33s_1;\quad s_4 = s_3/\sqrt{3} = 0{,}19s_1. \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Если за исходную принять длину стороны в триангуляции 1 класса, равную в среднем $s_1 = 23$ км, то по формулам (3.3) получим следующие длины сторон треугольников в сетях триангуляции 2—4 классов (табл. 3).

Таблица 3

Класс триангуляции	Длина s стороны треугольника, км	Площадь P на один пункт, км^2	Число пунктов n на площади 200×200 км
2	13,3	138,9	290
3	7,6	45,4	590
4	4,4	15,2	1750
		Всего	2630

В реальных сетях триангуляции треугольники несколько отступают от равносторонней формы. Однако в среднем для обширной по размерам геодезической сети соотношения (3.3) длин сторон треугольников должны более или менее точно соблюдаться, в противном случае общее число пунктов в сети может оказаться неоправданно завышенным.

При соблюдении соотношений (3.3) среднее число пунктов разных классов на любой площади P картографируемой территории можно рассчитать по формулам

$$n_1 = P/P_{0\,(1)}; \quad n_2 = P/P_{0\,(2)} - n_1;$$
$$n_3 = P/P_{0\,(3)} - n_1 - n_2; \quad n_4 = P/P_{0\,(4)} - n_1 - n_2 - n_3, \tag{3.4}$$

где $P_{0(i)} = s_i^2\pi/4$ — площадь, обслуживаемая одним пунктом i-го класса ($i=1, 2, 3, 4$). Результаты вычислений следует округлять до целого десятка. В качестве примера по этим формулам определим число пунктов 2—4 классов на площади $P = 200 \times 200$ км при $n_1 = 0$ (см. табл. 3).

§ 13. НЕОБХОДИМАЯ ТОЧНОСТЬ ПОСТРОЕНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

Как уже отмечалось выше, для решения научных проблем и задач геодезии, связанных с детальным изучением фигуры Земли, ее гравитационного поля и их изменений во времени, основную, т. е. астрономо-геодезическую сеть страны, следует создавать с наивысшей при массовых измерениях точностью и систематически совершенствовать.

При общегосударственном картографировании территории страны требования к точности построения государственной геодезической сети всех классов также достаточно высоки, особенно при топографических съемках крупных масштабов. Поскольку территория нашей страны велика, то ее картографирование ведут поэтапно в масштабах: 1 : 100 000—1 : 50 000; 1 : 25 000 — 1 : 10 000; 1 : 5 000 — 1 : 2 000.

В отдельных достаточно крупных регионах, перспективных в народнохозяйственном отношении, выполняют топографическую съемку не только данного этапа картографирования, но и последующего.

В 50-х годах было полностью завершено картографирование всей территории СССР в масштабе 1 : 100 000, а в 80-х годах — в масштабе 1 : 25 000. В настоящее время в больших объемах ведутся работы по картографированию территории в масштабе 1 : 10 000. Одновременно с этим обширные районы покрываются топографическими съемками в масштабах 1 : 5 000 и 1 : 2 000.

Для того чтобы обеспечить картографирование территории страны одновременно в масштабах, соответствующих всем трем стадиям, государственная геодезическая сеть по точности

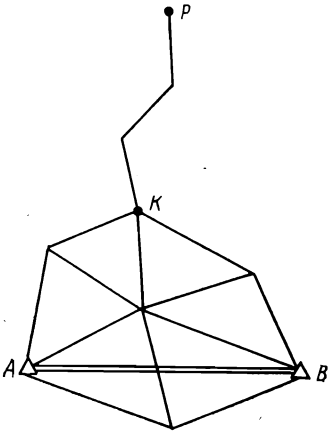


Рис. 12. Схема расположения опознака P и пунктов A, B опорной геодезической сети

Таблица 4

Показатель	1:25 000	1:10000	1:5000	1:2000	1:1000
Графическая точность карты, м	5,0	2,0	1,0	0,4	0,2
Допустимая ошибка в длине стороны между смежными пунктами m_s, м	1,25	0,50	0,25	0,10	0,05

должна рассчитываться на проведение топографической съемки наиболее крупного масштаба государственного картографирования всей территории, т. е. 1 : 2 000.

При создании топографических карт непосредственной геодезической основой для составления фотопланов служат опознаки, положение (координаты) которых должно быть определено относительно ближайших пунктов, например A, B, государственной геодезической сети путем построения на местности сетей сгущения ABK и проложения съемочных ходов KP (рис. 12).

При расчете необходимой точности определения длин сторон s между смежными пунктами A и B государственной геодезической сети необходимо, чтобы совместное влияние ошибки m_P определения координат опознака P и ошибки $m_н$ нанесения его на фотоплан не выходило за пределы графической точности фотоплана, характеризуемой средней квадратической ошибкой $m \leqslant 0{,}2$ мм на плане. Соблюдая принцип равных влияний, напишем

$$m_P = m_н \leqslant \frac{m}{\sqrt{2}}. \qquad (3.5)$$

Координаты точки K как исходной при проложении съемочного хода KP должны быть определены с ошибкой m_K не более $m_P/2$, а координаты пункта A опорной сети как исходного при определении координат точки K с ошибкой m_A не более $m_K/2$. Другими словами, чтобы ошибка m_P определения коор-

динат опознака P не превысила величины (3.5), необходимо соблюдение следующих условий:

$$m_A \leqslant m_K/2 \text{ и } m_K \leqslant m_P/2. \tag{3.6}$$

С учетом выражений (3.5) и (3.6), принимая $m_A = m_B$, найдем допустимую величину средней квадратической ошибки m_s определения длин сторон $s = AB$ между смежными пунктами государственной геодезической сети:

$$m_s = m_{AB} = m_A\sqrt{2} \leqslant 0{,}25mM, \tag{3.7}$$

где m — графическая точность фотоплана или карты; M — знаменатель масштаба топографической карты. Формула (3.7) приближенная, но дает достаточно точные результаты, подтверждаемые практикой.

Приняв $m = 0{,}2$ мм на карте, вычислим по формуле (3.7) допустимые ошибки m_s определения длин сторон s между смежными пунктами государственной геодезической сети при топографических съемках разных масштабов (табл. 4).

§ 14. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ СОЗДАНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

Согласно Инструкции [8] основными методами построения государственной геодезической сети являются триангуляция, полигонометрия и трилатерация. Выбор того или иного метода в каждом конкретном случае определяется требуемой точностью построения сети и экономической эффективностью.

Метод триангуляции. Принято считать, что метод триангуляции впервые был предложен голландским ученым Снеллиусом в 1614 г. Этот метод широко применяется во всех странах. Сущность метода заключается в следующем. На командных высотах местности закрепляют систему геодезических пунктов, образующих сеть треугольников (рис. 13). В этой сети определяют координаты исходного пункта A, измеряют горизонтальные углы в каждом треугольнике, а также длины b и азимуты α базисных сторон, задающих масштаб и ориентировку сети по азимуту.

Сеть триангуляции может быть построена в виде отдельного ряда треугольников, системы рядов треугольников, а также в виде сплошной сети треугольников. Элементами сети триангуляции могут служить не только треугольники, но и более сложные фигуры: геодезические четырехугольники и центральные системы.

Основными достоинствами метода триангуляции являются его оперативность и возможность использования в разнообразных физико-географических условиях; большое число избыточных измерений в сети, позволяющих непосредственно в поле

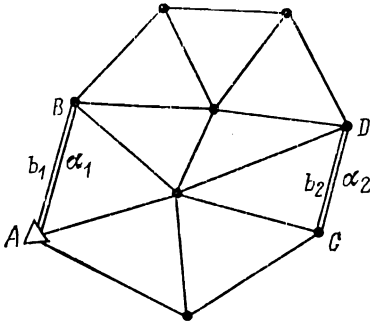


Рис. 13. Сеть триангуляции

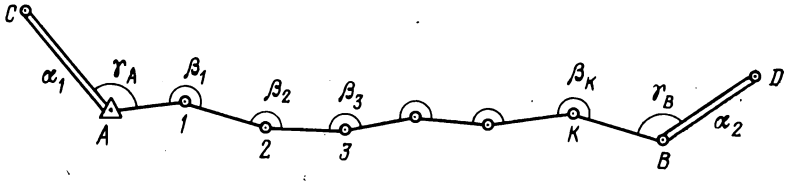


Рис. 14. Полигонометрический ход

осуществлять надежный контроль всех измеренных величин; высокая точность определения взаимного положения смежных пунктов в сети, особенно сплошной. Метод триангуляции получил наибольшее распространение при построении государственных геодезических сетей.

Метод полигонометрии. Этот метод известен также давно, однако применение его при создании государственной геодезической сети сдерживалось до недавнего времени трудоемкостью линейных измерений, выполняемых ранее с помощью инварных проволок. Начиная примерно с шестидесятых годов текущего столетия, одновременно с внедрением в геодезическое производство точных свето- и радиодальномеров, метод полигонометрии получил дальнейшее развитие и стал широко применяться при создании геодезических сетей.

Сущность этого метода состоит в следующем. На местности закрепляют систему геодезических пунктов, образующих вытянутый одиночный ход (рис. 14) или систему пересекающихся ходов, образующих сплошную сеть. Между смежными пунктами хода измеряют длины сторон s_i, а на пунктах — углы поворота β. Азимутальное ориентирование полигонометрического хода осуществляют с помощью азимутов, определяемых или заданных, как правило, на конечных пунктах его, измеряя при этом примычные углы γ. Иногда прокладывают полигонометрические ходы между пунктами с заданными координатами геодезической сети более высокого класса точности.

Метод полигонометрии в ряде случаев, например, в залесенной местности, на территории крупных городов и т. п. ока-

зывается более оперативным и более экономичным, чем метод триангуляции. Это обусловлено тем, что в таких условиях на пунктах триангуляции строят более высокие геодезические знаки, чем на пунктах полигонометрии, поскольку в первом случае следует обеспечить прямую видимость между гораздо большим числом пунктов, чем во втором. Постройка же геодезических знаков является самым дорогостоящим видом работ при создании геодезической сети (в среднем 50—60 % всех затрат).

Следует отметить также присущие методу полигонометрии недостатки:

сети полигонометрии, особенно одиночные ходы, являются гораздо менее жесткими геометрическими построениями, чем сети и ряды триангуляции, так как в полигонометрии число геометрических связей между пунктами существенно меньше, чем в триангуляции (при одинаковом числе пунктов в обоих случаях);

число избыточных измерений, а следовательно, и число условных уравнений, в полигонометрии гораздо меньше, чем в триангуляции с таким же числом пунктов, а это значит, что при прочих равных условиях сеть полигонометрии будет менее точной, чем сеть триангуляции;

контроль полевых измерений в полигонометрии несравненно хуже, чем в триангуляции, так как число условных уравнений в полигонометрии гораздо меньше, чем в триангуляции с таким же числом пунктов.

Это свидетельствует о том, что при создании опорных геодезических сетей высшего класса точности возможности метода полигонометрии по сравнению с таковыми в триангуляции ограничены.

При создании же геодезических сетей последующих классов метод полигонометрии в силу присущей ему оперативности, особенно при использовании современных свето- и радиодальномеров с цифровой индикацией результатов измерений, получил широкое применение.

Метод трилатерации. Данный метод, как и метод триангуляции, предусматривает создание на местности геодезических сетей либо в виде цепочки треугольников, геодезических четырехугольников и центральных систем, либо в виде сплошных сетей треугольников, в которых измеряются не углы, а длины сторон. В трилатерации, как и в триангуляции, для ориентирования сетей на местности должны быть определены азимуты ряда сторон.

По мере развития и повышения точности свето- и радиодальномерной техники измерений расстояний метод трилатерации постепенно приобретает все большее значение, особенно в практике инженерно-геодезических работ.

При создании государственных геодезических сетей 1—2 классов метод трилатерации в СССР не применяется. Это объясняется следующими причинами:

1. Контроль измерения расстояний и построения сетей трилатерации слишком слаб, а иногда и вовсе отсутствует, что недопустимо в точных геодезических построениях. В самом деле, например, в треугольнике с измеренными сторонами контроль измерения расстояний полностью отсутствует, так как при таких измерениях в треугольнике не возникает ни одного условного уравнения; в геодезическом четырехугольнике и центральной системе с измеренными сторонами возникает всего лишь по одному условному уравнению, в то время как в таких же фигурах триангуляции с измеренными углами возникает во много раз больше независимых условных уравнений: в геодезическом четырехугольнике четыре, а в центральной системе еще больше.

2. В технико-экономическом отношении метод трилатерации также уступает методу триангуляции. При прочих равных условиях штат бригады при линейных измерениях и транспортные расходы в несколько раз больше, чем при угловых измерениях, поскольку приходится на конце каждой измеряемой с пункта линии устанавливать отражатель, а затем при переезде со светодальномером на другой пункт перевозить всех рабочих с отражателями с одних пунктов на другие, чего не требуется делать при угловых измерениях.

3. При соизмеримой точности угловых и линейных измерений точность передачи азимутов в рядах и сетях трилатерации существенно ниже, чем в сетях триангуляции.

Линейно-угловые геодезические сети. Под линейно-угловой сетью понимают такую разновидность триангуляции или трилатерации, в которой одновременно измеряют как углы, так и стороны треугольников. В этой сети через определенное число треугольников должны определяться азимуты Лапласа, необходимые для ее ориентирования. Линейно-угловые сети строят только в тех случаях, когда требуется создать геодезическую сеть с максимально высокой точностью, так как затраты труда, средств и времени на ее создание гораздо большие, чем при построении аналогичной сети триангуляции или трилатерации. Для того чтобы при создании линейно-угловых сетей получить наибольший эффект от совместного использования угловых и линейных измерений необходимо, чтобы средняя квадратическая ошибка измерения направлений, выраженная в радианной мере m_N/ρ, была равна относительной средней квадратической ошибке измерения длин сторон m_s/s, т. е. чтобы при измерениях соблюдалось равенство

$$m_N/\rho = m_s/s.$$

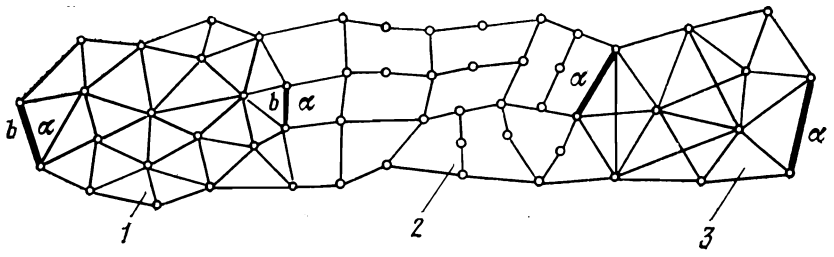


Рис. 15. Комбинированная геодезическая сеть:
1 — триангуляция; *2* — полигонометрия; *3* — трилатерация

Ошибки в обоих случаях должны вычисляться по свободным членам условных уравнений (по невязкам). При невыполнении этого равенства линейно-угловая сеть по сравнению с аналогичной сетью триангуляции или трилатерации не дает ощутимого выигрыша в точности.

Комбинированные геодезические сети. При выполнении геодезических работ встречаются случаи, когда значительные по площади участки того или иного района характеризуются либо резко различными формами рельефа (например, один участок — равнина, а соседний является горным), либо резко различным растительным покровом (например, один участок покрывают болота, заросшие травой и мелким кустарником, а на соседнем растет высокий хвойный лес) и т. д. В таких случаях по технико-экономическим соображениям на одном из участков (там, где это экономически более выгодно), геодезическую сеть (рис. 15) создают методом триангуляции, на другом — полигонометрии, на третьем — методом трилатерации и т. д. Другими словами, на территории района с резко различными условиями создают так называемую комбинированную геодезическую сеть.

Схема и методы построения комбинированных геодезических сетей могут быть разными и должны выбираться с учетом конкретных условий тех районов, в которых такие сети будут строить.

§ 15. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ДРУГИХ МЕТОДАХ СОЗДАНИЯ ОПОРНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Опорные сети из астрономических пунктов. При топографических съемках территории в масштабе 1 : 100 000 и мельче опорную сеть можно создать из астрономических пунктов, отстоящих друг от друга не менее чем на 80—100 км. При этом астрономические широты и долготы надлежит исправить поправками за уклонения отвесных линий. Эти поправки в первом

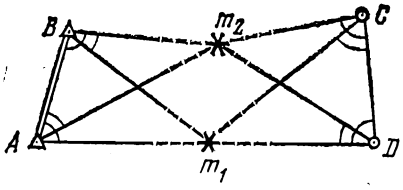


Рис. 16. Схема динамической триангуляции

приближении можно вычислить по данным гравиметрической съемки. Такой метод создания опорной геодезической сети применялся в СССР более 40 лет тому назад при картографировании в масштабе 1 : 100 000 горных районов на северо-востоке страны и в Средней Азии. Теперь в этих районах построена государственная геодезическая сеть высокой точности.

Динамическая триангуляция или триангуляция с подвижными визирными целями. Сущность этого метода состоит в следующем. Пусть известны координаты исходных пунктов A и B, требуется определить координаты пунктов C и D, которые находятся на значительном расстоянии от пунктов A и B и не видны с этих пунктов (рис. 16). Задачу решают следующим образом. С самолета или вертолета, пролетающего примерно посредине между пунктами A и D в направлении перпендикуляра к линии AD, сбрасывают светящуюся цель m и синхронно наблюдают ее со всех четырех пунктов (исходных и определяемых), измеряя при каждом положении m_1, m_2 ... светящейся цели указанные горизонтальные углы.

Используя известную сторону AB и измеренные при ней углы, решают треугольники ABm_1, ABm_2, ... и затем вычисляют координаты точек m_1, m_2, ... m_n. По координатам точек m_i ($i=1, 2, \ldots, n$) и измеренным на пунктах C и D горизонтальным углам в конечном итоге определяют координаты этих пунктов.

Метод динамической триангуляции был предложен в 1920 г. финским геодезистом Вяйселя. В сороковых годах с помощью этого метода были соединены между собой африканские и европейские триангуляции (через остров Крит), датские и норвежские триангуляции (через пролив Скагеррак).

Спутниковые методы создания геодезических сетей. В курсе космической геодезии [1] подробно рассматриваются геометрические и динамические методы определения координат точек из обработки наблюдений ИСЗ. В первом случае ИСЗ используются при определении координат как пассивные визирные цели, например, при синхронных измерениях расстояний с исходных и определяемых пунктов до ИСЗ. Во втором случае ИСЗ являются носителями координат. Американская навигационная система Transit позволяет автономно определять геоцен-

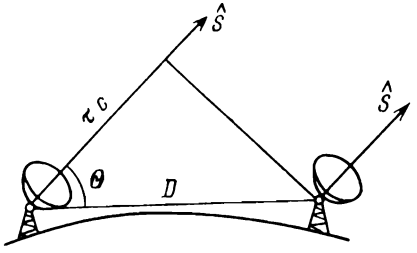


Рис. 17. Схема измерений методом длиннобазисной радиоинтерферометрии

трические прямоугольные координаты X, Y, Z точек земной поверхности с ошибкой 3—5 м при 40—50 прохождениях ИСЗ в течение недели. Для определения приращений координат между исходным и определяемым пунктом с более высокой точностью (в системе координат исходного пункта) применяют «метод транслокации», предусматривающий синхронные наблюдения ИСЗ с этих пунктов. При расстояниях 100—500 км приращения координат определяются в этом случае с ошибкой 0,3—1,3 м.

В настоящее время создаются более совершенные и более точные навигационные системы: Глонас в СССР и Navstar (GPS) в США. Каждая из них состоит не менее чем из 18 спутников Земли и позволяет в любой момент времени и практически в любой части земного шара определять геоцентрические координаты точек с точностью более высокой, чем при использовании навигационной системы Transit, которая прекратит свое функционирование в ближайшие годы.

Радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой (РСДБ). Этот метод позволяет с помощью радиоинтерферометра определять с высокой точностью длины и направления хорд между пунктами, удаленными относительно друг от друга на многие тысячи километров, обеспечивая при этом синхронизацию стандартов частоты на данных пунктах и уточняя одновременно параметры вращения Земли, а также координаты наблюдаемых внегалактических источников радиоизлучения (квазаров). Этот метод впервые был предложен советскими учеными Н. С. Кардашевым, Л. И. Матвеенко и Г. Б. Шоломницким в 1965 г. и получил широкое распространение в радиоастрономии. В последние годы он начинает применяться и при создании глобальных сетей наивысшей точности, а также в целях изучения геодинамических явлений и т. п.

Радиоинтерферометр состоит из двух радиотелескопов, устанавливаемых на значительном расстоянии D (рис. 17) друг от друга, которое называют базой интерферометра. Радиотелескопы синхронно ведут прием излучения одного и того же внегалактического точечного радиоисточника (квазара) в санти-

метровом диапазоне. Радиосигналы записывают в цифровой форме на широкополосные видеомагнитофоны. В результате корреляционной обработки для каждой пары записей, длящихся 3—10 мин, определяют временную задержку τ моментов прихода фронта радиоволны на один радиотелескоп относительно другого, а также частоту интерференции f, связанную с задержкой τ соотношением [1]

$$f = \nu \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

где ν — частота радиоизлучения; t — время. Значения τ и t определяются на средний момент записи радиосигналов. Умножив значение τ на скорость распространения радиоволн c, можно определить разность расстояний радиотелескопов до наблюдаемого квазара на момент наблюдений. Используя многочисленные значения измеренных величин τ и f, а также основные уравнения метода РСДБ, приведенные, например, в указанной выше работе М. Т. Прилепина и Г. А. Шанурова в результате совместной обработки измерений по методу приближений находят: разности геоцентрических координат ΔX; ΔY; ΔZ концов базы радиоинтерферометра, а следовательно, ее длину D и направление относительно координатных осей или угол θ; уточненные координаты радиоисточника; координаты полюса Земли; элементы прецессии и нутации; мгновенную скорость вращения Земли; истинное гринвичское время определения значений τ и f на моменты наблюдений, а также другие параметры, принимаемые в качестве определяемых величин.

Метод РСДБ на базах длиной в несколько тысяч километров обеспечивает высокую точность измерений. В частности, длины баз определяются с ошибками 1—3 см, направления баз в геоцентрической системе координат — 0,001″, координаты полюса Земли — 3—5 см, координаты наблюдаемых квазаров — 0,001″. С такой же точностью получают параметры прецессии, нутации и вариации скорости суточного вращения Земли. Как видим, метод РСДБ обеспечивает такую точность измерений, которая пока недостижима при использовании других методов.

Для реализации метода РСДБ требуются: радиотелескопы с полноповоротными антеннами диаметром 20—60 м, работающие в сантиметровом диапазоне, атомные генераторы частоты со стабильностью 10^{-13}—10^{-14}, мощные широкополосные видео-

---

[1] *Прилепин М. Т., Шануров Г. А.* Метод длиннобазисной радиоинтерферометрии и его геодезические приложения. Итоги науки и техники. Геодезия и аэросъемка. Т. 21.— ВИНИТИ, 1983.

магнитофоны для записи результатов наблюдений (объем информации достигает 10^9 единиц), соответствующее машинное и математическое обеспечение, каталоги внегалактических источников радиоизлучения с угловыми размерами не более 0,001″.

Метод РСДБ помимо стационарных допускает использование и передвижных радиотелескопов с антеннами 3,3—5,0 м, работающих в паре с большими 60-метровыми радиотелескопами. В этом случае длины баз интерферометров уменьшаются до нескольких сотен километров.

§ 16. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О СОЗДАНИИ ОПОРНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ В ДОРЕВОЛЮЦИОННОЙ РОССИИ

Во всех странах становление и развитие основных геодезических работ было связано с необходимостью картографирования территории государства. Так, в XVI столетии была составлена первая русская карта на Европейскую часть Московского государства, известная под названием «Большой чертеж». Исходными материалами при этом служили схематические чертежи, составляемые по отдельным районам на основе опросов, поэтому естественно такие карты содержали значительные искажения и ошибки.

В начале XVIII столетия реформы государственного управления, проводимые Петром I, ускоренное экономическое развитие страны и новые военные задачи, стоящие перед государством, потребовали новых, более совершенных карт. В 1721 г. была издана первая в России Инструкция по топографо-геодезическим работам. Она устанавливала геодезические работы, которые надлежало выполнять при съемке местности. Это были первые геодезические работы, выполняемые в России для целей картографирования территории страны.

В то время было принято составлять карты по уездам, которые назывались *ландкартами*. Геодезической основой каждой ландкарты служил полигон, прокладываемый по границе уезда с помощью астролябии с буссолью и мерной цепи. В каждом уезде или в группе смежных устанавливался свой исходный геодезический пункт, от которого велся отсчет координат в создаваемой сети. Широту исходного пункта определяли из астрономических наблюдений. Долготу этого пункта не определяли из-за отсутствия в то время сравнительно простых приборов и методов, пригодных для работы в экспедиционных условиях. Между исходным пунктом и геодезическим полигоном, построенным вдоль границы уезда, прокладывались буссольные ходы; в местах их пересечения определялись астрономические широты.

Все работы по составлению ландкарт находились в ведении Сената, который передавал готовые ландкарты в Географический департамент Российской академии наук, где они использовались при составлении географических карт и первой генеральной карты России. С 1757 г. работой Географического департамента руководил великий русский ученый М. В. Ломоносов. В целях повышения точности карт тогда было принято решение определять в важнейших пунктах страны не только астрономические широты, но и долготы. К концу XVIII в. на территории России было определено 67 астрономических пунктов. Такого количества астропунктов в те времена не имела ни одна западноевропейская страна. Точность астрономических определений характеризовалась ошибками $m_\varphi \approx 5''$, $m_\lambda \approx 8''$. После появления способа определения долгот с помощью перевозимых хронометров астрономические определения координат пунктов стали проводиться точнее и успешнее. Особенно следует выделить работы академика Вишневского, определившего за период 1806—1815 гг. широты и долготы на 225 пунктах.

Таким образом, на рубеже XVIII и XIX столетий главной геодезической основой при составлении карт были только астрономические пункты, причем размещаемые довольно редко на картографируемой территории. Метод триангуляции был известен, но еще не применялся.

После окончания Отечественной войны 1812 г. остро встал вопрос о дальнейшем повышении точности карт, особенно на пограничные и перспективные в промышленном отношении районы. В связи с этим после окончания войны было принято решение создавать опорные геодезические сети для целей картографирования методом триангуляции.

Первые крупные триангуляционные работы в России были начаты в 1816 г. в западных пограничных районах под руководством известного геодезиста К. И. Теннера. В работах К. И. Теннера впервые был реализован основной принцип построения опорных геодезических сетей — принцип последовательного перехода от общего к частному. К. И. Теннер впервые ввел деление триангуляции на классы: 1 класс со сторонами треугольников в среднем около 25 км, 2 класс — 5—10 км и пункты 3 класса, определяемые засечками. К. И. Теннер предложил закреплять пункты на местности, а также усовершенствовал методику угловых измерений и т. д.

Особо следует отметить важность идеи К. И. Теннера об использовании триангуляции 1 класса не только для картографических целей, но и решения научных задач, связанных с определением размеров земного эллипсоида из градусного измерения по меридиану.

В 1816 г. в Прибалтийских губерниях одновременно с работами К. И. Теннера приступил к градусным измерениям вы-

дающийся русский астроном и геодезист В. Я. Струве, внесший большой вклад в развитие отечественной астрономии и геодезии. В 1830 г. градусные измерения К. И. Теннера и В. Я. Струве соединились и затем были продолжены на юг и на север. В 1852 г. эти работы были завершены. Таким образом была получена огромная по тому времени дуга градусного измерения протяженностью по широте в 25° 20′ от устья Дуная до Северного Ледовитого океана, известная как Дуга меридиана Струве, которая неоднократно использовалась учеными при выводах размеров земного эллипсоида, в том числе и эллипсоида Красовского. В этом ряде триангуляции было определено 13 астрономических пунктов. Угловые и базисные измерения выполнены с исключительно высокой для того времени точностью: средняя квадратическая ошибка угла, вычисленная по невязкам треугольников, составляла 0,6—1,5″; ошибка в длине диагонали ряда триангуляции протяженностью почти 3000 км была около 12 м.

В 1822 г. был учрежден Корпус военных топографов (КВТ), сыгравший большую роль в становлении и развитии основных геодезических и картографических работ в России. До 1917 г. КВТ был единственной крупной организацией, занимавшейся созданием триангуляционных сетей и производством топографических съемок для составления карт в масштабах 1 : 16 800—1 : 21 000 и 1 : 42 000. Наибольший объем этих работ был выполнен КВТ в западных пограничных районах. Значительные по объему геодезические работы были выполнены в Финляндии, на Кавказе, в Крыму, в центральных районах Европейской части России; менее интенсивно велись работы в Средней Азии, Восточном Казахстане, на Урале, в Западной Сибири и на Дальнем Востоке.

За 100 лет своего существования КВТ определил на территории России 3650 пунктов триангуляции 1 класса, 6373 пункта триангуляции 2 и 3 классов.

Для обеспечения геодезической основой местных топографических съемок, выполняемых в отдельных районах страны, геодезические работы в сравнительно небольших объемах вели также и другие ведомства: Переселенческое управление — в Западной и Восточной Сибири, Горное ведомство — в Донбассе, Гидрографическое управление — на морских побережьях.

К началу XX в. был накоплен богатый опыт развития триангуляционных сетей. К этому времени стали выявляться и недостатки в организации этих работ. Основными из них были следующие.

Отсутствовал единый план и программа построения триангуляции в масштабе всей страны. Почти все города и промышленные районы, кроме Донбасса, не были обеспечены геодезической основой. Триангуляционные сети строились в основном

по губерниям от своего начала и вычислялись нередко на разных эллипсоидах (Вальбека, Кларка, Бесселя и др.), что приводило к недопустимо большим расхождениям в координатах одних и тех же пунктов, расположенных на границах смежных губерний. Геодезические пункты плохо закреплялись на местности и поэтому вскоре утрачивались.

К началу текущего столетия основная масса пунктов прежних триангуляций оказалась утраченной, а потребность в геодезической основе, наоборот, заметно возросла. В связи с этим в 1907 г. комиссия, состоящая из крупных геодезистов того времени, под руководством начальника КВТ И. И. Померанцева впервые разработала программу построения триангуляции 1 класса на Европейской части России, которая предусматривала:

1) проложение рядов триангуляции 1 класса по направлению меридианов и параллелей расстояния между рядами одного направления 300—500 км, периметр полигонов 1200—1500 км;

2) определение на пересечении рядов (в вершинах полигонов) выходных сторон триангуляции, а на обоих концах каждой из них — астрономических широт, долгот и азимутов;

3) использование в качестве поверхности относимости эллипсоида Бесселя (за исходный пункт принимается центр круглого зала Пулковской обсерватории).

Программа, разработанная под руководством И. И. Померанцева, несомненно являлась прогрессивной для того времени. К ее реализации приступили в 1910 г. Осуществлению этой программы в полном объеме помешала первая мировая война. С 1910 по 1917 г. велись разрозненные работы по созданию трех полигонов триангуляции 1 класса: построены были только два полигона, третий остался незавершенным.

Программе И. И. Померанцева были присущи и существенные недостатки: недостаточная точность и жесткость построения системы полигонов 1 класса, отсутствие определенной и четкой системы построения сетей триангуляции 2 и последующих классов.

Подчеркивая большую роль и заслуги Корпуса военных топографов перед отечественной геодезией и картографией как главной организации, выполнявшей основные геодезические работы в России, необходимо отметить, что из-за недостаточного внимания царского правительства к вопросам картографирования территории страны и весьма ограниченного финансирования геодезических работ развитие этих работ шло очень медленно. К 1917 г. топографо-геодезическая изученность территории составляла всего лишь около 13 %.

§ 17. СХЕМА И ПРОГРАММА Ф. Н. КРАСОВСКОГО ПОСТРОЕНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Великая Октябрьская революция положила начало новой эпохи в развитии топографо-геодезических и картографических работ. Решающую роль в этом вопросе сыграл исторический Декрет, подписанный В. И. Лениным 15 марта 1919 г. «Об учреждении Высшего геодезического управления» в первую очередь для изучения территории РСФСР в топографическом отношении, в целях поднятия и развития производительных сил страны, экономии технических и денежных средств и времени.

Одной из важнейших задач Высшего геодезического управления (ВГУ) в первые годы его деятельности была разработка научно обоснованной схемы и программы построения опорной геодезической сети СССР. В решении этой задачи исключительно большую роль сыграл крупнейший ученый-геодезист нашего времени Ф. Н. Красовский. Он пересмотрел прежние принципы построения опорной геодезической сети и доказал их непригодность в условиях огромной территории страны. Ф. Н. Красовский, опираясь на выполненные им теоретические исследования о действии и накоплении ошибок геодезических измерений в триангуляции, разработал и научно обосновал фундаментальную программу построения государственной триангуляции СССР, которая стала постепенно осуществляться с 1925 г. Программа была опубликована в 1928 г. В последующем она нашла отражение в Основных положениях о построении государственной опорной геодезической сети СССР (1939 г.).

Согласно программе Ф. Н. Красовского государственная триангуляция строилась по принципу перехода от общего к частному. Подразделялась она на ряды триангуляции 1 класса, основные ряды триангуляции 2 класса, заполняющие сети 2 класса, сети 3 класса и пункты 4 класса, определяемые геодезическими засечками. Главной являлась триангуляция 1 класса, создаваемая в виде астрономо-геодезической сети, предназначенной как для картографирования страны, так и для решения научных проблем геодезии.

В соответствии с программой Ф. Н. Красовского астрономо-геодезическая сеть СССР строилась в виде рядов триангуляции 1 класса, прокладываемых примерно по направлениям меридианов и параллелей на расстоянии 200—250 км друг от друга и образующих замкнутые полигоны периметром 800—1000 км (рис. 18). Ряды состояли в основном из треугольников, близких по форме к равносторонним, с углами не менее 40°. Длины сторон треугольников были в среднем около 25—30 км. Горизонтальные углы измерялись со средней квадратической ошибкой 0,7—0,9″ (по невязкам треугольников).

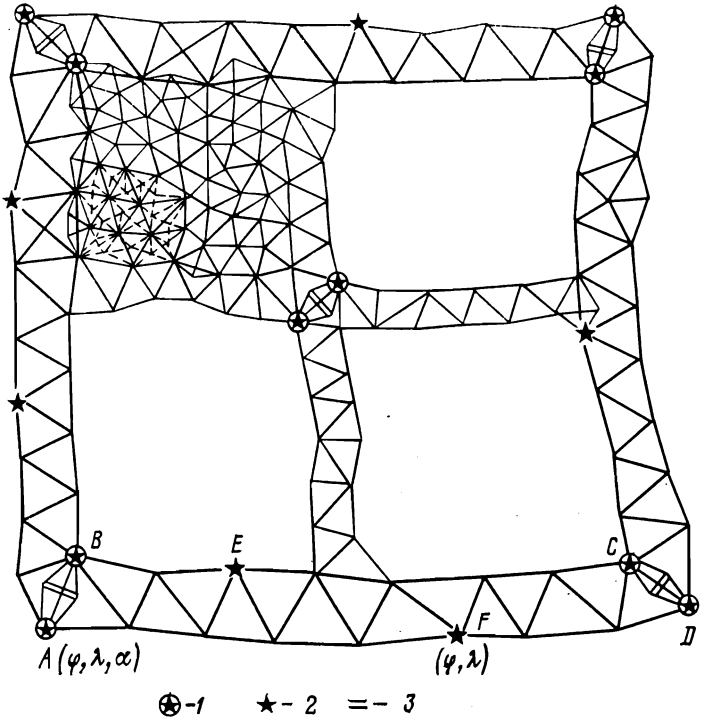


Рис. 18. Схема Ф. Н. Красовского построения государственной триангуляции:

1 — пункт Лапласа; *2* — промежуточный астропункт; *3* — базис

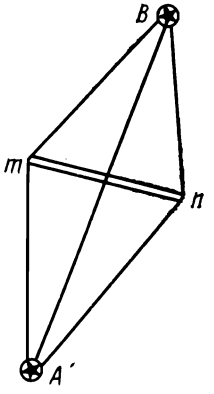
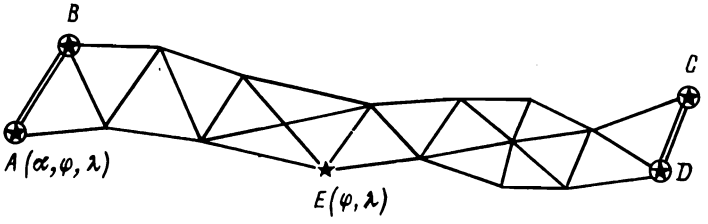


Рис. 19. Базисная сеть

Рис. 20. Звено триангуляции 1 класса



В каждом пересечении рядов 1 класса, идущих по меридианам и параллелям определяются длина и азимут выходной стороны триангуляции, например, сторон AB и CD. Длины выходных сторон AB получали в те годы путем построения базисных сетей (рис. 19), в которых инварными проволоками измеряли базис mn длиной 6—8 км и все углы на пунктах этой сети; углы напротив базиса должны были быть не менее 36°. Базисы следовало измерять с относительной средней квадратической ошибкой не более 1/500 000, а длины выходных сторон определять с ошибкой не более 1/300 000.

В настоящее время исходные стороны рядов триангуляции измеряются непосредственно с помощью высокоточных светодальномеров и поэтому необходимость построения базисных сетей отпала. Исходные стороны, полученные в результате непосредственных измерений, принято называть базисными сторонами.

На обоих концах каждой выходной стороны определялись астрономические широты, долготы и азимуты (прямой и обратный). Геодезический пункт, на котором определены из астрономических наблюдений широта, долгота и азимут, называют пунктом Лапласа, а часть ряда триангуляции, заключенную между соседними выходными сторонами, на концах которых определены пункты Лапласа,— звеном триангуляции 1 класса (рис. 20). Длины звеньев триангуляции принимали равными 200—250 км, а сами звенья могли состоять из треугольников, геодезических четырехугольников и центральных систем.

Кроме пунктов Лапласа в каждом звене триангуляции 1 класса через 70—100 км определяли еще так называемые промежуточные астрономические пункты E, F (см. рис.18). На этих пунктах измеряли астрономические широты и долготы. Первоначально на этих пунктах определяли также односторонние астрономические азимуты, однако, впоследствии от них отказались из-за недостаточной точности вследствие неблагоприятного влияния боковой рефракции.

Средние квадратические ошибки астрономических определений широт, долгот и азимутов на пунктах Лапласа не должны были превышать соответственно $m_\varphi = 0{,}4''$; $m_\lambda = 0{,}45''$ и $m_\alpha = 0{,}5''$. Вычисляются эти ошибки по отклонениям от среднего из результатов измерений в приемах, т. е. без учета влияния систематических ошибок измерений.

В 1932 г. была начата общая гравиметрическая (маятниковая) съемка территории СССР. По предложению Ф. Н. Красовского гравиметрические измерения, выполняемые по специальной программе, стали широко применяться при создании астрономо-геодезической сети и с тех пор являются неотъемлемой частью основных геодезических работ. При совместном

использовании геодезических, астрономических и гравиметрических измерений предоставляется возможность детально изучать фигуру Земли и математически строго редуцировать результаты геодезических измерений с физической поверхности Земли на поверхность референц-эллипсоида, на которой ведется их математическая обработка. Для успешного решения этих задач Ф. Н. Красовский разработал теоретически строгий метод проектирования измеренных величин на поверхность эллипсоида по нормалям к нему и в 1934 г. предложил метод астрономо-гравиметрического нивелирования для определения высот геоида, впоследствии развитый М. С. Молоденским и теперь широко применяемый при изучении поверхности квазигеоида.

Следует особо подчеркнуть исключительно важную роль астрономических и гравиметрических измерений в астрономо-геодезической сети. Благодаря этим измерениям можно вычислить на каждом пункте сети астрономо-геодезические уклонения отвесных линий. Последние же необходимы для решения двух весьма важных задач: редукции измеренных величин на поверхность эллипсоида и определения высот квазигеоида, а следовательно, и для изучения фигуры Земли в пределах астрономо-геодезической сети.

Ф. Н. Красовский разрабатывал схему и программу построения государственной триангуляции в то время, когда страна находилась в трудном экономическом положении, а геодезическая служба не была обеспечена инженерными кадрами, не имела необходимых высокоточных приборов, не обладала мощными вычислительными средствами, не были разработаны также и методы уравнивания обширных геодезических сетей. Однако широкий размах социалистического строительства на огромных просторах страны требовал построить в кратчайшие сроки общегосударственную геодезическую сеть, так необходимую для картографирования территории и решения разнообразных задач народнохозяйственного и оборонного значения. С учетом всех этих обстоятельств Ф. Н. Красовский предложил следующую схему и программу развития геодезических сетей 2—4 классов внутри полигонов астрономо-геодезической сети.

Каждый полигон триангуляции 1 класса делился, как правило, на четыре части путем проложения в нем основных рядов триангуляции 2 класса (см. рис. 18). В пересечении основных рядов триангуляции 2 класса строилась базисная сеть, из которой определялась длина выходной стороны. На обоих концах выходной стороны определялись пункты Лапласа (φ, λ, α). Средняя длина сторон треугольников в основных рядах 2 класса была около 18 км; углы в треугольниках допускались не менее 30°; средняя квадратическая ошибка измерения уг-

Таблица 5

Класс триангуляции	Средняя длина стороны s, км	Средняя квадратическая ошибка измерения угла m, угл. с	Ошибка стороны в слабом месте сети m_s/s	Ошибка определения взаимного положения смежных пунктов, м
Ряды 1 класса	25—30	0,7—0,9	1/100 000	~0,3
Ряды 2 класса	18	1,2—1,5	1/60 000	~0,3
Сети 2 класса	11—13	2,0—2,5	1/35 000	~0,3
Сети 3 класса	5—8	5	1/15 000	~0,3

Пункты 4 класса определялись засечками с ошибками не более 1 м.

лов допускалась не более 1,2—1,5″ (по невязкам треугольников). Точность базисных измерений и астрономических определений была установлена несколько ниже, чем в астрономо-геодезической сети.

Внутри каждой четверти полигона 1 класса, образующейся в результате построения основных рядов триангуляции 2 класса, строилась заполняющая сеть триангуляции 2 класса с длинами сторон треугольников в среднем 12—13 км. Наименьшие углы в треугольниках допускались до 20°; средняя квадратическая ошибка измерения углов устанавливалась равной 2—2,5″ (по невязкам треугольников).

Сети триангуляции 3 класса строились в виде вставок небольших систем треугольников или отдельных пунктов, опирающихся на стороны и пункты триангуляции 2 класса. Длины сторон треугольников были 5—8 км; наименьшие углы допускались до 15°; средняя квадратическая ошибка измеренного угла устанавливалась равной 5″ (по невязкам треугольников).

Пункты IV класса определялись геодезическими засечками с пунктов триангуляции высших классов со средней квадратической ошибкой не более одного метра.

Государственная триангуляция, создаваемая в соответствии с программой Ф. Н. Красовского и с учетом Основных положений (1939 г.), характеризовалась следующими обобщенными техническими показателями (табл. 5).

Сопоставив между собой допустимые ошибки в длинах сторон триангуляции со средними квадратическими ошибками определения взаимного положения смежных пунктов (см. табл. 4 и 5), нетрудно установить, что по точности построения государственная триангуляция 1—3 классов обеспечивает не только производство топографических съемок вплоть до масштаба 1 : 10 000 включительно, но и решение многих научных и прак-

тических задач геодезии и других отраслей народного хозяйства.

Построение государственной триангуляции по программе Ф. Н. Красовского явилось значительным шагом в развитии основных геодезических работ в СССР. В результате осуществления этой программы были решены следующие важнейшие задачи:

за короткий срок распространена единая система координат на огромную территорию всей страны путем проложения рядов триангуляции 1 класса;

получены опытные данные высокой точности для решения основной научной проблемы высшей геодезии по определению размеров земного эллипсоида и изучению фигуры Земли;

созданы условия для развития сетей триангуляции 2 и 3 классов при ограниченной технической оснащенности, а также появилась возможность поблочного уравнивания сетей триангуляции всех классов;

обеспечена высокая точность определения взаимного положения смежных пунктов триангуляции, достаточная для топографических съемок вплоть до масштаба 1 : 10 000.

§ 18. ПОСТРОЕНИЕ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ СССР В СООТВЕТСТВИИ С ОСНОВНЫМИ ПОЛОЖЕНИЯМИ 1954—1961 гг.

После Великой Отечественной войны 1941—1945 гг. в связи с восстановлением и развитием народного хозяйства страны возникла необходимость картографирования обширных территорий в крупных масштабах 1 : 5000 и 1 : 2000. Поскольку государственная триангуляция, создаваемая по программе Ф. Н. Красовского, была рассчитана на обеспечение топографических съемок не крупнее масштаба 1 : 10 000, то в 1948 г. по предложению первого заместителя начальника ГУГК С. Г. Судакова был поставлен и рассмотрен вопрос о дальнейшем повышении точности государственной геодезической сети СССР с ориентировкой ее на обеспечение топографических съемок крупных масштабов и решение геодезическими методами ряда новых задач научного, народнохозяйственного и оборонного значения.

В послевоенные годы была разработана новая программа построения государственной геодезической сети СССР, опирающаяся на огромный опыт астрономо-геодезических работ в нашей стране, существенно окрепшую материально-техническую базу и новейшие достижения геодезической науки и практики. Эта программа отражена в Основных положениях о построении государственной геодезической сети СССР, опубликованных

в первоначальном варианте в 1948 и 1954 гг., а в окончательном — в 1961 г.

Согласно этим положениям, которые принято коротко называть Основными положениями 1954—1961 гг., государственная геодезическая сеть СССР является главной геодезической основой топографических съемок всех масштабов и должна удовлетворять требованиям народного хозяйства и обороны страны при решении соответствующих научных и инженерно-технических задач. Создается она методами триангуляции, полигонометрии и трилатерации при том или ином их сочетании. В каждом районе построение геодезической сети должно вестись методом, который при прочих равных условиях дает наибольший экономический эффект, обеспечивая при этом требуемую точность сети.

Построение государственной геодезической сети осуществляется в соответствии с принципом перехода от общего к частному. Государственная геодезическая сеть подразделяется на сети 1, 2, 3 и 4 классов, различающиеся между собой точностью измерений углов и расстояний, длиной сторон сети и очередностью последовательного развития. Основной является геодезическая сеть 1 класса, создаваемая в виде полигональной астрономо-геодезической сети; предназначается она для научных исследований, связанных с изучением формы и размеров Земли, ее внешнего гравитационного поля, а также для распространения единой системы координат на всю территорию СССР. Внутри полигонов 1 класса строится сплошная сеть 2 класса. Геодезические сети 2 класса являются основой для развития сетей 3 и 4 классов.

Астрономо-геодезическая сеть. В основе построения астрономо-геодезической сети 1 класса, создаваемой в соответствии с Основными положениями 1954—1961 гг., лежит программа Ф. Н. Красовского, несколько уточненная и дополненная. Создается астрономо-геодезическая сеть в виде полигонов периметром около 800 км, образуемых триангуляционными или полигонометрическими звеньями длиной каждое не более 200 км, располагаемыми в направлении меридианов и параллелей (рис. 21).

Звено триангуляции 1 класса состоит в основном из треугольников по форме близких к равносторонним, с углами не менее 40°. В тех случаях, когда из-за сложного рельефа местности не удается построить треугольники с углами более 40°, допускается построение в таких местах геодезических четырехугольников и центральных систем с углами в них не менее 30°. Длины сторон треугольников равны в среднем 20—25 км. В начале и конце каждого звена при помощи высокоточных светодальномеров измеряют базисные стороны. На обоих концах каждой базисной стороны (в вершинах полигонов) определяют

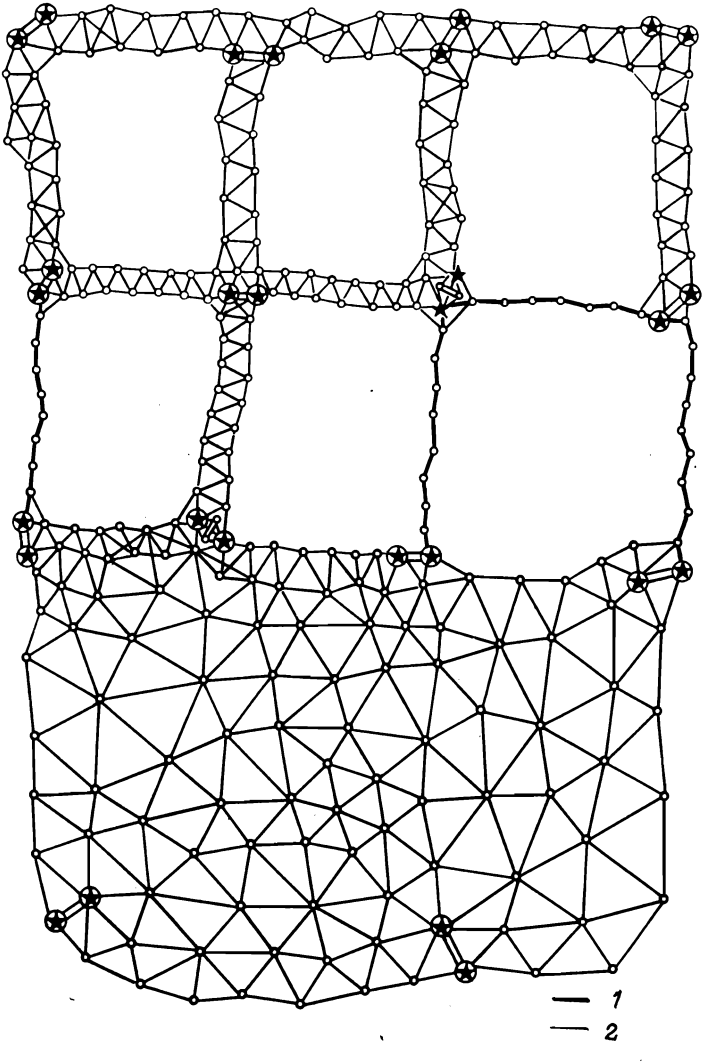


Рис. 21. Схема построения астрономо-геодезической сети по Основным положениям 1954—1961 гг.:
1 — сторона полигонометрии 1 класса; *2* — сторона триангуляции 1 класса

астрономические широты, долготы и азимуты, т. е. пункты Лапласа.

Звенья полигонометрии 1 класса прокладывают в виде вытянутых ходов, состоящих каждое не более чем из 10 сторон длиной порядка 20 км. Ни один из пунктов полигонометриче-

ского звена не должен отклоняться более чем на 20 км в сторону от замыкающей, соединяющей конечные точки хода; наибольший угол между направлениями любой стороны и направлением замыкающей звена не должен превышать 20°. В начале и в конце каждого звена полигонометрии определяют взаимно обратные азимуты базисных сторон, а также астрономические широты и долготы, т. е. все делают так, как в звеньях триангуляции.

В каждом звене триангуляции и полигонометрии 1 класса, кроме пунктов Лапласа, устанавливают промежуточные астрономические пункты (см. рис. 20), на которых по наблюдениям звезд определяют астрономические широты и долготы. Промежуточные астрономические пункты размещают между пунктами Лапласа через 65—120 км. Расстояние между астропунктами зависит от плотности гравиметрической съемки, выполняемой вдоль первоклассных рядов: чем выше плотность этой съемки, тем реже определяют промежуточные астропункты. Вокруг всех астрономических пунктов (Лапласа и промежуточных) по специальной программе ведут гравиметрическую съемку сгущения.

В отдельных районах страны вместо полигонов, образованных звеньями триангуляции или полигонометрии 1 класса, разрешается строить сплошные сети триангуляции 1 класса с углами в треугольниках не менее 30° и длинами сторон не менее 20 км. Расстояния устанавливаются в зависимости от физико-географических условий и заданной плотности пунктов. Базисные стороны и пункты Лапласа в сплошных сетях 1 класса размещают не реже чем через 10 сторон.

При создании астрономо-геодезической сети выполняют комплекс геодезических, астрономических и гравиметрических измерений, причем с наивысшей точностью, достигаемой при массовых измерениях при использовании новейшей измерительной техники. Горизонтальные углы на пунктах триангуляции и полигонометрии измеряют с ошибками не более 0,7″ (по невязкам треугольников или замкнутых полигонов). Базисные стороны измеряют с относительной средней квадратической ошибкой не более 1/400 000, а длины сторон в звеньях полигонометрии 1 класса — с ошибками не более 1/300 000. Средние квадратические ошибки астрономических определений, вычисляемые по результатам измерений в приемах, т. е. без учета влияния систематических ошибок, допускаются в широте до 0,3″, долготе — 0,45″ и азимуте — 0,5″.

Геодезические сети 2 класса. Сети этого класса точности строят преимущественно методом триангуляции в виде сплошных сетей треугольников, полностью заполняющих полигоны астрономо-геодезической сети 1 класса (рис. 22). Наименьшие углы в треугольниках допускаются до 30°. Длины сторон могут колебаться от 7 до 20 км в зависимости от ряда факторов и

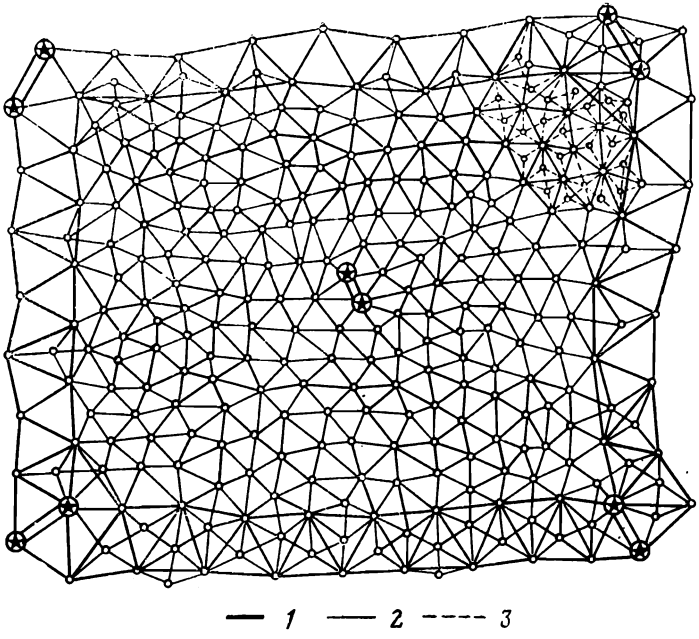


Рис. 22. Схема построения триангуляции 2—4 классов внутри полигона триангуляции 1 класса:

1 — сторона триангуляции 1 класса; *2* — сторона триангуляции 2 класса; *3* — сторона триангуляции 3 класса

в первую очередь от особенностей рельефа местности; в среднем они равны 12—13 км. В равнинных районах сети выгоднее развивать небольшими треугольниками, увеличивая их размеры при подходе к длинным сторонам рядов 1 класса. В районах с ярко выраженными формами рельефа целесообразно развивать триангуляцию 2 класса крупными треугольниками со вставкой в них пунктов 3 класса. При таком построении обеспечивается минимальная высота геодезических знаков, что важно с экономической точки зрения, так как на постройку геодезических знаков расходуется, как отмечалось выше, в среднем 50—60 % всех затрат, необходимых для создания геодезической сети.

Базисные стороны в триангуляции 2 класса размещают равномерно и не более чем через 25 треугольников. Одна из базисных сторон должна находиться примерно в середине полигона 1 класса; на концах этой стороны определяют пункты Лапласа с той же точностью астрономических определений, что и в триангуляции 1 класса. Длины базисных сторон измеряют со средней квадратической ошибкой, не превышающей 1/400 000, а го-

ризонтальные углы — со средней квадратической ошибкой не более 1″ (по невязкам треугольников).

В тех случаях, когда это экономически выгодно, сети 2 класса могут создаваться методом полигонометрии при тех же длинах сторон, что и в триангуляции 2 класса. Полигонометрические ходы, пересекаясь друг с другом, образуют сплошную сеть замкнутых полигонов с равномерным распределением пунктов внутри полигона 1 класса. Допускается также комбинирование триангуляционных и полигонометрических построений. Схемы построения сетей полигонометрии, а также комбинированных сетей триангуляции и полигонометрии разрабатываются отдельно для каждого конкретного района с учетом особенностей рельефа местности, залесенности, гидрографии и т. д. Горизонтальные углы и длины сторон в полигонометрии 2 класса измеряют со средними квадратическими ошибками не более 1″ (по невязкам замкнутых полигонов) и 1/250 000 соответственно.

Метод трилатерации при создании геодезических сетей 1 и 2 классов не применяется вследствие присущих ему недостатков.

Геодезические сети 3 и 4 классов. Последующее сгущение геодезических пунктов в сетях 2 класса до требуемой плотности осуществляется путем развития в них сетей 3 и 4 классов. Сети 3 и 4 классов могут создаваться методами триангуляции, полигонометрии и трилатерации. Для каждого района выбирают такие метод и схему развития этих сетей, которые при прочих равных условиях дают наибольшую экономию средств и времени, обеспечивая при этом требуемую точность сети.

Сети триангуляции 3 и 4 классов строят в виде жестких систем сплошных треугольников, вставляемых в геодезические сети 2 класса. Углы в треугольниках 3 и 4 классов между сторонами одного и того же класса должны быть не менее 20°. Длины сторон в сетях 3 класса равны 5—8 км, в сетях 4 класса 2—5 км. Расстояния между пунктами, которые принадлежат разным системам треугольников и не связаны между собой измеренными направлениями, допускаются не менее 4 км в сетях 3 класса и 3 км в сетях 4 класса, в противном случае эти системы надлежит соединить путем измерения соответствующих направлений. Горизонтальные углы в сетях 3 и 4 классов измеряют со средними квадратическими ошибками не более 1,5 и 2,0″ соответственно (по невязкам треугольников).

При построении сетей 3 и 4 классов методом полигонометрии определение пунктов соответствующего класса производится проложением систем или одиночных ходов, опирающихся на пункты высшего класса. Между узловыми пунктами, а также между узловыми и исходными пунктами допускается не более двух точек поворота. Наименьшая сторона хода 3 класса—3 км, 4 класса — 2 км. Если расстояния между пунктами, принадле-

Таблица 6

Класс сети	Длина стороны, км	Средняя квадратическая ошибка измерения угла m, угл. с	Ошибка стороны в слабом месте сети m_s/s	Ошибка определения взаимного положения смежных пунктов, м
1	20—25	0,7	1/150 000	~0,15
2	7—20	1,0	1/200 000	~0,06
3	5—8	1,5	1/120 000	~0,06
4	2—5	2,0	1/70 000	~0,06

жащими разным ходам, менее 4 км в сети 3 класса и менее 3 км в сети 4 класса, то должна предусматриваться взаимная связь таких ходов. Горизонтальные углы на пунктах полигонометрии 3 и 4 классов измеряют со средними квадратическими ошибками не более 1,5 и 2,0″ соответственно (по невязкам замкнутых полигонов). Длины сторон в ходах полигонометрии 3 и 4 классов измеряют со средними квадратическими ошибками 1/200 000 и 1/150 000 соответственно.

На каждом пункте государственной геодезической сети всех классов на расстоянии от него 0,5—1 км (в лесу не ближе 250 м) устанавливают по два так называемых ориентирных пункта, которые закрепляют подземными центрами. Ориентирные пункты предназначаются для азимутальной привязки съемочных ходов; они могут быть использованы и для других целей.

Высоты всех пунктов государственной геодезической сети определяют в основном методом тригонометрического нивелирования; только лишь в равнинной и слегка холмистой местности применяют геометрическое нивелирование 4 класса.

Государственная геодезическая сеть СССР, создаваемая в соответствии с Основными положениями 1954—1961 гг., характеризуется следующими обобщенными техническими показателями (табл. 6).

Фактическая точность угловых измерений несколько выше, чем установленная. Основными положениями 1954—1961 гг., и составляет в среднем: в сети 1 класса — 0,65″; 2 класса — 0,75″; 3 класса — 1,1″ и 4 класса — 1,5″. Реальная точность определения азимутов Лапласа характеризуется средней квадратической ошибкой порядка 1,1″, полученной в результате уравнивания обширных блоков астрономо-геодезической сети.

Государственная геодезическая сеть СССР характеризуется высокой точностью определения ее элементов, хотя создается она в весьма сложных физико-географических условиях, редко

благоприятных для производства высокоточных геодезических измерений. В сетях 2—4 классов взаимное положение смежных пунктов определяется с ошибками порядка 5—7 см. Это значит (см. табл. 4), что государственная геодезическая сеть СССР, создаваемая в соответствии с Основными положениями 1954—1961 гг. по своей точности не только обеспечивает картографирование огромной территории страны в таком крупном масштабе, как 1 : 2000, но и позволяет решать как научные, так и инженерно-технические задачи народнохозяйственного значения на высоком научном уровне.

§ 19. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ ОСНОВНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РАБОТ

Государственная геодезическая сеть представляет собой своеобразное инженерно-техническое сооружение на земной поверхности, создаваемое на всей территории страны на строго научных началах с использованием новейших достижений науки и техники. Рассчитана она на длительный срок службы и поэтому должна быть построена с высокой точностью, с учетом возрастающих с течением времени требований. Сеть должна быть надежно закреплена на местности специальными подземными центрами, обеспечивающими сохранность ее пунктов и неизменность их положения в плане и по высоте в течение длительного времени.

При создании современной государственной геодезической сети выполняют большой объем разнообразных работ по определенной технологической схеме.

Создание государственной геодезической сети, как и любого промышленного объекта, начинают с разработки и научно-технического обоснования проекта сети. Затем составленный в камеральных условиях проект геодезической сети уточняют в натуре (на местности). С этой целью в полевых условиях выполняют так называемую рекогносцировку пунктов запроектированной геодезической сети, в результате которой устанавливают конкретное положение каждого пункта на местности, уточняют и при необходимости незначительно корректируют схему построения сети, наилучшим образом приспосабливая ее к условиям рельефа местности; выполняют окончательный расчет высот геодезических знаков для обеспечения прямой видимости между пунктами; определяют наиболее подходящие для данных условий местности типы геодезических знаков и подземных центров; устанавливают необходимую глубину закладки подземных центров в грунт и т. д.; наконец, уточняют смету расходов на создание геодезической сети.

После рекогносцировки пунктов приступают к постройке геодезических знаков и закладке подземных центров. В результате

этих работ геодезическая сеть должна быть надежно закреплена на местности.

Затем измеряют базисные и другие стороны, предусмотренные проектом сети, выполняют астрономические определения широт, долгот и азимутов, измеряют горизонтальные углы на пунктах сети, а также определяют высоты пунктов над уровнем моря (над квазигеоидом) при помощи геометрического и тригонометрического нивелирования, ведут детальную гравиметрическую съемку вокруг астрономических пунктов по определенной программе и т. д. Организация и очередность выполнения этих работ координируется ГУГК.

После окончания полевых работ приступают к математической обработке результатов измерений, которая включает три этапа: 1) определение высот квазигеоида, нормальных и геодезических высот пунктов астрономо-геодезической сети и уклонений отвесных линий на них; 2) выполнение предварительных вычислений, в результате которых получают таблицу измеренных величин, приведенных к центрам пунктов и редуцированных как на референц-эллипсоид, так и на плоскость в принятой проекции (в СССР — проекция Гаусса — Крюгера); 3) уравнивание геодезической сети, оценка точности уравненных элементов сети, составление каталога координат и высот пунктов.

§ 20. ПУТИ ДАЛЬНЕЙШЕГО СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

Государственная геодезическая сеть СССР, создаваемая в соответствии с Основными положениями 1954—1961 гг., характеризуется высокой точностью определения взаимного положения смежных пунктов (см. табл. 6). Однако несмотря на это, астрономо-геодезическая сеть 1 класса менее точна, чем опирающиеся на нее сети 2 класса, а должно быть наоборот. Это приводит к тому, что сети 2 класса, уравниваемые внутри полигонов 1 класса, элементы которых принимаются за исходные данные, несколько деформируются. При этом наиболее ощутимо искажаются углы на тех пунктах 2 класса, которые находятся в вершинах полигонов, а также вблизи сторон треугольников 1 класса. Поправки в углы, получаемые из уравнивания, достигают на этих пунктах нередко 5—7″, что никак нельзя объяснить ошибками угловых измерений. Искажения углов и деформации в сетях 2 класса быстро уменьшаются по мере удаления от пунктов 1 класса в направлении к центру каждого полигона вследствие большой геометрической жесткости сплошных сетей триангуляции 2 класса.

Для того чтобы устранить данный недостаток сети 1 и 2 классов необходимо уравнять совместно по методу наименьших квадратов, не разделяя их на классы и используя все измерен-

ные в них горизонтальные направления, азимуты на пунктах Лапласа и базисные или выходные стороны, причем с учетом их весов и определением поправок во все непосредственно измеренные величины. В результате совместного уравнивания будет получена сплошная по построению астрономо-геодезическая сеть 1 класса, покрывающая всю территорию страны. На этом завершится один из важных этапов совершенствования государственной геодезической сети.

Необходимо отметить, что работы по дальнейшему развитию, модернизации и повышению точности государственной геодезической сети, особенно сети 1 класса, будут продолжаться практически непрерывно. Это связано, во-первых, с тем, что в ряде районов страны плотность геодезических пунктов еще недостаточна и ежегодно по разным причинам утрачивается около 3 % пунктов, которые надо систематически восстанавливать. Во-вторых, с течением времени сеть постепенно «стареет», теряя при этом свою первоначальную точность (например, из-за современных движений земной коры), а требования к ее точности, наоборот, с течением времени непрерывно возрастают. Поэтому мы вынуждены не только систематически восстанавливать утрачиваемые пункты и постоянно заботиться о развитии и сохранности сети на местности, но и непрерывно вести работу по дальнейшему совершенствованию и повышению ее точности, особенно в связи с научно-техническим прогрессом и возрастающими запросами науки и народного хозяйства.

Одной из ближайших задач совершенствования астрономо-геодезической сети (АГС) является определение в ней при помощи спутниковой системы Глонас положения необходимого числа пунктов с высокой точностью.

На следующем этапе совершенствования АГС необходимо построить на территории страны точнейшую, так называемую фундаментальную геодезическую сеть (ФГС) с длинами сторон треугольников порядка 2000—3000 км, в которой расстояния между пунктами, в том числе наиболее удаленными друг от друга, следовало бы определить с сантиметровой или более высокой точностью. Каждый пункт ФГС должен стать стационарной фундаментальной геодезической станцией или обсерваторией, на которой по определенной программе должен периодически выполняться весь комплекс точнейших измерений разного вида, в том числе спутниковых по определению геоцентрических координат пунктов, астрономических по определению широт, долгот и азимутов, гравиметрических по определению ускорения силы тяжести, гравиинерциальных по определению приращений астрономо-геодезических уклонений отвеса и т. п. Длины и направления сторон треугольников в геоцентрической системе координат, а также параметры вращения Земли (координаты полюса, вариации угловой скорости

суточного вращения, элементы прецессии и нутации) следует определять, используя метод длиннобазисной радиоинтерферометрии. Этот метод позволяет определять и учитывать квазипериодические колебания земной поверхности, обусловленные приливными явлениями. В окрестности каждого пункта ФГС необходимо вести систематические наблюдения за изменениями уровня грунтовых вод, вызывающих соответствующие изменения высоты пункта. Все пункты ФГС следует связать между собой линиями высокоточного нивелирования, повторяемого через определенные интервалы времени. Пункты, находящиеся вблизи морей, целесообразно соединить нивелирными линиями 1 класса с уровнемерными (мареографическими) станциями, на которых должны вестись непрерывные наблюдения за изменениями уровня моря.

Представляется целесообразной разработка соответствующих инструкций и руководств, отражающих состав разнообразных измерений и программу работы на каждом пункте ФГС.

Все перечисленные выше, а возможно и другие дополнительные измерения, выполняемые и систематически повторяемые на пунктах ФГС, позволят получать в результате их совместной обработки мгновенные координаты пунктов ФГС на момент их определения t. С течением времени изменяется положение оси вращения Земли, а следовательно изменяются и мгновенные координаты пунктов. Положение пунктов в плане и по высоте изменяется также вследствие приливных деформаций земной коры, современных движений земной поверхности, изменений уровня грунтовых вод, а также из-за перемещений крупных масс в теле Земли и т. п. Следовательно, переход на новый, более высокий уровень точности потребует выполнения математической обработки результатов измерений в прецизионной государственной геодезической сети в четырехмерном пространстве $X\ Y\ Z\ t$, где t — время.

При решении множества практических задач геодезии оперировать мгновенными координатами, изменяющимися во времени, неудобно. Поэтому мгновенные координаты следует редуцировать на определенную эпоху, например, на эпоху 2000,0 г., и пользоваться ими до тех пор, пока не возникнет необходимость перехода к координатам другой эпохи вследствие накопления недопустимо больших их изменений.

Благодаря созданию прецизионной ФГС и выполнению в ней повторных измерений по определенной программе появится возможность построить систему опорных пунктов на территории страны, мгновенные координаты которых будут известны с наивысшей точностью на каждый момент времени. Это позволит определять координаты ИСЗ также с максимальной точностью, что в свою очередь, повысит точность автономного определения координат точек земной поверхности из наблюдений ИСЗ. При-

няв элементы ФГС за основу и совместив ряд пунктов астрономо-геодезической сети с пунктами ФГС, можно будет периодически обновлять и модернизировать астрономо-геодезическую сеть, и, таким образом, в результате повторного уравнивания поддерживать точность этой сети на должном уровне длительное время.

Разработка и постепенная реализация конкретной схемы и программы построения ФГС, а также вопросов, связанных с последующим совершенствованием и дальнейшим повышением точности сплошной астрономо-геодезической сети, являются одной из важнейших и первоочередных задач геодезической науки и практики.

Глава 4

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И РЕКОГНОСЦИРОВКА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЗНАКИ И ЦЕНТРЫ

§ 21. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОЕКТИРОВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Основной задачей проектирования является разработка такого варианта построения геодезической сети, который по своей точности и плотности пунктов соответствовал бы поставленным требованиям и для его реализации требовал минимальных затрат труда, средств и времени. Основными руководящими документами при проектировании являются действующие Основные положения и инструкции ГУГК о построении государственной геодезической сети. Основанием для проектирования служит предписание руководящего учреждения, в котором указываются: район предстоящих работ, назначение сети, особые указания по ее построению, сроки производства работ.

Проектирование геодезических сетей включает в себя три последовательных этапа: 1) сбор материалов и сведений, необходимых для составления проекта; 2) разработка графической схемы проекта геодезической сети на картах и схемах; 3) техническое и экономическое обоснование проекта, включая составление общей сметы расходов на создание сети.

Для успешного проектирования необходимы следующие материалы и сведения о районе работ: топографические карты масштаба 1 : 100 000 и крупнее, материалы о ранее построенных в данном районе плановых и высотных геодезических сетях (схемы сетей, каталоги, отчеты), описание физико-географических и геоморфологических условий, данные гидрологических исследований, сведения о средствах сообщения и т. п. Если собранные материалы не дают полной характеристики района

работ, то проводят полевые геодезические обследования по особо разработанной программе.

Собранные для проектирования исходные материалы должны быть тщательно изучены и систематизированы. На этом этапе, а затем и при проектировании следует иметь в виду, что качество геодезической сети, точность и стоимость ее создания находятся в прямой зависимости от качества технического проекта. Неудовлетворительно разработанный проект приводит к избыточным затратам труда при выполнении полевых работ, а также к несоблюдению и срыву сроков выполнения заданий. Проектирование является ответственной задачей, требующей правильного решения всех организационных, технических и экономических вопросов, связанных с построением сети. Поэтому составление технических проектов поручается специалистам, имеющим достаточный опыт выполнения основных геодезических работ, в том числе и проектных.

Проектирование геодезических сетей 1—2 классов выполняют, как правило, на топографической карте масштаба 1 : 100 000; при проектировании геодезических сетей 3—4 классов используют топографические карты более крупных масштабов (1 : 50 000—1 : 10 000). Прежде чем приступить к проектированию, необходимо подготовить карту, т. е. «поднять» на ней, например, синим цветом сеть гидрографии, показать другим (коричневым) цветом линии водоразделов и отметить на них наиболее высокие вершины; внести уточнения о фактической высоте леса по данным геодезического обследования района или с использованием материалов по лесному хозяйству и т. п. Такая подготовка карты существенно облегчит правильный выбор местоположения пунктов.

При разработке проекта геодезической сети исходят прежде всего из ее назначения и требуемой точности построения. После решения этого вопроса приступают к выбору и обоснованию метода создания сети (триангуляция, трилатерация, полигонометрия, спутниковые методы и т. д.) с учетом физико-географических и климатических особенностей района работ. Наиболее целесообразным является такой метод, который при прочих равных условиях обеспечивает наиболее высокую точность построения сети при минимальных затратах труда, материалов, денежных средств и времени на ее создание. Для того чтобы выбрать оптимальный для данного района метод построения геодезической сети, разрабатывают несколько вариантов ее создания разными методами, а окончательное решение принимают на основе технико-экономических расчетов.

Для того чтобы обеспечить требуемую точность построения сети, необходимо позаботиться о том, чтобы с геометрической точки зрения схема сети отвечала предъявляемым к ней требованиям: треугольники в сетях триангуляции и трилатерации по

форме должны приближаться к равносторонним, желательно с углами не менее 40°; в центральных системах и геодезических четырехугольниках в порядке исключения отдельные углы допускаются до 20°; в полигонометрии ходы должны быть по возможности вытянутыми; сети, создаваемые методами триангуляции, полигонометрии и трилатерации, должны быть сплошными по построению с более или менее равномерным распределением пунктов в них.

В государственной геодезической сети базисные стороны и пункты Лапласа, определяемые на обоих концах каждой базисной стороны, должны быть равномерно распределены по всей сети, причем не реже чем через 100—150 км; для определения высот квазигеоида дополнительно к астрономо-геодезическим измерениям должна быть предусмотрена гравиметрическая съемка территории, выполняемая по определенной программе, или другие виды современных измерений.

Опорные геодезические сети разных классов проектируют в определенной последовательности: сначала проектируют сеть более высокого класса, например, 1, затем 2, 3 и т. д. При разработке графического проекта сети особое внимание следует обращать на выбор местоположения каждого отдельного пункта. Все пункты государственной геодезической сети должны быть расположены на командных вершинах местности. Это необходимо для того, чтобы, во-первых, обеспечить взаимную видимость между смежными пунктами при минимальных высотах геодезических знаков, во-вторых, возможность развития в будущем сети в любом направлении. Длины сторон между смежными пунктами, не согласованные с рельефом местности, неизбежно приведут к необходимости постройки знаков преувеличенной высоты или к отсутствию видимости между отдельными пунктами, что в обоих случаях недопустимо с технической и экономической точек зрения. Во всех случаях геодезические пункты должны находиться в таких местах, где будет обеспечена сохранность их положения в плане и по высоте в течение длительного времени.

Для того чтобы ослабить влияние внешней среды на результаты высокоточных угловых измерений и азимутальных определений в триангуляции и полигонометрии 1 класса требуется, чтобы визирные лучи проходили над препятствиями на высоте не ниже 4 м в южных и степных районах и не менее 2 м в остальных. При определении азимутов Лапласа следует избегать направлений, идущих параллельно берегам больших водоемов, рек, вдоль горных хребтов и т. п., так как в этом случае возможно появление значительных ошибок из-за рефракции.

Наиболее дорогостоящим видом геодезических работ при создании опорных сетей является постройка геодезических знаков (табл. 7). Определение средней стоимости основных видов

Таблица 7

Показатель	Район					
	1	2	3	4	5	6
Средняя высота сигналов, м	26	22	14	11	10	Простые пирамиды
Средняя стоимость работ, руб.:						
постройка сигнала	1540	1608	1000	1370	484	190
угловые измерения на пункте сети 2 класса	467	561	585	857	238	309
угловые измерения на пункте сети 3 класса	149	149	155	286	70	92

работ в сетях триангуляции 2 и 3 классов проводилось в шести районах страны с разными физико-географическими условиями: 1 — таежные районы на севере Европейской части СССР; 2 — приенисейская тайга; 3 — предгорья Саян; 4 — северо-восток Якутской АССР; 5 — степные районы Северного Казахстана; 6 — районы песчаных пустынь Средней Азии [4].

Поскольку на постройку геодезических знаков расходуется в среднем 50—60 % всех затрат на создание сети, необходимо уделять самое серьезное внимание выбору мест для установки пунктов на местности с целью снижения их высоты. В общем случае при работах в лесных районах замена метода триангуляции методом полигонометрии ведет к некоторому снижению высот знаков.

При проектировании сетей триангуляции или трилатерации разных классов важное значение имеет обеспечение надежной привязки сетей более низкого класса к сетям более высокого класса. Привязку следует делать к сторонам сети, а не к отдельным пунктам (рис. 23). Рекомендуются следующие схемы построения сетей триангуляции 3—4 классов (рис. 24).

В результате разработки графического проекта должна быть составлена на карте или в масштабе схема построения опорной геодезической сети. На этой схеме должно быть показано размещение базисных сторон и пунктов Лапласа (φ, λ, α), промежуточных астрономических пунктов (φ, λ), а также площади, покрываемые гравиметрической съемкой. В приложении к этой схеме указывают измеряемые в сети величины (углы, базисные стороны, астрономические широты, долготы и азимуты и т. п.), а также средние квадратические ошибки измерений этих величин в соответствии с действующими нормативными документами ГУГК.

Следующим этапом разработки и технико-экономического обоснования проекта является априорная оценка точности построения запроектированной сети. Оценку точности выполняют

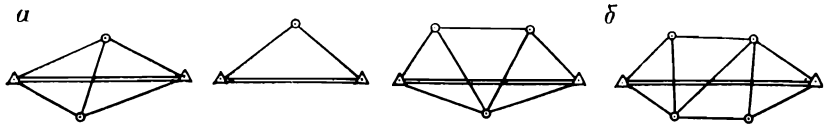


Рис. 23. Схемы привязки геодезических сетей к сторонам (*а*) и пунктам (*б*) триангуляции высшего класса

на ЭВМ, используя алгоритм параметрического метода уравнивания. В результате оценки точности вычисляют средние квадратические ошибки координат определяемых пунктов, длин и дирекционных углов сторон между смежными пунктами, а также диагоналей между несмежными пунктами, если это необходимо. Полученные ошибки сопоставляют с допустимыми, установленными в задании на проектирование сети. Если они не отвечают установленным требованиям, то проект построения сети корректируют надлежащим образом и повторяют оценку точности.

На заключительном этапе проектирования разрабатывают экономическое обоснование проекта создания сети, рассматривают вопросы охраны труда, техники безопасности, устанавливают сроки выполнения работ и т. д.

Созданный проект построения опорной геодезической сети является только лишь одним из возможных ее вариантов на данном объекте и быть может не самым выгодным с технико-экономической точки зрения. Для выбора оптимального варианта построения сети с точки зрения минимальных затрат труда, материалов, денежных средств и сроков исполнения всех работ при непременном обеспечении требуемой точности сети следует составить несколько вариантов ее построения разными мето-

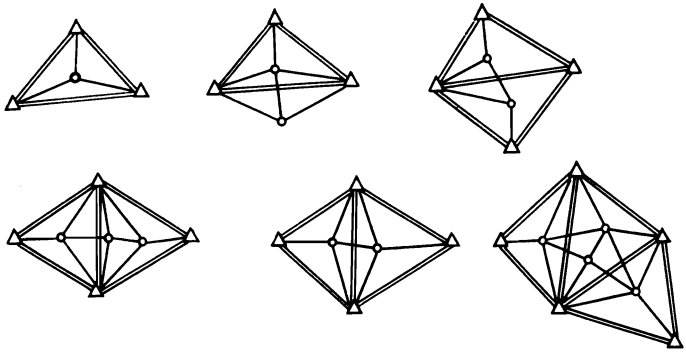


Рис. 24. Типовые схемы построения сетей триангуляции 3, 4 классов

дами, в том числе и методами космической геодезии, при различном размещении в ней азимутов и базисных сторон, а также при разном составе и объеме измеряемых элементов.

§ 22. РЕКОГНОСЦИРОВКА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПУНКТОВ

Проект геодезической сети, составленный в камеральных условиях нуждается в проверке и уточнении на местности. С этой целью выполняют рекогносцировку пунктов. Основными задачами ее являются: выбор конкретных мест положения геодезических пунктов на местности в соответствии со схемой построения сети; окончательный расчет высот геодезических знаков; выбор типов геодезических знаков и подземных центров, определение глубины закладки последних; уточнение общей сметы расходов с учетом дополнительных данных по организации работ, полученных в процессе рекогносцировки.

При рекогносцировке допускается частичное изменение проекта сети, если это связано со значительным уменьшением высот геодезических знаков и обеспечением лучшего доступа к пунктам. Существенное изменение проекта сети не разрешается, поскольку может привести к ухудшению геометрической схемы и точности построения сети. Уточненный в результате рекогносцировки проект должен представлять собой наилучший вариант построения геодезической сети в техническом, экономическом и организационном отношениях.

Пункты геодезической сети должны находиться на наиболее высоких вершинах местности. При выборе местоположения пункта необходимо соблюдать следующие требования: пункты нельзя располагать вблизи инженерных сооружений и жилых зданий, железных и автомобильных дорог, линий высокого напряжения, телеграфных и телефонных линий, трубопроводов и т. п.; не следует устанавливать пункты на землях, занятых ценными сельскохозяйственными культурами, на болотах, оползнях, в поймах, а также на заливаемых в половодье и других местах, где не может быть гарантирована долговременная сохранность подземных центров и наружных знаков. Одновременно с выбором места установки геодезического пункта намечают места для закладки ориентирных пунктов, а на пунктах Лапласа — для астрономических столбов.

Выбранное местоположение геодезического пункта (а также ориентирных пунктов, астростолбов) обозначают на местности доступными средствами, например, курганами из камней, вехами, деревянными столбами и т. п.

В зависимости от конкретных обстоятельств (сроки исполнения работ, рельеф местности и т. д.) рекогносцировка пунктов может выполняться либо до постройки геодезических знаков, либо одновременно с ней. Первый вид рекогносцировки (до по-

стройки знаков) применяется только в открытых (незалесенных) районах, в том числе равнинных, всхолмленных и горных, где видимость между смежными пунктами и высоты знаков устанавливаются с земли или невысоких мачт, лестниц и т. п. Второй вид рекогносцировки (одновременно с постройкой) более прогрессивен, так как имеет ряд преимуществ по сравнению с первым. Применяется он в закрытой или полузакрытой местности. Используя построенные знаки, рекогносцировщик может по каждому направлению определить наличие препятствий между пунктами и с помощью теодолита произвести измерения для определения их высот. Практика показала, что ведение рекогносцировки в комплексе с постройкой знаков дает хорошие результаты: практически исключаются случаи недостаточно точного определения высот знаков, приводящие к отсутствию видимости между пунктами.

Однако следует отметить, что одновременное ведение рекогносцировки и постройки знаков допустимо только при условии детально разработанного технического проекта на топографической карте наиболее крупного масштаба.

До выезда на полевые работы рекогносцировщик должен тщательно изучить составленный проект геодезической сети, а также исходные материалы, особенно топографические карты. Снаряжение, оборудование и приборы для рекогносцировки подбирают в зависимости от физико-географических особенностей района работ и объема задания по рекогносцировке.

Различают два метода ведения рекогносцировки: визуальный и инструментальный. При работе в открытой местности (равнинной, холмистой, горной) с достаточным числом ориентиров на местности, когда нетрудно установить местоположение каждого пункта, предусмотренного проектом, высоты геодезических знаков определяют визуально с земли или с невысокой мачты путем непосредственного измерения высоты той точки, с которой открывается видимость по всем направлениям на окружающие пункты. Такой метод рекогносцировки называют визуальным.

При работе в залесенной равнинной и холмистой местности, а также в открытой равнинной местности с недостаточным числом ориентиров, в том числе в пустынях, полупустынях и т. д., определить местоположение пунктов и высоты знаков визуальным методом невозможно или чрезвычайно сложно даже при подъеме на деревья и мачты. Для определения местоположения запроектированных пунктов в таких случаях применяют инструментальные методы. Работу начинают от исходного пункта, положение которого на карте и на местности однозначно определено. По карте определяют длину и азимут стороны, соединяющей определяемый пункт с исходным. Используя эти данные, прокладывают теодолитные, мензульные ходы или вы-

полняют другого вида геодезические построения, с помощью которых находят на местности участок для установки определяемого пункта. После детального обследования данного участка и прилегающей к нему местности выбирают самое возвышенное место для установки геодезического пункта. В залесенной местности для определения высот нередко применяют барометрическое нивелирование.

При отсутствии прямой видимости между пунктами для вычисления высот знаков, между которыми находится препятствие, нужно знать расстояния и превышения между препятствиями и пунктами. Перед рекогносцировщиком возникает задача определения на местности местонахождения препятствия, а также расстояний и превышений между препятствием и пунктами. Эта задача решается путем изучения профиля местности по створу между пунктами, что при наличии топографических карт масштаба 1 : 25 000—1 : 10 000 довольно просто. В противном случае эту задачу решают, применяя инструментальные методы: строят простейшие геометрические сети (в открытой местности) с помощью мензулы и кипрегеля; прокладывают высотно-теодолитные ходы; выполняют тригонометрическое или барометрическое нивелирование. Выбор того или иного метода зависит от особенностей района работ. Точность измерений во всех случаях должна обеспечивать определение высот геодезических знаков с ошибкой не более 2—3 м.

Для определения превышений между препятствием и местами установки пунктов методом тригонометрического нивелирования зенитные расстояния следует измерять вечером или утром в периоды наиболее четких и спокойных изображений визирных целей.

Приведенные выше сведения свидетельствуют о том, что инструментальный метод рекогносцировки в организационном отношении несравненно сложнее визуального и требует от рекогносцировщика умения хорошо ориентироваться на местности при весьма ограниченном числе ориентиров (рек, озер, холмов и т. д.).

От качества проведения рекогносцировки во многом зависят качество и точность построения сети, а также объем и стоимость полевых работ. Поэтому рекогносцировку поручают высококвалифицированным инженерам, имеющим опыт проектирования геодезических сетей и производства основных геодезических работ.

При рекогносцировке вместо обычных геодезических приборов целесообразно применять специальные, например, при работе на мачте или дереве — специальную буссоль М. С. Успенского; легкий мензульный планшет, который легко крепится к стволу дерева; вертикальный круг для рекогносцировки и др. Применение специальных приборов облегчает работу рекогнос-

цировщика, способствует повышению производительности труда и улучшает качество результатов рекогносцировки.

Для выбора наилучшего варианта построения фигур геодезической сети (треугольников, четырехугольников и т. п.), а также для установления видимости между пунктами при рекогносцировке тщательно изучают горизонт, видимый на каждом данном пункте с земли в открытой местности или при подъеме на мачту или дерево в закрытой и полузакрытой местности. Видимый горизонт зарисовывают в рекогносцировочном журнале по секторам, в пределах которых возможно проектировать направления на смежные пункты сети; в каждом секторе указывают дальность видимости до возвышенных участков местности; измеряют и записывают магнитные азимуты, определяющие положение каждого сектора.

Выбор местоположений пунктов и особенно базисных сторон, на конечных пунктах которых будут определяться астрономические азимуты, необходимо осуществлять с учетом ослабления влияния боковой рефракции на результаты угловых измерений и азимутальных определений. С этой целью пункты устанавливают в таких местах, чтобы связывающие их направления не проходили вблизи склонов гор и холмов, вдоль берегов больших рек, озер, водохранилищ и т. п.

Для пунктов сети следует выбирать места, обеспечивающие сохранность геодезических знаков и неизменность положения подземных центров в плане и по высоте в течение длительного времени. Тип центра и глубину его закладки на каждом пункте рекогносцировщик устанавливает, руководствуясь указаниями технического проекта и используя данные о глубине промерзания или оттаивания грунта, виде грунтов (скальные, глинистые, песчаные и т. п.), о глубине залегания грунтовых вод при работах в равнинной местности и т. д.

После того как выбрано место для постройки геодезического знака (сигнала, пирамиды и т. п.), рекогносцировщик намечает места для установки двух ориентирных пунктов на расстоянии 500—1000 м от него, причем так, чтобы они были видны с земли от центра пункта и была обеспечена их долговременная сохранность. В залесенной местности расстояния до ориентирных пунктов могут быть уменьшены до 250 м, если это связано с рубкой лесных просек. В открытой местности ориентирными пунктами могут служить пункты геодезической сети, находящиеся на расстоянии не более 3 км от геодезического знака.

В обязанности рекогносцировщика входит также выяснение местонахождения лесоматериалов, условий их заготовки и транспортировки, а также сбор других сведений, необходимых для уточнения и реализации проекта геодезической сети.

Во избежание несчастных случаев при рекогносцировке пунктов необходимо строго соблюдать установленные правила

по технике безопасности, особенно при установке мачт, подъеме на деревья и мачты, переходе с пункта на пункт, при работе в горах, а также в малообжитых и труднодоступных районах.

§ 23. РАСЧЕТ ВЫСОТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗНАКОВ

На пунктах геодезической сети строят геодезические знаки такой высоты, чтобы визирные лучи при угловых и линейных измерениях проходили по каждому направлению на заданной минимальной высоте над препятствием, не касаясь его. Расчет высот знаков наиболее часто выполняют по формулам В. Н. Шишкина как наиболее простым. Задачу решают в два приближения. Сначала определяют приближенные высоты знаков l_1' и l_2' для каждой пары смежных пунктов, а затем корректируют их и находят окончательные значения высот l_1 и l_2.

Приближенные высоты знаков l_1' и l_2' (рис. 25) вычисляют по формулам

$$l_1' = h_1 + a + v_1; \quad l_2' = h_2 + a + v_2; \tag{4.1}$$

где h_1 и h_2 — превышения вершины препятствия в точке C (с учетом высоты леса) над основаниями первого и второго знаков соответственно; a — установленная действующей инструкцией допустимая высота происхождения визирного луча над препятствием; v_1 и v_2 — поправки за кривизну Земли и рефракцию.

Знаки при h_1 и h_2 определяют по знакам разностей

$$h_1 = H_c - H_1; \quad h_2 = H_c - H_2, \tag{4.2}$$

где H_c — высота вершины препятствия в точке C; H_1 и H_2 — высота земной поверхности в местах установки первого и второго знаков. Превышения h_i определяют по карте крупного масштаба, либо из обработки измерений, выполненных в процессе

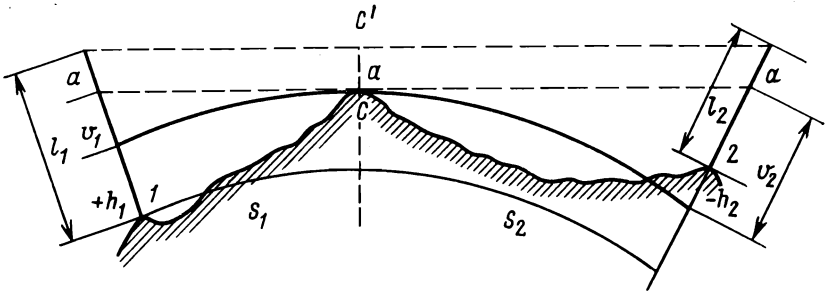


Рис. 25. Схема определения высоты геодезических знаков

Таблица 8

Точки	Расстояние s_1 (s_2), км	Высота точек H, м	Превышения h_i, м	a, м	v, м	Приближенная высота l_1' (l_2'), м	Откорректированная высота l_1 (l_2), м
1		309				14,3	16,2
	8		+6	+4	+4,3		
C		315					
	15		−7	+4	+15,2	12,2	8,6
2		322					
					Σl^2	353,3	336,4

рекогносцировки пунктов. Поправки v за кривизну Земли и рефракцию вычисляют по формуле

$$v = \frac{1-k}{2R} s^2, \tag{4.3}$$

где k — коэффициент земной рефракции; R — радиус Земли; s — расстояние от препятствия до соответствующего пункта. При $k=0{,}13$ и $R=6371$ км формула (4.3) примет вид

$$v = 0{,}068 s^2, \tag{4.4}$$

где v получают в метрах, а s выражено в километрах.

В том случае, если превышения h_1 и h_2 имеют один и тот же знак, а расстояния s_1 и s_2 существенно разные, высоты знаков l_1' и l_2', вычисленные по формулам (4.1), будут значительно отличаться друг от друга: один знак низкий, а другой чрезмерно высокий. Высокие знаки строить экономически невыгодно. Поэтому высоты знаков, вычисленные по формулам (4.1), необходимо откорректировать так, чтобы сумма квадратов окончательных высот знаков l_1 и l_2 была наименьшей, т. е. $\Sigma l^2 = \min$. При соблюдении данного требования расходы на постройку данной пары знаков будут, как правило, наименьшими, поскольку стоимость постройки каждого знака при прочих равных условиях почти пропорциональна квадрату его высоты (см. табл. 7).

Откорректированные высоты каждой пары знаков на концах стороны при соблюдении условия $\Sigma l^2 = \min$ и выполнении требования о прохождении визирного луча на заданной высоте a над препятствием (табл. 8) вычисляются по формулам

$$l_1 = s_2 D; \quad l_2 = s_1 D; \quad D = \frac{s_2 l_1' + s_1 l_2'}{s_1^2 + s_2^2}. \tag{4.5}$$

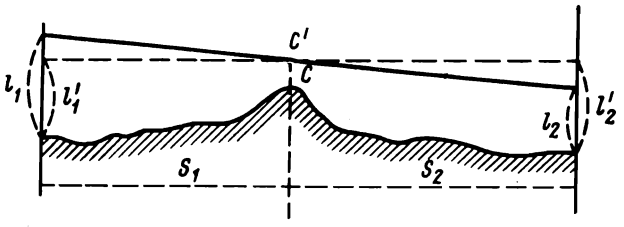


Рис. 26. Схема корректирования высоты геодезического знака

Если стоимость доставки строительных материалов к первому и второму пунктам существенно разная, то высоты, полученные по формулам (4.5), следует откорректировать еще раз с учетом данного фактора.

На пункте с n направлениями будет получено n значений высоты знака, так как вычисления по каждой отдельной стороне (направлению) дадут разные значения высоты знака на данном пункте. За окончательную высоту принимают ту, при которой обеспечивается видимость по всем направлениям при минимальной (допустимой) высоте прохождения визирных лучей над препятствиями.

В практике рекогносцировочных работ неизбежны случаи, когда высота знака на одном пункте, например, втором, задана (или знак уже построен) и равна l_2. Требуется определить высоту знака l_1 на первом пункте. Вычислим по формулам (4.1) приближенные высоты знаков l_1' и l_2'. Из подобия треугольников (рис. 26) получим

$$\frac{l_1 - l_1'}{l_2' - l_2} = \frac{s_1}{s_2}. \tag{4.6}$$

Отсюда найдем искомую высоту знака:

$$l_1 = l_1' + (l_2' - l_2)\frac{s_1}{s_2}. \tag{4.7}$$

Методы определения однозначных значений высот знаков на всех пунктах сети при требовании их наименьшей высоты и минимальных денежных затрат на постройку знаков нуждаются в дальнейшем совершенствовании.

§ 24. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЗНАКИ

Каждый пункт геодезической сети закрепляют на местности заложенным в грунт центром, несущим металлическую марку с указанием точки, к которой относятся координаты пункта. Над центром пункта сооружают геодезический знак требуемой

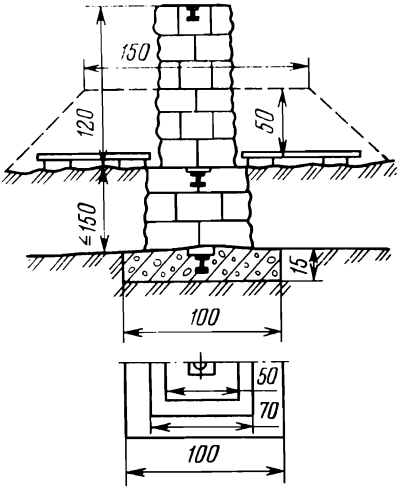
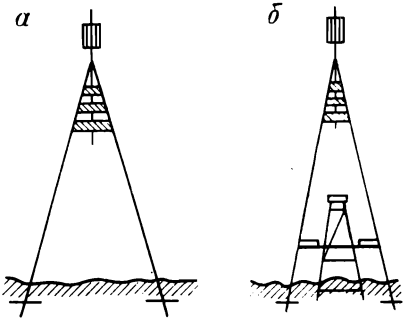


Рис. 27. Тур на геодезическом пункте

Рис. 28. Простая пирамида (*а*) и пирамида со штативом (*б*)



высоты, несущий визирный цилиндр и имеющий столик для установки измерительных приборов, а также площадку для наблюдателя.

В геодезических сетях применяют знаки следующих типов: тур, пирамида (простая и со штативом), простой сигнал и сложный сигнал.

Туры (рис. 27) применяют на остроконечных вершинах гор, если видимость по всем направлениям открывается с Земли, а скальный грунт расположен на глубине не более 1,5 м (размеры на рисунках в см). Над туром устанавливают простую пирамиду с визирным цилиндром. Если построить пирамиду невозможно, то визирный цилиндр устанавливают непосредственно на тур.

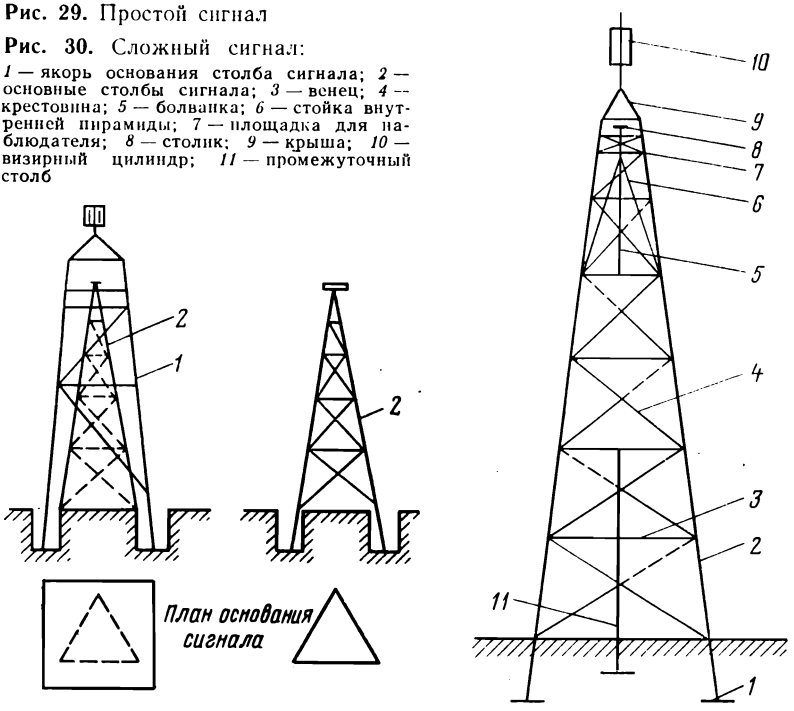
Простые пирамиды (рис. 28, *а*) строят в том случае, когда наблюдения по всем направлениям можно вести с тура или штатива. Если для обеспечения видимости на соседние пункты прибор требуется поднять над землей на 2—3 м, используют пирамиду с изолированным от нее штативом для установки приборов (рис. 28, *б*). Площадку для наблюдателя крепят к столбам пирамиды, изолируя ее от штатива. Пирамиды строят как деревянные, так и металлические высотой 5—8 м.

Простой сигнал (рис. 29) состоит из двух изолированных друг от друга пирамид: внешней *1*, несущей визирный цилиндр и площадку для наблюдателя, и внутренней *2* со столиком для установки приборов. Внутренняя пирамида имеет трехгранную форму, а внешняя трехгранную или четырехгранную. Расстояние между основными столбами в основании внешней пирамиды принимают на 2 м больше $^1/_5$ высоты до площадки наблюда-

Рис. 29. Простой сигнал

Рис. 30. Сложный сигнал:

1 — якорь основания столба сигнала; *2* — основные столбы сигнала; *3* — венец; *4* — крестовина; *5* — болванка; *6* — стойка внутренней пирамиды; *7* — площадка для наблюдателя; *8* — столик; *9* — крыша; *10* — визирный цилиндр; *11* — промежуточный столб



теля. Простые сигналы строят высотой до 10 м; они могут быть деревянными и металлическими, постоянными и разборными. Разборные знаки применяют в районах с благоприятными условиями для переездов на автотранспорте. Нередко внутренняя пирамида является постоянной на пункте, а внешняя разборной, которую перевозят с пункта на пункт.

Сложный сигнал (рис. 30) по конструкции отличается от простого тем, что внутренняя пирамида, несущая столик для установки приборов, опирается не на землю, а на основные столбы сигнала (на 6 м ниже площадки для наблюдателя). Промежуточные столбы знака улучшают качество постройки сигнала. Сложные сигналы строят высотой от 11 до 40 м. Они имеют трехгранную конструкцию, их собирают на земле (в горизонтальном положении), а затем устанавливают вертикально в полностью завершенном виде. В этом случае не возникает необходимости в выполнении опасных верхолазных работ, а также повышается производительность труда при постройке знаков.

Ширина треугольного основания внешней пирамиды, сложного сигнала равна $^1/_4$ его высоты до площадки наблюдателя плюс 2 м.

Основные требования к геодезическим сигналам. Геодезические сигналы (простые и сложные) должны способствовать до-

стижению высокой точности измерений и обеспечивать безопасное ведение работ. Геодезический сигнал должен быть прочным, устойчивым и жестким.

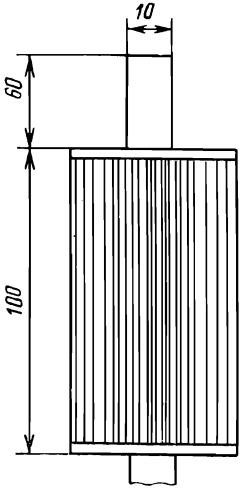
Под *прочностью сигнала* понимают его способность сопротивляться действующим на него постоянным (масса деталей сигнала) и временным нагрузкам (напор ветра, масса приборов и людей, находящихся на сигнале, и т. п.), под воздействием которых могут деформироваться отдельные детали и узлы сигнала. Сигнал считается прочным, если он не разрушается и в нем не возникают практически значимые остаточные деформации.

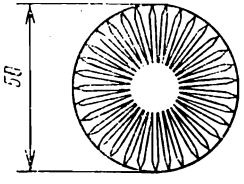
Устойчивость сигнала — это его способность сохранять свое положение неизменным при действии на сигнал ветровой нагрузки. Ветер может опрокинуть сигнал, если его конструкция неудачна, а основание плохо закреплено в грунте. Устойчивость сигнала обеспечивается необходимой шириной его основания и глубиной заложения якорей основных столбов сигнала. Ширина основания сигнала больше на 2 м $^1/_5$—$^1/_4$ высоты до площадки наблюдателя, о чем было сказано выше. Глубина ям для установки основных столбов сигналов в районах сезонного промерзания грунта следующая (в м):

Простые пирамиды	1
Простые сигналы	1,5
Сложные сигналы до 25 м	
основные столбы	2
промежуточные	1,5
Сложные сигналы более 25 м	
основные столбы	2,5
промежуточные	2

Основные столбы в нижней части снабжают якорями и устанавливают на прочные щиты (помосты), укладываемые на дно ям; ямы засыпают грунтом, который плотно утрамбовывают.

Под *жесткостью сигнала* понимают его способность сопротивляться возможным деформациям, возникающим в результате воздействия внешних факторов, и восстанавливать свое первоначальное положение после прекращения действия этих сил. Ветровая нагрузка на сигнал вызывает не только опрокидывание сигнала, но еще и его изгиб и колебание. Жесткость сигнала характеризуется величиной изгиба и частотой его колебаний. Изгиб обусловливает линейное перемещение и небольшой поворот верхней части сигнала в плоскости горизонта, а вибрация увеличивает амплитуду колебаний изображений визирных целей в поле зрения трубы теодолита. Жестким считается сигнал, возможное смещение столика которого в плоскости горизонта не превышает 1 см и угловые измерения возможны при скорости ветра до 5 м/с.





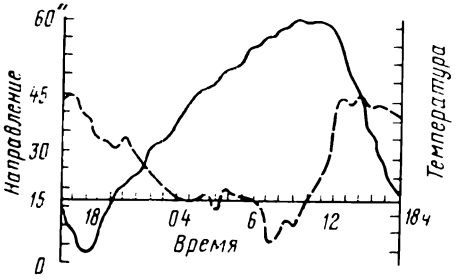


Рис. 31. График кручения геодезического сигнала

Рис. 32. Малофазный визирный цилиндр Шишкина (размеры в см).

Расчет конструкций геодезических сигналов на прочность, устойчивость и жесткость выполняют на основе положений строительной механики и сопротивления материалов.

Кручение сигнала. Под воздействием внешних факторов (температуры, влажности воздуха, ветра и т. п.) верхняя часть сигнала несколько деформируется. В результате этого столик сигнала вместе с установленным на нем теодолитом постепенно поворачивается по азимуту. Это явление принято называть кручением сигнала. Величина и знак кручения сигнала изменяются в течение каждых суток (рис. 31), причем без какой-либо четко выраженной закономерности. Исследования, выполненные М. Н. Соколовым, показали, что азимутальный разворот столика высокого сигнала при неблагоприятных обстоятельствах может достичь в течение дня нескольких угловых минут. Например, за 10 мин времени — 10″. В качестве примера приведен график кручения одного из сигналов высотой 25 м по наблюдениям Е. Г. Ларченко. На этом графике сплошная линия — суточный ход кручения сигнала, а пунктирная — суточный ход температуры воздуха.

Кручение сигнала отрицательно влияет на точность угловых измерений; поэтому геодезические сигналы необходимо строить так, чтобы кручение было возможно меньше.

Визирные цели. Для производства угловых измерений в верхней части геодезического знака устанавливают визирную цель, которая должна удовлетворять следующим требованиям:

1. Форма, размеры и окраска визирной цели должны быть такими, чтобы можно было уверенно опознавать ее и точно на-

водить на нее зрительную трубу теодолита при расстояниях, соответствующих классу геодезической сети.

2. Визирная цель должна быть установлена вертикально, причем так, чтобы ее геометрическая ось проходила через марку подземного центра пункта.

3. По конструкции визирная цель должна быть малофазной, т. е. такой, чтобы систематические ошибки при угловых измерениях, возникающие из-за различия освещенности ее поверхности лучами Солнца, были близки к нулю.

Известно, что если визирная цель представляет собой сплошной круглый цилиндр, то ошибки в направлениях из-за различия яркости освещенной и теневой стороны такого цилиндра нередко превышают 1″. В настоящее время применяют малофазные визирные цели конструкции В. Н. Шишкина, представляющие собой цилиндр с радиально установленными пластинами, создающими равномерное теневое затемнение почти всей его поверхности (рис. 32). Размеры таких цилиндров зависят от длин сторон в сети. В данном случае приведены размеры цилиндра для пунктов триангуляции 1 класса. Визирные цилиндры Шишкина позволяют уменьшить ошибки за фазы визирных целей (из-за различия освещенности цели) до 0,2—0,4″.

§ 25. ЦЕНТРЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПУНКТОВ

Положение каждого пункта геодезической сети закрепляют на местности при помощи специального центра, закладываемого в грунт на глубину, как правило, не менее 1,5—2 м, а в отдельных районах — не менее 6 м.

В верхней части центра устанавливают на цементном растворе или приваривают к металлической трубе чугунную марку, на сферической поверхности которой имеется метка в виде отверстия диаметром 2 мм. К этой метке относят координаты пункта и результаты выполненных на нем измерений.

Поскольку подземные центры являются носителями координат и высот пунктов, они должны быть надежно закреплены на местности. Сохранность центра и неизменность его положения в грунте в плане и по высоте в течение возможно более длительного времени является важнейшим требованием, предъявляемым к центрам геодезических пунктов государственной геодезической сети, причем независимо от ее класса.

Для обеспечения долговременной сохранности центров их делают из высокопрочных строительных материалов: железобетонных пилонов и свай, асбоцементных и металлических труб, покрываемых антикоррозийными средствами; основание центра закрепляют якорным устройством и закладывают ниже границы промерзания грунтов (в средней полосе страны) или ниже границы оттаивания грунтов (в зоне многолетней мерзлоты).

Устойчивость центра в грунте зависит от многих факторов: от состава и свойств грунта (скала, суглинок, меловые отложения и т. п.), глубины промерзания и оттаивания грунта, изменения влажности грунта, изменения уровня грунтовых вод и др. Важнейшим является промерзание и оттаивание грунта. Основание центра всегда следует закладывать ниже границы промерзания или границы протаивания грунта.

Территория СССР отличается большим разнообразием физико-географических и климатических условий. Поэтому вопросам надежного закрепления и сохранности центров геодезических пунктов уделяют большое внимание. В этой области советскими геодезистами в течение почти четырех десятилетий велись специальные исследования, позволившие разработать центры оптимальных конструкций для разных районов страны, включая районы многолетней мерзлоты, сезонного промерзания грунтов, сыпучих песков, горные и т. п. Наиболее обстоятельные исследования были выполнены в ЦНИИГАиК под руководством В. В. Данилова, М. С. Успенского и др. Описание конструкций центров и технология их закладки в различных рай-

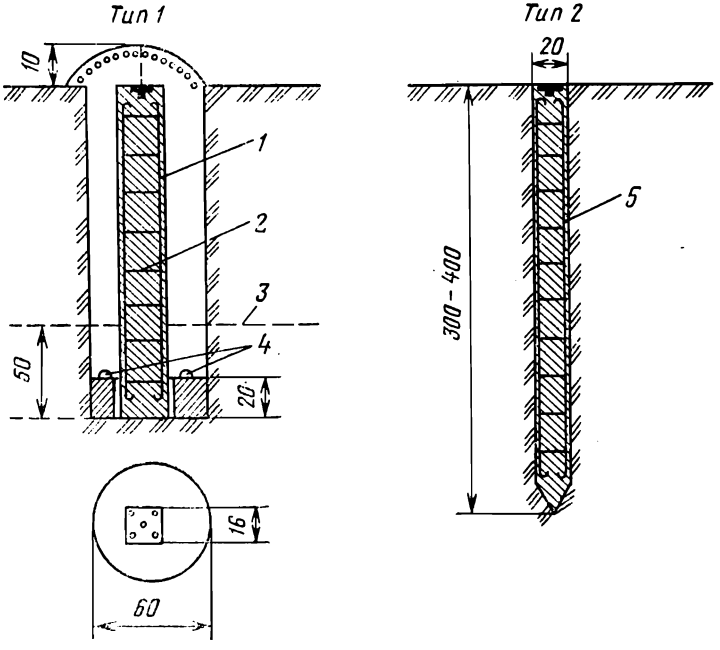


Рис. 33. Центры геодезических пунктов для районов с сезонным промерзанием грунтов:

1 — арматура ∅ 10—12 мм; *2* — арматурные хомутки ∅ 5—6 мм; *3* — граница промерзания грунта; *4* — железные скобы; *5* — железобетонная свая

онах страны дано в инструкции «Центры и реперы государственной геодезической сети СССР» (М., Недра, 1973).

Центры типа 1 (рис. 33) применяются в пределах южной зоны сезонного промерзания грунтов. Центр состоит из железобетонного пилона сечением 16×16 см (или асбоцементной трубы диаметром 14—16 см, заполненной бетоном) и бетонного якоря диаметром 50 см и высотой 20 см при закладке бурением или размером 50×50×20 см при закладке в котлован. Основание центра должно находиться ниже границы наибольшего промерзания грунта не менее чем на 0,5 м и во всех случаях не менее 1,5 м от поверхности земли.

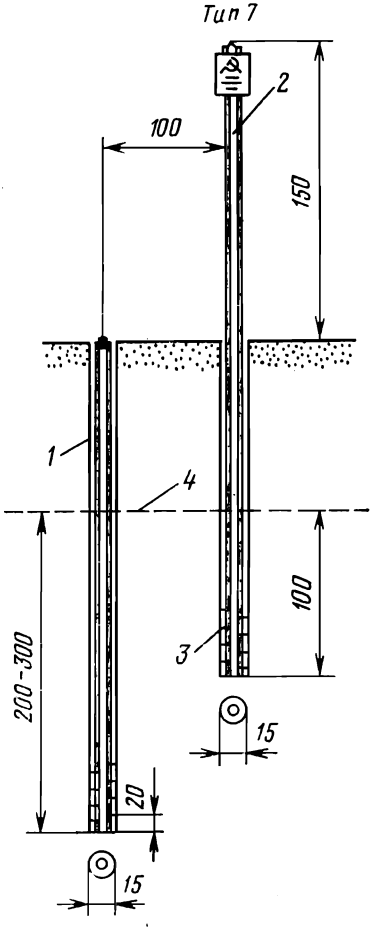
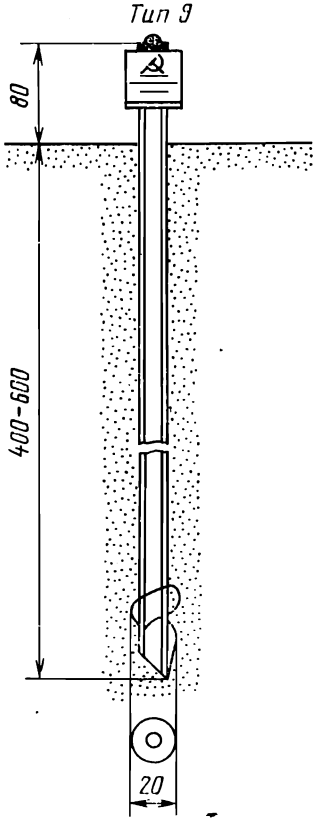


Рис. 34. Центр геодезического пункта для районов многолетней мерзлоты:
1 — металлическая труба; *2, 3* — опознавательный знак с якорем; *4* — граница оттаивания

Рис. 35. Центр геодезического пункта для районов с подвижными песками



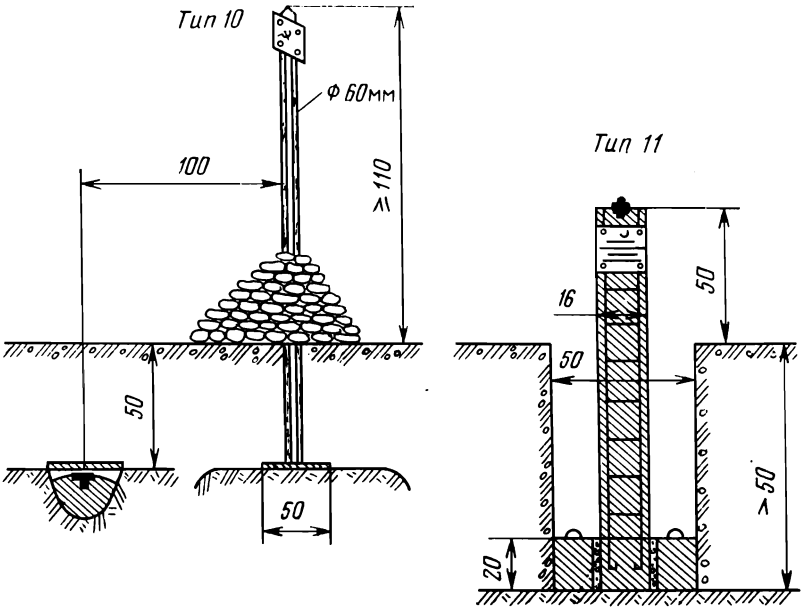


Рис. 36. Скальные центры

Центры типа 2 предназначены для всей области сезонного промерзания грунтов. Центры представляют собой железобетонную сваю сечением 20×20 см и длиной 3—4 м.

Центры типа 7 (рис. 34) применяются в северной и средней частях зоны многолетней мерзлоты. Центр состоит из металлической трубы диаметром 60 мм с толщиной стенок не менее 3 мм. Труба в верхней части имеет марку, а в нижней части многодисковый якорь, состоящий из металлического диска и 8 полудисков толщиной 5—6 мм и диаметром 150 мм. Трубу цементным раствором не заливают. Приваренные на концах трубы марка и нижний фланец должны обеспечивать герметичность полости трубы. На наружную и внутреннюю поверхность трубы наносят антикоррозийное покрытие. Основание трубы должно находиться ниже границы деятельного слоя земной поверхности на 2 м при глубине протаивания грунта до 1,25 м и на 3 м при глубине протаивания более 1,25 м. Верхняя часть центра должна находиться на уровне земной поверхности. Скважину для закладки центров типа 7 выполняют бурением или протаиванием грунта горячим паром с помощью специальных устройств. На дно скважины перед опусканием в нее центра заливают 20—25 литров (два ведра) грунта густой консистенции, в который вдавливают многодисковый якорь до основания скважины. Верхнюю часть скважины заполняют также грунтом.

Центры типа 9 (рис. 35) применяются в районах подвижных песков. Центр состоит из оцинкованной трубы диаметром 60 мм при толщине стенок не менее 3 мм. К верхней части трубы, выступающей на 80 см над земной поверхностью, приваривают марку. Нижняя часть трубы имеет однолопастный винт диаметром 15—20 см для забуривания центра, труба бетоном не заливается. Основание центра забуривают на глубину не менее 6 м.

Скальные центры типа 10 (рис. 36) применяют в горных районах при залегании скальной породы на глубине до 0,5 м. Центр представляет собой марку, зацементированную в скальный грунт. При залегании скальной породы на глубине свыше 0,5 м применяют *центры типа* 11.

В тех случаях, когда верхняя часть центра размещается на уровне земной поверхности или ниже и над центром отсутствует постоянный металлический знак, на расстоянии 1—1,5 м от центра устанавливают железобетонный опознавательный столб (металлическую трубу с бетонным основанием) с чугунной или силуминовой охранной плитой, обращенной в сторону центра. На плите должна быть надпись, сделанная литыми буквами: «Геодезический пункт. Охраняется государством». Если верхняя часть центра выступает на 0,5—0,8 м над земной поверхностью, охранную плиту крепят непосредственно к центру (см. рис. 35).

Глава 5

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

§ 26. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Оценка точности геодезических сетей имеет большое теоретическое и практическое значение. Она выполняется как на стадии проектирования, когда разрабатывается оптимальный в определенном смысле вариант построения сети, так и после построения и уравнивания сети.

Оценка точности, выполняемая на заключительном этапе уравнительных вычислений, дает наиболее достоверные данные о реальной точности элементов построенной на местности геодезической сети. Они необходимы для правильного использования геодезических сетей при решении соответствующих научных и народнохозяйственных задач геодезическими методами, требующих определения с заданной точностью длин и азимутов сторон, координат и высот геодезических пунктов.

Особо следует отметить значение оценки точности геодезических сетей на стадии их проектирования. Благодаря оценке точ-

ности представляется возможность решить задачи, имеющие большое техническое и экономическое значение:

изучить закономерности действия ошибок измерений при передаче длин и азимутов сторон, координат пунктов в геодезических сетях разного вида;

установить выгоднейшую форму треугольников в триангуляции и трилатерации, обеспечивающих наиболее высокую точность передачи длин сторон, азимутов и координат пунктов;

рассчитать необходимую частоту размещения базисных сторон и азимутов Лапласа в сети;

определить требуемую точность измерения горизонтальных углов, длин сторон и азимутов Лапласа в проектируемой сети, а затем на основе этих данных сделать правильный выбор приборов и методов измерений;

путем моделирования на ЭВМ определить на основе оценки точности наиболее рациональный вариант построения сети при разном составе измерений и разном размещении в ней базисных сторон, азимутов, пунктов, определяемых из наблюдений ИСЗ, и т. п., позволяющий при прочих равных условиях получить уравненные элементы сети с наивысшей точностью, достигаемой в массовых работах при наименьших затратах труда, денежных средств и времени на их производство;

проверить, будет ли достигнута заданная точность определения уравненных элементов в наиболее слабом месте сети при выбранной схеме и методах построения сети с учетом намеченного состава и точности измерений.

В недалеком прошлом до появления ЭВМ априорную оценку точности геодезических сетей выполняли по приближенным формулам, которые учитывают не все геометрические и тем более корреляционные связи уравненных величин в сети и выводятся, как правило, в предположении, что сеть состоит из геометрических фигур правильной формы (равносторонних треугольников, вытянутых ходов полигонометрии и т. п.). Несмотря на эти недостатки приближенные формулы, применяемые ранее для априорной оценки точности построения государственной геодезической сети, сыграли важную роль при решении теоретических вопросов, связанных с проектированием геодезических сетей разных классов в различных районах страны. Многие из этих формул и по сей день имеют важное теоретическое и практическое значение.

Существенный вклад в разработку методов априорной оценки точности построения рядов триангуляции внесли советские ученые Ф. Н. Красовский, А. А. Изотов и др. Обширные исследования по оценке точности сетей полигонометрии были выполнены В. В. Даниловым, А. С. Чеботаревым, Б. А. Литвиновым, А. Ш. Татевяном и др. Оценке точности сплошных сетей триангуляции посвящены обстоятельные работы К. Л. Прово-

рова, А. И. Дурнева, а рядов и сетей трилатерации — С. А. Бутлера, К. Л. Проворова, С. Г. Судакова и др.

В настоящее время априорную оценку точности построения геодезических сетей выполняют на ЭВМ по методу наименьших квадратов с учетом всех геометрических и корреляционных связей между уравненными элементами. Средняя квадратическая ошибка m любого уравненного элемента в общем случае может быть записана в виде двух слагаемых

$$m^2 = m_{\text{исх}}^2 + m_F^2,$$

где $m_{\text{исх}}$ — средняя квадратическая ошибка, отражающая влияние ошибок исходных данных, m_F — средняя квадратическая ошибка оцениваемой функции F уравненных величин, вычисляемая по формуле

$$m_F = \mu\sqrt{1/P_F}, \tag{5.1}$$

где μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса; $1/P_F$ — обратный вес функции F. Формула (5.1) применяется для расчетов как на стадии проектирования геодезической сети, так и на стадии окончательного уравнивания сети за все возникающие в ней геометрические условия. Разница состоит только в способах определения ошибки единицы веса, так как обратный вес $1/P_F$ в обоих случаях вычисляется одинаково и получает одно и то же значение. При уравнивании сети ошибку единицы веса находят по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{r}}, \tag{5.2}$$

где v — поправки из уравнивания сети в непосредственно измеренные с весами p величины (направления, расстояния, азимуты и т. п.); r — число избыточных измерений в сети.

На стадии проектирования геодезической сети ошибку единицы веса μ задают, считая, что ее величина известна из имеющегося опыта построения аналогичных сетей.

При заданной ошибке единицы веса μ задача оценки точности любых элементов проектируемой геодезической сети сводится к вычислению обратных весов $1/P_F$ этих элементов. Для того чтобы вычислить обратный вес любого элемента сети как функции F уравненных величин, необходимо: составить уравнения поправок для всех подлежащих измерению величин (направлений, азимутов, длин сторон, включая базисные и т. п.); вычислить коэффициенты уравнений поправок по приближенным координатам пунктов, определенным по карте; установить вес каждой измеряемой величины; с учетом весов измеряемых величин составить матрицу A коэффициентов уравнений поправок, а затем перейти по известным правилам к матрице N

коэффициентов нормальных уравнений; найти обратную матрицу $Q=N^{-1}$, т. е. матрицу весовых коэффициентов и, используя ее, вычислить обратный вес $1/P_F$ каждого оцениваемого элемента в сети по формуле (5.20) или (5.21), а затем и среднюю квадратическую ошибку (5.1) оцениваемого элемента.

§ 27. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСА ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН

Достоверность и точность уравненных элементов геодезической сети во многом зависит от правильности установления реального веса каждой измеряемой величины. В общем случае вес каждой непосредственно измеренной величины должен вычисляться по формуле

$$p=\frac{c}{\sigma^2}, \tag{5.3}$$

где c — постоянная для сети безразмерная величина ($c=\text{const}$), устанавливаемая до некоторой степени произвольно; σ^2 — дисперсия измеряемой величины. Однако дисперсия σ^2 остается неизвестной, например, вследствие наличия в результатах измерений систематических ошибок. Поэтому вместо σ^2 используют эмпирическую дисперсию m^2 результатов измерений.

На стадии проектирования средние квадратические ошибки m измеряемых величин задают с учетом имеющегося опыта измерений таких величин в ранее построенных геодезических сетях. В этом случае вес запланированных к измерению в проектируемой сети горизонтальных направлений N, азимутов α, расстояний s вычисляют по формулам

$$p_N=\frac{c}{m_N^2}, \quad p_\alpha=\frac{c}{m_\alpha^2}, \quad p_s=\frac{c}{m_s^2}. \tag{5.4}$$

Горизонтальные направления на пунктах геодезической сети каждого данного класса измеряются равноточно. Поэтому целесообразно принять $c=m_n^2$. В этом случае формулы (5.4) примут вид, в котором они чаще всего применяются на практике:

$$p_N=1, \quad p_\alpha=\frac{m_N^2}{m_\alpha^2}, \quad p_s=\frac{m_N^2}{m_s^2}. \tag{5.5}$$

Средние квадратические ошибки измеренных направлений, азимутов, длин сторон можно найти разными способами и получить соответственно разные значения ошибки для одной и той же величины. Например, ошибку измеренного угла в триангуляции можно найти из уравнивания угловых измерений на станции (m_1) и вычислить ее по невязкам треугольников (m_2). В триангуляции 2 класса средние значения $m_1=0{,}3''$ и $m_2=0{,}8''$; отсюда

получим соответственно два значения веса $p_1 = c/0{,}09$ и $p_2 = c/0{,}64$, различающиеся более чем в семь раз. Аналогичная ситуация возникает при определении средних квадратических ошибок измеренных азимутов, длин сторон и т. п. В формулах (5.4) и (5.5) следует использовать те значения средних квадратических ошибок, которые характеризуют реальную точность измерений углов, азимутов, расстояний и т. п. Эти ошибки должны вычисляться с учетом совместного влияния как случайных, так и особенно систематических ошибок измерений. Однако это не всегда возможно из-за отсутствия необходимой информации о влиянии систематических ошибок на результаты измерений. Тем не менее веса измеренных величин должны быть определены с возможно большей точностью, так как от этого зависит достоверность уравненных элементов геодезической сети.

Известно, что совокупное влияние случайных и систематических ошибок на результаты измерений однородных величин наиболее полно сказывается на величинах свободных членов условных уравнений. Поэтому, чтобы получить средние квадратические ошибки, характеризующие реальную точность измерений, следует использовать невязки (свободные члены) условных уравнений.

В триангуляции среднюю квадратическую ошибку измеренного угла вычисляют по невязкам треугольников, используя формулу Ферреро

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma \omega^2}{3n}}, \tag{5.6}$$

где n — число невязок ω треугольников;

средняя квадратическая ошибка измеренного направления равна

$$m_N = \frac{m}{\sqrt{2}}. \tag{5.7}$$

Для определения m_N с ошибкой порядка 10 % необходимо использовать невязки не менее 25—30 треугольников, что следует из приближенной формулы для определения ошибки m_m самой ошибки

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}, \tag{5.8}$$

где n — число измерений, т. е. невязок треугольников в данном случае.

При свето- и радиодальномерных измерениях расстояний среднюю квадратическую ошибку m_s измеренного расстояния s вычисляют обычно по формуле

$$m_s = (a_0 + a_1 s), \tag{5.9}$$

где a_0 и a_1 — эмпирические коэффициенты. Они указываются в паспорте прибора, а определяются из обработки измерений расстояний разной длины на эталонном полигоне. Однако практика показывает, что реальная точность измерений расстояний далека от величины, получаемой по формуле (5.9).

Наиболее достоверное значение средней квадратической ошибки измерения расстояний в сетях трилатерации и в линейно-угловых сетях можно вычислить по свободным членам ω условных уравнений центральных систем и геодезических четырехугольников с измеренными в них длинами сторон:

$$m_{\bar{s}} = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{\omega_i^2}{(\Sigma\lambda_i^2)}}, \tag{5.10}$$

где $m_{\bar{s}}$ — средняя квадратическая ошибка измерения стороны средней длины $\bar{s} = (\Sigma s_i)/n$; k — число свободных членов ω_i; $(\Sigma\lambda^2)_i$ — сумма квадратов коэффициентов условного уравнения i-го геодезического четырехугольника или центральной системы. Для получения $m_{\bar{s}}$ с ошибкой порядка 10 % требуется не менее 25—30 невязок ω_i.

Если известны $m_{\bar{s}}$ для сторон средней длины, то ошибки $m_{s(i)}$ для сторон другой длины s_i можно определить по формуле

$$m_{s(i)} = \frac{s_i}{\bar{s}} m_{\bar{s}}. \tag{5.11}$$

Формулы (5.10) и (5.11) дают несравненно более точные результаты, чем формула (5.9), поэтому их следует применять при вычислении по формулам (5.4) или (5.5) веса измеренных сторон.

Среднюю квадратическую ошибку определения астрономических азимутов на пунктах Лапласа вычисляют обычно по отклонениям значений азимута в приемах от его среднего значения. Величина полученной таким образом ошибки $m \leqslant 0{,}5''$ значительно отличается от ее реального значения. Более точное значение средней квадратической ошибки азимутальных определений на пунктах Лапласа можно получить, вычисляя ее по расхождениям d взаимно обратных азимутов, т. е. по свободным членам условия Лапласа [8]

$$m_\alpha = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{2n}}, \tag{5.12}$$

где n — число разностей d; в среднем $m_\alpha = 1{,}0''$, что достаточно хорошо согласуется с другими оценками, полученными, например, при уравнивании обширных блоков астрономо-геодезической сети СССР ($m_\alpha \approx 1{,}2''$).

Вопросы надежной оценки точности измерений каждой базисной стороны и каждого азимута на пунктах Лапласа (не по сходимости результатов измерений в приемах) нуждаются в дальнейшем изучении и решении.

§ 28. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОГО ВЕСА И СРЕДНИХ КВАДРАТИЧЕСКИХ ОШИБОК УРАВНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

Вычисление обратного веса уравненных элементов

На стадии проектирования геодезической сети, когда еще не выполнены измерения, но веса измеряемых величин уже установлены, задачу определения обратного веса оцениваемых элементов решают следующим образом. Графический проект геодезической сети наносят на топографическую карту достаточно крупного масштаба, на которой показывают исходные и определяемые пункты, а также все измеряемые величины: горизонтальные направления N, азимуты сторон α и длины сторон s (базисные и рядовые). По карте определяют приближенные координаты x, y (в м) всех пунктов сети (исходных и определяемых) и составляют каталог приближенных координат пунктов.

Обратный вес уравненных элементов сети вычисляют, используя алгоритм параметрического способа уравнивания геодезических сетей на плоскости. Для этого составляют сначала для всех измеряемых величин соответствующие уравнения поправок, которые имеют следующий вид:

для измеряемых направлений

$$v_{ik\,(N)} = -\delta z_i - a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k + l_{ik\,(N)}; \qquad (5.13)$$

для измеряемых азимутов

$$v_{ik\,(\alpha)} = -a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k + l_{ik\,(\alpha)}; \qquad (5.14)$$

для измеряемых расстояний

$$v_{ik\,(s)} = -c_{ik}\xi_i - d_{ik}\eta_i + c_{ik}\xi_k + d_{ik}\eta_k + l_{ik\,(s)}, \qquad (5.15)$$

где i, k — номера пунктов; δz_i — поправка в ориентирующий угол на i-ом пункте; ξ, η — поправки в приближенные абсциссы и ординаты определяемых пунктов, дм; a, b, c, d — коэффициенты, вычисляемые по приближенным координатам пунктов; l_{ik} — свободные члены уравнений поправок.

Для определения обратных весов уравненных элементов свободные члены уравнений поправок не требуются.

Коэффициенты при поправках δz_i равны (—1); коэффициенты a, b, c, d вычисляются по формулам, которые для вычислений на ЭВМ преобразуют к виду

$$a_{ik} = -\frac{\rho \sin \alpha_{ik}}{10 s_{ik}} = -20\,626{,}5\,\frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2};$$

$$b_{ik} = +\frac{\rho \cos \alpha_{ik}}{10 s_{ik}} = +20\,626{,}5\,\frac{\Delta x_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2}. \qquad (5.16)$$

$$c_{ik} = \cos \alpha_{ik} = \frac{\Delta x_{ik}}{\sqrt{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2}};$$

$$d_{ik} = \sin \alpha_{ik} = \frac{\Delta y_{ik}}{\sqrt{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2}}, \qquad (5.17)$$

где приращения координат $\Delta x_{ik} = x_k - x_i$ и $\Delta y_{ik} = y_k - y_i$ и длины сторон s_{ik} выражены в метрах; $\rho = 206\,265''$.

Для того чтобы уменьшить объем вычислительных работ, составляют так называемые редуцированные нормальные уравнения, в которых поправки δz_i к ориентирующим углам на станциях исключены. С этой целью на каждом пункте уравнения (5.13) записывают без поправки δz_i, приняв $p = 1$, затем составляют суммарное уравнение, равное сумме таких уравнений на пункте весом $p = -1/n$, где n — число направлений на пункте.

К уравнениям поправок направлений, включая суммарное, составленным на всех пунктах, на которых будут выполняться угловые измерения, присоединяют уравнения поправок (5.14) для измеряемых азимутов и уравнения поправок (5.15) для измеряемых расстояний. Используя все эти уравнения, составляют общую для сети матрицу A коэффициентов уравнений поправок. Затем составляют соответствующую этим уравнениям диагональную матрицу P весов уравнений поправок и по известным правилам метода наименьших квадратов переходят к матрице N коэффициентов нормальных уравнений

$$N = A^{\mathrm{T}} P A, \qquad (5.18)$$

где A^{T} — транспонированная матрица.

На ЭВМ находят обратную матрицу $N^{-1} = Q$ весовых коэффициентов

$$N^{-1} = Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1m} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{m1} & Q_{m2} & \dots & Q_{mm} \end{pmatrix}, \qquad (5.19)$$

где m — число поправок координат ξ, η, равное удвоенному числу определяемых пунктов.

Если матрица Q весовых коэффициентов определена, нетрудно вычислить обратный вес любого уравненного элемента геодезической сети. Обратные веса абсцисс x_i и ординат y_i определяемых пунктов с номерами i равны диагональным элементам матрицы Q при соответствующих поправках координат ξ_i и η_i, т. е.

$$\frac{1}{P_{x_i}} = Q_{ii} \text{ и } \frac{1}{P_{y_i}} = Q_{i+1,\, i+1}. \tag{5.20}$$

Обратный вес дирекционного угла α и длины стороны s, соединяющей любые пункты i и k геодезической сети как смежные, так и удаленные друг от друга на значительное число треугольников, вычисляют по формуле

$$\frac{1}{P_F} = f^{\mathrm{T}} Q_{i-k} f, \tag{5.21}$$

где f — вектор-столбец коэффициентов весовой функции F, а f^{T} — транспонированный вектор-строка; Q_{i-k} — элементы весовой матрицы Q, относящиеся к поправкам координат данных пунктов i и k.

Весовые функции F_α дирекционного угла и F_s длины стороны, соединяющей пункты i и k, записывают в виде уравнений поправок (15.14) и (15.15) соответственно, но без свободных членов:

$$F_\alpha = -a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k; \tag{5.22}$$

$$F_s = -c_{ik}\xi_i - d_{ik}\eta_i + c_{ik}\xi_k + d_{ik}\eta_k, \tag{5.23}$$

где коэффициенты a, b, c, d вычисляют по формулам (5.16) и (5.17), используя приближенные координаты пунктов.

Для весовых функций F_α и F_s векторы $f = f_\alpha$ и $f = f_s$ имеют вид

$$f_{\alpha(ik)} = \begin{pmatrix} -a_{ik} \\ -b_{ik} \\ a_{ik} \\ b_{ik} \end{pmatrix}; \quad f_{s\,(ik)} = \begin{pmatrix} -c_{ik} \\ -d_{ik} \\ c_{ik} \\ d_{ik} \end{pmatrix}. \tag{5.24}$$

Матрица Q_{i-k} формируется из элементов общей для сети матрицы Q весовых коэффициентов и для избранных пунктов i и k может быть записана в виде [23]:

$$Q_{i-k} = \begin{vmatrix} Q_{x_i x_i} & Q_{x_i y_i} & Q_{x_i x_k} & Q_{x_i y_k} \\ Q_{y_i x_i} & Q_{y_i y_i} & Q_{y_i x_k} & Q_{y_i y_k} \\ Q_{x_k x_i} & Q_{x_k y_i} & Q_{x_k x_k} & Q_{x_k y_k} \\ Q_{y_k x_i} & Q_{y_k y_i} & Q_{y_k x_k} & Q_{y_k y_k} \end{vmatrix}, \qquad (5.25)$$

где x_i, y_i, x_k, y_k — координаты пунктов i и k, в которые из уравнивания сети определяются поправки ξ_i, η_i, ξ_k, η_k.

Если в выражениях (5.22) или (5.23) координаты одного из пунктов, например пункта i, являются исходными, то поправки ξ_i, η_i не определяют и принимают равными нулю ($\xi_i = \eta_i = 0$). В этом случае выражения (5.22)—(5.25) существенно упрощаются.

Вычисление средних квадратических ошибок уравненных элементов

Используя заданное значение ошибки единицы веса μ и вычислив обратные веса $1/P_F$ уравненных элементов, найдем по формуле (5.1) расчетные значения средних квадратических ошибок элементов проектируемой геодезической сети:

абсцисс и ординат пунктов

$$m_{x_i} = \mu\sqrt{Q_{ii}}; \quad m_{y_i} = \mu\sqrt{Q_{i+1,\,i+1}}; \qquad (5.26)$$

дирекционных углов сторон и диагоналей

$$m_{\alpha\,(ik)} = \mu\sqrt{1/P_{\alpha\,(ik)}}; \qquad (5.27)$$

длин сторон и диагоналей

$$m_{s\,(ik)} = \mu\sqrt{1/P_{s\,(ik)}}. \qquad (5.28)$$

Примеры оценки точности уравненных элементов с вычислением на ЭВМ матрицы Q весовых коэффициентов для сетей триангуляции, трилатерации и линейно-угловых даны в практикуме по высшей геодезии [23]. В том случае, если ошибки исходных данных известны, их влияние необходимо учесть дополнительно.

§ 29. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С МОДЕЛИРОВАНИЕМ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ НА ЭВМ

При вычислениях на ЭВМ предварительную (априорную) оценку точности геодезической сети нередко выполняют так же как на заключительном этапе уравнивания сети параметриче-

ским способом с той лишь разницей, что вместо измеренных величин используют их расчетные значения, искаженные случайными ошибками, полученными моделированием на ЭВМ. Задачу решают следующим образом. Разработанный графический проект геодезической сети наносят на топографическую карту наиболее крупного масштаба и показывают на ней исходные и определяемые пункты, азимуты Лапласа, базисные и другие стороны, которые следует измерить. Затем разрабатывают таблицы для записи всех измеряемых величин, в том числе горизонтальных направлений или углов, азимутов на пунктах Лапласа, а также базисных или других сторон сети. Числовые значения этих величин получают следующим образом. По карте наиболее крупного масштаба определяют координаты всех запроектированных в сети пунктов и, используя их, решают обратные геодезические задачи по всем сторонам сети. Из решения этих задач находят длины s' и дирекционные углы α' всех сторон, которые точно соответствуют заданным координатам пунктов. Затем, используя датчик или таблицы случайных чисел, вычисляют на ЭВМ возможные ошибки v измеренных направлений, приводящие к заданной в проекте ошибке единицы веса μ. Затем ошибки v вводят в вычисленные значения дирекционных углов и таким образом получают сводку «измеренных» направлений $N=N'+v_N$. Аналогичным образом находят значения «измеренных» азимутов (дирекционных углов) $\alpha=\alpha'+v_\alpha$, а также значения «измеренных» длин сторон $s=s'+v_s$. Всем «измеренным» величинам придают веса p, вычисляемые по формулам (5.5).

Теперь, используя координаты исходных пунктов (они уже определены по карте) и полученные указанным выше способом «измеренные» направления N, азимуты α и длины сторон s, составляют уравнения поправок (5.13)—(5.15), но теперь уже с обязательным вычислением свободных членов l_{ik}, а затем сеть уравнивают параметрическим способом. В результате вычислений находят ошибку единицы веса μ (она должна быть равна или почти равна ее значению, принятому при моделировании ошибок измерений), получают матрицу Q весовых коэффициентов, вычисляют обратный вес $1/P_F$ уравненных элементов, а также их средние квадратические ошибки m_F.

Необходимо отметить, что моделирование ошибок измерений и уравнивание сети выполняют многократно (не менее 15—20 раз) и из полученных значений одноименных ошибок уравненных элементов находят среднее.

§ 30. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ТРИАНГУЛЯЦИИ ПО ПРИБЛИЖЕННЫМ ФОРМУЛАМ

К настоящему времени получено множество разных по форме и точности приближенных формул априорной оценки точности различных элементов геодезических сетей, создаваемых разными методами. Большинство из этих формул относится к схематическим геодезическим построениям, состоящим, например, из равносторонних треугольников, вытянутых ходов с одинаковыми длинами сторон и т. п. Тем не менее, как отмечалось выше, многие приближенные формулы до сих пор не потеряли своего значения и имеют важное методическое и практическое значение.

Поэтому воспользуемся некоторыми приближенными формулами для того, чтобы дать представление о точности построения государственной геодезической сети страны, сопоставить между собой по точности разные методы построения геодезических сетей, а также рассмотреть ряд других важных для производства вопросов.

Ряды триангуляции 1 класса. Такие ряды образуются из звеньев каждое длиной до 200 км. На обоих концах каждого звена измеряются базисные стороны b_1, b_2 и определяются азимуты этих сторон α_1 и α_2 (рис. 37). Введем некоторые обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем: s_i — связующие стороны (общие для смежных треугольников); c_i — промежуточные стороны треугольников; A_i, B_i — связующие углы, лежащие против связующих сторон; C — промежуточные углы; L — длина диагонали звена между его конечными пунктами.

Пусть M — средняя квадратическая ошибка определения положения конечного пункта уравненного звена относительно его начального пункта. Ошибку M представим в виде суммы двух составляющих: m_L — вдоль звена и m_q — перпендикулярно к звену. В этом случае

$$M = \sqrt{m_L^2 + m_q^2}. \qquad (5.29)$$

Ошибку m_L принято называть продольным сдвигом звена, а ошибку m_q — поперечным сдвигом.

Допустим, что звено триангуляции с базисами и азимутами

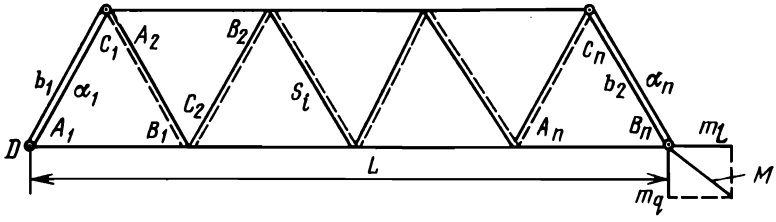


Рис. 37. Продольный и поперечный сдвиг звена триангуляции

на его концах состоит из равносторонних треугольников и уравнено по направлениям за условия фигур, базисов и азимутов. В таком звене средняя квадратическая ошибка логарифма связующей стороны (в единицах шестого знака логарифма) равна

$$m_{\lg s\,(k)} = \sqrt{\frac{m_{\lg b}^2}{2} + 3{,}15m^2\,\frac{(N-k)\,k}{N}}\,. \qquad (5.30)$$

Относительную ошибку найдем по формуле

$$\frac{m_s}{s} = \frac{m_{\lg s}}{M\cdot 10^6} = \frac{1}{434300/m_{\lg s}}\,. \qquad (5.31)$$

Средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны, передаваемого по ходовой линии (показана пунктиром на рис. 37), равна

$$m_{A\,(k)} = \sqrt{\frac{m_A^2}{2} + \frac{m^2}{25}\left[(5k+12) - \frac{(5k+6)^2}{5N+22}\right]}\,. \qquad (5.32)$$

Продольный и поперечный сдвиги такого звена вычисляют по формулам:

$$m_L = \frac{L}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m_b^2}{b^2} + \frac{2n^2-3n+10}{9n}\,\frac{m^2}{\rho^2}}\,; \qquad (5.33)$$

$$m_q = \frac{L}{\rho\sqrt{2}}\sqrt{m_A^2 + \frac{n^2+2n+12}{15n}\,m^2}\,. \qquad (5.34)$$

В формулах (5.30) — (5.34): N — число треугольников в звене; k — номер треугольника, к которому относится оцениваемая сторона; n — число промежуточных сторон в диагонали звена $L=nS$; m, m_A, m_b/b — средние квадратические ошибки измерения углов, азимутов Лапласа и базисных сторон соответственно. Ошибки логарифмов базисных сторон $m_{\lg b}$ и связующих сторон $m_{\lg s}$ выражены в единицах шестого знака логарифма.

Вычислим по этим формулам средние квадратические ошибки элементов звена (см. рис. 37), состоящего из равносторонних треугольников: в котором $L=176$ км, $s=22$ км, $N=16$, $n=8$, $k=8$, $m=0{,}7''$, $m_b/b=1/400\,000$ или $m_{\lg b}=1{,}1$ ед. 6 знака lg; $m_A=1{,}1''$.

Средняя квадратическая ошибка связующей стороны в середине звена m_s, м	0,13
Относительная ошибка m_s/s	1/167 000
Средняя квадратическая ошибка азимута средней стороны звена $m_{A\,(k)}$	$1{,}1''$
Продольный сдвиг звена m_L, м	0,62
Поперечный сдвиг звена m_q, м	0,76
Общий сдвиг звена M, м	0,98

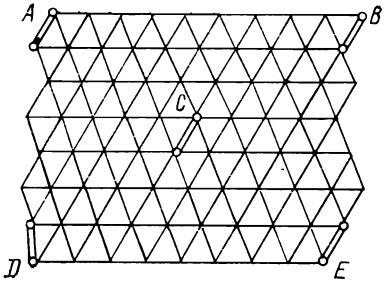


Рис. 38. Схема сплошной сети триангуляции 2 класса из равносторонних треугольников с измеренными азимутами и базисными сторонами

Сплошные сети триангуляции. Вопросам оценки точности сплошных сетей триангуляции 2 класса, заполняющих полигоны триангуляции 1 класса размерами 200×200 км, посвящены обстоятельные исследования профессора А. И. Дурнева, профессора К. Л. Проворова, видных деятелей геодезического производства С. Г. Судакова, Д. А. Ларина и др. Наибольшее распространение получили формулы К. Л. Проворова, которыми мы и воспользуемся.

Приведенные ниже формулы (5.35)—(5.39) получены для сплошных сетей триангуляции 2 класса, состоящих из 100—300 пунктов в каждой (рис. 38), уравненных как свободные по углам за условия фигур, горизонтов, полюсов, дирекционных углов и базисов, причем без учета ошибок исходных азимутов и базисов.

Исследования К. Л. Проворова показали, что между уравненными элементами в сплошной сети триангуляции 2 класса, состоящей из равносторонних треугольников, имеют место следующие простые соотношения

$$\frac{m_s}{s} = \frac{m_\alpha}{\rho}; \quad \frac{m_L}{L} = \frac{m_\tau}{\rho}, \tag{5.35}$$

из которых следует, что относительные ошибки сторон m_s/s треугольников равны ошибкам дирекционных углов этих сторон m_α/ρ, выраженным в радианной мере. Это относится и к ошибкам диагоналей L, соединяющим несмежные пункты.

Продольный сдвиг m_L конца любой диагонали L относительно ее начала равен поперечному сдвигу и вычисляется по формуле

$$m_L = m_q = \frac{m_\tau}{\rho} L, \tag{5.36}$$

где ошибка m_τ направления диагонали L равна

$$m_\tau = m \sqrt{\frac{n^2 - 3n + 50}{45n} - \frac{n^2 - 5n + 80}{70N}}. \tag{5.37}$$

Здесь m — средняя квадратическая ошибка измерения углов; n — число треугольников в цепочке между конечными точками диагонали L; N — среднее число треугольников между базисными сторонами в сети. При $n=N=24$ и $m=1{,}0''$ получим $m_L=m_q=0{,}44$ м. Формула (5.37) справедлива при $n\leqslant N$.

В сплошной сети триангуляции с треугольниками произвольной формы (с углами от 30 до 110°), уравненной по углам за все возникающие в ней геометрические условия:

средняя квадратическая ошибка дирекционного угла стороны в среднем равна

$$m_\alpha=0{,}16m\sqrt{N-6{,}5+48t}; \tag{5.38}$$

средняя квадратическая ошибка логарифма стороны (в 6-ом знаке) будет

$$m_{\lg s}=0{,}35m\sqrt{N-6{,}5+48t}, \tag{5.39}$$

где m — средняя квадратическая ошибка измеренного угла; N — среднее число треугольников между базисными сторонами в сети; параметр t вычисляется по формуле

$$t=\left(\frac{1}{2}\right)^{N/4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{(N/4)+1} \tag{5.40}$$

или находится по аргументу N (табл. 9).

Формулы (5.36)—(5.39) дают преуменьшенные значения средних квадратических ошибок, поскольку не учитывают влияние ошибок измерения азимутов m_A и ошибок измерения базисных сторон $m_{\lg b}$. С учетом этого влияния более точные значения ошибок m_α и $m_{\lg s}$ будут равны

$$M_\alpha=\sqrt{\frac{m_A^2}{2}+m_\alpha^2}; \tag{5.41}$$

$$M_{\lg s}=\sqrt{\frac{m_{\lg b}^2}{2}+m_{\lg s}^2}, \tag{5.42}$$

где m_α и $m_{\lg s}$ вычисляются по формулам (5.38) и (5.39).

Таблица 9

N	t	N	t
11	0,138	18	0,043
12	0,117	19	0,036
13	0,100	20	0,031
14	0,084	21	0,026
15	0,072	22	0,022
16	0,060	23	0,018
17	0,051	24	0,016

Допустим, что в сплошной сети триангуляции базисные стороны с азимутами Лапласа на их концах размещены в среднем через 24 треугольника ($N=24$) горизонтальные углы и азимуты измерены со средними квадратическими ошибками $m=m_A=$ $=1{,}0''$; базисые стороны измерены с ошибками $m_b/b=1/300\,000$ или $m_{\lg b}=1{,}45$. При $N=24$ параметр $t=0{,}016$ (см. табл. 9). Используя эти данные, по формулам (5.41) и (5.42) получим: $M_\alpha = 1{,}0''$ и $M_{\lg s}=2{,}1$ ед. 6 знака логарифма или $m_s/s=$ $=1/200\,000$, что при длинах сторон треугольников $s=7\div20$ км приводит к ошибкам $m_s=4\div10$ см, т. е. в среднем примерно 6 см. Такая точность построения опорной геодезической сети достаточна для производства топографических съемок вплоть до масштаба 1 : 2000 и даже более крупного (см. табл. 4).

§ 31. ЧАСТОТА РАЗМЕЩЕНИЯ АЗИМУТОВ И БАЗИСНЫХ СТОРОН. ВЫГОДНЕЙШАЯ ФОРМА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Частота размещения азимутов. Азимуты Лапласа играют важную роль при создании опорных геодезических сетей: обеспечивают независимую азимутальную ориентировку сторон геодезической сети во всех ее частях, причем с одинаковой высокой точностью; позволяют контролировать результаты угловых измерений по невязкам азимутальных условий, ослабляя при этом влияние систематических ошибок измерений; приводят к возникновению азимутальных условных уравнений при уравнивании сети и тем самым способствуют повышению ее точности.

Рассчитаем предельно допустимое число треугольников $n_{\max}$, через которое необходимо размещать азимуты Лапласа в триангуляции, чтобы они могли выполнять функцию контроля угловых измерений.

Пусть на концах цепочки треугольников (см. рис. 37) измерены азимуты α_1 и α_2. Используя промежуточные углы C_i треугольников, напишем в общем случае

$$\alpha_2=\alpha_1-C_1+C_2-C_3+\ldots+C_n\pm(n-1)\,180^\circ.$$

Перейдя к средним квадратическим ошибкам, получим

$$2m_\alpha^2=nm^2,$$

где m_α и m — средние квадратические ошибки измерения азимутов и углов соответственно; n — число промежуточных углов, равное числу треугольников между азимутами.

Пусть заданы предельные значения ошибок: $m_{\alpha\,\text{пред}}=tm_\alpha$ и $n_{\text{пред}}=n_{\max}$. Тогда при заданном значении средней квадра-

тической ошибки m'' измерения углов и $t=2{,}5$, как это принято в геодезии при расчете допусков, найдем

$$n_{\max} \leqslant 12{,}5 \frac{m_\alpha^2}{m^2}. \qquad (5.43)$$

При $m_\alpha = m$ получим $n_{\max} = 12$; при $m_\alpha = 1{,}0''$ и $m = 0{,}7'' - n_{\max} = 25$.

Звенья триангуляции 1 класса состоят из 12—16 треугольников. В сетях триангуляции 2 класса в соответствии с требованиями инструкции азимуты должны определяться не более чем через 25 треугольников, что вполне согласуется с расчетом по формуле (5.43).

Частота размещения базисных сторон. Базисные стороны в триангуляции, как и азимуты Лапласа, играют важную роль. Они устанавливают единый масштаб построения геодезических сетей на земной поверхности; позволяют контролировать точность передачи длин сторон, ослабляя при этом накопление систематических ошибок измерений; приводят к возникновению базисных условных уравнений при уравнивании геодезической сети и тем самым способствуют повышению ее точности.

В целях обеспечения стройной системы построения государственной геодезической сети азимуты Лапласа принято определять на обоих концах базисных сторон. Поэтому в триангуляции частота размещения базисных сторон такая же, как азимутов Лапласа.

Выгоднейшая форма треугольников. В триангуляции любая сторона треугольника имеет одинаково важное значение, поэтому связующие s и промежуточные c стороны треугольников должны при прочих равных условиях определяться с одинаковой высокой точностью. Это требование может быть записано в виде равенства

$$\frac{m_s}{s} = \frac{m_c}{c} = \min.$$

При реализации данного требования треугольники в рядах триангуляции получаются равнобедренными с углами $C = A =$

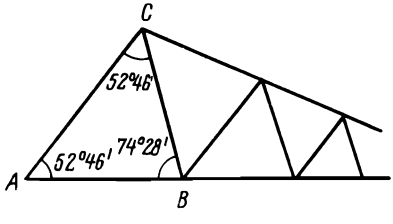


Рис. 39. Схема цепи треугольников с «выгоднейшими» углами

$=52°46'$ и $B=74°28'$ [6]. Однако такая форма треугольников не пригодна для практики, поскольку в этом случае ряд «вырождается» по мере удаления от исходной базисной стороны (рис. 39). С практической точки зрения наиболее выгодными по форме являются равносторонние треугольники, построение которых, однако, не всегда возможно вследствие особенностей рельефа местности. В рядах триангуляции 1 класса углы в треугольниках должны быть не менее 40°, а в сплошных сетях триангуляции 2 класса — не менее 30°.

§ 32. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЯДОВ И СЕТЕЙ ТРИЛАТЕРАЦИИ ПО ПРИБЛИЖЕННЫМ ФОРМУЛАМ

Средние квадратические ошибки вычисленных углов треугольников

Пусть дан треугольник ABC с измеренными в нем сторонами a, b, c, лежащими против углов A, B и C (рис. 40). Для любой стороны, например, для стороны a в соответствии с теоремой косинуса угла напишем

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \tag{5.44}$$

Продифференцировав левую и правую части этого выражения по всем переменным и выполнив несложные преобразования, получим

$$dA = \frac{\rho}{h_A}(da - db\cos C - dc\cos B), \tag{5.45}$$

где h_A — высота треугольника, опущенная из вершины угла A на противолежащую сторону a; вычисляется она по любой из формул

$$h_A = c\sin B = b\sin C = \frac{bc}{a}\sin A. \tag{5.46}$$

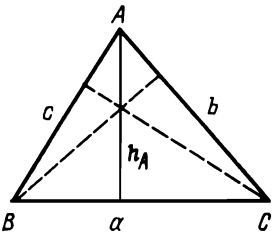
Перейдя в выражении (5.45) от дифференциалов к средним квадратическим ошибкам, получим

$$m_A^2 = \frac{\rho^2}{h_A^2}(m_a^2 + m_b^2\cos^2 C + m_c^2\cos^2 B). \tag{5.47}$$

Формула (5.47) устанавливает зависимость ошибки m_A вычисленного угла A от ошибок измерения сторон треугольника m_a, m_b, m_c и от формы треугольника (величины углов A, B и C).

Опустив из вершин углов B и C треугольника ABC высоты h_B и h_C на противолежащие стороны b и c, а затем выполнив такие же преобразования, как и при выводе формулы (5.47),

Рис. 40. Треугольник с измеренными сторонами



получим аналогичные формулы для средних квадратических ошибок углов B и C

$$m_B^2 = \frac{\rho^2}{h_B^2}\left(m_b^2 + m_a^2\cos^2 C + m_c^2\cos^2 A\right);$$
$$m_C^2 = \frac{\rho^2}{h_C^2}\left(m_c^2 + m_a^2\cos^2 B + m_b^2\cos^2 A\right). \qquad (5.48)$$

В равностороннем треугольнике $a=b=c=s$, $\cos A=\cos B=\cos C=0{,}50$; $h_A=h_B=h_C=s\sin 60^\circ=s\sqrt{3}$. Поэтому при одинаковой точности измерения длин сторон, т. е. при $m_a=m_b=m_c=m_s$, средняя квадратическая ошибка m_β любого угла ($\beta=A$; B; C), вычисленного с использованием измеренных сторон в треугольнике, будет равна

$$\frac{m_\beta}{\rho} = \frac{m_s}{s}\sqrt{2}. \qquad (5.49)$$

Для того чтобы в равносторонних треугольниках трилатерации вычисленные углы β определялись с требуемой ошибкой m_β необходимо, чтобы стороны измерялись с ошибками не более

$$\frac{m_s}{s} = \frac{m_\beta}{\rho\sqrt{2}} = \frac{m_N}{\rho}, \qquad (5.50)$$

где $m_N=m_\beta/\sqrt{2}$ — средняя квадратическая ошибка измерения направлений.

Продольный и поперечный сдвиг звена трилатерации

Пусть дано звено трилатерации из равносторонних треугольников с измеренными на его концах азимутами A_1 и A_2. Уравняв звено за условие азимутов, найдем по формулам С. А. Бутлера:

продольный сдвиг звена

$$m_L = \frac{m_s}{2}\sqrt{\frac{N^2-1}{N}}; \qquad (5.51)$$

поперечный сдвиг звена

$$m_q = \sqrt{\frac{L^2}{2\rho^2} m_A^2 + \frac{N-1}{36}(N^2+N+48) m_s^2}, \qquad (5.52)$$

где L — длина диагонали звена; N — число треугольников в звене; m_A, m_s — средние квадратические ошибки измерения азимутов и длин сторон.

При $L=200$ км, $N=16$, $s=25$ км, $m_A=1{,}0''$ и $m_s/s=1/300\,000$ или $m_s=0{,}083$ м получим $m_L=0{,}17$ м и $m_q=1{,}18$ м. Тогда $M=\sqrt{m_L^2+m_q^2}=1{,}19$ м.

Сплошные сети трилатерации из равносторонних треугольников

Будем полагать, что сплошная сеть трилатерации 2 класса размером 200×200 км уравнена за условия азимутов и центральных систем как свободная. Для вычисления средних квадратических ошибок уравненных элементов (без учета ошибок азимутов) воспользуемся формулами К. Л. Проворова.

Средние квадратические ошибки относительного положения смежных пунктов:

продольный сдвиг конца стороны

$$m_t = 0{,}83 m_s; \qquad (5.53)$$

поперечный сдвиг конца стороны

$$m_r = 1{,}20 m_s; \qquad (5.54)$$

полный сдвиг конца стороны

$$U = \sqrt{m_t^2 + m_r^2}. \qquad (5.55)$$

При $s=7\div20$ км, $m_s/s=1/300\,000$ получим $m_t=2\div6$ см; $m_r=3\div8$ см; $U=4\div10$ см.

Средние квадратические ошибки относительного положения несмежных пунктов:

продольный сдвиг конца диагонали

$$m_L = m_s \sqrt{\frac{(N+15)(k+11)}{10(N+25)}}; \qquad (5.56)$$

поперечный сдвиг конца диагонали

$$m_q = m_s \sqrt{\frac{(N+15)(5k^2+12k+8)}{30(N+25)}}; \qquad (5.57)$$

полный сдвиг конца диагонали

$$M = \sqrt{m_L^2 + m_q^2},$$

где L — длина диагонали, соединяющей несмежные пункты, отстоящие друг от друга на k треугольников; N — среднее число треугольников между азимутами Лапласа ($k \leqslant N$); m_s — средняя квадратическая ошибка измерения сторон. В сплошной сети трилатерации при $L=180$ км, $s=15$ км, $N=k=24$, $m_s/s=1/300\,000$ или $m_s=0{,}05$ м получим $m_L=0{,}08$ м, $m_q=0{,}46$ м, $M=0{,}47$ м. Этот расчет показывает, что в сплошных сетях трилатерации поперечный сдвиг конца любой диагонали относительно ее начала в среднем в шесть раз больше продольного. В сплошной сети триангуляции эти сдвиги равны между собой.

§ 33. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЗВЕНЬЕВ ПОЛИГОНОМЕТРИИ

Предположим, что звено полигонометрии 1 класса прямолинейно и состоит из сторон одинаковой длины и уравнено за условие азимутов, которые определены на его концах. В соответствии с формулами проф. В. В. Данилова напишем для продольного и поперечного сдвигов такого звена

$$m_L = \sqrt{n m_s^2 + n^2 m_\sigma^2}; \qquad (5.58)$$

$$m_q = \frac{L}{\rho}\sqrt{\frac{m_A^2}{2} + \frac{n+3}{12} m''^2}, \qquad (5.59)$$

где n — число сторон в звене полигонометрии; m_s и m_σ — случайная и систематическая ошибки измерения расстояний; m_A и m — средние квадратические ошибки измерения азимутов и горизонтальных углов соответственно.

При $L=200$ км, $n=10$, $s=20$ км, $m=0{,}7''$, $m_A=1{,}0$, $m_s/s=1/300\,000$ или $m_s=0{,}067$ м, $m_\sigma = s\cdot 10^{-6}$ получим: $m_L=0{,}29$ м, $m_q=0{,}98$. Тогда полный сдвиг звена будет равен $M=\sqrt{m_L^2+m_q^2}=1{,}02$ м.

§ 34. СОГЛАСОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ, АЗИМУТОВ И ДЛИН СТОРОН В ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЯХ

При построении опорных геодезических сетей выполняют комплекс угловых и линейных измерений, азимутальных определений и т. п. Точность измерений разнородных величин должна быть согласована между собой, в противном случае, когда измерения одного вида выполнены с очень высокой точностью, а другого вида, наоборот, с недостаточной, точность уравненных элементов сети лимитируется измерениями меньшей точности. В этом случае дополнительные затраты труда, средств и времени на измерения высокой точности не оправданы.

С практической точки зрения целесообразно потребовать, чтобы эллипс ошибок на каждом пункте геодезической сети был близок к окружности, причем возможно меньшего радиуса. Это равносильно требованию, чтобы продольный и поперечный сдвиги конца любой стороны и любой диагонали в геодезической сети были одинаковы по модулю, т. е. $|m_L| = |m_q|$, и стремились к минимуму (в пределе к нулю).

Соблюдение первого требования $|m_L| = |m_q|$, как следует из формул (5.35), (5.36), (5.50) и других, возможно только в том случае, если средние квадратические ошибки измерения горизонтальных направлений $m_N = m_\beta/\sqrt{2}$, азимутов направлений m_A, выраженные в радианной мере, а также относительные ошибки m_s/s измерения расстояний равны между собой:

$$\frac{m_N}{\rho} = \frac{m_A}{\rho} = \frac{m_s}{s}. \qquad (5.60)$$

В соответствии с равенствами (5.60) составим таблицу согласованных значений средних квадратических ошибок измерения в сети горизонтальных направлений N или углов β, азимутов A и длин сторон s (табл. 10).

Таблица 10

$m_N = m_A$	m_s/s	$m_\beta = m_N\sqrt{2}$
0,2″	1/1 000 000	0,3″
0,3	1/700 000	0,4
0,5	1/400 000	0,7
0,7	1/300 000	1,0
1,0	1/200 000	1,4

Все ошибки должны вычисляться по свободным членам условных уравнений.

РАЗДЕЛ III

Высокоточные угловые измерения

Глава 6

ВЫСОКОТОЧНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ТЕОДОЛИТЫ. ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕОДОЛИТОВ

§ 35. УСЛОВИЯ ЭКСПЛУАТАЦИИ ВЫСОКОТОЧНЫХ ТЕОДОЛИТОВ. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К НИМ

Наиболее массовым видом геодезических измерений, выполняемых при создании государственной геодезической сети, до сих пор являются угловые измерения. Точность этих измерений зависит от требуемой точности построения геодезической сети и регламентируется действующими инструкциями и нормативными актами ГУГК СССР.

При создании государственной геодезической сети методами триангуляции и полигонометрии на всех пунктах измеряют горизонтальные углы и зенитные расстояния, на пунктах Лапласа выполняют астрономические определения широт, долгот и азимутов, для чего измеряют зенитные расстояния наблюдаемых звезд и горизонтальные углы между звездами и земными предметами, азимуты которых определяются. В сетях трилатерации также необходимо выполнять угловые измерения для привязки ориентирных направлений и определения высот пунктов методом тригонометрического нивелирования.

Для производства угловых измерений и астрономических определений в государственной геодезической сети используют угломерные приборы разного вида и разной точности. Начиная с 1963 г. классификация и выпуск угломерных приборов производятся в соответствии с действующими государственными стандартами (ГОСТами). Первый ГОСТ на теодолиты в СССР был утвержден в 1963 г. По мере развития геодезического приборостроения ГОСТы на теодолиты, как и на другие геодезические приборы, периодически пересматриваются и уточняются.

Геодезические угломерные приборы можно подразделить на разные группы (виды) в зависимости от их назначения, точности измерений и конструкции.

По назначению геодезические угломерные приборы подразделяются на теодолиты и астрономические теодолиты. Теодо-

литы предназначены для измерения горизонтальных углов и зенитных расстояний (углов наклона) на пунктах геодезических сетей, а астрономические теодолиты — для определения широт, долгот и азимутов из астрономических наблюдений на пунктах Лапласа и других.

По точности теодолиты подразделяются на высокоточные, точные и технические. К высокоточным относятся теодолиты, обеспечивающие в лабораторных условиях измерение угла одним приемом со средней квадратической ошибкой $m \leqslant 1''$, к точным — с ошибкой $1 < m < 10''$, к техническим — с ошибкой $m \geqslant 10''$.

По конструкции современные теодолиты можно подразделить на две большие группы в зависимости от вида отсчетного устройства: теодолиты с оптическим отсчетным устройством и электронные теодолиты.

В соответствии с действующими ГОСТами каждому типу теодолитов в зависимости от точности выполняемых ими измерений присваивается определенный шифр, состоящий из буквы «Т», обозначающей тип прибора (теодолит), и числа, указывающего допустимую величину средней квадратической ошибки измерения угла одним приемом в лабораторных условиях, выводимой по отклонениям от среднего из 12 приемов измерений угла. Например, шифр Т1 обозначает теодолит секундной точности. До введения ГОСТов теодолиты имели другие шифры, например, ТТ-2/6 — триангуляционный теодолит с ценой деления отсчетного микроскопа для горизонтального круга $2''$ и вертикального круга — $6''$.

Особенности эксплуатации высокоточных теодолитов. Основные требования к ним. Для того чтобы государственная геодезическая сеть в течение многих десятилетий по точности могла удовлетворять многочисленные запросы науки и требования народного хозяйства в астрономо-геодезической сети СССР выполняют измерения всех видов (угловые, линейные и т. п.) с наивысшей точностью, достигаемой при массовых (не единичных) измерениях при использовании новейшей измерительной техники.

Для того чтобы обеспечить действительно высокую точность результатов измерений, необходимо: иметь геодезические приборы, рассчитанные на достижение требуемой точности, хорошо знать устройство этих приборов, их особенности, уметь методически правильно пользоваться ими, применять наиболее совершенные методы измерений, позволяющие существенно ослабить влияние всевозможных источников ошибок, особенно систематических, на результаты измерений.

Только при одновременном соблюдении этих условий можно получить результаты действительно высокой точности. В противном случае, располагая даже самыми точнейшими прибо-

рами, не удастся достичь точности, соответствующей максимальной приборной.

При создании государственной геодезической сети угловые измерения выполняют в трудных экспедиционных условиях, которые характеризуются разнообразием физико-географических и климатических условий районов работы: от раскаленных пустынь до Арктики с многолетней мерзлотой, от обширных равнин до горных и высокогорных районов, значительными колебаниями температуры воздуха (от +50 до —20 °С), разнообразием условий транспортировки геодезических приборов к месту работы и в полевых условиях.

Такие сложные условия многолетней эксплуатации каждого прибора, необходимость достижения максимальной точности результатов измерений при наименьших затратах средств, труда и времени и т. п. выдвигают особые требования, которые должны учитываться при разработке и изготовлении высокоточных теодолитов. Основными из них являются следующие:

обеспечение высокой и достаточно устойчивой точности результатов угловых измерений, выполняемых в разнообразных физико-географических условиях и климатических районах страны (от субтропиков до Арктики с многолетней мерзлотой) при значительных колебаниях температуры воздуха (от +50 до —20 °С);

сохранение работоспособности теодолита в трудных экспедиционных условиях в течение длительного срока его эксплуатации;

малые габариты и масса прибора и в то же время хорошая устойчивость его во время измерений, несложность и надежность юстировочных приспособлений, удобство работы с прибором и т. п.

Этот далеко неполный перечень подчас противоречивых и взаимоисключающих требований показывает какой непростой является задача разработки и создания современных высокоточных теодолитов, которые в принципе должны быть еще и автоматизированы.

Вопросы конструирования и расчета необходимой точности изготовления отдельных узлов и теодолита в целом относятся к компетенции специалистов по геодезическому приборостроению, однако совершенно необходимым является участие геодезистов в установлении основных технических требований, которые надо учитывать при разработке и создании новых, более совершенных образцов приборов.

Геодезисты, выполняющие основные геодезические работы, должны в совершенстве знать устройство теодолитов, уметь их тщательно исследовать, определять с высокой точностью постоянные прибора (цены делений уровней, микрометров и т. п.),

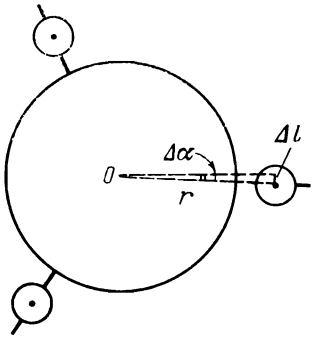


Рис. 41. Азимутальное смещение подставки теодолита из-за деформации подъемного винта

уметь юстировать теодолит при работе на пункте, определять и учитывать влияние приборных погрешностей на результаты измерений и т. д. При этом надо учитывать и то, что высокоточный теодолит является весьма чувствительной измерительной системой, подверженной деформациям вследствие как внутренних напряжений в металле и оптических деталях, так и внешних, обусловленных, например, изменениями температуры. Деформации ведут к появлению ошибок в результатах угловых измерений и, следовательно, снижают их точность.

Рассмотрим простейший пример возможного влияния деформации некоторых деталей теодолита на точность измерений углов. Допустим, что по недосмотру наблюдателя при угловых измерениях на пункте в течение некоторого времени один из подъемных винтов теодолита был освещен лучами Солнца и несколько нагрелся. В результате этого может произойти линейное смещение подъемных винтов на ничтожно малую величину Δl, равную, например, длине световой волны 0,5 мкм (рис. 41). При расстоянии между подъемным винтом и осью вращения теодолита $r=14$ см это может вызвать поворот теодолита вместе с лимбом на угол

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta l}{r}\rho'' = \frac{0{,}5\cdot 2\cdot 10^5}{14\cdot 10^4} = 0{,}7''$$

и, следовательно, на такую же величину окажется ошибочным измеренное направление, что совершенно недопустимо при высокоточных измерениях с ошибкой порядка 0,5″. Отсюда видно, насколько надо быть внимательным и аккуратным при работе с высокоточными теодолитами. Необходимо всячески оберегать теодолит от резких изменений температуры, от тряски при переездах с пункта на пункт и т. п.

В геодезической сети при расстояниях между пунктами 10—20 км влияние приборных ошибок теодолита $m_{пр}$ и ошибок от внешней среды $m_{вн}$ (боковой рефракции, кручения сигналов и т. п.) на результаты угловых измерений примерно одинаково.

С учетом этого обстоятельства для средней квадратической ошибки измеренного угла в триангуляции 1 класса ($m \leqslant 0{,}7''$) напишем $m_\beta^2 = m_{пр}^2 + m_{вн}^2 \leqslant 0{,}7''^2$.

При $m_{пр} = m_{вн}$ будем иметь $m_{пр} \leqslant 0{,}7/\sqrt{2} \leqslant 0{,}5''$.

Ошибка $m_{пр}$ является результатом совокупного влияния комплекса приборных ошибок теодолита. Применив принцип равных влияний, можно показать, что влияние каждого частного источника приборных ошибок в среднем не должно превышать величины 0,2—0,3″. Этот несложный расчет показывает, какие исключительно высокие требования должны быть предъявлены к изготовлению, сборке и юстировке деталей и узлов высокоточного теодолита.

§ 36. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ВЫСОКОТОЧНЫХ ТЕОДОЛИТАХ

В начале 30-х годов в связи с невиданным в то время размахом работ по созданию астрономо-геодезической сети на обширной территории СССР перед геодезическим приборостроением была поставлена ответственная задача по разработке и выпуску в короткие сроки высокоточных теодолитов.

В 1934 г. завод «Аэрогеоприбор» начал выпускать универсальный теодолит У-5. Горизонтальный и вертикальный круги имели диаметры по 176 мм. Цена наименьшего деления шкалы отсчетного микроскопа-микрометра была равна 5″. Предназначался теодолит для угловых измерений и астрономических определений в триангуляции 2 класса.

В 1935 г. в ЦНИИГАиК по техническому заданию Ф. Н. Красовского был разработан высокоточный триангуляционный теодолит ТТ-2/6, предназначенный для измерения горизонтальных углов в триангуляции 1 класса. Выпуск этих теодолитов был начат в 1936 г. и продолжался до 1965 г., когда ТТ-2/6 был снят с производства.

Теодолит ТТ-2/6 имеет горизонтальный металлический лимб диаметром 220 мм, вертикальная ось теодолита коническая, регулируемая; главная зрительная труба имеет фокусное расстояние 520 мм, увеличение трубы 30; 52 и 65$^\times$; она снабжена окулярным микрометром с ценой деления 1″; поверительная труба с увеличением 30$^\times$ и ценой деления окулярного микрометра 1,4″ крепится к подставке теодолита и предназначается для определения и учета кручения столика сигнала при угловых измерениях; теодолит имеет накладной уровень с ценой деления 2,5″ на 2 мм, устанавливаемый на горизонтальную ось вращения трубы; вертикальный круг изготовлен в виде сектора; цена наименьшего деления барабана микроскоп-микрометра при горизонтальном круге 2″, масса теодолита составляет 27,5 кг.

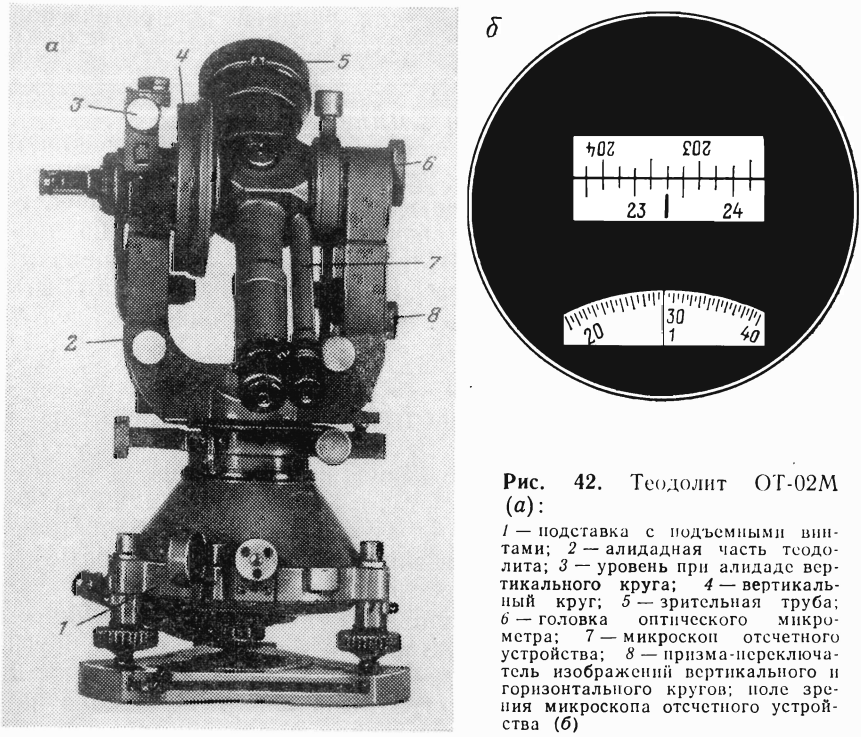


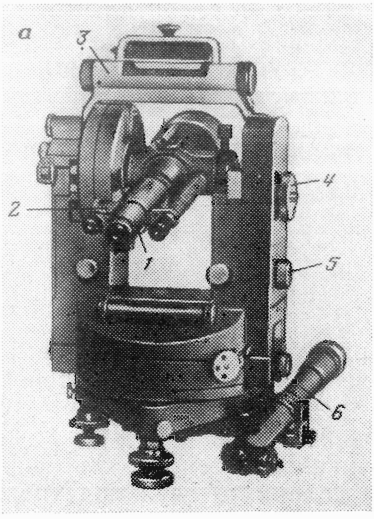
Рис. 42. Теодолит ОТ-02М (*а*):

1 — подставка с подъемными винтами; *2* — алидадная часть теодолита; *3* — уровень при алидаде вертикального круга; *4* — вертикальный круг; *5* — зрительная труба; *6* — головка оптического микрометра; *7* — микроскоп отсчетного устройства; *8* — призма-переключатель изображений вертикального и горизонтального кругов; поле зрения микроскопа отсчетного устройства (*б*)

С помощью теодолитов ТТ-2/6 выполнен основной объем угловых измерений в огромной по размеру астрономо-геодезической сети СССР. Этот теодолит по праву заслужил всеобщее признание геодезистов как надежный высокоточный теодолит, обеспечивающий измерение горизонтальных углов при расстояниях 20—30 км и более со средней квадратической ошибкой 0,5—0,7″ (по невязкам треугольников).

Примерно в то же время, когда был начат выпуск теодолитов ТТ-2/6, был разработан высокоточный астрономический универсал АУ-2/10 с лимбами диаметром 220 и 135 мм. Эти приборы в течение многих десятилетий успешно применялись для астрономических определений широт, долгот и азимутов на пунктах Лапласа.

В 1940 г. завод «Аэрогеоприбор» выпустил первую партию высокоточных оптических теодолитов ОТ-02, предназначенных для угловых измерений в геодезических сетях 2—4 классов. В послевоенные годы теодолит получил широкое распространение и высокую оценку специалистов. В 1965 г. он был несколько модернизирован и ему был присвоен новый шифр ОТ-02М (рис. 42, *а*).



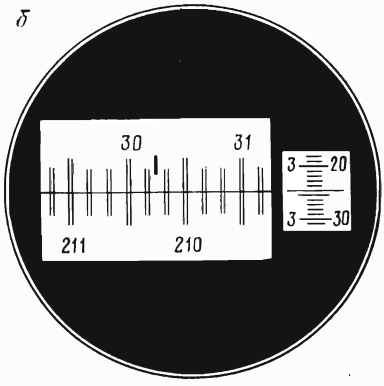


Рис. 43. Теодолит Т05 (*а*):
1 — зрительная труба; *2* — окулярный микрометр; *3* — накладной уровень; *4* — головка оптического микрометра; *5* — переключатель изображений горизонтального и вертикального кругов; *6* — поверительная труба с окулярным микрометром: поле зрения отсчетного микроскопа (*б*)

Отсчет по горизонтальному кругу (рис. 42, *б*) берут следующим образом:

23°20′
1′29,0″ (1-е совмещение)
29,6″ (2-е совмещение)

23°21′29,3″

В 1968 г. вместо теодолита ТТ-2/6 начался выпуск разработанного в ЦНИИГАиК нового высокоточного оптического теодолита Т05 полусекундной точности.

В 1975 г. был создан угломерный высокоточный комплект (УВК), основой которого является теодолит ОТ-02М, снабженный автоколлимационным окуляром, устройством для принудительного центрирования с ошибкой не более 0,5 мм, подставкой с оптическим центриром. В комплект входят также другие приспособления, используемые при решении задач прикладной геодезии.

В конце 70-х годов был начат выпуск новых высокоточных оптических теодолитов Т1 секундной точности.

Теодолит Т05 (рис. 43, *а*), как и любой другой оптический теодолит, удобен в работе, имеет меньшие габариты и массу, чем ТТ-2/6, а по точности измерения углов несколько превосходит его.

Теодолит Т05 состоит из двух основных частей: нижней и верхней, которые при необходимости (при перевозке или длительном хранении) могут быть разъединены и помещены в разные упаковочные ящики.

В нижнюю часть теодолита входят: подставка с подъемными

винтами и центрирующим устройством, горизонтальный круг с установленным на нем лимбом, колонки с лагерами для установки горизонтальной оси вращения трубы; узлы отсчетной системы, размещенные внутри колонок.

К верхней съемной части теодолита относятся: зрительная труба с горизонтальной осью, вертикальный круг и уровень при нем, отсчетный микроскоп, узлы отсчетной системы вертикального круга.

При алидаде горизонтального круга имеется цилиндрический уровень с ценой деления 6—7″ на 2 мм; на цапфы горизонтальной оси вращения трубы устанавливается накладной уровень с ценой деления 4—5″ на 2 мм.

Вертикальная ось теодолита цилиндрическая, полукинематического типа, саморегулирующаяся (на шариковой основе); длина ее рабочей части около 100 мм. Во избежание возможных повреждений оси при транспортировке осевая система снабжена разгрузочным устройством. С вертикальной осью жестко скреплена алидада теодолита, несущая колонки и служащая корпусом для многих узлов прибора.

Горизонтальная ось трубы цилиндрическая, полая, цапфы оси опираются на бронзовые лагеры; в качестве разгрузочного устройства используются ложные лагеры с роликами из шарикоподшипников.

Зрительная труба — центральная прямая астрономическая, переводится через зенит окулярным концом. Труба имеет окулярный микрометр с плоскопараллельной пластинкой; цена деления окулярного микрометра 1″.

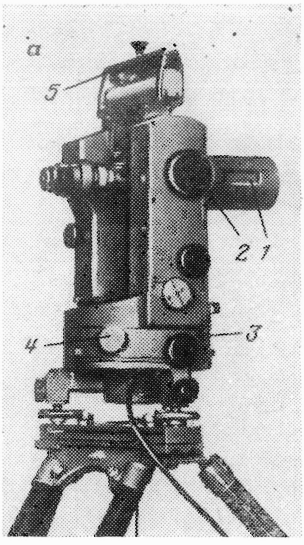
Отсчетная система построена в соответствии с классическим вариантом совмещения изображений диаметрально противоположных штрихов лимба. Отсчитывание по горизонтальному и вертикальному кругам осуществляется с помощью микрометра с оптическими клиньями. Так, отсчет по горизонтальному кругу (рис. 43, *б*) составит:

30°15′
3′24,7″ (1-е совмещение)
25,2″ (2- совмещение)
30°18′25,0″

Центрирование теодолита над точкой столика геодезического знака производится с помощью механического центрира-наколки.

В комплект прибора (по заказу потребителя) входит также поверительная труба для учета кручения сигнала.

Теодолит Т1 (рис. 44, *а*) в отличие от теодолитов ОТ-02 и ОТ-02М имеет: окулярный микрометр для точного визирования на цель; накладной уровень, устанавливаемый на горизонтальную ось вращения трубы; оптический центрир для установки



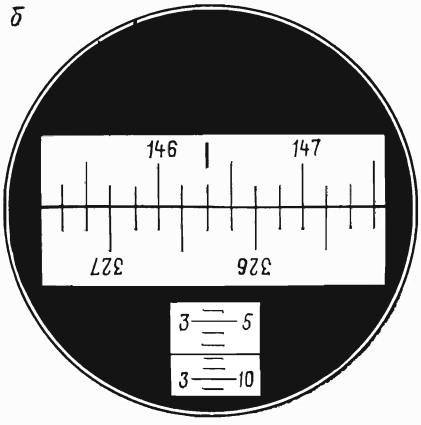


Рис. 44. Теодолит Т1 (*а*):
1 — зрительная труба с окулярным микрометром; *2* — головка оптического микрометра; *3* — подставка с подъемными винтами; *4* — головка устройства для перестановок горизонтального круга; *5* — накладной уровень; поле зрения отсчетного микроскопа (*б*)

прибора над точкой. Вертикальная ось цилиндрическая, полукинематическая, саморегулируемая (на шариковой опоре). Зрительная труба прямая центральная астрономическая, переводится через зенит окулярной частью. Окулярный микрометр имеет цену наименьшего деления 1″, изготовлен он в виде телескопической линзы. Отсчитывание по горизонтальному и вертикальному кругам выполняется с помощью микрометра с оптическими клиньями, как у теодолита Т05. Например отсчет по горизонтальному кругу теодолита Т1 (рис. 44, *б*) берут следующим образом:

146°20′
3′07,7″ (1-е совмещение)
08,1″ (2-е совмещение)

146°23′07,9″

Для сравнения отметим, что в теодолитах ОТ-02 и ОТ-02М применяется более сложный микрометр с плоскопараллельными пластинками. Теодолит Т1 имеет три цилиндрических уровня такого же типа и назначения, как и теодолит Т05.

Приведем основные технические характеристики высокоточных теодолитов (табл. 11).

Среди зарубежных теодолитов высокой точности выделим теодолиты оригинальной конструкции: DKM-3, Theo 002 и T2000S.

Теодолит DKM-3 (рис. 45) выпускается в геодезическом и астрономическом вариантах фирмой «Керн» (Швейцария). Зри-

Таблица 11

Техническая характеристика	Теодолит		
	Т05	Т1	ОТ-02М
Допустимое значение средней квадратической ошибки измерения угла одним приемом в лабораторных условиях:			
горизонтального	0,5″	1″	
вертикального	—	1,5	
Зрительная труба (главная):			
диаметр свободного отверстия объектива, мм	64	60	60
фокусное расстояние, мм	500	350	348
угол поля зрения	40′	1°	1,3°
увеличение, крат	36; 50; 62	30; 40	24; 30
цена деления барабана окулярного микрометра	1″	1″	—
наименьшее расстояние визирования, м	5	5	5
Горизонтальный круг:			
диаметр кольца делений лимба, мм	180	135	135
цена наименьшего деления лимба	10′	10′	10′
полные ошибки диаметров лимба, не более	1,0″	1,2″	1,5″
Вертикальный круг:			
диаметр кольца делений лимба, мм	130	90	90
цена наименьшего деления лимба	10′	10′	20′
полные ошибки диаметров лимба, не более	2,0″	2,5″	2,5″
Отсчетное устройство:			
вид	Оптический микрометр		
цена деления	1″	1″	1″
Номинальная цена деления ампулы уровня на 2 мм, угл. с:			
накладного	4	5	—
при алидаде горизонтального круга	7	7	6—7
при алидаде вертикального круга	12	12	10—12
Масса теодолита, кг:			
без упаковки	19	11	10,8
в упаковке	34	17*	18,5*
Масса штатива, кг	—	8	8

* С учетом массы центрировочной плиты.

тельная труба теодолита ломаная центральная, переводится через зенит обоими концами, дает прямое изображение наблюдаемых целей. По своей конструкции относится к зеркально-линзовым системам телескопического типа.

Вертикальная осевая система выполнена на разнесенной шариковой опоре; центрирование алидадной части теодолита осуществляется при помощи короткой направляющей, вращающейся в невысокой втулке. Шарики подшипника в количестве 60 диаметром 4 мм изготовлены с точностью 0,2 мкм. Располага-

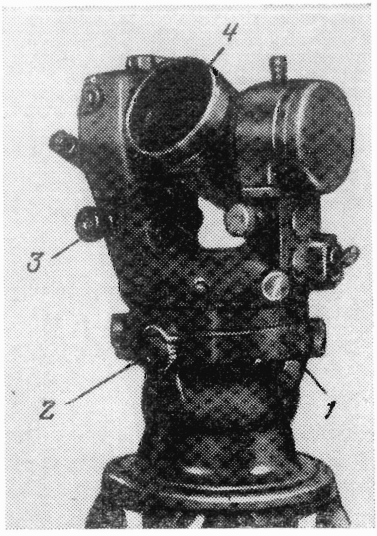


Рис. 45. Теодолит DKM-3:
1 — подставка теодолита с осевой системой; *2* — горизонтирующее устройство; *3* — отсчетный микроскоп; *4* — зрительная труба

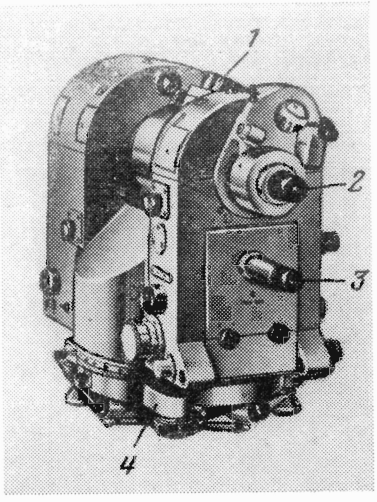


Рис. 46. Теодолит Theo 002:
1 — зрительная труба (зеркально-линзовая); *2* — окуляр зрительной трубы; *3* — окуляр отсчетного устройства; *4* — подставка с подъемными винтами

ются они вблизи краев алидады между тщательно отшлифованными плоскокольцевыми поверхностями, образуя опорный шарикоподшипник.

Благодаря короткой длине трубы и широко разнесенной шариковой опоре удалось существенно уменьшить габариты теодолита.

Отсчетная система построена по принципу «двойных кругов Керна». Она позволяет исключить влияние эксцентриситета лимба и алидады, а также свести к минимуму влияние ошибок диаметров лимба. Цена деления отсчетного устройства 0,5″.

Теодолит Theo 002 (рис. 46) выпускается Народным предприятием Карл Цейс Йена (ГДР), предназначен для высокоточных астрономо-геодезических измерений. Имеет компенсатор наклона для стабилизации места нуля вертикального круга с точностью до 0,1″. Снабжен компенсатором наклона горизонтальной оси вращения трубы с точностью до 0,05″. Зрительная труба теодолита зеркально-линзовая, скомбинирована с трубой-искателем, имеет окулярный микрометр с ценой деления 0,5″ и сетку нитей для астрономических определений широт, долгот и азимутов. Теодолит снабжен рядом дополнительных устройств и приспособлений, в том числе для фоторегистрации отсчетов по лимбу. Обеспечивает точность измерения горизонтальных

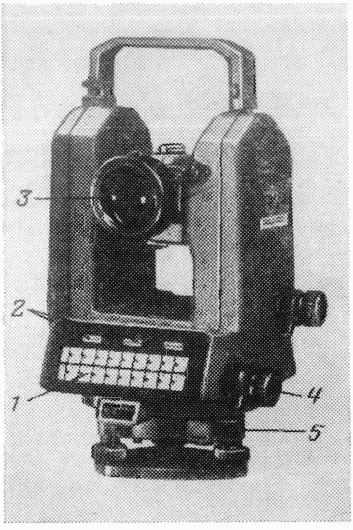


Рис. 47. Электронный теодолит T2000 S:
1 — дисплейная панель управления; *2* — световое табло результатов измерений горизонтальных углов и зенитных расстояний; *3* — зрительная труба; *4* — наводящий и закрепительный винты алидады горизонтального круга; *5* — подставка

направлений с ошибкой порядка 0,3″ (без учета влияний внешней среды).

Электронные теодолиты. Новейшие достижения в области электроники, микропроцессорной техники и оптического приборостроения позволяют автоматизировать высокоточную измерительную технику, применяемую в геодезии. В новейших высокоточных теодолитах, выпуск которых начат всего лишь несколько лет назад, вместо традиционной отсчетной системы со стеклянным лимбом и оптическим микрометром используется динамическая система отсчета по кругам с оптико-электронным сканированием, позволяющая автоматизировать процесс измерения углов и одновременно повысить их приборную точность.

К таким высокоточным электронным теодолитам относится, в частности, теодолит T2000 S (рис. 47) фирмы «Вильд Хербругг» (Швейцария). Зрительная труба дает прямое изображение высокого качества; диаметр объектива 52 мм, увеличение трубы 43$^{\times}$ (стандартное), но может быть установлено равным 26, 35 и 59$^{\times}$. Имеется два режима измерения углов: простой для измерения углов с наивысшей точностью и следящий для наблюдений за движущейся целью. Теодолит нормально работает в диапазоне температур от —20 до +50 °С. Масса теодолита без батарей для электропитания 9,7 кг, масса батарей 0,8 кг. Без перезарядки может быть выполнено 1500 угловых измерений. Теодолит имеет компенсатор, устанавливающий нуль-пункт вертикального круга в исходное положение. Точность отсчета по кругам может быть задана по усмотрению наблюдателя либо 1″, либо 0,1″. Отсчеты по горизонтальному

кругу автоматически исправляются поправками за эксцентриситет, коллимационную ошибку и наклон горизонтальной оси трубы. Отсчеты могут быть выражены как в градусах, так и в гонах (1/400 часть окружности).

Теодолит имеет дисплейную панель управления и подключаемый к нему регистратор. С помощью клавишей задается режим работы теодолита и регистрации данных. На экран дисплея выводятся значения измеренных горизонтальных углов и зенитных расстояний. Используя панель управления, можно ввести в память регистратора не только результаты измерений, но и, например, время наблюдений, номер пункта, его координаты и высоту, расстояния до наблюдаемых пунктов. Регистратор не только хранит записанную информацию, но и ведет математическую обработку результатов измерений в соответствии с заданной программой. К регистратору может быть подключен компьютер и другие электронные устройства, обрабатывающие измерительную информацию в геодезической сети.

Теодолит T2000 S в значительной мере автоматизирует процесс высокоточных измерений и обработки их результатов, повышает производительность труда при наблюдениях; он прост в обращении, надежен в работе и обеспечивает высокую точность измерений, в частности, горизонтальных углов со средней квадратической ошибкой порядка 0,5″ (без учета влияний внешней среды).

В ближайшие годы электронные теодолиты, а также электронные тахеометры получат видимо широкое распространение повсеместно как наиболее перспективные, позволяющие автоматизировать процесс измерений и обработки их результатов.

§ 37. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СХЕМА ВЫСОКОТОЧНОГО ОПТИЧЕСКОГО ТЕОДОЛИТА

Высокоточный оптический теодолит в отличие от точного имеет ряд конструктивных особенностей, обусловленных необходимостью выполнять угловые измерения в опорных геодезических сетях с максимально высокой точностью. Высокоточный оптический теодолит состоит из следующих основных частей (рис. 48):

осевой системы, в которую входят вертикальная ось теодолита *1*, ось вращения трубы *2* и точный уровень *3* (накладной или при алидаде); подставка *9*;

рабочей меры, т. е. лимбов горизонтального *4* и вертикального *5* кругов с делениями, нанесенными с высокой точностью;

визирного устройства, т. е. зрительной трубы *6 с* окулярным микрометром *7* или без него;

отсчетного устройства 8, включая оптический микрометр.

В соответствии с геометрической схемой теодолита горизонтальная ось вращения трубы и плоскость лимба горизонталь-

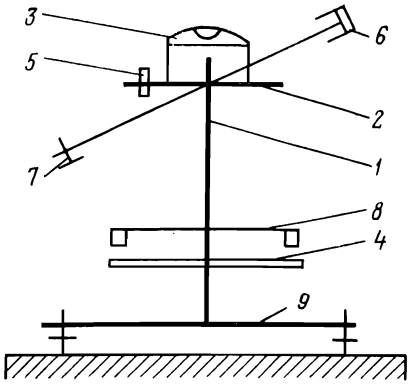


Рис. 48. Геометрическая схема высокоточного теодолита

ного круга должны быть перпендикулярны к вертикальной оси; визирная ось трубы должна быть перпендикулярна к оси вращения трубы; ось вращения алидады и ось вращения горизонтального круга должны проходить через центр кольца делений лимба или совпадать; кроме того, вертикальная ось теодолита при угловых измерениях на пункте не должна отклоняться от отвесной линии в точке его установки. Любые нарушения геометрической схемы теодолита в процессе угловых измерений неизбежно ведут к появлению соответствующих ошибок, отрицательно влияющих на результаты измерений.

Основные части теодолита находятся между собой в определенной связи; точность их изготовления должна быть согласована. Требования к точности изготовления всех узлов и деталей высокоточного теодолита вытекают из его назначения — измерять горизонтальные направления и углы с наивысшей точностью. Требования к точности измерения зенитных расстояний (вертикальных углов) несколько ниже; однако данный вопрос в настоящее время нуждается в коренном пересмотре, так как для решения многих народнохозяйственных задач с использованием геодезических методов необходимо измерять зенитные расстояния наблюдаемых целей с такой же высокой точностью, как и горизонтальные углы (при надлежащем учете рефракции в обоих случаях).

В любом теодолите, особенно высокоточном, должны быть согласованы: точность изготовления осевой системы, точность разделения лимба (точность нанесения делений); точность визирования посредством зрительной трубы; точность изготовления и компоновки узлов отсчетного устройства и т. д. Ниже рассмотрим основные конструктивные особенности отдельных узлов высокоточных оптических теодолитов и предъявляемые к ним требования.

§ 38. ОСЕВЫЕ СИСТЕМЫ И УРОВНИ ВЫСОКОТОЧНОГО ТЕОДОЛИТА

Осевые системы

Вертикальная ось теодолита является основной его осью, относительно которой размещаются все остальные части и узлы теодолита соответственно его геометрической схеме.

В современных высокоточных теодолитах типа Т05, Т1, ОТ-02М (УВК) широко применяются цилиндрические оси полукинематического типа, саморегулируемые [22]. Конструктивно эта система осей реализуется по-разному в указанных выше теодолитах, но в принципиальной ее части остается неизменной.

Вертикальная ось теодолита ОТ-02 (рис. 49) внутри полая, жестко связана с алидадной (верхней) частью теодолита. Она соприкасается с боковой поверхностью втулки только по узкому ведущему пояску, который направляет движение оси в ее нижней части. Опорой алидады служат стальные шарики, размещенные на скошенной под углом поверхности втулки оси. Под действием массы алидады и собственной массы шарики стремятся скатиться вниз по наклонной плоскости и со всех сторон обхватывают ось, не давая ей колебаться при вращении алидады. Такая система осей является саморегулирующейся. Для обеспечения высокой устойчивости оси при вращении алидады требуется, чтобы разность диаметров шариков была не более 0,5 мкм.

Наличие зазора между осью алидады и боковой поверхностью втулки устраняет заклинивание оси при значительном понижении температуры теодолита. Это позволяет выполнять измерение углов при значительных изменениях температуры воздуха.

Изготовление осей высокоточных теодолитов — одна из ответственных механических операций. Обычно требуют, чтобы колебания оси вращения алидады в процессе угловых измерений не превышали 1″, что можно рассматривать как допуск на конусность цилиндрической оси (рис. 50), который не должен превышать величины

$$x = \frac{i}{\rho} l.$$

При $i = 1''$, $l = 100$ мм получим $x = 0{,}5$ мкм. Следовательно, оси у высокоточных теодолитов следует изготовлять с особой тщательностью и высокой точностью.

Вертикальная ось с разнесенной шариковой опорой (рис. 51) применяется в теодолитах типа DKM-3. Поскольку при длине цилиндрической оси 100 мм и более довольно трудно устранить колебания оси при вращении алидады, было принято решение значительно увеличить площадь опоры алидады, а на долю

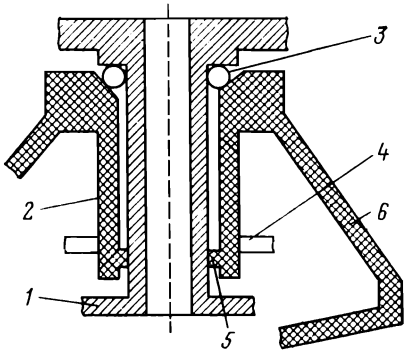


Рис. 49. Цилиндрическая ось полукинематического типа с шариковой опорой в теодолитах типа ОТ-02:

1 — ось алидады; *2* — втулка алидады; *3* — шарикоподшипник (опора алидады); *4* — лимб; *5* — ведущий поясок; *6* — подставка

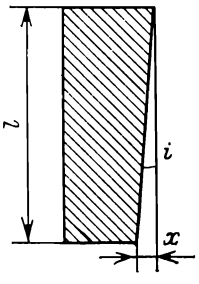


Рис. 50. Конусность цилиндрической оси теодолита

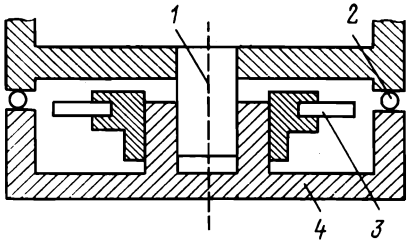


Рис. 51. Вертикальная ось теодолита DKM-3 с разнесенной шариковой опорой:

1 — ось алидады; *2* — шарикоподшипник; *3* — лимб; *4* — подставка

самой оси оставить функции направляющей движения алидады и центрирования прибора.

Достигнута высокая точность изготовления шариковой опоры: разность диаметров шариков не превосходит 0,2 мкм.

Достоинства осевой системы с разнесенной шариковой опорой состоят в следующем: уменьшается высота прибора, следовательно опускается центр его тяжести, что увеличивает устойчивость прибора; обеспечивается свободное вращение алидады; уменьшается чувствительность осевой системы к изменениям температуры.

Уровни высокоточного теодолита

Одной из важных конструктивных особенностей высокоточных теодолитов типа Т05 и Т1 является наличие накладного уровня, устанавливаемого непосредственно на цапфы оси вращения

трубы; кроме того, имеются уровни при алидаде горизонтального и вертикального кругов. Наиболее точным является накладной уровень; цена деления его равна 3—5″ на 2 мм. Уровень при алидаде горизонтального круга имеет цену деления 6—7″, а при алидаде вертикального круга — 10—12″ на 2 мм.

Накладной уровень и уровень при алидаде горизонтального круга предназначены для приведения вертикальной оси теодолита в отвесное положение. Накладной уровень позволяет в процессе угловых измерений непрерывно контролировать горизонтальность оси вращения трубы и дает возможность определять с необходимой точностью поправки в измеренные направления за наклон вертикальной оси теодолита (относительно отвесной линии).

Уровень при алидаде вертикального круга служит для приведения в горизонтальное положение нулевого диаметра вертикального круга 0—180° или 90—270°, в зависимости от типа теодолита, при измерении углов наклона или зенитных расстояний.

Основной частью цилиндрического уровня является стеклянная ампула, внутренняя поверхность которой изготовляется с высокой точностью шлифованием. Радиус кривизны внутренней поверхности ампулы в ее продольном направлении зависит от цены деления уровня τ и может быть рассчитан по формуле

$$r = \frac{\rho}{\tau} \Delta l,$$

где Δl — расстояние между соседними делениями ампулы уровня. При $\tau = 4$; 7 и 12″, $\rho = 206\,265''$ и $\Delta l = 2$ мм получим соответственно $r \approx 103$; 59 и 34 м.

Длина пузырька уровня заметно изменяется при изменении температуры (примерно на 0,4 деления на 1 °С). Чем короче длина пузырька, тем меньше чувствительность уровня и наоборот, чем больше длина пузырька, тем больше чувствительность уровня. Под чувствительностью уровня понимают минимальный угол наклона уровня, при котором происходит еле заметное для глаза смещение пузырька; обычно считают, что чувствительность уровня равна 0,1 τ.

Нормальной является длина пузырька, равная 1/3 шкалы делений на ампуле уровня. В камерном уровне (рис. 52) длину пузырька регулируют путем наклона ампулы и перемещения требуемого объема паров эфира (наполнителя ампулы уровня) из изолированной камеры *1* через отверстие *2* в перегородке.

При работе в полевых условиях необходимо тщательно защищать уровень и теодолит в целом от попадания на них солнечных лучей, так как одностороннее нагревание ампулы уровня вызывает сдвиг пузырька в сторону источника тепла.

Поскольку уровень теодолита является чувствительной

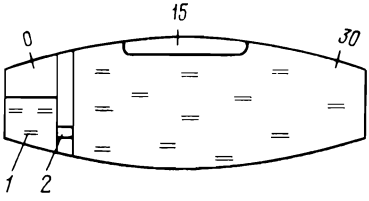


Рис. 52. Ампула камерного уровня с перегородкой

системой, то прежде чем сделать отсчет по шкале уровня, надо выждать некоторое время пока пузырек успокоится, так как его перемещение происходит несколько медленнее вследствие прилипания наполнителя к стенкам ампулы.

§ 39. ЛИМБ ВЫСОКОТОЧНОГО ОПТИЧЕСКОГО ТЕОДОЛИТА

Лимб оптического теодолита представляет собой стеклянный диск, на поверхности которого по окружности определенного радиуса нанесена шкала делений обычно от 0 до 360° через заданный интервал между смежными штрихами (5, 10, 20′ и т. д.). Стеклянный лимб соосно крепится к металлическому кругу, который устанавливается на ось вращения теодолита (горизонтальный круг) или на ось вращения трубы (вертикальный круг).

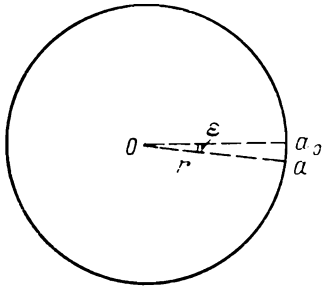
Лимб является рабочей мерой, с которой сравниваются существующие на местности углы между заданными направлениями в горизонтальной или вертикальной плоскостях. Главной характеристикой качества изготовления лимба является точность его разделения, характеризуемая ошибками положения штрихов на круговой шкале делений относительно их расчетного положения. Чем меньше ошибки нанесения штрихов, тем выше качество и точность лимба.

В современных геодезических сетях высокой точности горизонтальные направления требуется измерять со средней квадратической ошибкой не более 0,3—0,5″. На точность измерений оказывает неблагоприятное влияние множество различных факторов, в том числе внешняя среда, приборные ошибки и т. д. Поэтому для получения высокой точности измерений направлений необходимо, чтобы ошибки положения штрихов на лимбе были в два-три раза меньше ошибок измерения направлений и составляли в среднем около 0,15—0,17″, не превышая предельной величины $\varepsilon \approx 0{,}5''$.

Угловой величине ε соответствует линейное смещение штриха лимба a относительно его расчетного положения a_0 на величину дуги a_0a (рис. 53, a), которая равна

$$\overset{\frown}{a_0a} = \varepsilon r/\rho,$$

Рис. 53. Ошибка положения штриха лимба



где r — радиус кольца делений лимба. При $r=90$ мм (теодолит Т05) и $\varepsilon=0{,}5''$ получим $\overset{\smile}{a_0a}=0{,}2$ мкм. Отсюда следует, что разделение лимбов высокоточных теодолитов должно выполняться с исключительно высокой точностью, соответствующей техническим возможностям современного точного приборостроения.

§ 40. ЗРИТЕЛЬНЫЕ ТРУБЫ ВЫСОКОТОЧНЫХ ТЕОДОЛИТОВ

Одной из важнейших конструктивных особенностей зрительной трубы высокоточного теодолита является наличие окулярного микрометра, посредством которого осуществляется визирование на наблюдаемые цели. Имеются зрительные трубы разных видов как для визуальных, так и для невизуальных наблюдений, т. е. с участием и без участия наблюдателя [22]. В астрономических теодолитах используются ломаные астрономические трубы с обратным изображением наблюдаемых объектов. В оптических теодолитах высокой точности применяются астрономические трубы с внутренней фокусировкой (рис. 54). Используются также и зеркально-линзовые трубы, например, в теодолитах DKM-3. В теодолитах для невизуальных наблюдений применяются трубы с фотоэлектрической, лазерной, телевизионной и другими системами наведений трубы.

Средняя квадратическая ошибка визирования. Точность визирования с помощью зрительной трубы зависит от разрешающей силы трубы, разрешающей способности глаза наблюдателя, контраста цели и фона, на который она проектируется, прозрачности атмосферы, амплитуды колебаний изображений и т. п. Под разрешающей способностью глаза понимают такой предельно малый угол ω, при котором две близко расположенные точки почти сливаются, но видны еще раздельно. При расчетах обычно принимают $\omega=60''$ (у отдельных наблюдателей эта величина может изменяться от 15 до 120″).

Разрешающая сила зрительной трубы α зависит от ее увеличения Г и определяется по формуле

$$\alpha=\omega/\Gamma. \qquad (6.1)$$

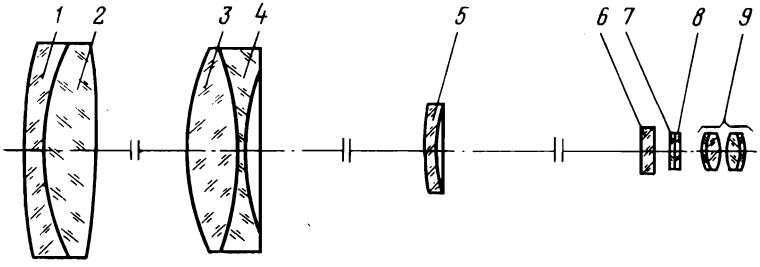


Рис. 54. Оптическая схема трубы теодолита Т05:

1, 2 и *3, 4* — компоненты объектива; *5* — фокусирующая линза; *6* — плоскопараллельная пластинка окулярного микрометра; *7* — сетка нитей; *8* — покровное стекло сетки нитей; *9* — окуляр

Исследования проф. А. С. Чеботарева показали, что при благоприятных условиях наблюдений разрешающая сила трубы соответствует предельной ошибке визирования, т. е.

$$\alpha \approx 3m_{\text{виз}}. \qquad (6.2)$$

Отсюда найдем

$$m_{\text{виз}} \approx \alpha/3 = \omega/3\Gamma. \qquad (6.3)$$

По этой формуле можно определить средние квадратические ошибки визирования для разных теодолитов (табл. 12).

Практика показывает, что увеличение зрительной трубы более $60^{\times}$ не дает желаемого эффекта, так как чем больше увеличение, тем менее прозрачной кажется атмосфера из-за сильного увеличения изображения находящихся в ней взвешенных частиц. При значительных расстояниях между пунктами и большом увеличении трубы атмосфера кажется мутной, видимость цели ухудшается, точность визирования понижается.

Окулярный микрометр. Для ослабления влияния случайных ошибок визирования трубы высокоточных теодолитов снабжают окулярным микрометром, основной частью которого является подвижный биссектор сетки нитей, связанный с отсчет-

Таблица 12

Техническая характеристика	Т05	Т1	ОТ-02М
Увеличение зрительной трубы, крат	36; 50; 60	30; 40	24; 30
Разрешающая сила трубы α, угл. с	1	2	2
Средняя квадратическая ошибка визирования $m_{\text{виз}}$, угл. с	0,3	0,7	0,7

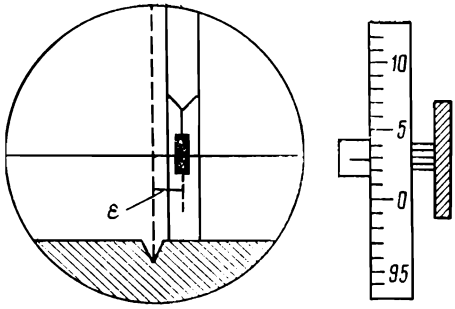


Рис. 55. Поле зрения окулярного микрометра трубы высокоточного теодолита

ной шкалой микрометра (рис. 55). Угловое расстояние между вертикальными нитями биссектора около 30—35″. При наблюдениях биссектор не менее трех раз подряд наводят на визирную цель при неподвижном положении трубы и таким образом измеряют угловое смещение середины биссектора (визирной цели) на величину ε относительно нуль-пункта микрометра (показан пунктиром). Выразив величину ε в угловой мере, получают поправку в отсчет по лимбу за показания окулярного микрометра. Применение окулярного микромера с подвижным биссектором позволяет в 1,5—2 раза уменьшить влияние случайных ошибок визирования.

Поверительная труба. Высокоточные теодолиты кроме главной имеют еще так называемую поверительную трубу, снабженную окулярным микрометром. Поверительная труба впервые была предложена выдающимся русским астрономом и геодезистом В. Я. Струве. Крепится она к подставке теодолита и предназначена для определения и учета кручения столика геодезического сигнала при наблюдениях. Перед началом угловых измерений на пункте поверительную трубу наводят на близлежащую визирную цель (на расстоянии 1—2 км) и жестко скрепляют с подставкой теодолита с помощью закрепительного устройства.

При выполнении наблюдений на пункте главную и поверительную трубы наводят на соответствующие визирные цели и по команде наблюдателя синхронно берут отсчеты по окулярным микрометрам этих труб. По разностям отсчетов по поверительной трубе вычисляют поправки за кручение геодезического сигнала в измеренные направления и углы. Благодаря применению поверительной трубы значительно повышается точность угловых измерений, выполняемых с сигналов, имеющих значительное кручение. Если кручение сигнала мало (не более 1″ за 4—5 мин), поверительную трубу не используют.

§ 41. ОТСЧЕТНОЕ УСТРОЙСТВО ОПТИЧЕСКОГО ТЕОДОЛИТА

Геометрическая схема отсчетного устройства оптического теодолита зависит от принципа передачи информации о делениях лимба. В теодолитах типа ОТ-02 и Вильд Т-3 лучи, идущие от источника света, через систему призм и линз проходят через лимб и отражаются от его верхней поверхности, покрытой амальгамой. В теодолитах типа Т05, Т1 лучи света просвечивают лимб в той части, где нанесены деления, не отражаясь от него. Подробное описание отсчетного устройства теодолитов типа ОТ-02 дано в учебном пособии [4]. Рассмотрим в общих чертах оптическую схему отсчетного устройства теодолита Т05 (рис. 56).

Световой поток от источника света *1* через защитное стекло, конденсор и призму *2* освещает штрихи *I* (левой) части лимба *3*, нанесенные на его нижней поверхности. С помощью оборачивающей системы, состоящей из двух одинаковых компонентов *5* и *6* и призм *4* и *7*, строятся изображения штрихов *I* (левой) части лимба в плоскости штрихов *II* (правой) части лимба, при этом изображения штрихов левой части лимба повернуты относительно последних на 180°. Световой поток, теперь уже несущий информацию о штрихах левой (I) и правой (II) частей лимба, с помощью призмы *8* направляется в объектив отсчетного микроскопа горизонтального круга, состоящий из двух компонентов *9* и *10*, который строит изображение диаметрально противоположных сторон лимба в плоскости при выходе пучка света из разделительного блока *13*, предназначенного для соединения и четкого разделения изображений противоположных частей лимба по прямой линии (см. рис. 43). При входе в оптический микрометр *11—17* световой поток проходит мимо призмы-переключателя *29* изображений горизонтального и вертикального кругов.

Изображения диаметрально противоположных частей лимба *22* вертикального круга с помощью системы призм и линз *23—28* и других передаются на призму-переключатель *29* и направляются в оптический микрометр *11—17*. Лучи света, идущие от противоположных частей лимба, проходят соответственно через два неподвижных оптических клина *11*, разделенных между собой шторкой *30*, затем проходят через подвижные клинья *12*, разделительный блок *13*, призму *14* и попадают в коллектив *18*, являющийся первой оптической деталью отсчетного микроскопа. На входной грани призмы *14* имеется окно с индексом для определения эксцентриситета; окно служит диафрагмой поля зрения изображений противоположных частей лимба.

Шкала секунд *15* микрометра жестко соединена с подвижными клиньями *12*. Индекс для отсчетов по шкале секунд нанесен в окне на входной грани призмы *17*, являющейся диаф-

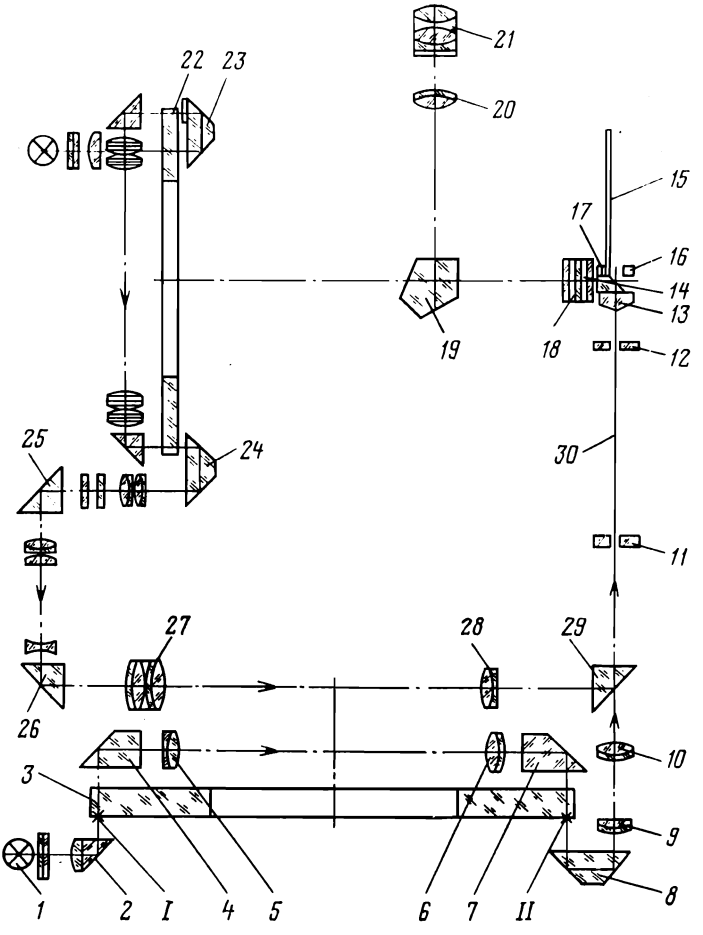


Рис. 56. Оптическая схема отсчетной системы теодолита Т05

рагмой поля зрения изображения шкалы секунд. Часть светового потока, не участвующего в построении изображений шкалы лимба, при выходе из разделительного блока *13* минует призму *14*, через призму *16* освещает шкалу секунд *15* и затем поступает в тот же оптический коллектив *18* через призму *17*.

Отсчетный микроскоп, состоящий из коллектива *18*, пентапризмы *19*, объектива *20* и окуляра *21* передает изображения диаметрально противоположных частей лимба, а также изображение шкалы секунд (см. рис. 43).

Оптическая схема отсчетной системы теодолита Т1 в принципиальной ее части не отличается от схемы теодолита Т05.

§ 42. ПРИНЦИП СОВМЕЩЕННОГО ОТСЧЕТА. ОПТИЧЕСКИЕ МИКРОМЕТРЫ

Принцип совмещенного отсчета. Для того чтобы исключить влияние эксцентриситета, отсчеты производят по диаметрально противоположным штрихам лимба и из них выводят средний результат. Пусть A и B индексы двух отсчетных приспособлений, установленных на противоположных частях лимба, и пусть a и b — младшие штрихи, т. е. ближайшие к отсчетным индексам A и B штрихи лимба (рис. 57). Чтобы сделать отсчет по лимбу с помощью двух отсчетных приспособлений, устанавливаемых на противоположных частях лимба, надо измерить отрезки дуг aA и bA. Тогда окончательный отсчет M, свободный от влияния эксцентриситета, будет равен

$$M = a + \frac{aA + bB}{2}.$$

В оптических теодолитах отсчетное устройство устроено таким образом, что в поле зрения отсчетного микроскопа (показано пунктиром) видны совмещенные изображения диаметрально противоположных краев лимба, которые можно представить в виде двух соприкасающихся окружностей (рис. 58, *а*). Так как дуги $\overset{\smile}{aA}$ и $\overset{\smile}{bB}$ весьма малы, то линия касания двух окружностей после прохождения пучка лучей через разделительный блок изображается в поле зрения отсчетного микроскопа с индексом j в виде прямой линии MN (рис. 58, *б*). Производство отсчетов по лимбу оптического теодолита сводится к измерению расстояния $\overline{ab}$ между изображениями диаметрально противоположных штрихов a и b и вычислению окончательного отсчета по формуле

$$M = a + \frac{\overset{\smile}{aA} + \overset{\smile}{bB}}{2} = a + \frac{\overset{\smile}{aA} + \overset{\smile}{b_1B_1}}{2} = a + \frac{\overline{ab}}{2}.$$

Таким образом, чтобы получить отсчет по лимбу в оптическом теодолите, свободный от влияния эксцентриситета, надо определить значение младшего штриха a, измерить расстояние $\overline{ab}$ между изображениями диаметрально противоположных штрихов a и b и его половину, выраженную в угловой мере, прибавить к значению младшего штриха. Отрезок $\overline{ab}/2$ измеряют с помощью оптического микрометра.

Оптические микрометры. Имеется значительное число разных по конструкции оптических микрометров. В оптических теодолитах высокой точности используются в основном микро-

Рис. 57. Схема отсчета по лимбу с помощью двух отсчетных приспособлений

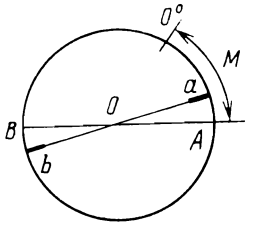
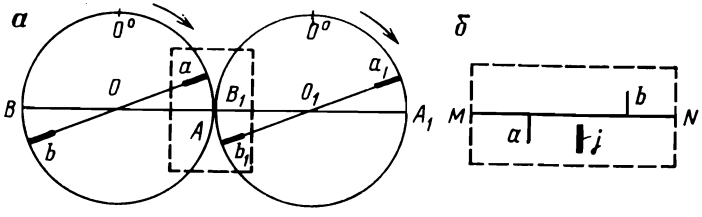


Рис. 58. Схема совмещенного отсчета по лимбу в оптических теодолитах (*а*) и поле зрения отсчетного микроскопа (*б*)



метры с плоскопараллельными пластинками [4] (теодолиты типа ОТ-02, Вильд Т-3 и др.) и микрометры с оптическими клиньями (теодолиты Т05, Т1 и др.).

В микрометре с плоскопараллельными пластинками половину расстояния ab между изображениями диаметрально противоположных штрихов лимба a и b измеряют с помощью двух плоскопараллельных пластинок, наклоняемых одновременно в разные стороны под одним углом. Вращением головки оптического микрометра совмещают изображения противоположных штрихов лимба a и b и затем фиксируют отсчет по шкале секунд микрометра, дающий значение $\overline{ab}/2$.

Достоинством микрометра с плоскопараллельными пластинками является его компактность, малые размеры (диаметр $\approx$30 мм) и достаточно высокая точность измерений. Однако ему присущи и недостатки: микрометр имеет мертвый ход; он достаточно сложен в изготовлении (погрешности изготовления его узлов обусловливают наличие систематических ошибок, хотя и малых по величине, но обязательно учитываемых при высокоточных измерениях).

В оптическом микрометре другого типа в качестве измерительного средства используются оптические клинья с малым преломляющим углом (рис. 59). Если оптический клин (положение I) переместить по направлению падающего на него луча на расстояние l (положение II), то луч сместится параллельно самому себе на величину $\Delta=\varepsilon l$ или при $\varepsilon=\alpha(n-1)$ на величину

$$\Delta=\alpha(n-1)\,l/\rho,$$

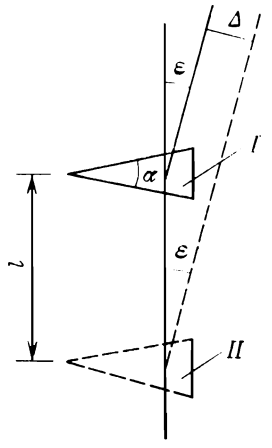


Рис. 59. Схема параллельного смещения оптического луча с помощью оптического клина

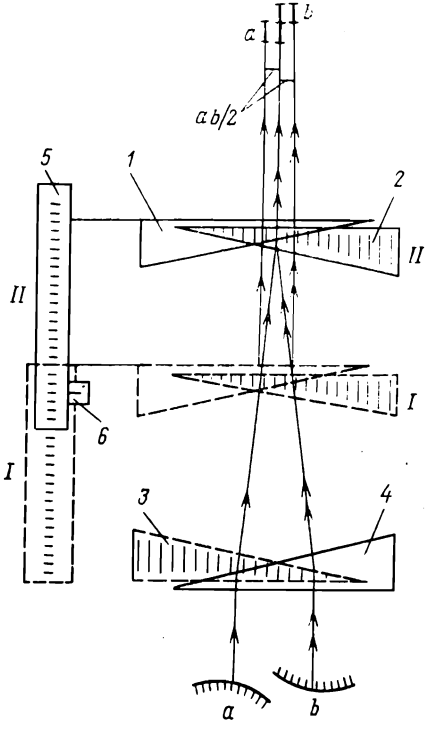


Рис. 60. Схема работы микрометра с оптическими клиньями

где α — преломляющий угол клина; n — показатель преломления стекла клина. Величины α и n для данного клина постоянны, поэтому измерение Δ сводится к определению l.

Микрометр (рис. 60) состоит из пары подвижных клиньев *1*, *2*, с помощью которых измеряется отрезок $\overline{ab}/2$; пары неподвижных клиньев *3*, *4*, шкалы секунд *5* и неподвижного индекса *6*. Подвижные клинья жестко соединены между собой и со шкалой секунд. Любое перемещение пары подвижных клиньев неизбежно вызывает перемещение на ту же величину шкалы секунд.

Для измерения половины отрезка $\overline{ab}$ между изображениями диаметрально противоположных штрихов лимба *a* и *b* подвижные клинья поступательно перемещают из исходного положения *I* (отсчет по шкале равен нулю) в положение *II* (изображения этих штрихов совмещены) и затем фиксируют величину этого перемещения по шкале.

Неподвижные клинья развернуты относительно подвижных на 180° и служат для отклонения лучей по направлению, параллельному начальному, а также для устранения хроматизма

(окрашивания изображений штрихов после прохождения лучей через оптический клин).

Микрометр с оптическими клиньями получил широкое применение в современных высокоточных теодолитах, так как обладает рядом преимуществ: его конструкция очень проста и легко реализуема; микрометр не имеет мертвого хода, обеспечивает высокую точность измерений.

Отсчеты по лимбу с использованием оптического микрометра берут следующим образом. В окрестности отсчетного индекса совмещают изображения диаметрально противоположных штрихов лимба и фиксируют отсчет M° подписанного штриха слева от индекса; затем определяют число n интервалов (делений) между подписанными штрихами, отличающимися точно на 180°, наконец берут отсчет c по шкале секунд микрометра. Окончательный отсчет M по лимбу получают как сумму

$$M = M^\circ + n\,(i/2) + c\mu,$$

где i — цена деления лимба; μ — цена деления шкалы микрометра. В целях повышения точности отсчитывания по лимбу дважды совмещают изображения диаметрально противоположных штрихов и дважды берут отсчеты, а затем находят среднее из них.

§ 43. ПОВЕРКИ И ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫСОКОТОЧНЫХ ТЕОДОЛИТОВ

В задачу *поверок и юстировок* входят выявление отклонений от геометрических параметров и оптико-механических требований, положенных в основу конструкции теодолита, и наиболее полное их устранение. *Исследования* предусматривают определение неустранимых отклонений с целью введения соответствующих поправок в результаты измерений; определение постоянных теодолита (цены деления отсчетного устройства, окулярного микрометра, уровней и т. д.); испытание правильности работы отдельных узлов теодолита; определение ошибок диаметров лимба; определение влияния внешних условий на работу отдельных узлов и теодолит в целом и т. д. По результатам выполненных исследований определяют пригодность теодолита для производства работ данного класса точности.

К числу обязательных поверок, выполняемых перед наблюдениями на каждом пункте, относятся следующие.

1. Ось накладного уровня должна находиться в одной плоскости с горизонтальной осью вращения трубы и должна быть параллельна ей.

2. Вращение алидады вокруг вертикальной оси теодолита должно происходить плавно без колебаний и заеданий.

3. Горизонтальная ось вращения трубы должны быть перпендикулярна к вертикальной оси вращения теодолита.

4. Наклоны трубы теодолита в вертикальной плоскости, осуществляемые с помощью наводящего винта трубы, не должны вызывать азимутальных смещений оси трубы в лагерах.

5. Отсчетное устройство должно быть выверено и отъюстировано.

6. Коллимационная ошибка трубы должна быть не более 10″.

7. Нити биссектора окулярного микрометра трубы должны быть установлены вертикально.

8. Место зенита MZ или место нуля MO вертикального круга должно быть не более 10″, MZ или MO вычисляют по формулам:

теодолиты ОТ-02М

$$MZ = КЛ + КП - 180°; \quad Z = КП - КЛ + 90°;$$

теодолиты Т1

$$MZ = (КЛ + КП - 360°)/2; \quad Z = КЛ - MZ;$$

теодолиты Т05

$$MO = (КЛ + КП \pm 180°)/2; \quad \beta = 90° - Z = КЛ - MO.$$

9. Подъемные и наводящие винты должны иметь плавный ход, без люфта и заеданий.

Каждый высокоточный теодолит, полученный с завода, а также прошедший капитальный ремонт, тщательно исследуют по полной программе. Для установления его пригодности для производства высокоточных угловых измерений из исследований определяют цену деления уровня (накладного и при алидаде), цену деления окулярного микрометра трубы (основной и поверительной), правильность хода фокусирующей линзы трубы, ошибки совмещения изображений штрихов лимба, рен оптического микрометра, мертвый ход микрометра с плоскопараллельными пластинками, ошибки делений шкалы микрометра, эксцентриситет лимба и алидады, правильность вращения алидады, ошибки диаметров лимба, неперпендикулярность горизонтальной и вертикальной осей теодолита. Наконец, определяют средние квадратические ошибки измерения горизонтальных и вертикальных углов в лабораторных условиях одним приемом (по отклонениям от среднего из 12 приемов). Подробные указания по выполнению поверок и исследований теодолитов содержатся в действующих ГОСТах и нормативных документах.

§ 44. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕНА ОПТИЧЕСКОГО МИКРОМЕТРА

Реном оптического микрометра называют разность между номинальной и измеренной с помощью микрометра величиной полуделения лимба. Рен определяют отдельно для отсчетной системы горизонтального и вертикального кругов. Поскольку пучки лучей, идущие от диаметрально противоположных краев лимба, проходят до микрометра различные оптические пути, то рен для верхнего и нижнего изображений круга в поле зрения отсчетного микроскопа может быть разным.

Рен отсчетной системы горизонтального круга определяют при разных его установках равномерно распределенных по всей окружности для ослабления влияния ошибок диаметров лимба на среднее значение рена. Алидаду переставляют через $45°+i$ (i — цена деления лимба). Прямой ход начинают с установки алидады на 0° 00′, а обратный с установки на 360°— $-(22°+i)$.

Рен отсчетной системы вертикального круга у теодолитов Т05 определяют в диапазоне отсчетов от 350° до 4° 10′ (прямой ход) и от 7° 50′ до 353° 40′ (обратный ход), у теодолитов Т1, ОТ-02М от 80° 00′ до 94° 10′ (прямой ход) и от 97° 50′ до 83° 40′ (обратный ход); вертикальный круг переставляют через 2° 10′.

Порядок измерений следующий. На шкале оптического микрометра (рис. 61) устанавливают отсчет, близкий к нулю, и затем с помощью наводящего винта алидады совмещают по возможности более точно диаметрально противоположные штрихи A и $A+180°$ верхнего и нижнего изображений шкалы делений лимба (1-е положение). После этой подготовительной операции с помощью оптического микрометра точно совмещают изображения штрихов лимба (по два раза подряд) и берут дважды отсчеты:

a — при совмещении штрихов A и $A+180°$;

b — при совмещении штрихов $A—i$ и $A+180°$;

c — при совмещении штрихов A и $A+180°—i$, где i — цена деления лимба.

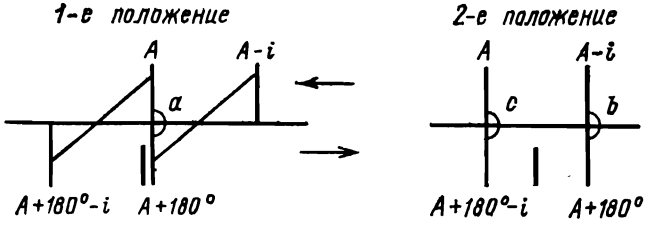


Рис. 61. Схема совмещений изображений штрихов лимба при определении рена оптического микрометра

Следует отметить, что отсчеты a берут в начале, а отсчеты b и c — в конце шкалы микрометра (2-е положение), причем отсчет b при совмещении штрихов, расположенных справа от индекса, а отсчет c — слева от него.

Рен вычисляют по формулам

$$r_в = (a-b)\,\mu + i/2;\quad r_н = (a-c)\,\mu + i/2;\quad r = (r_в + r_н)/2,$$

где a, b, c — отсчеты по шкале микрометра в делениях, μ — цена деления шкалы микрометра, i — цена деления лимба.

Среднее значение рена $r = (r_в + r_н)/2$ и разность $\Delta r = r_в - r_н$ не должны превышать у высокоточных теодолитов 0,5″. При $r > 0{,}5''$ и $\Delta r \leqslant 0{,}5''$ в измеренные на пункте направления и зенитные расстояния вводят поправки за рен, равные

$$\delta r = \frac{2c}{i} r,$$

где отсчет по микрометру c и цену деления лимба i выражают в угловых минутах. При $r > 0{,}5''$ и $\Delta r > 0{,}5''$ необходимо отъюстировать отсчетную систему, изменив соответственно расстояние между ее оптическими компонентами *9* и *10* (см. рис. 57).

Среднюю квадратическую ошибку m_r определения рена и среднюю квадратическую ошибку $m_{сов}$ одного совмещения изображений штрихов лимба найдем по формулам

$$m_r = \sqrt{\frac{3\Sigma d^2}{4nk}};\qquad m_{сов} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{2n}},$$

где $d = A - A'$ — разности отсчетов при первом и втором совмещении штрихов на всех k установках алидады, n — число этих разностей; для изложенной здесь методики определения рена $k = 16$, $n = 48$. Требуется, чтобы ошибки m_r и $m_{сов}$ для горизонтального круга высокоточного теодолита не превышали 0,1 и 0,3″ соответственно; для вертикального круга эти допуски удваиваются.

§ 45. ПОГРЕШНОСТИ ШКАЛЫ ОПТИЧЕСКОГО МИКРОМЕТРА. МЕРТВЫЙ ХОД МИКРОМЕТРА

Погрешности шкалы микрометра

При разделении шкалы микрометра неизбежны ошибки нанесения штрихов. Они должны быть определены и при необходимости учтены в виде поправок при высокоточных измерениях. Будем полагать, что рен микрометра в результате его юстировки устранен.

С помощью коллиматоров задают последовательно три контрольных угла β_1, β_2 и β_3, каждый из которых должен укла-

дываться m раз в полуделении лимба $i/2$. При этом должны выполняться равенства

$$m_1\beta_1 = m_2\beta_2 = m_3\beta_3 = i/2.$$

Обычно принимают $m_3=2$. При $i=10'$ получим $\beta_1=0{,}5'$; $m_1=10$; $\beta_2=1{,}0'$; $m_2=5$ и $\beta_3=2{,}5'$, $m_3=2$.

Исследования выполняют при разных установках лимба, равномерно распределенных по всей окружности. Каждый угол β измеряют на всех интервалах шкалы микрометра, кратных его величине. Начальным при измерении угла β при каждой последующей установке является штрих шкалы, который при предыдущей установке был конечным.

Используя результаты измерений каждого угла β, составим следующие уравнения поправок

$$v_1 = \delta_1 - a_1 + l_1;$$

$$v_2 = \delta_2 - \delta_1 + l_2;$$

$$v_3 = \delta_3 - \delta_2 + l_3;$$

. . . . . .

$$v_m = \delta_m - \delta_{m-1} + l_m,$$

где свободные члены $l_j=\beta_j-\bar{\beta}$.

В данном случае $j=1, 2, \ldots m$ — номера установок угла β на шкале микрометра; δ_i — поправки из уравнивания к делениям (штрихам) шкалы, между которыми измерялся угол β ($i=0,1, 2, \ldots, n$), при этом $\delta_0=\delta_n=0$; β_j — измеренное значение угла при j-й установке шкалы; $\bar{\beta}=\Sigma\beta_j/m$ — среднее из всех m значений угла β.

Уравнения поправок v составляют для всех значений углов β_1, β_2 и β_3, измеренных при всех установках шкалы микрометра. Общее число уравнений поправок равно $r=m_1+m_2+m_3$; число определяемых поправок δ_i, кратных $0{,}5'$, равно 10 (при $\delta_0=\delta_n=0$). Сумма поправок v равна нулю, поэтому уравнения решают методом последовательных приближений. Если погрешности $\delta_i \geqslant 0{,}3''$, то их надо учитывать при высокоточных угловых измерениях.

Мертвый ход оптического микрометра с плоскопараллельными пластинками

Мертвый ход имеют оптические микрометры в теодолитах типа ОТ-02. Его определяют при различных установках алидады и шкалы микрометра. При каждой установке алидады и микрометра совмещают изображения противоположных штрихов лимба дважды: при вращении головки микрометра по ходу

часовой стрелки (I совмещение) и против хода часовой стрелки (II совмещение). Затем вычисляют разности $d=I—II$, которые и характеризуют величину мертвого хода. Отдельные разности должны быть в пределах $d \leqslant \pm 1''$.

Для того чтобы ослабить влияние мертвого хода микрометра на отсчеты по лимбу, необходимо последнее движение головки микрометра при совмещении штрихов лимба всегда заканчивать на «ввинчивание», т. е. вращая головку микрометра по ходу часовой стрелки.

§ 46. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА АЛИДАДЫ И ЛИМБА

Элементы эксцентриситета алидады и лимба

В соответствии с геометрической схемой теодолита необходимо чтобы проекция оси O вращения алидады на плоскость лимба, центр O_1 вращения горизонтального круга *1* и центр K кольца делений *2* на лимбе (рис. 62) совпадали. При центрировании неизбежны погрешности, но они не должны превышать установленных допусков.

Под эксцентриситетом алидады понимают несовпадение центра O вращения алидады с центром K кольца делений лимба, а под эксцентриситетом лимба — несовпадение центра O_1 вращения лимба с центром K кольца делений на нем. Эксцентриситет алидады характеризуется линейным элементом $e=KO$ и углом P, ориентирующим линейный элемент относительно нулевого штриха лимба. Эксцентриситет лимба характеризуется аналогичными элементами: $e_1=KO_1$ и углом P_1.

Определение элементов эксцентриситета алидады и правильности ее вращения

Пусть K — центр кольца делений лимба (рис. 63), O — ось вращения алидады, j — отсчетный индекс оптического микрометра; d — угол смещения индекса относительно его расчетного положения; e и P — элементы эксцентриситета алидады; A и B — расчетное положение противоположных штрихов лимба; A' и B' — их видимое положение, смещенное вследствие эксцентриситета; x — ошибки в отсчетах, обусловленные влиянием эксцентриситета. Требуется определить e, P и d.

Перед началом исследований эксцентриситета алидады тщательно выверяют накладной уровень (при его отсутствии — уровень при алидаде) и приводят вертикальную ось теодолита в отвесное положение. Исследования выполняют на двух следующих один за другим полных оборотах алидады по часовой стрелке (прямой ход) и двух полных оборотах ее против часовой стрелки (обратный ход). При неподвижном лимбе алидаду переставляют обычно через 30° и на каждой установке

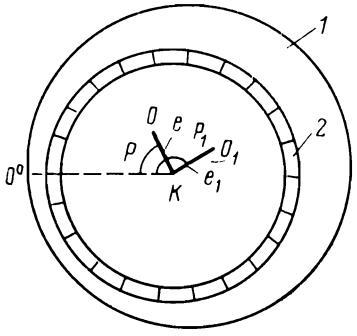


Рис. 62. Элементы эксцентриситета алидады и лимба

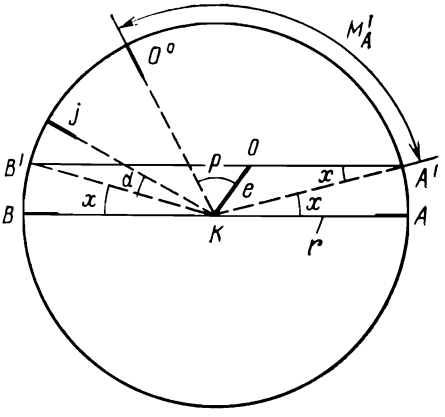


Рис. 63. Схема влияния эксцентриситета алидады на отсчеты по лимбу

делают по два отсчета: t — при совмещении изображений диаметрально противоположных штрихов лимба и t' — при совмещении ближайшего штриха с отсчетным индексом j микрометра. Кроме того, фиксируют отсчеты по обоим концам пузырька уровня.

В соответствии с принятыми обозначениями будем иметь $M_A = M'_A + x$ и $M_B = M'_B - x$. Поэтому можно написать

$$t = \frac{1}{2}(M_A + M_B) = \frac{1}{2}(M'_A + M'_B),$$

$$t' = \frac{1}{2}(M_A + M_B) + x + d.$$

Вычтем из нижнего равенства верхнее. Учитывая, что разность $v = t' - t$ определяется со случайной ошибкой δ, получим

$$\delta = x + d - v,$$

где x и d — неизвестные, v — свободный член.

В треугольнике OKA' (см. рис. 63) $OK = e$; $KA' = r$ — радиус кольца делений лимба; угол при точке K равен $M'_A - P$, а угол при точке A' равен углу x, так как эксцентриситет вызывает параллельный перенос (смещение) видимых штрихов лимба. Решая этот треугольник, напишем

$$\frac{e}{r} = \frac{\sin x}{\sin\left[180^\circ - (M'_A - P + x)\right]} \cong \frac{\sin x}{\sin(M'_A - P)}.$$

Поскольку угол x мал ($x<1'$), из данного выражения с достаточной точностью получим

$$x=\frac{e}{r}\rho\sin(M'_A-P)=\varepsilon\sin(M'_A-P),$$

где величину $\frac{e}{r}\rho=\varepsilon$ называют угловым эксцентриситетом алидады; $\rho=206265''$.

Учитывая, что

$$\sin(M'_A-P)=\sin M'_A\cos P-\cos M'_A\sin P,$$

и введя обозначения

$$y=\varepsilon\cos P;\quad z=\varepsilon\sin P,$$

запишем уравнения поправок в окончательном виде

$$\delta=y\sin M'_A-z\cos M'_A+d-v.$$

Свободные члены v найдем как среднее из четырех значений их для каждой данной установки M'_A алидады в двух прямых и двух обратных ходах. Это позволит практически полностью исключить из значений v ошибки, обусловленные колебаниями оси вращения алидады, что очень важно. Число уравнений поправок δ равно числу n установок алидады по всей окружности.

От уравнений поправок δ перейдем к системе нормальных уравнений, решив которые, определим неизвестные

$$y=\frac{2[v\sin M_A]}{n};\quad z=\frac{-2[v\cos M_A]}{n};\quad d=\frac{1}{n}[v].$$

Используя полученные значения y и z, найдем

$$\operatorname{tg}P=\frac{z}{y}=\frac{\sin P}{\cos P}=\frac{-[v\cos M_A]}{[v\sin M_A]};$$

$$\varepsilon=y/\cos P=z/\sin P$$

или

$$\varepsilon=\frac{2[v\sin M_A]}{n\cos P}=\frac{-2[v\cos M_A]}{n\sin P}.$$

Определив ε, найдем линейный элемент эксцентриситета алидады

$$e=r\varepsilon/\rho.$$

Используя значения ε, P и d, вычисляют для всех установок M_A алидады сглаженные значения разностей $v=t'-t$ в виде синусоиды:

$$\tilde{v}_A=\varepsilon\sin(M_A-P)+d.$$

По величинам разностей $\omega = v - \tilde{v}$, т. е. по отклонениям v от синусоиды $\tilde{v}$, судят о правильности вращения алидады вокруг ее оси. Современные инструкции требуют, чтобы колебания величин $v = t' - t$ не превышали 40″, а их отклонения от синусоиды, т. е. разности $\omega = v - \tilde{v}$, были не более 10″. Другими словами, вращение алидады вокруг ее оси считается правильным, если одновременно выполняются два условия

$$\omega_{max} = \tilde{v} - v_{max} \leqslant 10''$$

$$v_{max} - v_{min} = 2(\varepsilon + \omega_{max}) \leqslant 40''.$$

Следствием этих условий является требование, чтобы угловой эксцентриситет алидады ε не превышал 10″, т. е. $\varepsilon \leqslant 10''$.

Правильность вращения алидады может быть дополнительно исследована по изменениям показаний накладного уровня (или уровня при алидаде) при двух последовательных оборотах ее в одном направлении и двух оборотах в обратном направлении.

Определение эксцентриситета лимба

При закрепленной алидаде лимб переставляют через 30°, выполняя по полному обороту в прямом и обратном ходах. На каждой установке лимба берут отсчеты t — при совмещении диаметрально противоположных штрихов и t' — при совмеще-

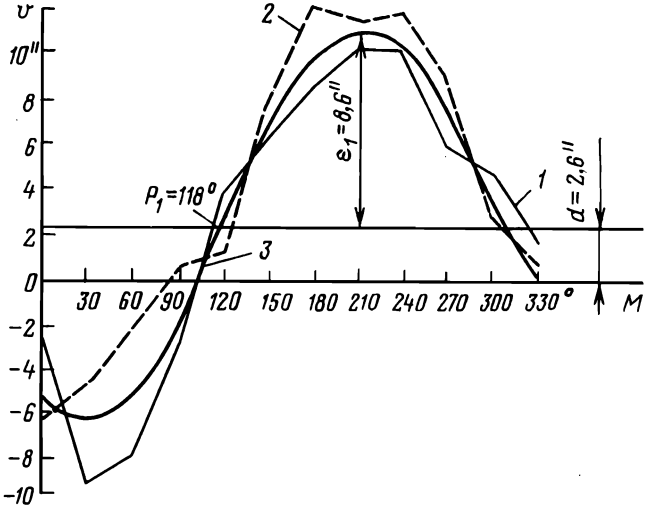


Рис. 64. Схема определения элементов эксцентриситета лимба:
1 — прямой ход; *2* — обратный ход; *3* — синусоида

нии штриха лимба с отсчетным индексом. Затем вычисляют разности $v=t'-t$, которые наносят на график (рис. 64), на котором проводят ось симметрии и строят синусоиду, наилучшим образом апроксимирующую изменения v. Параметры синусоиды ε_1, P_1 и d определяют следующим образом. Угловой эксцентриситет ε_1 равен наибольшей ординате синусоиды, отсчитываемой от оси симметрии; угол P_1 отсчитывается в точке пересечения синусоиды с осью симметрии, где значения v начинают возрастать; значение d равно ординате оси симметрии синусоиды. Требуется, чтобы угловой эксцентриситет ε_1 горизонтального круга не превышал 10″. Суммарная величина углового эксцентриситета алидады ε и эксцентриситета горизонтального круга ε_1 у высокоточных теодолитов должна быть не более 20″, т. е. $\varepsilon+\varepsilon_1\leqslant 20''$.

§ 47. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ И ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСЕЙ ТЕОДОЛИТА

Неперпендикулярность горизонтальной и вертикальной осей теодолита определяют из обработки измерений горизонтальных направлений на три визирные цели, находящиеся в створе (отклонения не более 1°) с углами наклона $\beta_1\approx+20°$, $\beta_0\approx 0°$ и $\beta_2\approx-20°$.

Программа измерений состоит из шести приемов. В каждом приеме при одном положении вертикального круга (КЛ) наводят трубу последовательно на цели: верхнюю, в горизонте и нижнюю и берут отсчеты по горизонтальному кругу. Затем переводят трубу через зенит и выполняют измерения при другом положении круга (КП) в обратной последовательности. Для каждой цели в каждом i-ом приеме вычисляют $c_i=(\text{КЛ}-\text{КП}\pm 180°)/2$ и находят средние значения из шести приемов c_1, c и c_2 соответственно. С точностью до минуты измеряют углы наклона β_1, β_0 и β_2 на каждую визирную цель.

Угол i неперпендикулярности осей теодолита вычисляют по формуле

$$i=\frac{1}{2}\left(\frac{c_1-c\sec\beta_1}{\operatorname{tg}\beta_1}+\frac{c_2-c\sec\beta_2}{\operatorname{tg}\beta_2}\right).$$

Величина этого угла у высокоточных теодолитов должна быть не более 5″. Среднюю квадратическую ошибку определения угла i находят по формуле

$$m_i=m_c\sec\beta_1\sqrt{1+\sin^2\beta_1},$$

где ошибка m_c равна

$$m_c=\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{3n\,(n-1)}}.$$

В данном случае v_i — отклонения значений c_i в приемах от соответствующих средних из n приемов значений $c=(КЛ-КП\pm180°)/2$, полученных для каждой из трех целей в отдельности. Ошибка m_i определения неперпендикулярности осей у высокоточных теодолитов допускается не более 0,5″.

§ 48. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛНЫХ ОШИБОК ДИАМЕТРОВ ЛИМБА

Деления на лимбе наносят при помощи автоматической делительной машины со скоростью 3—4 штриха за одну минуту. При этом неизбежны ошибки, причинами появления которых являются: погрешности изготовления эталонных шестерен машины; недостатки наладки и ее работы (колебания оси вращения и резца при нарезке штрихов); погрешности установки лимба на ось вращения машины (эксцентричность посадки, неперпендикулярность плоскости лимба к оси вращения); изменения температуры, вибрация основания машины во время ее работы и т. п.

Фактическое положение штриха φ несколько отличается от расчетного на некоторую величину δ_φ, представляющую собой ошибку данного штриха. Среднее арифметическое из ошибок двух диаметрально противоположных штрихов φ и $(\varphi+180°)$ называют ошибкой x_φ диаметра φ, т. е.

$$x_\varphi=\frac{1}{2}(\delta_\varphi+\delta_{\varphi+180}).$$

При угловых измерениях всегда используются диаметры лимба, так как отсчеты берутся по диаметрально противоположным штрихам лимба.

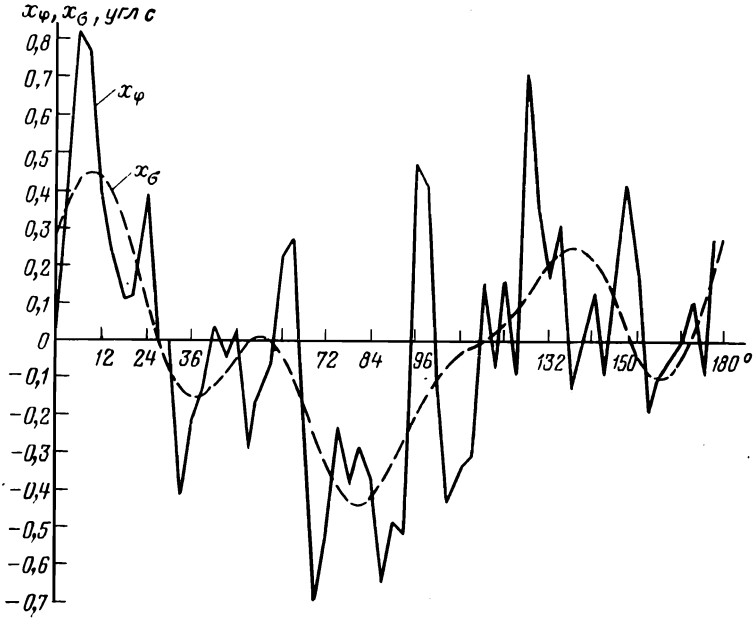
Погрешность нулевого штриха лимба $(\varphi=0)$ принимают равной нулю $(\delta_{\varphi_0}=0)$. Погрешность нулевого диаметра отлична от нуля $(x_{\varphi_0}\neq0)$, так как ошибка нанесения диаметрально противоположного штриха $\varphi+180°$ в общем случае не равна нулю.

Полную ошибку x_φ диаметра φ можно представить в виде суммы систематической x_σ и случайной x_η составляющих, т. е.

$$x_\varphi=x_\sigma+x_\eta.$$

Определив из исследований x_φ и x_σ, случайные ошибки находят как разности $x_\eta=x_\varphi-x_\sigma$.

Ошибки диаметров подразделяются на длиннопериодические, изменяющиеся по всей окружности лимба (рис. 65), и короткопериодические (внутриградусные), т. е. в пределах каждого отдельного градуса (рис. 66). Полные ошибки x_φ отдельных диаметров у современных высокоточных теодолитов допускаются до $\pm(1\div1{,}2)''$ (см. табл. 11). Фактическая же величина этих ошибок несколько меньше установленного допуска. Короткопериодические ошибки, хотя и меньше длиннопе-



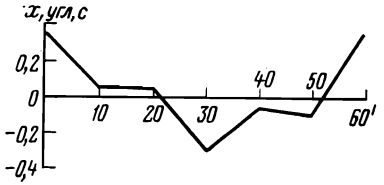


Рис. 65. Полные x_φ и систематические x_σ ошибки диаметров лимба теодолита Т05

Рис. 66. Короткопериодические (внутригрудусные) ошибки диаметров лимба теодолита Т05

риодических, но еще сравнительно велики, поэтому разделение лимбов нуждается в дальнейшем совершенствовании и повышении точности.

Ошибки диаметров лимба непосредственно влияют на точность угловых измерений, поэтому каждый лимб тщательно исследуют, чтобы установить его пригодность для высокоточных теодолитов. Известны разные способы определения ошибок диаметров лимба [4, 25], разработанные как советскими учеными (способы Пранис-Праневича, Елисеева, Литвинова, Рытова и др.), так и зарубежными (способы Шрейбера, Брунса, Вильда и др.).

В нашей стране в настоящее время ошибки диаметров лимба исследуют в соответствии с требованиями ГОСТ 13424—68, который допускает применение любого из способов: способа приближений, способа обратной матрицы, способа Елисеева и видоизмененного способа Вильда. Поскольку число диаметров лимба слишком велико (при цене деления лимба 10′

их 1080), определяют из исследований ошибки не всех диаметров, а только кратных, например, 1 или 3°.

В основе каждого из приведенных способов определения ошибок диаметров лимба лежит последовательное измерение по определенной программе трех контрольных углов β_1, β_2 и β_3. Каждый угол β должен укладываться целое число m раз в 180° и быть кратным интервалу $\Delta\varphi=\beta/n$, через который будут определяться ошибки диаметров.

В настоящее время лимбы высокоточных теодолитов исследуют через интервал $\Delta\varphi=3°$. Контрольные углы принимают равными $\beta_1=36°$, $\beta_2=45°$ и $\beta_3=60°$. Контрольные углы задают обычно при помощи двух коллиматоров, хотя есть и другие приспособления для этого. Одним из основных требований, которым должен удовлетворять каждый контрольный угол, является сохранение его величины постоянной с точностью до 0,01″ в течение всего периода измерений по заданной программе.

Каждый контрольный угол β измеряют при разных установках лимба отдельными сериями. Число серий равно $n=\beta/\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi=3°$ — интервал, через который исследуют ошибки диаметров. Внутри каждой серии угол β измеряют при $m=180°/\beta$ установках лимба, переставляя его через интервал, равный углу β. Обозначим через $i=1, 2, \ldots, n$ — номера серий, а через $k=1, 2, \ldots, m$ — номера установок лимба внутри каждой серии. Тогда начальная установка лимба φ_i в серии с номером i может быть вычислена по формуле

$$\varphi_i=(i-1)\,\Delta\varphi,$$

а последующая установка φ_{ik} лимба внутри i-й серии с номером k, может быть рассчитана по формуле

$$\varphi_{ik}=\varphi_i+(k-1)\,\beta.$$

Угол β при каждой установке лимба φ_{ik} измеряют двумя приемами и из них выводят среднее. Из m значений угла, измеренного в каждой i-й серии, вычисляют среднее $\bar{\beta}_i=\Sigma\beta/m$, а затем находят отклонения каждого значения β_{ik} от среднего $\bar{\beta}_i$, т. е. вычисляют разности $l_{jk}=\beta_{ik}-\bar{\beta}_i$, принимаемые в качестве свободных членов уравнений поправок, составляемых по результатам измерений контрольного угла при m установках в каждой серии и имеющих вид

$$\delta_1=x_1-x_0+l_1;$$

$$\delta_2=x_2-x_1+l_2;$$

$$\delta_3=x_3-x_2+l_3;$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta_k=x_0-x_m+l_m,$$

где x_1, x_2, ..., x_m — поправки в величины диаметров с номерами 1, 2, ..., m.

Такие уравнения поправок составляют, используя результаты измерений контрольного угла во всех сериях, причем для каждого из углов $\beta_1=36°$, $\beta_2=45°$ и $\beta_3=60°$. При этом нумерация диаметров и поправок x_j общая для лимба. Общее число уравнений поправок равно 180, а определяемых поправок диаметров — 60.

При равномерных перестановках лимба в пределах всей окружности сумма поправок диаметров равна нулю ($\Sigma x_j=0$). В связи с этим возникают сложности совместного решения уравнений поправок. Отметим, что наиболее простой способ вычисления поправок диаметров лимба предложен С. В. Елисеевым, позволяющий определять их значения по готовым формулам, см. ГОСТ 13424—68, а также [4, 8], не решая уравнений. Точность определения поправок характеризуется средней квадратической ошибкой порядка 0,1″.

Глава 7

ИСТОЧНИКИ ОШИБОК ПРИ ВЫСОКОТОЧНЫХ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ И МЕТОДЫ ОСЛАБЛЕНИЯ ИХ ВЛИЯНИЙ

§ 49. ВИДЫ ОШИБОК ПРИ ВЫСОКОТОЧНЫХ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

По природе происхождения ошибки угловых измерений подразделяют обычно на три большие группы: личные, приборные (инструментальные) и вследствие влияния внешней среды. Кроме того, ошибки делятся на случайные и систематические. При высокоточных угловых измерениях наиболее трудно устранимыми являются систематические ошибки, поэтому они должны быть тщательно изучены чтобы можно было свести их влияние к минимуму надлежащей организацией измерений или введением соответствующих поправок. Влияние случайных ошибок ослабляется путем увеличения числа приемов измерений. Однако по экономическим соображениям число приемов ограничено и должно быть доведено до определенного минимума, так как при недостаточном числе приемов влияние случайных ошибок на результаты измерений может оказаться недопустимо большим.

Личные ошибки измерений возникают из-за несовершенства измерительной системы прибор—наблюдатель. К личным могут быть отнесены случайные и систематические ошибки визирования при наведении трубы теодолита на наблюдаемые цели:

случайные ошибки совмещения изображений штрихов лимба при отсчетах по кругам теодолита; систематические ошибки при отсчетах по лимбу из-за различия освещенности штрихов лимба; случайные ошибки отсчитывания по шкале оптического микрометра; ошибки отсчета по шкале накладного уровня, с помощью которого определяют поправки в измеренные направления за наклон вертикальной оси теодолита.

Приборные ошибки измерений возникают из-за погрешностей изготовления отдельных узлов и деталей теодолита, влияния остаточных погрешностей регулировки и юстировки его и т. п. К числу приборных относятся ошибки из-за отличия фактических цен делений окулярного микрометра зрительной трубы, микрометра отсчетного устройства и уровней от их номинальных значений, погрешности хода фокусирующей линзы зрительной трубы, эксцентриситет лимба и алидады, ошибки диаметров лимба, коллимационная ошибка трубы, а также ошибки, возникающие вследствие наклона горизонтальной и вертикальной осей теодолита, наклона лимба, ошибки из-за недостатков работы наводящего винта трубы при наклонах ее в вертикальной плоскости, ошибки из-за люфта подъемных винтов, а также из-за температурных деформаций узлов теодолита и др.

Каждый теодолит проходит периодические поверки и испытания (исследования), устанавливаемые действующими ГОСТами и инструкциями. Перед началом наблюдений на пункте выполняют необходимые поверки и юстировки теодолита. Чем выше требуемая точность угловых измерений, тем тщательнее и полнее должны быть изучены и учтены приборные погрешности, какими малыми они ни казались бы на первый взгляд. Малые систематические ошибки имеют свойство постепенно накапливаться и их совокупным влиянием пренебречь нельзя. Поэтому необходимо предусматривать эффективные меры существенного ослабления влияний всех без исключения приборных ошибок.

Высокоточный теодолит является динамической, весьма чувствительной измерительной системой, реагирующей на многие факторы, в том числе на механические, связанные с особенностями работы отдельных узлов теодолита, направлением вращения алидады в полуприемах и т. п., а также физические, проявляющиеся в изменениях условий измерений на пункте, например, повышение или понижение температуры и т. п.

При использовании современных высокоточных теодолитов одним из наиболее существенных источников систематических ошибок при угловых измерениях является влияние внешней среды, и в первую очередь, рефракции, которая по существу лимитирует дальнейшее повышение точности угловых измерений, если не предпринять эффективных мер по борьбе с ее

влиянием. В эту группу входят также ошибки из-за кручения и гнутия геодезических сигналов.

Из приведенного перечня различных источников систематических ошибок следует, что точное измерение горизонтальных направлений, углов, азимутов и зенитных расстояний в условиях реальной атмосферы при значительных расстояниях между пунктами (от нескольких километров до нескольких десятков километров) представляет собой довольно сложную проблему. Поэтому каждый высококвалифицированный геодезист должен хорошо изучить всевозможные источники ошибок угловых измерений и уметь эффективно бороться с их влиянием. Только в этом случае можно получить результаты измерений с наивысшей доступной точностью.

§ 50. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ОШИБКИ ВИЗИРОВАНИЯ

При использовании современных методов угловых измерений [8] влияние случайных, в том числе личных, ошибок на результаты измерений в геодезических сетях 1—2 классов сравнительно невелико. Из личных наиболее существенными являются систематические ошибки визирования, которые возникают вследствие наведения биссектора сетки нитей трубы на цель с некоторой постоянной для наблюдателя ошибкой. Эти ошибки увеличиваются с уменьшением контрастности цели и фона, на который она проектируется. По оценке Ф. Н. Красовского систематические ошибки наведения биссектора окулярного микрометра трубы теодолита на визирный цилиндр могут достигать величины $u/18$, где u — угловая величина биссектора ($u=30\div35''$). В тех случаях, когда наблюдаемый геодезический знак виден на темном фоне леса или местности недостаточно четко, опытные наблюдатели маркируют болванку визирной цели белым цветом. Для того чтобы ослабить влияние систематических ошибок, возникающих из-за различия освещенности штрихов лимба высокоточного теодолита, пользуются электрическим освещением кругов.

При наблюдениях на световые цели резко различной яркости, например, при определении азимутов земных предметов из наблюдений звезд, могут возникать систематические ошибки визирования, обусловленные психофизиологическими особенностями восприятия глазом точечных источников света различной яркости (звезд, светосигнальных фонарей и т. п.). Из опыта и специальных исследований известно, что при неблагоприятных условиях такие ошибки при измерении горизонтальных направлений, углов и азимутов нередко могут достигать $1{,}5''$ и более.

Астрономы давно подметили, что момент регистрации прохождения звезды через меридиан при астрономических наблю-

дениях зависит от ее яркости: чем ярче звезда, тем раньше наблюдатель отмечает момент прохождения ее через меридиан. При увеличении яркостей звезд на пять звездных величин это опережение у отдельных наблюдателей достигает $0{,}05^s$. Характерно, что знак данной ошибки одинаков для всех наблюдателей при некотором варьировании ее величины.

Последнее обстоятельство указывает на то, что систематические ошибки визирования, обусловленные различием яркости звезд, а также точечных световых целей, существуют объективно. Закономерность их изменений выражается в том, что при увеличении яркости звезды (световой цели) происходит кажущееся для наблюдателя увеличение ее азимута и, наоборот, с уменьшением яркости — уменьшается азимут, отсчитываемый от меридиана по ходу часовой стрелки. Это явление можно выразить с помощью «азимутального уравнения яркости звезд и точечных световых целей», которое запишем в виде

$$\delta = k\,(m - 4{,}0),$$

где δ — поправка в измеренное направление на звезду α или на точечную световую цель N; k — коэффициент пропорциональности; m — яркость звезды (световой цели), выраженная в звездных единицах по Гарвардской шкале. Данное уравнение справедливо при $1 \leqslant m \leqslant 4$; для других значений m оно имеет более сложный вид.

Значения коэффициента k для звезд k_α и для точечных световых целей k_N различны и равны в среднем $k_\alpha = 0{,}10$ и $k_N = 0{,}33$. Эти величины получены из обработки измерений, выполненных на световые цели и с учетом данных, полученных астрономами при наблюдениях звезд различной яркости. Приведенные коэффициенты соответствуют визированию на звезду и световую цель одной нитью сетки нитей трубы, а не биссектором, так как в последнем случае ошибки визирования заметно возрастают.

При определении астрономических азимутов на пунктах Лапласа измеряют угол β между звездой α (обычно Полярной) и световой целью N земного предмета. Пусть яркость звезды m_α, а яркость световой цели m_N, тогда поправка δ_β в угол $\beta = N - \alpha$ за различие яркостей наблюдаемых целей будет равна

$$\delta_\beta = 0{,}33 m_N - 0{,}10 m_\alpha.$$

Пусть $m_N = 4$ и $m_\alpha = 2{,}1$ (Полярная); для этих данных получим $\delta_\beta = +1{,}11''$. Такими большими поправками за различие яркостей наблюдаемых целей пренебрегать при высокоточных угловых измерениях и азимутальных определениях недопустимо. Однако до сих пор при определении астрономических азимутов эти поправки не определяются и не учитываются,

вследствие чего понижается точность азимутальных определений.

При измерении горизонтальных углов $\beta = 2—1$ между двумя звездами или двумя точечными световыми целями *1* и *2* с яркостями m_1 и m_2 соответственно поправка в измеренный угол будет следующей:

$$\delta_\beta = k(m_2 - m_1).$$

Если $m_1 = m_2$ поправка $\delta_\beta = 0$. Таким образом, чтобы существенно ослабить влияние систематических ошибок при наблюдениях на звезды и световые цели различной яркости, необходимо выравнивать их яркости тем или иным способом, например, устанавливая перед объективом трубы металлические сетки разной плотности, применяя светофильтры или используя фотоэлектрический метод наведения трубы теодолита на световую цель (звезду) и т. п.

§ 51. ПРИБОРНЫЕ ОШИБКИ ПРИ ВЫСОКОТОЧНЫХ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Будем полагать, что теодолит перед началом угловых измерений на пункте тщательно выверен, отъюстирован и отвечает предъявляемым к нему техническим требованиям. Однако, несмотря на это, приборные ошибки, перечисленные в § 49, не исключаются при измерении углов и их влияние необходимо ослабить.

В государственной геодезической сети расстояния между смежными пунктами всегда больше 1 км, поэтому на каждом пункте трубу теодолита фокусируют на бесконечность и фокусировку не меняют (изменять ее можно только между приемами измерений). В этом случае неправильности хода фокусирующей линзы трубы не оказывают влияния на результаты угловых измерений. Исключается влияние эксцентриситета лимба и алидады при отсчетах по диаметральной противоположным штрихам лимба. Если рен микрометра превышает допустимое значение, то в результаты измерений вводят соответствующие поправки. Подобное замечание относится и к ошибкам делений шкалы оптического микрометра.

Для того чтобы погрешности определения цены деления окулярного микрометра трубы ($m_\mu = 0{,}01''$) не оказывали существенного влияния на результаты угловых измерений, надо следить за тем, чтобы отсчеты по окулярному микрометру при наведении биссектора на визирную цель не превышали $\pm 5''$ и цель при разных отсчетах поочередно располагалась по обе стороны от нульпункта микрометра.

§ 52. ОСЛАБЛЕНИЕ ВЛИЯНИЙ ОШИБОК ДИАМЕТРОВ ЛИМБА НА РЕЗУЛЬТАТЫ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Даже у современных высокоточных теодолитов полные ошибки x_φ диаметров лимба нередко достигают величины $\pm 0{,}7''$ (см. рис. 65). Систематические ошибки диаметров x_σ можно представить в виде ряда Фурье:

$$x_\sigma = \sum_{i=1}^{i=k} (a_{2i} \sin 2i\varphi + b_{2i} \cos 2i\varphi),$$

где коэффициенты a и b определяются по формулам

$$a_{2i} = \frac{2}{n} [x_{\varphi i} \sin 2i\varphi]_{\varphi=0}^{n};$$

$$b_{2i} = \frac{2}{n} [x_{\varphi i} \cos 2i\varphi]_{\varphi=0}^{n}.$$

В данном случае x_φ — полные ошибки диаметров лимба, полученные из исследований; i — порядковый номер полной ошибки диаметра φ ($i=1, 2, n$); $2i$ — порядковый номер коэффициента ряда Фурье ($2i=2, 4, 6, \ldots, k$); n — число полных ошибок x_φ диаметров лимба.

Случайные ошибки x_η отдельных диаметров, равные

$$x_\eta = x_\varphi - x_\sigma,$$

иногда достигают такой же величины, что и систематические x_σ.

Поскольку систематические ошибки диаметров лимба в пределах всей окружности изменяются по квазипериодическому закону, при выводе среднего арифметического из ошибок диаметров, равномерно распределенных по всей окружности через одинаковые интервалы, происходит их значительная компенсация, причем в тем большей мере, чем меньше эти интервалы. Короткопериодические ошибки диаметров лимба изменяются в пределах каждого градуса также по квазипериодическому закону (см. рис. 66). Поэтому для наиболее полной компенсации систематических ошибок диаметров лимба (длинно- и короткопериодических) при измерении углов и направлений необходимо переставлять горизонтальный круг теодолита между приемами на угол

$$\delta = \frac{180^\circ}{m} + i,$$

где m — число приемов; i — цена наименьшего деления лимба. Компенсация ошибок будет тем полнее, чем больше число приемов измерений.

При сравнительно большом числе приемов измерений достаточно полно компенсируются не только систематические, но и случайные, а следовательно, и полные ошибки диаметров лимба. Исследования Ф. Н. Красовского показали, что даже при использовании теодолитов выпуска 30-х годов остаточное влияние ошибок диаметров лимба на средний из двенадцати приемов результат измерений направления не превышает 0,25″. У современных теодолитов эта ошибка при двенадцати приемах измерений обычно не превышает 0,10—0,15″. Отсюда однако не следует делать неверный вывод о том, что якобы нет необходимости и дальше повышать точность разделения лимбов высокоточных теодолитов. Напротив, практика сегодняшнего дня требует для решения многих задач, чтобы влияние ошибок диаметров лимба на любое направление, измеренное в каждом отдельном приеме, было не более 0,3″. Поэтому методы и технику разделения лимбов высокоточных теодолитов необходимо и дальше продолжать совершенствовать. Имеются и другие способы ослабления влияний ошибок диаметров лимба, но в геодезическом производстве они не применяются.

§ 53. ВЛИЯНИЕ КОЛЛИМАЦИОННОЙ ОШИБКИ ЗРИТЕЛЬНОЙ ТРУБЫ

Под коллимационной ошибкой зрительной трубы понимают малый угол c, образуемый визирной осью трубы и плоскостью большого круга теодолита. Влияние коллимационной ошибки на направление, измеренное при одном положении трубы (КП или КЛ), выражается формулами

$$N = \text{КП} + \frac{c}{\sin z}; \quad N \pm 180^\circ = \text{КЛ} - \frac{c}{\sin z},$$

где N — истинное значение направления; КП и КЛ — измеренные значения направления; z — зенитное расстояние визирной цели. Влияние этой же ошибки на угол между точками A и B, измеренный также при одном положении трубы, равно

$$N_B - N_A = \text{КП}_B - \text{КП}_A + c\left(\frac{1}{\sin z_B} - \frac{1}{\sin z_A}\right);$$

$$N_B - N_A = \text{КЛ}_B - \text{КЛ}_A - c\left(\frac{1}{\sin z_B} - \frac{1}{\sin z_A}\right).$$

Измерив направление при двух положениях вертикального круга, получим средний отсчет по лимбу

$$N = \frac{1}{2}(\text{КП} + \text{КЛ} \pm 180^\circ),$$

свободный от влияния коллимационной ошибки. Отсюда следует, что углы и направления надо измерять всегда при двух

положениях вертикального круга и из полученных результатов выводить среднее.

Коллимационную ошибку определяют по формуле

$$c = \frac{1}{2}(КЛ - КП \pm 180°)\sin z.$$

Принято требовать, чтобы $c \leqslant 10''$.

§ 54. ВЛИЯНИЕ НАКЛОНА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСИ ВРАЩЕНИЯ ТРУБЫ

Допустим, что горизонтальная ось вращения трубы наклонена к горизонту на малый угол i (из-за неравенства подставок трубы и диаметров цапф), вертикальная ось теодолита строго отвесна, другие приборные погрешности отсутствуют. Определим влияние наклона горизонтальной оси на измеренное теодолитом направление.

Предположим, что левый конец горизонтальной оси трубы выше правого относительно направления теодолит — наблюдаемый предмет M (рис. 67). В этом случае истинный отсчет N по лимбу будет равен

$$N = N_1 + x, \tag{7.1}$$

где N_1 — отсчет при наклонном положении оси трубы; x — поправка за наклон оси трубы.

Угол x определим из малого прямоугольного сферического треугольника mz_1z (рис. 68). В соответствии с известной формулой сферической тригонометрии напишем

$$\cos(90° - x) = \operatorname{ctg}(90° - i)\operatorname{ctg} z$$

или

$$\sin x = \operatorname{tg} i \operatorname{ctg} z.$$

Углы ε и i малы, поэтому

$$x = i \operatorname{ctg} z. \tag{7.2}$$

После перевода трубы через зенит и наведения ее на тот же предмет, знак поправки изменится на обратный, так как левый конец оси трубы будет теперь ниже правого. Пусть наблюдения выполнены при КП (см. рис. 67) и при КЛ. Тогда получим

$$N = КП + i \operatorname{ctg} z;$$

$$N \pm 180° = КЛ - i \operatorname{ctg} z;$$

$$N = \frac{1}{2}(КП + КЛ \pm 180°). \tag{7.3}$$

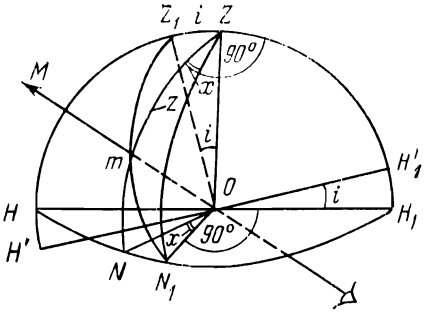


Рис. 67. Ошибка в отсчете по лимбу из-за наклона горизонтальной оси вращения трубы

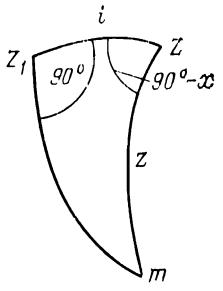


Рис. 68. Сферический треугольник

Отсюда следует, что для исключения ошибок, возникающих из-за неперпендикулярности горизонтальной оси трубы к вертикальной оси теодолита и неравенства диаметров цапф, необходимо направления измерять при двух положениях трубы КП и КЛ и из полученных результатов выводить среднее арифметическое.

§ 55. ВЛИЯНИЕ НАКЛОНА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ ТЕОДОЛИТА ЛИМБА

Влияние наклона вертикальной оси теодолита. Допустим, что приборные погрешности отсутствуют, а вертикальная ось теодолита установлена на пункте не совсем точно и наклонена на малый угол δ относительно отвесной линии. В этом случае на угол δ будет наклонен и лимб горизонтального круга. Влияние наклона вертикальной оси и наклона лимба на измеренное направление рассмотрим раздельно, поскольку при этом суммарный результат не изменится, а вывод формул существенно упростится.

Предположим, что лимб горизонтален, а вертикальная ось наклонена на угол δ (рис. 69). Наведем зрительную трубу на предмет M и покажем плоскость большого круга ON_1Z_1, проходящую через эту точку при наклонном положении вертикальной оси OZ_1. Эта плоскость пересечет плоскость лимба по линии ON_1 и соответственно отсчет по лимбу будет N_1.

Через отвесную линию OZ и наблюдаемый предмет M проведем вертикальную плоскость $OZmN$, которая пересечет плоскость лимба по линии ON, и получим отсчет N по лимбу, равный отсчету при отвесно установленной в точке O вертикальной оси теодолита.

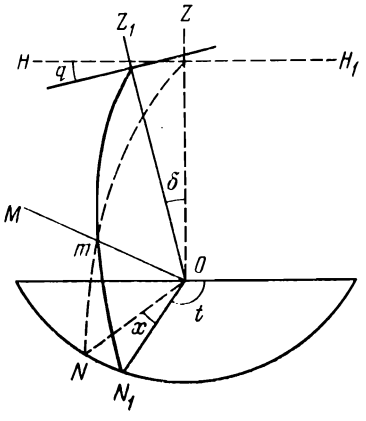


Рис. 69. Ошибка в отсчете по лимбу из-за наклона вертикальной оси теодолита

Отсчет N по лимбу, исправленный поправкой x за влияние наклона вертикальной оси, равен

$$N = N_1 + x. \tag{7.4}$$

Нетрудно заметить, что наклон вертикальной оси теодолита OZ_1 на малый угол δ относительно отвесной линии OZ вызывает наклон оси вращения трубы HH_1 на малый угол

$$q = \delta \sin t, \tag{7.5}$$

где t — угол, ориентирующий зрительную трубу (направление на визирную цель) относительно вертикальной плоскости, в которой лежит наклоненная на угол δ вертикальная ось OZ_1 теодолита.

Поправку x за наклон оси трубы на угол q или, что все равно, за наклон вертикальной оси на угол δ, вычислим по формуле (7.2) и получим

$$x = q \operatorname{ctg} z. \tag{7.6}$$

Эта поправка не исключается при выводе среднего результата из измерений при двух положениях трубы КП и КЛ, так как в обоих случаях левый (правый) конец горизонтальной оси остается всегда выше (ниже) правого и поэтому знак поправки $q \operatorname{ctg} z$ не изменяется. Отсчеты по лимбу, исправленные поправками за наклон вертикальной оси теодолита, равны

$$N = \text{КП} + q \operatorname{ctg} z;$$

$$N \pm 180^\circ = \text{КЛ} + q \operatorname{ctg} z;$$

$$N = \frac{1}{2}(\text{КП} + \text{КЛ} \pm 180^\circ) + q \operatorname{ctg} z. \tag{7.7}$$

Угол q наклона горизонтальной оси вычислить по формуле (7.5) невозможно, так как неизвестны величины δ и t. Поэтому

угол q определяют для каждого наблюдаемого направления с помощью накладного уровня или уровня при алидаде горизонтального круга (в случае отсутствия накладного). Для этого в обоих полуприемах при КП и КЛ берут отсчеты по левому (л) и правому (п) концам пузырька уровня при наблюдении каждого направления.

Используя отсчеты л и п по уровню, вычисляют для каждого направления наклон горизонтальной оси трубы, выраженной в полуделениях уровня

$$b = \frac{1}{2}[_0(\text{л}+\text{п}) - (\text{л}+\text{п})_0], \tag{7.8}$$

где $_0(\text{лп})$ — сумма отсчетов по левому и правому концам пузырька, когда нуль шкалы уровня находится слева от направления теодолит — визирная цель; $(\text{л}+\text{п})_0$ — нуль справа (при другом положении круга).

Зная цену полуделения уровня $\tau/2$, найдем искомый угол наклона оси вращения трубы

$$q = b\frac{\tau}{2} \tag{7.9}$$

и поправку x в измеренное направление.

Поправки x за наклон вертикальной оси теодолита вводят в измеренные направления при углах наклона визирного луча $\beta = |90° - z| \geqslant 1°$. Пусть, например, при измерении угла между направлениями *1* и *2* получили $z_1 = 92°$ и $q_1 = +5''$; $z_2 = 88°$ и $q_2 = +4''$. Тогда поправка в угол будет равна

$$x_2 - x_1 = q_2 \operatorname{ctg} z_2 - q_1 \operatorname{ctg} z_1 = +0{,}31''.$$

На основе этого расчета можно сделать вывод о том, что вертикальную ось теодолита необходимо с высокой точностью приводить в отвесное положение и при углах наклона визирных лучей 1° и более вводить в измеренные направления поправки за наклон вертикальной оси. Это требование необходимо тщательно выполнять при высокоточных угловых измерениях.

Влияние наклона лимба. Предположим, что вертикальная ось теодолита OZ установлена строго отвесно, а лимб наклонен относительно плоскости горизонта в данной точке на малый угол δ; все остальные приборные погрешности отсутствуют (рис. 70). В этом случае разность отсчетов при наклонном и горизонтальном положении лимба при наведении трубы теодолита на один и тот же предмет M равна углу $y - x$ (углы y и x отсчитываются от точки c пересечения наклонного и горизонтального положений лимба).

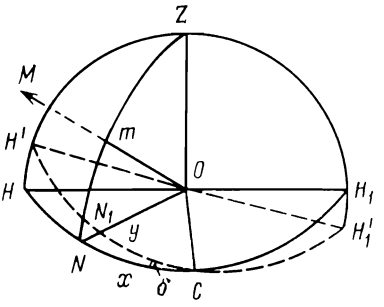


Рис. 70. Ошибка в отсчете из-за наклона лимба

Для прямоугольного сферического треугольника CNN_1, в котором угол при точке N равен 90°, в соответствии с теоремой котангенсов углов напишем

$$\cos\delta = \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg}(90^\circ - x).$$

После несложных преобразований получим

$$\sin(y-x) = 2\sin^2\frac{\delta}{2}\sin y\cos x.$$

Учитывая, что углы $y-x$ и δ малы и принимая в правой части $\cos x = \cos y$, окончательно получим

$$y - x = \frac{\delta^2}{4\rho}\sin 2y. \qquad (7.10)$$

Пусть $\delta = 60''$, а $\sin 2y = 1$, тогда $y - x = 0{,}005''$. Следовательно, наклон лимба на 1—2′ не оказывает сколько-нибудь ощутимого влияния. Поскольку лимб устанавливается перпендикулярно к вертикальной оси теодолита с заведомо меньшими ошибками, чем 1—2′, то практически во всех случаях негоризонтальностью лимба при угловых измерениях можно пренебречь.

§ 56. АЗИМУТАЛЬНЫЙ СДВИГ ОСИ ТРУБЫ В ЛАГЕРАХ, ЛЮФТ ПОДЪЕМНЫХ ВИНТОВ, ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ТЕОДОЛИТА

Азимутальный сдвиг оси трубы в лагерах. Иногда наводящий винт трубы имеет скрытые для глаза неисправности, приводящие к азимутальному смещению (развороту) оси трубы в лагерах при ее наклонах к вертикальной плоскости с помощью винта. Поэтому перед выездом на полевые работы надо убедиться в исправности наводящего винта трубы. Исследования выполняют в лабораторных условиях с использованием нитяного отвеса или коллиматора. Теодолит устанавливают на бетонный столб и тщательно его выверяют, вертикальную ось приводят в строго отвесное положение, визирную ось трубы —

в горизонтальное, а наводящий винт трубы — на середину его рабочей части. Вращая алидаду, наводят биссектор окулярного микрометра трубы на нить отвеса и закрепляют ее. Затем с помощью наводящего винта трубу наклоняют вниз объективом, сделав два полных оборота винта. На этом подготовку к исследованиям работы винта заканчивают.

Исследования выполняют для двух полных оборотов винта по ходу часовой стрелки (прямой ход) и двух оборотов его против хода часовой стрелки (обратный ход). В прямом и обратном ходах винт переставляют через четверть оборота; при каждой установке делают по пять наведений биссектора окулярного микрометра и выводят среднее из них. В итоге в прямом ходе будут получены отсчеты N_i' при разных установках винта, а в обратном ходе на тех же установках — отсчеты N_i'' ($i=1, 2, \ldots, n$). Для каждой i-й установки вычисляют средний из прямого и обратного ходов отсчет $N_i=(N_i'+N_i'')/2$, а затем образуют разности

$$\Delta N_i = N_{i+1} - N_i,$$

которые и характеризуют азимутальные сдвиги оси трубы в лагерах, обусловленные в основном недостатками работы наводящего винта трубы.

Влияние люфта подъемных винтов. В том случае, когда ход подъемных винтов не отрегулирован должным образом и наблюдается их излишне свободное вращение, при измерении направлений могут возникнуть погрешности из-за люфта (качания) этих винтов. Перед началом наблюдений на геодезическом пункте необходимо отрегулировать ход подъемных винтов так, чтобы он был достаточно тугим и в то же время позволял осуществлять их вращение.

Для уменьшения влияния возможных азимутальных сдвигов подставки теодолита (вместе с лимбом) из-за люфта подъемных винтов необходимо при измерении каждого отдельного угла вращать алидаду в обоих полуприемах только в одном направлении, т. е. в первом полуприеме измерять искомый угол, а во втором — его дополнение до 360°.

Вследствие люфта подъемных винтов и незначительного трения, возникающего между осью алидады и втулкой, скрепленной с подставкой теодолита, измеренный угол получается, как правило, несколько преуменьшенным (на величину ε). Это справедливо для угла $\alpha=\alpha_1-\varepsilon_1$ из первого полуприема и для угла $\beta=\beta_2-\varepsilon_2$ из второго полуприема. Вычтя угол β из 360°, найдем значение угла $\alpha=360-\beta=\alpha_2+\varepsilon_2$ из измерений во втором полуприеме. Среднее значение угла из обоих полуприемов

$$\alpha=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{2}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$$

получается в значительной мере свободным от влияния ошибок из-за люфта подъемных винтов. Поэтому указанную выше методику измерения отдельных углов и рекомендуется применять при высокоточных угловых измерениях. Кроме того, перед началом каждого приема измерений следует сделать один-два холостых оборота алидады в том направлении, в котором она будет вращаться в полуприемах. Возвратные, хотя и небольшие движения алидады горизонтального круга при наведении трубы на цель, не допускаются; при необходимости в данном случае следует сделать дополнительный оборот алидады в нужном направлении. Отметим, что в целях обеспечения симметрии, обязательной при высокоточных угловых измерениях, одну половину всех приемов выполняют при вращении алидады по ходу часовой стрелки, а другую — против хода часовой стрелки.

Влияние температурных деформаций теодолита. Высокоточный теодолит является весьма чувствительной измерительной системой, реагирующей на всевозможные изменения условий работы, особенно на изменения температурного режима. Высокоточные угловые измерения на пунктах геодезической сети выполняют в утренние и вечерние часы, когда температура воздуха изменяется наиболее быстро и на значительную величину в течение каждого часа. Теодолит, хотя и с некоторым запаздыванием, реагирует на эти изменения температуры. Поскольку коэффициенты расширения оптических и металлических деталей теодолита разные (хотя благодаря подбору соответствующих материалов эта разница значительно уменьшается), в узлах теодолита неизбежно возникают различные напряжения и деформации. Эти деформации сравнительно малы. Но если принять во внимание, что в высокоточном теодолите изменение взаимного положения некоторых оптических деталей всего лишь на несколько десятых долей микрометра может привести к ошибкам измеряемых направлений нередко до 1″ и более, то станет ясно, насколько бережно и аккуратно надо обращаться с высокоточным теодолитом. Ни в коем случае не следует измерять углы при резком, скачкообразном изменении температуры на несколько градусов. До начала наблюдений на пункте теодолит следует выдержать в тени не менее одного часа, чтобы его температура стала равна температуре воздуха. Поскольку плавные изменения температуры воздуха и теодолита неизбежны в процессе работы на пункте, то чем короче будет длиться каждый отдельный прием измерений, тем меньше будет влияние постепенно меняющихся во времени деформаций теодолита на результаты измерений.

§ 57. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Практика показывает, что вследствие изменяющихся метеорологических условий несколько деформируются геодезические сигналы, изменяется освещенность визирных целей лучами Солнца, искривляется траектория визирных лучей и т. п. Все эти и многие другие факторы необходимо учитывать как при организации, так и при производстве высокоточных измерений в геодезических сетях, поскольку они отрицательно влияют на точность их результатов. Особенно велико влияние рефракции, изучению которой посвятим отдельную главу.

Ошибки из-за деформаций геодезических сигналов. Под воздействием ветра, изменений температуры, влажности воздуха и т. п. геодезический сигнал, особенно высокий, несколько деформируется. Это приводит, в частности, к тому, что верхняя часть сигнала вместе со столиком, на который устанавливают теодолит при наблюдениях, испытывает невидимое для глаза кручение по азимуту, а сам сигнал несколько изгибается. При этом изгиб тем больше, чем больше скорость ветра и выше сигнал. При скорости ветра $v \leqslant 3$ м/с изгиб практически отсутствует. При $v \geqslant 5$ м/с сигнал начинает вибрировать. Поэтому точные угловые измерения рекомендуется выполнять при $v \leqslant 3$ м/с.

Наиболее ощутимым при высокоточных угловых измерениях является кручение верхней части сигнала вокруг вертикальной оси. Зарегистрированы случаи, когда в процессе угловых измерений кручение сигнала достигает 1″ за одну минуту, а за один час — 25″. (см. рис. 31). Поэтому при измерении на пункте большого числа направлений круговыми приемами может произойти незамыкание горизонта из-за кручения сигнала.

В большинстве случаев отсутствует какая-либо закономерность изменений величины и знака кручения сигнала. Тем не менее, в первой половине дня знак кручения один, а вечером, как правило, другой.

Кручение геодезических сигналов впервые было обнаружено русским ученым В. Я. Струве, который в целях его учета предложил снабжать высокоточные теодолиты поверительной трубой и пользоваться ею в процессе наблюдений.

Невязку за «незамыкание горизонта» в круговых приемах целесообразно распределять пропорционально номерам направлений, т. е. пропорционально времени наблюдений. При измерении отдельных углов ошибки из-за кручения сигнала несколько уменьшаются, если алидаду теодолита в обоих полуприемах вращают в одном и том же направлении.

Ошибки за фазы визирных целей. Допустимо, что визирная цель геодезического знака имеет форму цилиндра с гладкой по-

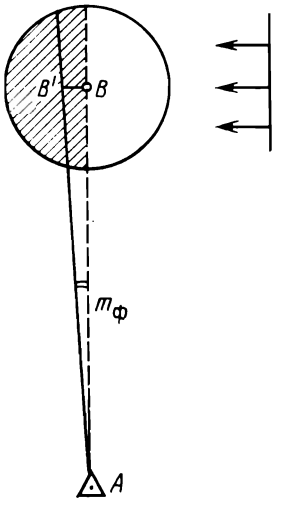
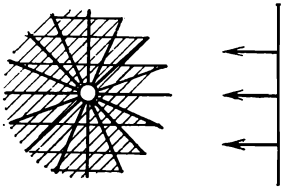


Рис. 71. Ошибка за фазу визирной цели

Рис. 72. Схема самозатенения визирного цилиндра Шишкина



верхностью. Пусть при наблюдениях с пункта A (рис. 71) лучи Солнца освещают правую часть визирного цилиндра, который, предположим, проектируется на фон неба. В этом случае наблюдатель находящийся в точке A, будет более четко видеть левую часть визирного цилиндра, находящуюся в тени, и менее четко — правую, освещенную лучами Солнца. Вследствие неодинакового восприятия глазом различно освещенных сторон визирного цилиндра наблюдатель ошибочно оценит положение его геометрической оси, смещая биссектор при наведении трубы теодолита на угол $m_ф$ в сторону лучше видимой (затемненной на фоне светлого неба) части цилиндра. Этот угол $m_ф$ называют ошибкой за фазу (за однобокое освещение) визирной цели в данный момент времени. Так как положение Солнца на небосклоне непрерывно изменяется, то величина ошибки $m_ф$ будет соответственно изменяться во времени. Понятно, что ошибки за фазы визирных целей возникают только при безоблачной погоде.

Исследования показывают, что при неблагоприятном стечении обстоятельств ошибки за фазы гладкостенных визирных цилиндров нередко достигают 1—1,5″. Это слишком большие ошибки. Поэтому, начиная с 50-х годов, в СССР применяют так называемые малофазные визирные цилиндры» конструкции инж. В. Н. Шишкина (см. рис. 32).

Визирный цилиндр состоит из радиально направленных вертикальных пластин, симметрично размещенных по окружности. Число пластин колеблется от 16 до 32 в зависимости от расстояний между пунктами и размеров визирного цилиндра. На знаках геодезических сетей 2—4 классов устанавливают визир-

ные цилиндры с 16 пластинами, диаметр цилиндра 0,3 м, высота его 0,55 м; диаметр болванки, на которую он устанавливается, 0,10 м. Визирный цилиндр Шишкина дает почти полное затенение его поверхности (рис. 72), благодаря чему ошибки за фазы визирных целей уменьшаются до 0,2—0,4″.

При расстояниях между пунктами $s \leqslant 3$ км трубу теодолита наводят не на визирный цилиндр (он кажется слишком широким), а на болванку, на которой он установлен (ниже на 10—15 см визирного цилиндра); при этом болванка должна быть шероховатой и окрашена матовой краской.

§ 58. ОШИБКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИВЕДЕНИЯ

Измеренные на геодезическом пункте направления должны быть приведены к центрам пунктов. Для этого вычисляют поправки за центрировку теодолита

$$c = \frac{e \sin (M + \theta)}{s} \rho$$

и за редукцию визирной цели по аналогичной формуле, где e и θ — элементы приведения; M — измеренное направление; s — расстояние между пунктами; $\rho = 206265$.

Перейдя к средним квадратическим ошибкам и считая M безошибочным, напишем

$$m_c^2 = m_e^2 \sin^2 (M + \theta) \rho^2/s^2 + m_\theta^2 \cos (M + \theta) e^2/s^2 + \\ + m_s^2 \sin^2 (M + \theta) e^2\rho^2/s^4,$$

где m_e, m_θ и m_s — средние квадратические ошибки определения элементов приведения e, θ и длины стороны s соответственно; m_θ выражено в угл. с.

В соответствии с принципом равных влияний, получим

$$m_c/\sqrt{3} = m_e \sin (M + \theta) \rho/s = m_\theta \cos (M + \theta) e/s = \\ = m_s \sin (M + \theta) e\rho/s^2.$$

Задав конкретную величину ошибки m_c, нетрудно рассчитать в каждом конкретном случае требуемую точность определения элементов приведения e, θ и расстояний s между пунктами.

Глава 8

РЕФРАКЦИЯ СВЕТА ПРИ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ И АЗИМУТАЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ

§ 59. РЕФРАКЦИЯ СВЕТА

Визирный луч между геодезическими пунктами проходит сквозь воздушную среду и подвергается ее влиянию. Физическое состояние этой среды, в том числе давление, температура, влажность воздуха, скорость ветра, облачность, прозрачность атмосферы и т. п., непрерывно изменяются во времени и пространстве. Влияние воздушной среды обусловливает ограничение дальности видимости наблюдаемых пунктов, колебания изображений визирных целей и ухудшение их качества, искривление визирных лучей. При этом производительность труда при геодезических измерениях снижается, особенно при значительных расстояниях между пунктами.

При угловых измерениях следует различать колебания изображений визирных целей и явление рефракции. Колебания изображений обусловливаются турбулентным перемешиванием слоев воздуха разной температуры. Они тем больше по величине, чем ближе к земной поверхности проходит визирный луч и чем больше разница температуры воздуха и почвы.

Под р е ф р а к ц и е й с в е т а в общем случае понимают искривление световых лучей в одной и той же среде, обусловленное неодинаковой плотностью, а следовательно, различным показателем преломления на разных ее участках. В зависимости от взаимного положения наблюдаемой точки и точки приема электромагнитных колебаний различают несколько видов рефракции: астрономическую, спутниковую и земную, когда наблюдаемая цель находится соответственно в бесконечности, околоземном пространстве и на земной поверхности. Кроме того, выделяют еще так называемую фотограмметрическую рефракцию при фотосъемке земных объектов с космических летательных аппаратов или с самолетов. Такое деление рефракции по видам условно, но удобно с методической точки зрения при ее изучении.

Атмосфера Земли оптически неоднородная среда. Поэтому световой луч проходит путь от точки A к точке B не по прямой AB, а по сложной кривой двоякой кривизны оптически кратчайшим путем AmB (рис. 73). Наблюдатель, находясь в точке A, видит изображение точки B не по направлению AB, а по касательной AB' к последнему элементу световой кривой в точке A.

Мерой рефракции при угловых измерениях является угол ρ между касательной AB' к лучу в начальной точке его и хордой AB, соединяющей конечные точки луча. Проекцию этого угла на вертикальную плоскость, проходящую через конечные точки

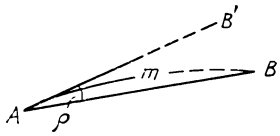


Рис. 73. Угол рефракции света

луча AmB, называют углом вертикальной рефракции (вертикальной рефракцией), а проекцию его на горизонтальную плоскость — углом боковой рефракции (боковой рефракцией). Угол вертикальной рефракции будем обозначать r, а угол боковой рефракции — δ. Эти малые углы r и δ характеризуют влияние рефракции соответственно на измеренные зенитные расстояния и горизонтальные направления (азимуты земных предметов).

Вертикальная рефракция, как правило, на один-два порядка больше боковой. При расстояниях между пунктами 10—20 км вертикальная рефракция нередко достигает 2—3′ и более, в то время как боковая почти никогда не превышает 10″. Рефракция света значительно осложняет точное измерение зенитных расстояний, горизонтальных углов и азимутов земных предметов в геодезических сетях и по существу ограничивает дальнейшее повышение их точности.

К настоящему времени наметились два пути решения проблемы определения и учета рефракции:

1) создание приборов-рефрактометров для непосредственного измерения углов рефракции с требуемой точностью;

2) разработка наиболее эффективных методических приемов исключения или существенного ослабления влияний рефракции на результаты измерений.

Примерно с середины 60-х годов XX столетия в ряде стран, в том числе в СССР, США, ФРГ, Швеции и др., были начаты работы по разработке угломерных дисперсионных рефрактометров — приборов для непосредственного измерения углов вертикальной рефракции со средней квадратической ошибкой порядка 1″. В основу принципа работы этих приборов положена идея М. Нэбауера (1924 г.), которая сводится к измерению очень малого угла дисперсии между двумя лучами с разными длинами волн и использованию его для вычисления большого (по сравнению с углом дисперсии) угла рефракции по формуле, устанавливающей функциональную связь между этими углами. При этом угол дисперсии должен быть измерен с точностью до 0,005″, что в реальных условиях атмосферы выполнить пока трудно.

Были созданы макеты таких рефрактометров, в частности в ЦНИИГАиК, и испытаны в полевых условиях. Испытания показали, что ни один прибор не дает сколько-нибудь удовлетворительные результаты, а при расстояниях более 2 км практически не работает вследствие недопустимо большой флуктуации

атмосферы. Тем не менее разработку приборов для непосредственного измерения углов рефракции необходимо продолжать.

При расчете необходимой точности угломерных рефрактометров следует иметь в виду, что достигнутая в геодезических сетях 1—2 классов точность угловых измерений характеризуется средней квадратической ошибкой порядка 0,6—0,8″, из которой на долю влияний боковой рефракции приходится примерно 0,4—0,5″. Следовательно, рефрактометр должен обеспечивать измерение углов боковой рефракции с предельной средней квадратической ошибкой не более 0,2″, в противном случае его применение неэффективно. Действительно, если с помощью прибора можно будет определять углы боковой рефракции со средней квадратической ошибкой порядка 0,15″, то предельное значение ошибки, равное 0,45″, будет равно или почти равно самой величине рефракции и поэтому определить ее будет невозможно. Точность приборов для измерения углов вертикальной рефракции может быть несколько ниже, чем для измерения углов боковой рефракции.

В целях ослабления влияний внешней среды на результаты угловых измерений, в том числе боковой рефракции, в геодезических сетях 1—2 классов действующие инструкции требуют:

измерять горизонтальные направления и углы при хорошей и удовлетворительной видимости на спокойные или слегка колеблющиеся изображения визирных целей;

в солнечные дни время, близкое к восходу и заходу Солнца, не использовать для высокоточных измерений;

наблюдения на пунктах 1—2 классов выполнять утром и вечером или в разные дни.

Примерно до 1960 г. на пунктах 1 класса было принято половину или $^2/_3$ приемов измерений каждого угла выполнять утром или вечером, а остальные — ночью, поскольку днем и ночью боковая рефракция имеет противоположные знаки и при выводе среднего значения в значительной мере компенсируется.

Эти мероприятия способствовали достижению указанной выше точности угловых измерений (0,6—0,8″). Однако задача заключается в том, чтобы существенно повысить точность этих измерений, особенно в геодезических сетях, создаваемых на геодинамических полигонах, причем, в первую очередь, за счет исключения или ослабления влияний рефракции.

Поскольку приборы для непосредственного измерения углов рефракции все еще не созданы, необходимо развивать и совершенствовать методические приемы существенного ослабления влияний рефракции на основе ее теории и с учетом существующих в природе закономерностей динамики метеорологических элементов и их градиентов.

Величину и знак рефракции определяет вектор $\partial n/\partial N$ градиента показателя преломления воздуха n в каждой точке луча.

Вектор $\partial n/\partial N$ нередко называют вектором рефракции. Если каждой точке атмосферы поставить в соответствие вектор рефракции, то можно говорить о векторном поле рефракции.

В теории полей боковой рефракции (полей горизонтальных градиентов $\partial n/\partial x$), разработанной Г. Ферстером и дополненной Б. Н. Рабиновичем, выделяют:

общеземное поле рефракции, обусловленное изменением плотности, а следовательно, и показателя преломления воздуха от экватора к полюсам;

региональные поля значительной протяженности с несколько иным показателем, а следовательно, иными давлением и температурой воздуха чем в окружающей местности (например, поля, простирающиеся вдоль горных хребтов, а также вдоль побережий морей и океанов и т. п.);

малые местные поля, характеризующиеся аномальной плотностью воздуха, обусловленной, в первую очередь, различиями температуры воздуха над сравнительно небольшими участками подстилающей поверхности (например, над водоемом и сухой почвой, над лесом и открытым участком местности, над склоном горы и вдали от него, над крышами зданий и зелеными скверами в городах и т. п.).

Общеземное и региональные поля боковой рефракции в силу их большой протяженности можно рассматривать в первом приближении как поля однородные, в которых горизонтальные градиенты показателя преломления воздуха $\partial n/\partial x \approx \text{const}$. Влияние таких больших полей рефракции на результаты измерений в рядах триангуляции 1 класса составляет в среднем около 0,2″ на звено длиной 200 км и имеет характер систематических ошибок. Ослабляется оно в результате уравнивания звеньев за условия азимутов Лапласа.

Наиболее существенным является влияние местных полей боковой рефракции на результаты угловых измерений и азимутальных определений. Исследования показывают, что средняя квадратическая величина влияний местных полей боковой рефракции $m_{\text{реф}}$ (в угл. с.) на горизонтальные направления N в триангуляции 1—2 классов зависит от расстояний s (в км) и выражается эмпирической формулой

$$m_{N\,(\text{реф})} = k\sqrt{s}, \tag{8.1}$$

впервые указанной В. Я. Струве. По оценкам, основанным на большом производственном материале, при вечерних наблюдениях $k_{\text{веч}}=0{,}093$ ($m_k=0{,}004$), при ночных $k_{\text{ночн}}=0{,}131$ и совместных (вечерних и ночных) $k_{\text{совм}}=0{,}114$ ($m_k=0{,}006$). Величина $k_{\text{совм}}=0{,}114$ значительно раньше (в 1912 г.) была впервые получена Г. Ферстером по данным уравнивания английской триан-

гуляции с длинами сторон 7—174 км, построенной еще до 1882 г.

С большой достоверностью можно утверждать, что средняя квадратическая величина $m_{\text{реф}}$ (в угл. с.) влияния местных полей боковой рефракции на горизонтальные углы β (не направления) в триангуляции 1, 2 классов составляет в среднем:

$$\begin{aligned} &\text{вечером } m_{\beta\,(\text{реф})} = 0{,}093\sqrt{2s}; \\ &\text{ночью } m_{\beta\,(\text{реф})} = 0{,}131\sqrt{2s}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Астрономические азимуты α на пунктах Лапласа определяют в основном ночью, поэтому согласно формуле (8.1) влияние на них рефракции ночью при $s = 15$—30 км в среднем составляет

$$m_{\alpha\,(\text{реф})} = 0{,}131\sqrt{15 \div 30} = 0{,}50 \div 0{,}71''.$$

Эти результаты почти точно совпадают с оценками Ф. Н. Красовского (0,50—0,75″) и В. В. Данилова (среднее 0,63″), полученными принципиально другими способами.

При неблагоприятных условиях ошибки в углах и азимутах, обусловленные влиянием местных полей рефракции, нередко достигают 3—7″ и более.

Вследствие большого разнообразия подстилающей поверхности и ее физических свойств местные поля боковой рефракции в пределах каждой конкретной территории распределяются случайным образом. Поэтому ошибки в углах, обусловленные влиянием местных полей рефракции в сплошных геодезических сетях, имеют случайный характер. Однако для каждого конкретного направления (азимута) они не являются случайными и действуют как систематические.

§ 60. СВЯЗЬ УГЛОВ РЕФРАКЦИИ С МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И ИХ ГРАДИЕНТАМИ

Исходные формулы для вычисления поправок r и δ соответственно в измеренные зенитные расстояния и горизонтальные направления (азимуты) представляют в виде функции показателя преломления воздуха n и его градиентов $\partial n/\partial N$ в каждой точке луча. Поскольку зенитные расстояния измеряют в вертикальной плоскости, а направления и азимуты — в горизонтальной, то вектор градиента $\partial n/\partial N$ раскладывают соответственно на две составляющие $\partial n/\partial H$ — в вертикальной и $\partial n/\partial x$ — в горизонтальной плоскостях.

Для расстояний $s \leqslant 100$ км точные формулы запишем в следующем виде:

$$r = -\frac{\rho}{s}\int_0^s \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial z}(s-y)\,dy; \tag{8.3}$$

$$\delta = -\frac{\rho}{s_0}\int_0^s \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x}(s-y)\,dy. \tag{8.4}$$

Эти формулы получены в прямоугольной системе координат, в которой ось y направлена по хорде от начальной точки луча к конечной; ось x лежит в плоскости горизонта и направлена влево от оси y; ось z направлена вверх по перпендикуляру к плоскости xy; s — длина хорды; s_0 — ее проекция на горизонтальную плоскость ($s_0 = s\cos\beta$, где β — угол наклона хорды к горизонту).

В метеорологии практически не изучено распределение показателя преломления воздуха и его градиентов в плане и по высоте, кроме того, нет и простых приборов для быстрого и точного измерения их значений. Поэтому, чтобы воспользоваться формулами (8.3) и (8.4), показатель преломления n и его градиенты выражают через метеорологические элементы и их градиенты.

С точностью до 2×10^{-7} справедлива формула [3] для индекса $(n-1)$ показателя преломления воздуха в видимой части спектра

$$(n-1) = 110{,}8\cdot10^{-6}\left(\frac{p}{T^2} - 0{,}14\,\frac{e}{T}\right), \tag{8.5}$$

где p — давление воздуха, мм рт. ст. (1 мм рт. ст. = 133,3 Па); T — абсолютная температура воздуха, $T = 273{,}16 + \mathrm{T}$ °С; e — давление водяных паров, мм рт. ст.

Влияние второго члена в выражении (8.5) даже при $e = 50$ мм (чего практически никогда не бывает) составляет в реальных погодных условиях менее 1 %. Такой величиной при вычислении n и поправок за рефракцию можно пренебречь. В формулах (8.3) и (8.4) с ошибкой не более 0,03 % можно принять $n = 1$.

С учетом вышеизложенного, вычислим производные $\partial n/\partial z$ и $\partial n/\partial x$, подставим их в формулы (8.3) и (8.4), а затем перейдем к пространственной системе прямоугольных координат x yH, в которой вертикальная ось совмещена с отвесной линией H, ось x лежит в плоскости горизонта и направлена к северному полюсу Земли, ось y направлена к востоку, т. е. перейдем к системе координат, используемой в геодезии.

В итоге с ошибками не более 1 % получим следующие формулы для поправок r и δ за влияние рефракции

$$r = \frac{22{,}85}{s} \int_0^s \frac{p}{T^2} \left(0{,}0342 + \frac{\partial T}{\partial H}\right) [\sin z - \operatorname{tg} \gamma \cos z \cos (A - Q)] (s - y)\, dy, \tag{8.6}$$

$$\delta = \frac{22{,}85}{s_0} \int_0^s \frac{p}{T^2} \left(0{,}0342 + \frac{\partial T}{\partial H}\right) \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q) (s - y)\, dy. \tag{8.7}$$

В данном случае s — длина визирного луча по хорде, стягивающей его концы, м; s_0 — его проекция на горизонтальную плоскость, $s_0 = s \sin z$; y — расстояние по хорде от начальной точки луча до текущей, м; p — давление воздуха, мм рт. ст.; T — абсолютная температура воздуха, $T = 273{,}16 + \text{T}$ °C; $\partial T/\partial H \approx \approx (T_2 - T_1)/(H_2 - H_1)$ — вертикальные градиенты температуры воздуха, градус/м; γ — угол, отсчитываемый от точки зенита до вектора градиента $\partial n/\partial N$ показателя преломления, направленного в сторону уменьшения $n(x, y, H)$; A — азимут измеряемого направления; Q — азимут вектора градиента $\partial n/\partial N$; азимуты отсчитываются от направления на север (от оси x) по ходу часовой стрелки; z — зенитное расстояние наблюдаемой цели.

Для однородного поля рефракции, в котором $\partial n/\partial N = \text{const}$, формулы (8.6) и (8.7) примут вид

$$r = 11{,}42 \frac{p}{T^2} s \left(0{,}0342 + \frac{\partial T}{\partial H}\right) [\sin z - \operatorname{tg} \gamma \cos z \cos (A - Q)]; \tag{8.8}$$

$$\delta = 11{,}42 \frac{p}{T^2} s_0 \left(0{,}0342 + \frac{\partial T}{\partial H}\right) \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q). \tag{8.9}$$

Следует обратить внимание на то, что в формулах (8.6)—(8.9) вертикальные градиенты температуры воздуха $\partial T/\partial H$ и наклоны $\operatorname{tg} \gamma$ поверхностей n (x, y, H) = const всегда имеют противоположные знаки. Кроме того, с изменением знака при $\partial T/\partial H$ одновременно изменяются на противоположные знаки и при $\operatorname{tg} \gamma$, и при $\sin (A - Q)$, т. е. у трех элементов.

В метеорологии величину

$$\frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial H} = -0{,}0342 \tag{8.10}$$

называют приведенным градиентом давления воздуха (в градус/м). $\partial p/\partial H$ — вертикальный градиент давления, мм рт. ст./м.

Приведем еще одно равенство:

$$\frac{T}{p}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x} = \left(0{,}0342 + \frac{\partial T}{\partial H}\right) \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q), \tag{8.11}$$

где $\partial p/\partial x$ и $\partial T/\partial x$ — горизонтальные градиенты давления и температуры воздуха в плоскости меридиана.

Приняв в выражении (8.11) $\sin (A-Q)=1$, получим формулу, применяемую в метеорологии для вычисления в плоскости меридиана наклонов к горизонту поверхностей одинаковой плотности, т. е. поверхностей $n(x, y, H)=\text{const}$, которую представим в следующем виде:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{T}{p}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}}{\frac{T}{p}\frac{\partial p}{\partial H} - \frac{\partial T}{\partial H}} = \frac{\frac{T}{p}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x}}{-\left(0{,}0342 + \frac{\partial T}{\partial H}\right)}. \tag{8.12}$$

Путем непосредственных измерений установлено, что в приземном слое атмосферы горизонтальные градиенты температуры $\partial T/\partial x$ в среднем в 100—500 раз меньше вертикальных градиентов $\partial T/\partial H$. Поэтому при $\partial T/\partial H \cong 0$ горизонтальные градиенты, безусловно, равны нулю ($\partial T/\partial x=0$), что следует иметь в виду в дальнейшем. Отметим, что $\operatorname{tg} \gamma \approx \operatorname{tg} \gamma_p + \operatorname{tg} \gamma_T$.

Наклоны к горизонту изобарических поверхностей $p\ (x, y, H)=\text{const}$ и изотермических поверхностей $T(x, y, H)=\text{const}$ в плоскости меридиана вычисляют по формулам

$$\operatorname{tg} \gamma_p = \frac{\partial p}{\partial x} \Big/ \frac{\partial p}{\partial H}; \tag{8.13}$$

$$\operatorname{tg} \gamma_T = \frac{\partial T}{\partial x} \Big/ \frac{\partial T}{\partial H}. \tag{8.14}$$

Горизонтальные градиенты давления воздуха $\partial p/\partial x$ не равны нулю и при нормальных погодных условиях лежат в интервале (0,8÷5) мм/100 км; вертикальные градиенты давления $\partial p/\partial H$ при этих условиях согласно формуле (8.10) равны в среднем —8,9 мм/100 м. Определим возможные наклоны изобарических поверхностей в плоскости меридиана: $-9\times10^{-5} \leqslant \operatorname{tg} \gamma_p \leqslant -5{,}6\times10^{-4}$ или $-19'' \leqslant \gamma_p \leqslant -116''$. Таким образом, наклоны изобарических поверхностей $\operatorname{tg} \gamma_p$ при средних погодных условиях малы. Их влияние на величину боковой рефракции согласно выражению (8.9) при $\partial T/\partial H=0$ составляет всего лишь $\delta'' = \delta''_{p_{max}} = 0{,}002\ s$, где s в километрах. Такой малой величиной практически всегда можно пренебречь и в качестве наклонов $\operatorname{tg} \gamma$ во всех предыдущих формулах принимать наклоны к горизонту изотермических поверхностей.

При средних погодных условиях, когда выполняются геодезические измерения, наклоны к горизонту поверхностей $n(x, y, H)=\text{const}$, как правило, меньше одного градуса ($\operatorname{tg}\gamma\leqslant 0{,}0175$). Углы наклона визирных лучей в геодезических сетях почти всегда меньше 10° ($z\approx 80\div 100°$). При этих данных в формулах (8.6) и (8.8) влияние второго члена в квадратных скобках на величину вертикальной рефракции не превысит 0,3 %. Пренебрегая такой малой величиной, можно написать

для неоднородного поля рефракции

$$r=\frac{22{,}85}{s}\int_0^s\frac{p}{T^2}\left(0{,}0342+\frac{\partial T}{\partial H}\right)\sin z\,(s-y)\,dy; \tag{8.15}$$

для однородного поля рефракции

$$r=11{,}42\,\frac{p}{T^2}\,s\left(0{,}0342+\frac{\partial T}{\partial H}\right)\sin z. \tag{8.16}$$

Формулы (8.6)—(8.9), как и любые другие, требующие знания градиентов метеорологических элементов на всем пути визирного луча, не могут быть использованы для точного вычисления поправок за рефракцию, так как градиенты температуры на пути луча не измеряются и, следовательно, неизвестны. Однако эти формулы имеют важное теоретическое и практическое значение при разработке и научном обосновании эффективных методов борьбы с неблагоприятным влиянием рефракции в геодезических сетях.

§ 61. КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ГРАДИЕНТОВ ТЕМПЕРАТУРЫ, РЕФРАКЦИИ И ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН

Суточное вращение Земли и движение ее вокруг Солнца вызывают непрерывное изменение метеорологических элементов и их градиентов, испытывающих аналогичный суточный и годовой ход, несколько нарушаемый изменениями погодных условий.

Поскольку рефракция функционально связана с метеорологическими элементами и их градиентами, то она также испытывает суточный и годовой ход и в свою очередь обусловливает суточный и годовой ход зенитных расстояний, горизонтальных направлений, азимутов земных предметов, длин сторон, измеряемых свето- и радиодальномерами и т. п.

Эти изменения во времени закономерны и их необходимо учитывать как при постановке и производстве высокоточных астрономо-геодезических измерений, так и при математической обработке их результатов.

В формулах (8.6) и (8.7) сомножитель $p/T^2\approx 0{,}009$, зависящий от температуры и давления воздуха, остается в течение

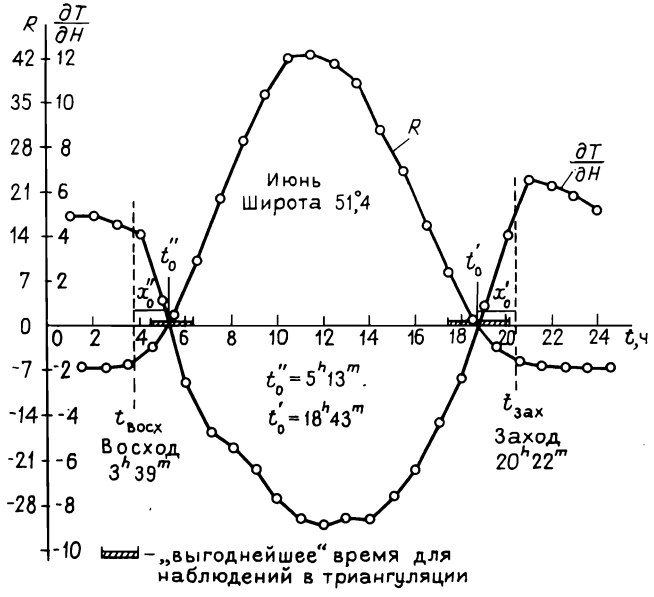


Рис. 74. Суточный ход радиационного баланса R и вертикальных градиентов температуры воздуха $\partial T/\partial H$ на высоте 2 м над почвой в открытой местности

каждых конкретных суток почти неизменным, в то время как градиенты температуры $\partial T/\partial H$ изменяются в довольно широком диапазоне (рис. 74). Они в основном и обусловливают суточный и годовой ход измеряемых на геодезических пунктах элементов (углов, азимутов и т. п.). Это доказывает, что изучив общие закономерности изменений градиентов температуры воздуха, можно выявить общие закономерности изменений в течение суток и года в целом как рефракции, так и измеряемых геодезических элементов.

Визирные лучи между смежными пунктами в геодезических сетях проходят на сравнительно небольшой высоте: в равнинной местности на высоте нескольких метров, в холмистой — нескольких десятков метров, в горной — нескольких сот метров (в средней части луча). Во всех случаях при расстояниях между пунктами до 50 км средняя высота визирного луча над подстилающей поверхностью даже в горах не превышает 0,3 км за очень редкими исключениями в высокогорных районах.

Основная масса визирных лучей между геодезическими пунктами проходит в нижнем слое атмосферы толщиной 50—80 м; в метеорологии этот слой называют приземным слоем. Для него характерны резкие перепады величин метеорологиче-

ских элементов с изменением высоты и времени. Вертикальные градиенты метеорологических элементов в этом слое атмосферы на один-два порядка больше, чем в более высоких.

Основным фактором при формировании климата приземного слоя атмосферы является радиационный баланс R земной поверхности, под которым понимают разность между поглощенной и излученной радиацией. Расчет величины радиационного баланса выполняют для различных промежутков времени: минута, час, сутки, месяц, год. Радиационный баланс оказывает существенное влияние на распределение температуры в почве и воздухе, на процессы испарения и снеготаяния, образование туманов и т. п. Его величина изменяется в зависимости от широты места, времени суток и года, погодных условий и т. п. В среднем в течение дня при отсутствии снежного покрова он положителен, а ночью отрицателен; на широтах до 65° в течение летних месяцев имеет положительный знак, а зимой — отрицательный. Радиационный баланс определяет направление потока лучистой энергии, а следовательно, величину и знак вертикальных градиентов температуры воздуха в нижнем слое атмосферы. В суточном ходе при отсутствии снежного покрова радиационный баланс и вертикальные градиенты температуры в одной и той же точке практически одновременно переходят через нуль, причем дважды в сутки (утром и вечером), изменяя при этом всякий раз знаки на противоположные (см. рис. 74). Этим замечательным свойством геодезисты могут воспользоваться для определения и исключения ошибок, обусловленных влиянием боковой рефракции.

§ 62. КОМПЕНСАЦИЯ ОШИБОК ИЗ-ЗА БОКОВОЙ РЕФРАКЦИИ ПРИ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ И АЗИМУТАЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ

Представим каждую из формул (8.7) и (8.9) в виде двух слагаемых

$$\delta = \varepsilon + \sigma, \tag{8.17}$$

где для неоднородного поля рефракции

$$\varepsilon = \frac{0{,}79}{s_0} \int_0^s \frac{p}{T^2} \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q)(s - y)\, dy; \tag{8.18}$$

$$\sigma = \frac{22{,}85}{s_0} \int_0^s \frac{p}{T^2} \frac{\partial T}{\partial H} \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q)(s - y)\, dy, \tag{8.19}$$

для однородного поля рефракции

$$\varepsilon = 0{,}39 \frac{p}{T^2} s_0 \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q); \tag{8.20}$$

$$\sigma = 11{,}42 \frac{p}{T^2} s_0 \frac{\partial T}{\partial H} \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q). \tag{8.21}$$

При средних погодных условиях величина $p/T^2 \approx 0{,}009$ довольно стабильна в течение суток. Поэтому изменения боковой рефракции (8.17) в течение суток обусловливаются соответствующими изменениями вертикальных градиентов температуры $\partial T/\partial H$ и наклонов $\operatorname{tg} \gamma$ поверхностей $n(x, y, H) = \text{const}$ в слое воздуха на высоте визирного луча. В общем случае, т. е. при $\varepsilon + \sigma \neq 0$ и $A \neq Q$,

$$\delta = 0, \text{ если } (\operatorname{tg} \gamma)_s = 0. \tag{8.22}$$

Однако в большинстве случаев наклоны $\operatorname{tg} \gamma$ на всем пути визирного луча длиною s не равны нулю. Поэтому в соответствии с формулами (8.18) и (8.19) будем иметь

$$\varepsilon \to 0, \text{ если } (\operatorname{tg} \gamma)_s \to 0, \tag{8.23}$$

$$\sigma \to 0, \text{ если (и или) } \left| \begin{matrix} \partial T/\partial H \\ \operatorname{tg} \gamma \end{matrix} \right|_s \to 0. \tag{8.24}$$

При изотермии воздуха на высоте визирного луча $\partial T/\partial H = \partial T/\partial x = 0$, рефракционное поле практически однородно и составляющая рефракции σ согласно формулам (8.19) и (8.21) равна нулю ($\sigma = 0$). В этом случае наклоны $\operatorname{tg} \gamma$ поверхностей $n(x, y, H) = \text{const}$ к горизонту также пренебрегаемо малы и в соответствии с выражением (8.12) в плоскости меридиана не превышают величины

$$\operatorname{tg} \gamma \leqslant \operatorname{tg} \gamma_p = -29{,}24 \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{8.25}$$

Выше было показано, что при средних погодных условиях наклоны изобарических поверхностей малы: $\gamma_p \leqslant 2'$ или $\operatorname{tg} \gamma_p \leqslant 0{,}0005$. Приняв в формуле (8.20) среднее значение $p/T^2 = 0{,}009$; $\sin (A - Q) = 1$ и $\operatorname{tg} \gamma = 0{,}0005$, найдем, что при изотермии составляющая рефракции $\varepsilon \leqslant 0{,}002\, s$, где s в километрах. При $s = 10 \div 20$ км получим $\varepsilon \leqslant 0{,}02 \div 0{,}04''$. Такой малой величиной практически всегда можно пренебречь.

Таким образом, из теории рефракции, построенной с учетом физики приземного слоя атмосферы, следует, что в то время, когда на высоте визирного луча наступает изотермия воздуха или состояние, наиболее близкое к ней, боковая рефракция δ

практически равна нулю. Это важный в теоретическом и практическом отношении вывод.

В любое другое время суток боковая рефракция не равна нулю, так как $\partial T/\partial H \neq 0$ и $\operatorname{tg}\gamma \neq 0$ и поэтому $\varepsilon \neq 0$ и $\sigma \neq 0$. Отметим, что составляющая ε несравненно меньше составляющей σ, однако при неблагоприятных условиях и расстояниях $s = 10 \div 20$ км она может достигать величины 0,3″ и более.

Выше уже было отмечено, что величины $\partial T/\partial H$, $\operatorname{tg}\gamma$ и $\sin(A-Q)$ по определению жестко связаны между собой: с изменением в суточном ходе знака при $\partial T/\partial H$ неизбежно изменяются одновременно на противоположные знаки при $\operatorname{tg}\gamma$ и при $\sin(A-Q)$. В формуле (8.18) знаки изменяются или могут изменяться одновременно при двух сомножителях. Это значит, что для каждого конкретного азимута или направления ($A = \text{const}$) составляющая ε сохраняет свой знак (положительный или отрицательный) неизменным несмотря на изменение знака при $\partial T/\partial H$. Взаимно обратные азимуты и направления имеют и сохраняют разные знаки при ε. Поэтому на пунктах Лапласа всегда следует определять взаимно обратные азимуты и выводить из них среднее значение. В выражении (8.19) знаки одновременно изменяются всегда у трех сомножителей; это значит, что с изменением знака при $\partial T/\partial H$ изменяется и знак при составляющей σ. Поскольку составляющая ε в сравнении с σ мала, то величину и знак боковой рефракции $\delta = \varepsilon + \sigma$ в ее суточном ходе определяет составляющая σ, отражающая влияние, главным образом, местных полей боковой рефракции, вызывающих наиболее значительные ошибки при угловых измерениях и азимутальных определениях.

Учитывая существующие в приземном слое атмосферы закономерности изменений градиентов температуры, нетрудно на основе приведенных формул установить соответствующие им общие закономерности изменений боковой рефракции в пространстве и во времени. Рефракция испытывает суточный и незначительный годовой ход. Наибольшей величины она достигает в тихую, ясную, жаркую погоду летом. Ранней весной и осенью в холодную погоду она гораздо меньше, чем летом; увеличение скорости ветра и облачности ведет к некоторому уменьшению ее величины. Чем ближе к земной поверхности проходит визирный луч, тем больше величина рефракции и амплитуда ее суточного хода, особенно при безоблачной погоде летом. В суточном ходе боковая рефракция достигает наибольшей величины около полуночи и около полудня и имеет в это время противоположные знаки.

Поскольку в суточном ходе градиенты температуры воздуха и функционально связанная с ними боковая рефракция на трехчасовых отрезках времени после восхода и перед заходом Солнца (в это время ведутся угловые измерения в триангуля-

ции) изменяются во времени практически линейно (см. рис. 74) и на высоте визирного луча в момент изотермии воздуха всякий раз переходят через нуль, изменяя при этом знаки на противоположные, то отсюда следует простой и в то же время эффективный способ компенсации ошибок из-за боковой рефракции. Сущность этого способа состоит в том, что *как горизонтальные углы (направления), так и азимуты земных предметов необходимо измерять симметрично во времени относительно момента изотермии воздуха и из полученных результатов находить среднее значение.*

Это требование в равной мере относится как к утренним, так и к вечерним наблюдениям. Поскольку до и после наступления изотермии воздуха боковая рефракция на трехчасовых отрезках времени изменяется практически линейно и имеет противоположные знаки, то в случае симметричных измерений углов, направлений или азимутов относительно момента изотермии средний из приемов результат будет практически полностью свободен от ошибок из-за боковой рефракции.

Этот вывод впервые был получен на основе экспериментальных исследований, выполненных в МИИГАиК[1]. В центре Москвы в течение трех полных и четырех неполных суток в период с 23 августа по 16 сентября при разнообразных погодных условиях измерялся малый угол $\beta = 1{,}5'$ между длинным ($s = 5{,}2$ км) и коротким ($s = 0{,}7$ км) направлениями, зенитные расстояния которых различались всего лишь на 2′. Этот угол измерялся через час в течение каждых суток по симметричной программе окулярным микрометром ($\mu = 0{,}79''$) трубы 2″ теодолита со средней квадратической ошибкой порядка 0,18″ (среднее из 125 ее значений). Почасовые значения *1* угла (рис. 75) получены из измерений в малооблачную жаркую погоду при средней суточной температуре воздуха $T_{\text{ср. сут}} = +23{,}2$ °С, а почасовые значения *2* угла — из измерений в пасмурную, отчасти дождливую прохладную погоду при $T_{\text{ср. сут}} = +13{,}6$ °С, когда по данным пяти метеостанций горизонтальные градиенты температуры воздуха, а следовательно, и боковая рефракция были равны нулю; при этих условиях погоды, т. е. при изотермии воздуха, средняя величина угла $\beta = 1'33{,}73'' \pm 0{,}03''$ была определена с очень высокой точностью. Отметим, что такое же значение данного угла получилось из почасовых его значений за трое полных суток наблюдений (табл. 13).

Результаты выполненных исследований на практике показали, что

---

[1] *Яковлев Н. В.* Об учете климатологических особенностей города при угловых измерениях в городской триангуляции 1 класса. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 6.— М., 1960.

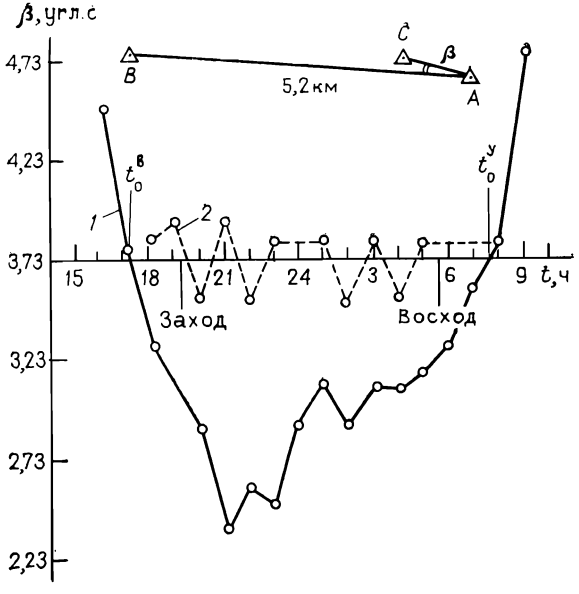


Рис. 75. Суточный ход горизонтального угла (направления) под воздействием боковой рефракции

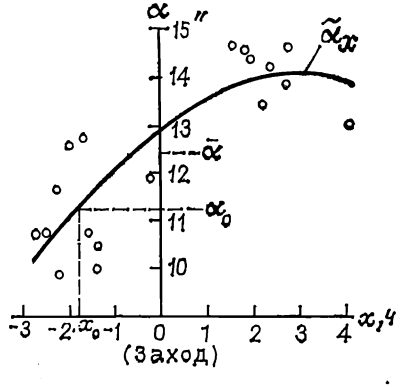


Рис. 76. Суточный ход азимута на пункте Лапласа под воздействием боковой рефракции:

α_x — аппроксимирующая функция; α — среднее из приемов; α_0 — при изотермии воздуха

при изотермии воздуха влияние боковой рефракции на измеряемые углы (направления и азимуты) действительно равно нулю, поэтому величина угла $\beta = 1'33{,}73''$ получилась одинаковой как из измерений *2* при изотермии воздуха (см. рис. 75), так и из почасовых измерений за трое полных суток (см. табл. 13);

летом при малооблачной жаркой погоде боковая рефракция имеет четко выраженный суточный ход с экстремальными значениями и с разными знаками около полудня и около полуночи; через нуль она переходит в моменты утренней и вечерней изотермии, изменяя при этом всякий раз знаки на противоположные; в эти моменты угол $\beta = 1'33{,}73''$ (см. рис. 75);

Таблица 13

Дата круглосуточных наблюдений	Число почасовых значений угла n	Средняя суточная температура, °С	Среднее весовое значение угла за сутки β	Средняя квадратическая ошибка угла m_β
22.08—23.08	23	+23,2	1′33,48″	0,16″
7.09—8.09	24	+15,2	1 33,82	0,08
15.09—16.09	23	+13,6	1 33,88	0,05
		Среднее	1 33,73	

под воздействием боковой рефракции суточный ход испытывают не только углы (направления), но и азимуты земных предметов (рис. 76);

на трехчасовых отрезках времени до и после наступления изотермии воздуха как утром, так и вечером рефракция и измеряемые направления (углы и азимуты) изменяются во времени практически линейно;

при измерении направления (угла, азимута) через каждый час в течение полных суток влияние боковой рефракции на средний за сутки результат почти полностью компенсируется (см. табл. 13); при этом остаточное среднесуточное значение рефракции изменяется в зависимости от изменений среднесуточной температуры воздуха.

Полное согласование теоретических выводов и практических результатов свидетельствует о том, что те и другие правильно отображают существующие в природе закономерности и могут быть успешно использованы в целях существенного повышения точности угловых измерений и азимутальных определений, выполняемых при создании геодезических сетей высокой точности.

Для практической реализации способа компенсации ошибок из-за боковой рефракции требуется определять время наступления изотермии воздуха на высоте визирного луча в период производства наблюдений на пункте. Эта задача решается сравнительно просто и осложнений не вызывает.

§ 63. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПРАВОК ЗА ВЛИЯНИЕ БОКОВОЙ РЕФРАКЦИИ

В соответствии с изложенными выше теоретическими положениями можно утверждать, что ошибки, обусловленные влиянием боковой рефракции, возникают вследствие асимметрии времени измерений каждого направления, угла или азимута относи-

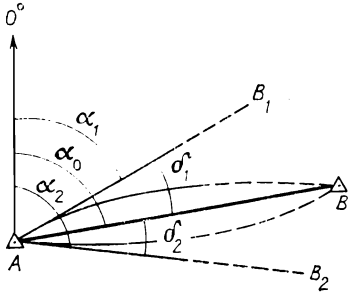


Рис. 77. График квазипериодических изменений направления (азимута) под воздействием суточного хода боковой рефракции

тельно момента изотермии воздуха на высоте визирного луча. Отсюда вытекает второй способ исключения или существенного ослабления влияний боковой рефракции:

в случае асимметричных во времени измерений как горизонтальных углов, так и азимутов земных предметов необходимо их результаты редуцировать на момент изотермии воздуха, когда боковая рефракция равна нулю.

При измерении горизонтальных направлений или азимутов земных предметов в нестационарном поле боковой рефракции в каждый фиксированный момент времени t, когда зрительная труба теодолита, установленного в точке A (рис. 77) наведена на визирную цель в точке B, из наблюдений получают соответствующее этому времени значение направления или азимута α_t между нулем неподвижного лимба (меридианом) и направлением касательной $AB_1(AB_2)$ к последнему элементу луча света в точке A. Форма и положение луча света AmB (его проекция на горизонтальную плоскость) относительно искомого направления $AB=\alpha_0$ непрерывно изменяются во времени, испытывая суточный и незначительный годовой ход, обусловленный аналогичным ходом боковой рефракции. Вследствие этого в суточном ходе касательная к лучу света (измеренное направление, азимут) постепенно перемещается из одного крайнего положения $AB_1=\alpha_1$ в другое $AB_2=\alpha_2$, а затем в обратном направлении от α_2 к α_1. Таким образом, каждое измеряемое направление или азимут в суточном ходе изменяется от α_{min} до α_{max} и обратно по квазипериодическому закону и дважды в сутки при вечерней и утренней изотермии воздуха в моменты времени $t_0^у$ и $t_0^в$ и принимает искомое значение $\alpha_0=\alpha_{t_0}$, свободное от влияния боковой рефракции.

Изменение величины измеренных направлений (азимутов) на заданном отрезке времени суток ($t_{нач}<t_0<t_{кон}$) может быть выражено интегральной формулой

$$\int_{t_0}^{t} f'(t)\,dt=\alpha_t-\alpha_{t_0}. \qquad (8.26)$$

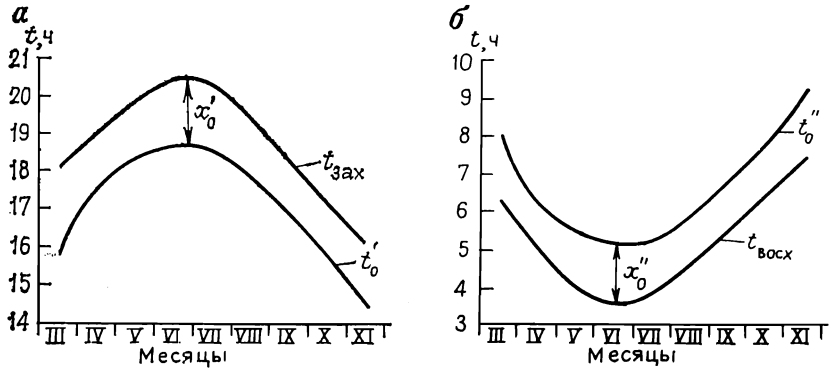


Рис. 78. Сезонный ход моментов захода (*а*), восхода (*б*) Солнца и моментов $t_0(x_0)$ вечерней и утренней изотермии воздуха на широте 53° (на высоте 2 м над почвой)

Поэтому искомый результат $\alpha_0 = \alpha_{t_0}$, практически свободный от влияния боковой рефракции, будет равен

$$\alpha_0 = \alpha_t + \int_t^{t_0} f(t)\, dt, \tag{8.27}$$

где второе слагаемое представляет собой поправку за асимметрию времени наблюдений относительно момента изотермии t_0 или, что все равно, поправку δ за влияние боковой рефракции.

Высокоточные угловые измерения и азимутальные определения на геодезических пунктах 1—2 классов выполняют, как правило, не менее чем за 2—3 дня. На пунктах Лапласа определение азимутов затягивается иногда даже на 10—12 дней. При переходе от одного дня к другому момент времени t_0 наступления изотермии воздуха как бы сползает (имеет тренд), следуя почти точно за моментом захода Солнца ($t_{зах}$) вечером и за моментом его восхода ($t_{восх}$) утром (рис. 78). Для того чтобы можно было воспользоваться формулами (8.26) и (8.27) при обработке результатов многодневных измерений, необходимо учесть или исключить «сползание» моментов времени t_0, обусловленное изменением склонения Солнца при переходе от одного дня к другому. Это можно сделать, если перейти к условной системе отсчета времени относительно моментов захода Солнца $t_{зах}$ при вечерних и ночных наблюдениях и относительно моментов восхода $t_{восх}$ в случае утренних наблюдений:

$$x = t_{зах} - t; \quad x = t - t_{восх}. \tag{8.28}$$

В этой системе отсчета момент времени $x_0^в$ вечерней изотермии воздуха и момент времени $x_0^у$ утренней изотермии найдем по формулам

$$x_0^в = t_{зах} - t_0^в; \qquad x_0^у = t_0^у - t_{восх}. \tag{8.29}$$

Характерной особенностью данной системы отсчета времени является то, что как $x_0^у$, так и $x_0^в$ остаются почти неизменными по величине при переходе от одной даты к другой, от одной недели к последующей и т. д. (см. рис. 78). Кроме того, для каждой конкретной даты как утром, так и вечером $x_0^у$ и $x_0^в$ практически одинаковы по величине ($x_0^у \cong x_0^в$), что имеет важное теоретическое и практическое значение.

Формулы (8.26) и (8.27) даже при переходе к условной системе отсчета времени (8.28) использовать в явном виде нельзя, поскольку угловые измерения и азимутальные определения до сих пор выполняются дискретно, а подынтегральная функция неизвестна. Поэтому временной ход направлений, углов или азимутов следует аппроксимировать, например, с помощью ряда Фурье или полинома требуемой степени.

Практика показала, что на трехчасовых отрезках времени ($t_н \leqslant t_0 \leqslant t_к$) $\leqslant 3$ ч перед заходом Солнца и после его восхода градиенты температуры, рефракция и измеряемые направления (углы и азимуты) изменяются во времени практически линейно (см. рис. 74—76). Поэтому если горизонтальные углы (азимуты) измерены на этих отрезках суток в течение, например, нескольких вечеров не менее чем 15—18 приемами, то исправленный за рефракцию угол (азимут) после его редукции на момент изотермии x_0 может быть вычислен по формуле

$$\alpha_0 = \bar{\alpha} + k(x_0 - \bar{x}), \tag{8.30}$$

где $\bar{\alpha}$ — среднее из приемов значение угла (азимута); k — часовое изменение угла или азимута, угл. с/ч; $\bar{x}$ — среднее в приемах время наблюдений, ч.

Величина

$$\delta = k(x_0 - \bar{x}) \tag{8.31}$$

представляет собой поправку за рефракцию, возникающую вследствие асимметрии времени наблюдений $\Delta x = x_0 - \bar{x}$.

Для того чтобы вычислить часовое изменение k каждого угла или азимута, измеренного в течение нескольких вечеров, надо перейти к условной системе отсчета времени x (звездное время при определении азимута следует преобразовать предварительно в среднее солнечное).

Для удобства последующих вычислений и преобразований составим сводку результатов измерений (табл. 14) угла (азимута) α_i в приемах ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Таблица 14

Номер приема i	Время наблюдений x_i	Результаты наблюдений α_i
1	x_1	α_1
2	x_2	α_2
3	x_3	α_3
. . .	. . . .	. . . .
n	x_n	α_n
	$\bar{x} = \frac{1}{n} \Sigma x_i$	$\bar{\alpha} = \frac{1}{n} \Sigma \alpha_i$
	$\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2$	

Время наблюдений x_i округляют до 0,01 ч, а результаты измерений α_i до 0,01″ не указывая при этом градусы, минуты и целые десятки секунд.

В формулах (8.30) и (8.31) неизвестными являются часовое изменение угла (азимута) k и время x_0 наступления изотермии воздуха. Часовые изменения k вычисляют для всех углов $1j$ ($j=2, 3, \ldots, n$) по формуле

$$k = \frac{[\Delta x_i \Delta \alpha_i]}{[\Delta x_i^2]}, \tag{8.32}$$

где $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$; $\Delta \alpha_i = \alpha_i - \bar{\alpha}$.

Среднюю квадратическую ошибку определения поправки δ за рефракцию находят по формуле

$$m_\delta^2 = (x_0 - \bar{x})^2 m_k^2 + k^2 m_{x_0}^2, \tag{8.33}$$

где средняя квадратическая ошибка определения k равна

$$m_k = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{(n-1)[\Delta x^2]}}. \tag{8.34}$$

Поправки v_i в измеренные в приемах значения α_i вычисляют как разности

$$v_i = k(x_i - \bar{x}) - (\alpha_i - \bar{\alpha}). \tag{8.35}$$

Вместо выражения (8.30) можно воспользоваться формулой

$$\alpha_0 = a_0 + a_1 x_0, \tag{8.36}$$

где коэффициенты a_0 и a_1 определяют по методу наименьших квадратов с использованием сводки результатов измерений (см. табл. 14).

В том случае, когда измерения азимута (угла) начинаются примерно за 3 ч до захода Солнца и продолжаются в течение всей ночи ($t_н < t_0 < t_к$) $\leqslant 6 \div 8$ ч, исправленное за влияние боковой рефракции значение α_0 азимута (угла) находят по формуле

$$\alpha_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 \tag{8.37}$$

или, что все равно,

$$\alpha_0 = \bar{\alpha} + k(x_0 - \bar{x}) + k_1(x_0^2 - \bar{\bar{x}}^2), \tag{8.38}$$

где

$$\bar{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2; \tag{8.39}$$

остальные обозначения указаны выше.

Коэффициенты a_0, a_1 и a_2, а также k_1 и k_2 определяют по методу наименьших квадратов из обработки измерений, приведенных в сводке (см. табл. 14).

В формуле (8.38) величина

$$\delta = k(x_0 - \bar{x}) + k_1(x_0^2 - \bar{\bar{x}}^2) \tag{8.40}$$

представляет собой поправку в среднее из приемов значение азимута (угла) $\bar{\alpha}$ за влияние боковой рефракции. Отметим, что $\delta = \alpha_0 - \bar{\alpha}$.

Коэффициенты k и k_1 находят из решения системы нормальных уравнений

$$\begin{pmatrix} [\Delta x^2] & [\Delta x \Delta y] \\ [\Delta x \Delta y] & [\Delta y^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\Delta x \Delta \alpha] \\ [\Delta y \Delta \alpha] \end{pmatrix}, \tag{8.41}$$

составляемых непосредственно по данным сводки результатов измерений. В данном случае

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}; \quad \Delta \alpha_i = \alpha_i - \bar{\alpha}; \quad \Delta y_i = x_i^2 - \bar{\bar{x}}^2.$$

Средние квадратические ошибки определения k и k_1 равны

$$m_k = \mu \sqrt{Q_{11}}; \quad m_{k_1} = \mu \sqrt{Q_{22}}, \tag{8.42}$$

где ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n - m}}. \tag{8.43}$$

Поправки v_i вычисляют по формуле

$$v_i = k(x_i - \bar{x}) + k_1(x_i^2 - \bar{\bar{x}}^2) + (\alpha_i - \bar{\alpha}), \tag{8.44}$$

где n — число приемов измерений; $m=2$ — число определяемых коэффициентов k в уравнениях поправок (8.44); Q_{11} и Q_{22} — квадратичные коэффициенты весовой матрицы

$$Q=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}, \tag{8.45}$$

т. е. обратной матрицы N^{-1} коэффициентов нормальных уравнений (8.41).

Средняя квадратическая ошибка m_δ поправки δ, вычисляемой по формуле (8.40), равна

$$m_\delta=\mu\sqrt{f^{\mathrm{T}}Qf}, \tag{8.46}$$

где μ — ошибка единицы веса (8.43); $f^{\mathrm{T}}=[(x_0-\bar{x})\ (x_0^2-\overline{\overline{x^2}})]$ — транспонированный вектор коэффициентов весовой функции; Q — матрица весовых коэффициентов (8.45).

Пример обработки результатов измерений азимута с использованием формулы (8.37) дан в [23, 24].

§ 64. РАСЧЕТ НЕОБХОДИМОЙ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ И ВРЕМЕНИ НАСТУПЛЕНИЯ ИЗОТЕРМИИ ВОЗДУХА

При расчете необходимой точности будем исходить из формулы (8.31), потребовав, чтобы $m_\delta\leqslant 0{,}2''$.

Перейдя к средним квадратическим ошибкам, получим

$$m_\delta^2=k^2m_{x_0}^2+(x_0-\bar{x})^2m_k^2. \tag{8.47}$$

В соответствии с принципом равных влияний напишем

$$km_{x_0}=(x_0-\bar{x})\,m_k\leqslant m_\delta/\sqrt{2}.$$

В триангуляции 2 класса при $s=7\div 20$ км при вечерних наблюдениях часовые изменения углов в среднем равны $k=0{,}7''$/ч, асимметрия времени наблюдений в среднем составляет $\Delta x=(x_0-x)=0{,}4$ ч. С учетом этих данных и при $m_\delta\leqslant 0{,}2''$ найдем следующие допустимые величины ошибок: $m_k\leqslant 0{,}35''$/ч и $m_{x_0}\leqslant 0{,}2$ ч.

Для определения надежных значений коэффициентов аппроксимирующей функции и поправок за рефракцию необходимо:

с точностью до одной минуты фиксировать время каждого отдельного приема наблюдений, а также дату;

измерения в каждом отдельном приеме выполнять с максимально высокой точностью, ослабляя при этом влияние всех источников ошибок, особенно ошибок диаметров лимба. Необходимо применять теодолиты, у которых полные ошибки диаметров лимба не превышают 0,5—0,6″, в противном случае следует

делать дополнительные перестановки лимба между полуприемами на 90°;

углы и азимуты измерять не менее чем 15—18 приемами;

приемы измерений необходимо распределять более или менее равномерно на всем отрезке времени ($t_н < t_0 < t_к$), на котором ведутся высокоточные геодезические измерения (в целом все дни работы на пункте);

до наступления изотермии воздуха, т. е. до момента времени $x_0(t_0)$ должно быть выполнено не менее 30 % приемов измерений (в целом за все дни наблюдений). Это необходимо для обеспечения высокой точности интерполирования измеренных углов и азимутов на этот момент времени в целях исключения ошибок из-за боковой рефракции.

Для определения моментов времени x_0 с ошибками не более 0,2 ч необходимо применять методы, обеспечивающие такую или более высокую точность.

§ 65. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПЕРЕХОДА БОКОВОЙ РЕФРАКЦИИ ЧЕРЕЗ НУЛЬ В СУТОЧНОМ ХОДЕ

Приближенный способ

Каждый геодезист, выполняющий угловые измерения на пунктах триангуляции и полигонометрии, хорошо знает, что изображения визирных целей при безоблачной погоде испытывают колебания в плане и по высоте, причем тем сильнее, чем выше над горизонтом Солнце. Ежедневно утром и вечером наступают непродолжительные промежутки времени, когда условия видимости и качество изображений визирных целей существенно улучшаются, а их колебания становятся минимальными или совсем прекращаются. Середина каждого такого промежутка соответствует моменту t_0 изотермии воздуха на высоте визирного луча (рис. 79), который следует зафиксировать по часам на каждую дату вечерних ($t_0^в$) и утренних ($t_0^у$) наблюдений.

Данный способ определения времени t_0, когда боковая рефракция практически равна нулю, является наиболее простым и легко доступным при угловых измерениях в геодезических сетях.

Можно использовать и другой способ приближенного опре-

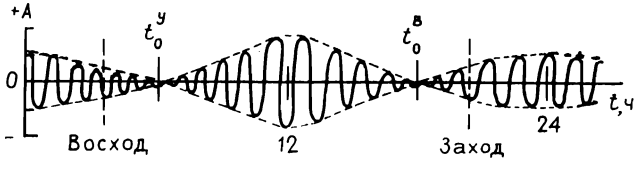


Рис. 79. Суточный ход амплитуды колебаний изображений визирных целей при ясной и малооблачной погоде

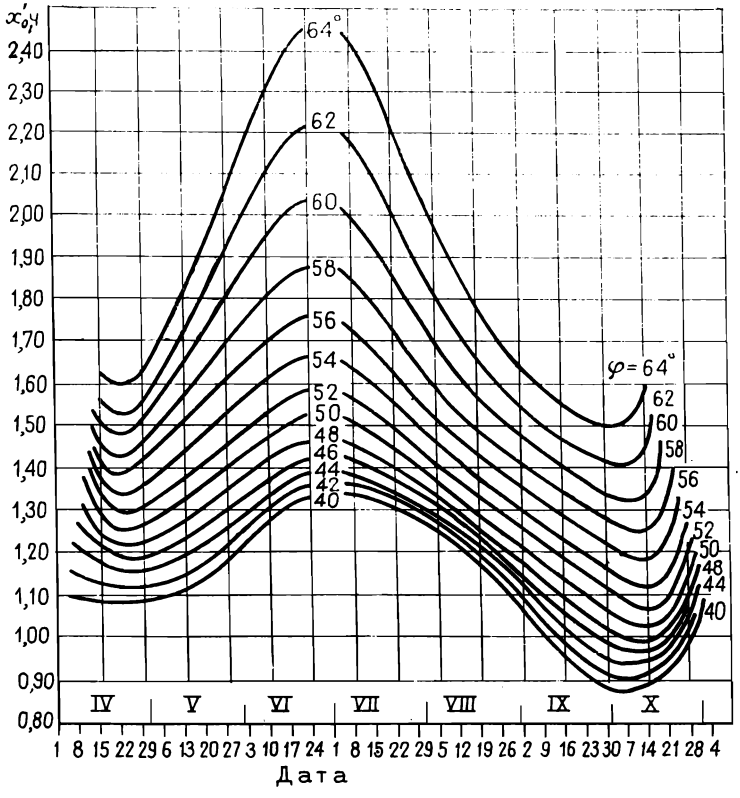


Рис. 80. Многолетние значения моментов времени $x_0' = t_{зах} - t_0'$ (в ч) перехода радиационного баланса через нуль на разных широтах на высоте 2 м над почвой

деления моментов времени t_0 для каждой даты. В этом случае применяют формулы

$$t_0^в \cong t_{зах} - x_0'; \quad t_0^у \cong t_{восх} + x_0', \tag{8.48}$$

где $t_{зах}$, $t_{восх}$ — время захода и восхода Солнца соответственно, определяется по Астрономическому ежегоднику; x_0' — многолетнее значение времени перехода боковой рефракции через нуль на широте пункта выбирается из специальных таблиц (см. прил.) или определяется по графику (рис. 80).

Геодезический метод определения моментов времени x_0 по невязкам треугольников

Каждый угол, измеренный утром или вечером на отрезке времени $(t_н < t_0 < t_к) \leqslant 3$ ч, искажен боковой рефракцией и, следовательно, в скрытом виде содержит информацию о ее величине

в период наблюдений, ее изменениях во времени и о моменте времени $t_0(x_0)$ перехода ее через нуль. Отсюда следует, что если имеются ряды измеренных на пунктах триангуляции направлений и зафиксировано с точностью до одной минуты время наблюдений в каждом отдельном приеме, то можно решить обратную задачу и найти средний для участка сети момент времени x_0, когда влияние боковой рефракции практически равно нулю.

Допустим, что на всех пунктах небольшого участка сети триангуляции из 10—15 треугольников с высокой точностью не менее чем 15—18 круговыми приемами измерены горизонтальные направления, например, только в вечерние часы, и пусть приемы наблюдений более или менее равномерно распределены на всем отрезке времени наблюдений ($t_н < t_0 < t_к$).

Для каждого угла *1.j* между начальным направлением *1* и каждым последующим направлением *j* вычислим по формуле (8.32) их часовые изменения $k_{1.j}$, а затем образуем их разности для смежных направлений *j* и *l* и таким образом найдем значения $k_{j.l} = k_{1.j} - k_{1.l}$ для всех углов в каждом треугольнике.

В любом треугольнике измеренные углы *A*, *B* и *C* исправим поправками за рефракцию, используя формулы

$$\begin{aligned} A_0 &= A + k_A(\bar{x}_0 - x_A); \\ B_0 &= B + k_B(\bar{x}_0 - x_B); \\ C_0 &= C + k_C(\bar{x}_0 - x_C), \end{aligned} \tag{8.49}$$

где $\bar{x}_0$ — средний и пока неизвестный для данного участка сети момент изотермии воздуха; x_A, x_B, x_C — среднее в приемах время наблюдений на пунктах *A*, *B* и *C*.

Сложив углы (8.49), вычислим невязку треугольника

$$\omega_0 = \omega + (k_A + k_B + k_C)\bar{x}_0 - (k_A x_A + k_B x_B + k_C x_C), \tag{8.50}$$

где $\omega = A + B + C - (180° + \varepsilon)$.

Для любого треугольника с номером *i* обозначим

$$(\Sigma k)_i = (k_A + k_B + k_C)_i; \quad L_i = \omega_i - (\Sigma k_j x_j), \tag{8.51}$$

где *j* — номер угла в треугольнике; x_j — время измерения данного угла на *j*-ом пункте, вычисленное относительно момента захода Солнца по формуле (8.28).

С учетом (8.51) для невязок ω_0 (8.50) всех треугольников с номерами $i = 1, 2, \ldots, n$ запишем:

$$\begin{aligned} &(\Sigma k)_1 \bar{x}_0 + L_1 = \omega_{01}; \\ &(\Sigma k)_2 \bar{x}_0 + L_2 = \omega_{02}; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &(\Sigma k)_n \bar{x}_0 + L_n = \omega_{0n}. \end{aligned} \tag{8.52}$$

Из совместного решения уравнений (8.52) под условием $\Sigma\omega_{0i}^2 = \min$, найдем средний для участка сети момент времени $\bar{x}_0$, когда влияние боковой рефракции практически равно нулю

$$\bar{x}_0 = -\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Sigma k)_i L_i}{\sum_{i=1}^{n} (\Sigma k)_i^2}. \qquad (8.53)$$

Средняя квадратическая ошибка определения $\bar{x}_0$ равна

$$m_{\bar{x}_0} = \sqrt{\frac{\Sigma\omega_{0i}^2}{(n-1)\,\Sigma\,(\Sigma k)_i}}, \qquad (8.54)$$

где ω_0 — исправленные за рефракцию невязки (8.50) треугольников; n — число невязок; $(\Sigma k)_i$ — определяются по формуле (8.51).

Практика показывает, что при измерении теодолитами типа ОТ-02 горизонтальных направлений 15 круговыми приемами с дополнительными перестановками лимба между полуприемами на 90° средний для разных участков из 5—30 треугольников триангуляции 2 класса момент времени $\bar{x}_0$ определяется со средней квадратической ошибкой, равной в среднем 0,17 ч, т. е. с высокой точностью.

Метеорологический метод определения моментов времени x_0

Угловые измерения на каждом пункте триангуляции 1—2 классов выполняют обычно за 2—4 дня; азимут на пункте Лапласа определяют не менее чем за 3 дня, иногда за 10—15 дней. В таких случаях приходится вычислять средний для всех дней наблюдений на пункте момент времени x_0 по формулам [24]:

$$x_0 = x_0' - \varepsilon_m' - \varepsilon_h'; \qquad (8.55)$$

где

$$x_0' = \frac{\Sigma n_j x_{0,j}'}{\Sigma n_j}; \qquad (8.56)$$

$$\varepsilon_m' = \frac{\Sigma n_j \varepsilon_{m,j}'}{\Sigma n_j}; \qquad (8.57)$$

$$\varepsilon_h' = 1{,}30h\,[1 - (0{,}6976 - 0{,}00264\varphi)\,h + 0{,}064h^2]. \qquad (8.58)$$

В этих формулах: $x_{0,j}'$ — многолетнее для j-й даты на широте пункта значение вечернего момента времени $x_0' = t_{\text{зах}} - t_0'$ перехода радиационного баланса через нуль на высоте 2 м над почвой; величины x_0' (в ч) даны для каждой даты бесснежного периода (см. прил. и рис. 80);

$\varepsilon'_{m,j}$ — поправка за отличие многолетних метеоусловий на широте пункта на j-ю дату от фактических в районе пункта, ч;

ε_h' — поправка (в ч) за эквивалентную высоту h визирного луча над местностью, выраженную в сотнях метров;

n_j — число приемов измерений угла (азимута) в j-й вечер, т. е. до и после захода Солнца;

φ — широта пункта, выраженная в градусах ($40° \leqslant \varphi \leqslant 64°$).

Под эквивалентной высотой понимают среднюю высоту визирного луча над подстилающей поверхностью, вычисляемую с учетом профиля местности между конечными точками луча, а также кривизны Земли и рефракции [23]. Поправки ε_h' определяются с ошибками не более 0,1 ч.

Необходимо обратить внимание на одно важное обстоятельство. В том случае, когда в горных районах эквивалентная высота визирного луча больше 300 м, что бывает сравнительно редко при длинах сторон порядка 7—20 км, вычислять поправки за рефракцию не следует, так как при $h > 300$ м боковая рефракция сравнительно мала и в суточном ходе в нуль не обращается, поскольку градиенты температуры на этих высотах имеют постоянный знак.

Поправки ε_m за отличие многолетних среднесуточных метеорологических условий от фактических в районе геодезического пункта вычисляют для каждой j-й даты вечерних наблюдений по формуле

$$\varepsilon'_m = \theta \left\{ \frac{(273{,}2 + T)^4}{(273{,}2 + T_0)^4} \; \frac{1 - 0{,}026e}{1 - 0{,}026e_0} \; \frac{1 - A_0}{1 - A} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1 - 0{,}42n\,(n+1)}{1 - 0{,}42n_0\,(n_0+1)} \; \frac{1 - (a + 0{,}38n_0)\,n_0}{1 - (a + 0{,}38n)\,n} - 1 \right\}. \qquad (8.59)$$

Параметр θ и сглаженные по широтам и датам многолетние средние суточные значения температуры воздуха T_0, упругости водяного пара воздуха e_0 (в мм рт. ст.); общей облачности n_0 (в долях единицы) и среднего альбедо (отражательной способности) местности A_0 в направлении визирного луча (в долях единицы) определяют по метеорологическим таблицам, приведенным в работах [23]. Параметр a вычисляют по формулам

$$a = 0{,}412 - 0{,}002\,(57 - \varphi) \quad \text{при } 20° \leqslant \varphi \leqslant 57°.$$
$$a = 0{,}412 - 0{,}018\,(\varphi - 57) \quad \text{при } 57° \leqslant \varphi \leqslant 75°, \qquad (8.60)$$

где широта пункта φ округляется до 0,1°.

Фактические средние суточные значения этих же элементов T, e, A, n запрашивают для каждой j-й даты вечерних определений азимута с ближайших к пункту метеостанций, расположенных вокруг него по возможности в диаметрально противоположных направлениях в радиусе до 50 км в закрытой местности

и до 100 км — в открытой (степной и полупустынной). Данные этих метеостанций осредняют и средние результаты подставляют в формулу (8.59). При отсутствии метеостанций и постов в районе пункта необходимые метеоданные определяют путем измерений на пункте.

Формула (8.55) соответствует случаю, когда время вечерних наблюдений в приемах вычислено по формуле

$$x_i = t_{\text{зах}} - t_i.$$

Если время наблюдений получено по другой формуле

$$x_i = t_i - t_{\text{зах}}, \tag{8.61}$$

то выражение (8.55) должно быть записано в виде

$$x_0 = -x_0' + \varepsilon_m' + \varepsilon_h', \tag{8.62}$$

т. е. как это принято в [24] при обработке результатов азимутальных определений.

Средняя квадратическая ошибка определения моментов времени $x_{0,j}$ для каждой отдельной j-й даты равна

$$m_{x_{0,j}} = \sqrt{m_{x_0'}^2 + m_{\varepsilon_m'}^2 + m_{\varepsilon_h'}^2}.$$

Ошибка среднего за n дней значения x_0 соответственно в корень квадратный из n раз меньше $m_{x_{0,j}}$.

Накопленный опыт свидетельствует о том, что для каждой отдельной даты ошибка $m_{x_{0,j}}$ в среднем равна 0,16 ч. Среднее за 2—4 дня значение x_0 определяется с ошибкой $m_{x_0} \cong 0{,}12 \div 0{,}13$ ч.

Поправки ε_m' в значения $x_{0,j}'$ за различие метеоусловий в большинстве случаев (около 90 %) малы ($\varepsilon'_{m,j} < 0{,}2$ ч) и ими практически можно пренебречь, так как их влияние на точность определения поправок за рефракцию при этом не превышает 0,1″. Максимальные поправки ε'_m, равные 0,5—0,7 ч, составляют менее 2 % от общего их числа. Примеры вычислений даны в [23].

Сопоставление точности геодезического и метеорологического методов определения моментов времени x_0

Для того чтобы убедиться в высокой точности каждого из этих методов определения моментов времени x_0, когда боковая рефракция равна нулю, поступим следующим образом. Возьмем участок триангуляции из n пунктов. Вычислив невязки треугольников и часовые изменения измеренных углов, найдем по формуле (8.53) средний для данного участка сети момент времени $\bar{x}_0$, который обозначим $\bar{x}_{0\,\text{г}}$ (геодезический метод). Теперь

для каждого пункта этой сети определим по формуле (8.55) моменты времени x_0, используя чисто метеорологическую информацию, и затем найдем среднее для сети значение, которое обозначим $\bar{x}_{0\,м}$ (метеорологический метод). Поскольку средние значения $\bar{x}_{0\,г}$ и $\bar{x}_{0\,м}$ получены для одних и тех же пунктов и соответствуют одним и тем же датам угловых измерений, то их значения должны совпадать в границах доверительного интервала при заданной доверительной вероятности 0,95, принятой в геодезии при установлении допусков. Иными словами, при заданном уровне значимости $\alpha = 1-p$ и двухстороннем критерии разности

$$|\Delta x| = |\bar{x}_{ог} - \bar{x}_{ом}| < T_\alpha$$

не должны превышать величины

$$T_\alpha = \frac{m^2_{\bar{x}_{ог}} t_\alpha(f_1) + m^2_{\bar{x}_{ом}} t_\alpha(f_2)}{\sqrt{m^2_{\bar{x}_{ог}} + m^2_{\bar{x}_{ом}}}},$$

где $m^2_{\bar{x}_{ог}}$ — эмпирическая дисперсия значения $\bar{x}_{0\,г}$, вычисляется по формуле (8.54); $m^2_{\bar{x}_{ом}}$ — эмпирическая дисперсия значения $\bar{x}_{0\,м}$, вычисляется по отклонениям $v = x_{0'\,i} - \bar{x}_{0\,м}$ от среднего, т. е.

$$m_{\bar{x}_{ом}} = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n(n-1)}},$$

где n — число значений $x_{0,\,i}$; t_α — квантили t-распределения Стьюдента, определяемые по таблицам по числу степеней свободы $f_1 = N-1$ и $f_2 = n-1$ при заданном уровне значимости α; N — число невязок треугольников, на основе которых получено значение $\bar{x}_{0\,г}$; n — число значений $\bar{x}_{0,\,i}$, на основе которых вычислено значение $\bar{x}_{0\,м}$.

Приведем фактические значения $\bar{x}_{0\,г}$ и $\bar{x}_{0\,м}$ (в ч), Δx и T_α (табл. 15) для небольших участков триангуляции 2 класса (от 7 до 29 пунктов на каждом) на четырех объектах, находящихся в различных физико-географических и климатических зонах СССР, удаленных друг от друга на многие тысячи километров.

Нетрудно убедиться, что даже наибольшие разности $\Delta x = 0{,}18$ ч в 2—3 раза меньше допустимых при доверительной вероятности $p = 0{,}95$. Средние по всем четырем объектам значения $\bar{x}_{0\,г}$ и $\bar{x}_{0\,м}$ точно совпали (1,28 и 1,27). Модуль средней разности $|\Delta x|_{ср} = 0{,}10$ ч. Эти данные, полученные при использовании принципиально разной измерительной информации (чисто геодезической и чисто метеорологической), но отлично согла-

Таблица 15

Объект. Период угловых измерений	Число пунктов	$\frac{\bar{x}_{\text{ог}}}{m_{\bar{x}_{\text{ог}}}}$	$\frac{\bar{x}_{\text{ом}}}{m_{\bar{x}_{\text{ом}}}}$	Δx	T_α
Кустанайская область. Степные районы 10.06—15.09	13	$\frac{1,59}{0,17}$	$\frac{1,41}{0,06}$	+0,18	0,38
Коми АССР. Равнинные залесенные и заболоченные районы 31.08—4.10	7	$\frac{1,42}{0,16}$	$\frac{1,43}{0,03}$	—0,01	0,45
Карагандинская область. Полупустыня, пески, такыры 25.08—23.10	29	$\frac{0,95}{0,10}$	$\frac{0,90}{0,05}$	+0,05	0,25
Восточная Сибирь. Горнотаежный район 12.07—01.09	26	$\frac{1,15}{0,24}$	$\frac{1,33}{0,08}$	—0,18	0,54
Среднее	19	$\frac{1,28}{0,17}$	$\frac{1,27}{0,06}$	+0,01	0,41

сующиеся между собой по величине, свидетельствуют о высокой точности как геодезического, так и метеорологического методов определения времени x_0 наступления изотермии воздуха на высоте визирных лучей.

Метеорологический метод имеет определенные преимущества по сравнению с геодезическим методом, так как позволяет автономно определять время наступления изотермии по любому отдельно взятому направлению (азимуту); геодезический метод дает средние значения этих моментов времени для разных участков сетей триангуляции. Практика и расчеты показывают, что для надежного определения значений $\bar{x}_{0\,\text{г}}$ достаточно использовать невязки 10—15 треугольников, если приняты меры для обеспечения высокой точности измерений горизонтальных направлений в каждом отдельном приеме (см. § 64).

§ 66. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УЧЕТА БОКОВОЙ РЕФРАКЦИИ В ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЯХ

С момента открытия В. Я. Струве в 1829 г. явления боковой рефракции прошло более 150 лет. За это время геодезисты разных стран выполнили огромный объем научных исследований и экспериментальных работ по разработке методов и приборов для определения и учета ошибок из-за боковой рефракции при высокоточных угловых измерениях и азимутальных определе-

ниях в геодезических сетях. Однако до сих пор не создан ни один угломерный рефрактометр для измерения углов боковой рефракции в геодезических сетях с требуемой точностью.

В истории геодезии, согласно публикациям, известно лишь несколько случаев успешного исправления измеренных углов и азимутов в сетях триангуляции 1, 2 классов поправками за влияние боковой рефракции. Первый такой удачный опыт принадлежит известному финскому ученому-геодезисту Т. И. Куккамяки, опубликовавшему результаты своих исследований в данной области в 1939 г.

При выводе формул для вычисления поправок в измеренные направления за влияние боковой рефракции Т. И. Куккамяки исходил из предпосылки, что на отдельных участках Δs_i визирного луча изотермические поверхности параллельны слабо выраженным формам равнинного рельефа и при этом необходимо учитывать вертикальные градиенты температуры, а также углы наклона земной поверхности к горизонту. Для каждого такого участка Δs_i визирного луча поправка δ_i (в угл. с) за рефракцию вычислялась по формуле

$$\delta_i = 0{,}20 \frac{\partial T}{\partial H} \Delta s_i \operatorname{tg} \gamma \cos \theta, \tag{8.63}$$

где $\frac{\partial T}{\partial H}$ — вертикальный градиент температуры воздуха на высоте визирного луча во время угловых измерений на пункте; Δs_i — длина участка луча; $\operatorname{tg} \gamma$ — наклон земной поверхности к горизонту в начальной точке участка Δs_i луча; θ — горизонтальный угол между направлением визирного луча и линией пересечения наклонной поверхности земли с горизонтальной плоскостью в начальной точке участка Δs_i луча.

Общая для визирного луча в целом поправка δ за влияние боковой рефракции по направлению длиной s с несколькими участками Δs_i рефракции вычислялась по формуле

$$\delta = \Sigma \frac{s_i}{S} \delta_i, \tag{8.64}$$

где s_i — расстояние от визирной цели до участка луча Δs_i.

Наклоны $\operatorname{tg} \gamma$ участков земной поверхности и углы θ определялись по топографической карте. Для тех участков луча, на которых по мнению исследователя изотермические поверхности были явно не параллельны формам равнинного рельефа местности, поправки δ_i не вычислялись.

Способ Куккамяки был опробован на части ряда триангуляции 1 класса, который был построен на юге Финляндии в исключительно ровной местности, покрытой лесом высотой порядка 10 м. В непосредственной близости с этим лесным районом (южнее Хельсинки) были ранее выполнены измерения темпе-

ратуры воздуха на разных высотах в разное время суток, используя которые, Куккамяки вычислил более или менее удовлетворительные значения температурных градиентов, средние для периода наблюдений в триангуляции.

Исправление измеренных углов в 61 треугольнике ряда триангуляции поправками за рефракцию привело к положительным результатам. Сумма квадратов невязок треугольников до исправления углов была $\Sigma\omega^2 = 22{,}69$, а после исправления углов стала $\Sigma\omega_0^2 = 13{,}52$. Таким образом, вес измеренного угла после учета рефракции увеличился в 1,7 раза. Средняя квадратическая ошибка измеренного угла, определенная по невязкам треугольников до исправления углов поправками, была равна 0,35″, а после исправления углов — 0,27″, т. е. практически совпала с ошибкой угла 0,25″, полученной из уравнивания углов на станции. Это свидетельствует о достаточно полном исключении ошибок из-за рефракции из результатов угловых измерений.

Метод Куккамяки, несмотря на положительные результаты испытаний, не получил дальнейшего распространения, главным образом, из-за незнания градиентов температуры воздуха на пути визирных лучей в период производства угловых измерений на пунктах сети.

А. П. Островский предложил вычислять поправки за рефракцию по формуле

$$\delta = -0{,}2\,\frac{\partial T}{\partial H}\,\frac{\Sigma}{S}, \tag{8.65}$$

где $\partial T/\partial H$ — вертикальный градиент температуры воздуха, определяемый в начальной точке визирного луча длиною S (в км) по углу вертикальной рефракции $\partial Z = Z_т - Z_и$, где $Z_т$ и $Z_и$ — теоретическое и измеренное зенитные расстояния. Величина Σ по аналогии с формулами Куккамяки характеризует наклоны $\operatorname{tg}\gamma$ земной поверхности на участках Δs_i визирного луча и ориентировку их по азимуту, определяется она по данным топографической карты.

Вертикальный градиент температуры воздуха находился для каждого визирного луча по формуле

$$\frac{\partial T}{\partial H} = 0{,}0924\,\frac{T^2}{p}\,\frac{\partial Z}{S} - 0{,}0342, \tag{8.66}$$

где T и p — температура и давление воздуха в начальной или конечных точках визирного луча.

Практические испытания данной методики показали, что формула (8.66) не дает даже правильного знака при $\partial T/\partial H$ со всеми вытекающими отсюда последствиями. Кроме того, исходная формула (8.65) по определению является некорректной, так как соответствует случаю, когда на всем пути визирного луча длиной в несколько километров вертикальные гра-

диенты температуры равны постоянной величине, т. е. $\partial T/\partial H = \text{const}$, что в приземном слое атмосферы возможно только при $\partial T/\partial H = 0$; в общем случае $\partial T/\partial H \neq \text{const}$.

Общим недостатком формул Куккамяки и Островского является то, что величины $\operatorname{tg}\gamma$ и Σ определяются по топографическим картам и в действительности они характеризуют наклоны к горизонту не изотермических поверхностей, как это необходимо, а наклоны к горизонту отдельных участков земной поверхности. Поэтому формулы (8.63) и (8.65) могут дать совершенно неверные результаты даже при очевидном наличии боковой рефракции, когда, например, визирный луч проходит вдоль берега большого водоема или крупной реки над совершенно ровной местностью, без наклонов, т. е. при $\operatorname{tg}\gamma = 0$. Так как температура воздуха над водоемом отличается от температуры над сушей (днем ниже, а ночью выше), то изотермические поверхности будут наклонены к горизонту в направлении перпендикуляра к береговой линии, а визирный луч изогнется в плоскости горизонта выпуклостью в сторону меньшей плотности воздуха (более высокой температуры). Наличие боковой рефракции в данном случае является очевидным, однако, по топографической карте найдем что в данном случае наклоны земной поверхности равны нулю ($\operatorname{tg}\gamma = 0$) и поэтому согласно формулам (8.63) и (8.65) влияние боковой рефракции также равно нулю, что противоречит действительности. Следует обратить внимание также и на то, что не зная уклонений отвесных линий на конечных точках визирного луча и величину превышения квазигеоида между ними, нельзя сколько-нибудь уверенно получить правильное значение теоретического зенитного расстояния, а следовательно, и правильное значение угла ∂Z вертикальной рефракции, входящего в формулу (8.66).

Многочисленные формулы, предложенные исследователями в разное время, предусматривающие использование метеорологических элементов и их градиентов для вычисления поправок за рефракцию, также не приводят к желаемой цели, поскольку градиенты температуры воздуха и наклоны изотермических поверхностей на пути визирного луча в период производства угловых измерений на пункте неизвестны (не измеряются по технико-экономическим соображениям).

Изложенный выше способ компенсации ошибок из-за рефракции (см. § 62) в течение многих лет применяется на Алма-Атинском геодинамическом полигоне при угловых измерениях в геодезической сети с длинами сторон 7—20 км и дает хорошие результаты: средняя квадратическая ошибка измеренного угла, вычисленная по невязкам треугольников, как правило, не превышает 0,3″. При стандартной методике угловых измерений в триангуляции 1—2 классов ошибка измерения углов составляет 0,6—0,8″. Эти результаты говорят сами за себя.

Способ компенсации ошибок из-за рефракции дает хорошие результаты не только при угловых измерениях, но и в случае азимутальных определений на пунктах Лапласа. Об этом свидетельствует, в частности, опыт ЦНИИГАиК. В целях компенсации ошибок из-за рефракции программу определений астрономического азимута на пукте Лапласа делят поровну на две части по 12 приемов в каждой. Одну часть программы наблюдений выполняют вечером до захода Солнца, а вторую — утром после восхода Солнца. В обоих случаях приемы наблюдений распределяют симметрично во времени относительно соответствующего момента изотермии воздуха (в целом для всех дней наблюдений на пункте). Моменты вечерней $t_0^в$ и утренней $t_0^у$ изотермии находят по приближенным формулам (8.48).

Из всех приемов наблюдений (при соблюдении допусков) выводят среднее значение азимута. При этом среднее из прямого и обратного значений азимута при повторных его определениях в разные периоды года остается практически неизменным в пределах $\pm 0{,}15''$. В случае несимметричных относительно момента изотермии наблюдений получить такие стабильные и точные результаты измерений не удается.

Определение поправок за рефракцию в триангуляции 2 класса

Способы определения поправок за рефракцию (см. § 63) в отличие от всех известных не требуют измерений градиентов температуры воздуха на пути визирного луча и могут применяться в разнообразных физико-географических районах страны. Это подтверждает производственный опыт. По формуле (8.31) были вычислены поправки за рефракцию в горизонтальные углы на небольших объектах триангуляции 2 класса, находящихся в различных районах страны (см. табл. 15). На всех пунктах горизонтальные направления измерены 15 круговыми приемами по стандартной программе теодолитами типа ТТ-2/6, ОТ-02 и ОТ-02М. На третьем и четвертом объектах лимб теодолита переставлялся не только между приемами, но и между полуприемами (на 90°). В каждом приеме было зафиксировано время измерений с точностью до минуты. По формуле (8.55) для всех пунктов было вычислено время x_0 изотермии воздуха; по формуле $(x_0 - \bar{x})$ — асимметрия времени измерений углов; по формуле (8.32) часовые изменения углов; по формуле (8.31) поправки за рефракцию, и, наконец, по невязкам треугольников средние квадратические ошибки измеренных углов, причем дважды: до и после исправления углов поправками за рефракцию (табл. 16).

Практика показала, что асимметрия времени измерений углов на разных объектах колеблется от 0 до 1,9 ч и в среднем равна 0,4 ч. Поправки за рефракцию изменяются от 0 до

Таблица 16

Показатель	Объект				В целом по объектам
	1	2	3	4	
Вид местности	степи	тайга, болота	полупустыня	горная тайга	
Число треугольников	14	5	38	31	88
Часовые изменения углов $\|k\|$, угл. с/ч	1,61 / 0,53	2,55 / 1,05	2,91 / 0,92	1,12 / 0,36	2,91 / 0,69
Асимметрия времени измерения углов $\Delta x = x_0 - \bar{x}$, ч	0,56 / 0,33	0,54 / 0,31	0,60 / 0,23	1,89 / 0,76	1,89 / 0,40
Поправки за рефракцию $\delta = k(x_0 - \bar{x})$, угл. с.	0,53 / 0,16	0,90 / 0,28	1,58 / 0,18	1,15 / 0,26	1,58 / 0,28
Средняя квадратическая ошибка угла, вычисленная по невязкам треугольников, угл. с:					
без учёта поправок, m	0,48	0,74	0,70	0,82	0,73
с учетом поправок, m_0	0,33	0,53	0,56	0,60	0,56

Примечание. В числителе дробей даны наибольшие по модулю, а в знаменателе средние значения приведенных величин.

1,6″ и в среднем равны 0,3″. После учета поправок за рефракцию средняя квадратическая ошибка измеренного угла (по невязкам 88 треугольников) уменьшилась в среднем в 1,3 раза, а вес измеренного угла увеличился в среднем в 1,7 раза.

Данный способ позволяет выявить и устранить, в первую очередь, наиболее значительные ошибки, обусловленные влиянием боковой рефракции. Эффективность способа тем выше, чем точнее измерения углов в каждом отдельном приеме. Поэтому следует и впредь совершенствовать и повышать точность теодолитов, а процесс угловых измерений максимально автоматизировать.

Определение поправок за рефракцию в астрономические азимуты на пунктах Лапласа

Азимуты на пунктах Лапласа до сих пор определяют, главным образом, ночью, когда влияние боковой рефракции достигает наибольшей величины в течение суток (см. рис. 76). Для того чтобы можно было с точностью порядка 0,2″ вычислить поправки за влияние боковой рефракции по формуле (8.40),

необходимо в процессе наблюдений выполнять ряд легко реализуемых требований [23]. Главными среди них являются следующие: 1) до наступления вечерней изотермии воздуха должно быть выполнено не менее 30 % приемов наблюдений (за все дни работы на астропункте); 2) в каждом отдельном приеме измерений влияние приборных ошибок должно быть сведено к минимуму; при полных ошибках диаметров лимба порядка 1″ необходимы перестановки лимба не только между приемами, но и между полуприемами — на 90°; 3) приемы измерений должны быть более или менее равномерно распределены на всем отрезке времени наблюдений азимута (в целом для всех дней работы на астропункте).

Имеющийся производственный опыт показывает, что при соблюдении этих требований можно получить достаточно хорошие результаты. По приведенной выше методике (см. § 63) были обработаны результаты наблюдений 26 взаимно обратных азимутов, более или менее полно отвечающих данных требованиям. Азимуты определены на пунктах Лапласа по стандартной программе в разных физико-географических районах на территории между широтами 40—64° и долготами 30—160°. Наблюдения выполнены в 1964—1968 гг. астрономическими теодолитами типа АУ-2/10, Вильд Т-4 и др.; в определении азимутов принимали участие 11 опытных астрономов.

Результаты наблюдений были обработаны сначала по общепринятой методике: получены значения α_i и звездное время s_i определений азимута в каждом приеме. Затем звездное время было перевычислено в среднее солнечное t, которое, в свою очередь, было переведено для каждой даты вечеровых наблюдений в условную систему отсчета

$$x = t - t_{\text{зах}}$$

относительно момента захода Солнца. Для каждого азимута были составлены сводки результатов измерений (см. табл. 14) значений α_i и времени x_i наблюдений азимута в приемах.

Для прямых и обратных азимутов по формуле

$$x_0 = -x_0' + \varepsilon_m' + \varepsilon_h'$$

было определено время наступления изотермии воздуха на высоте визирного луча. Затем каждый азимут по формуле (8.37) был редуцирован на момент изотермии, когда влияние боковой рефракции равно нулю. Поправка за рефракцию к среднему из приемов значению азимута находилась дважды: по формуле (8.40) и как разность $\delta = \alpha_0 - \alpha$ (табл. 17).

Средняя квадратическая ошибка определения азимутов была получена по расхождениям d (d_0) взаимно обратных ази-

Таблица 17

Показатель	Диапазон изменений	Среднее значение
Общее число прямых и обратных азимутов	26	26
Длина стороны, км	7—22	14,7
Число дней определения азимута	3—18	7
Поправка за рефракцию в прямой (обратный) азимут, угл. с.	0,01—2,32	0,64
Поправка за рефракцию к среднему значению из прямого и обратного азимутов, угл. с.	0,12—0,78	0,44
Средняя квадратическая ошибка определения азимута, угл. с:		
без учета поправок, m	1,03	1,03
с учетом поправок, m_0	0,66	0,66

мутов дважды: m — до исправления и m_0 — после исправления азимутов поправками за рефракцию, т. е. по формулам

$$m = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{2n}}; \quad m_0 = \sqrt{\frac{\Sigma d_0^2}{2n}},$$

где n — число значений

$$d\,(d_0) = (\alpha_{12} - \alpha_{21} - 180°) - (\lambda_1 - \lambda_2)\sin\varphi_m.$$

Как следует из приведенных данных (см. табл. 17) при выполнении сравнительно простых требований [26], предъявляемых к программе и результатам определений астрономических азимутов, удается существенно (в среднем в 1,6 раза) повысить точность азимутальных определений на пунктах Лапласа, причем все это только за счет вычисления и учета поправок за рефракцию по формуле (8.40) при ничтожно малых дополнительных затратах труда и средств на это.

§ 67. ВЫГОДНЕЙШЕЕ ВРЕМЯ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ ВЫСОКОТОЧНЫХ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ И АЗИМУТАЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ

Выше отмечалось, что в течение каждых суток изменяются во времени метеорологические элементы и их градиенты, а также прозрачность атмосферы, условия видимости наблюдаемых пунктов, амплитуда колебаний и качество изображений визирных целей и т. п. Все эти факторы влияют как на производительность труда, так и на точность угловых измерений и азимутальных определений. Высокоточные измерения в геодезических сетях выполняют в периоды так называемого «выгоднейшего» времени наблюдений, когда колебания изображений

визирных целей незначительны или вовсе отсутствуют, прозрачность атмосферы и условия видимости наилучшие, а влияние боковой рефракции мало. Такие благоприятные для наблюдений условия имеют место вечером и утром в те часы, когда в слое воздуха на высоте визирного луча наблюдается состояние, наиболее близкое к изотермии. Продолжительность этого благоприятного для наблюдений времени зависит от многих факторов: температуры воздуха, наличия или отсутствия облачности, высоты визирного луча над подстилающей поверхностью и т. д. При безветрии в жаркую ясную погоду летом этот отрезок времени мал, особенно в южных степных районах, где он, как правило, не более 0,5 ч; в горных районах и северных широтах продолжительность периода наблюдений заметно увеличивается, особенно в холодную и ветреную погоду, иногда до нескольких часов.

Время $t_{\text{нач}}$ наступления выгоднейших условий при вечерних наблюдениях можно в первом приближении предвычислить по формуле

$$t_{\text{нач}} = t_{\text{зах}} - 2x_0',$$

определив величины x_0' по графику (см. рис. 80), а время захода Солнца $t_{\text{зах}}$ — по Астрономическому ежегоднику. Заканчивать наблюдения рекомендуется примерно за полчаса до захода Солнца. Как отмечалось выше, наблюдения следует вести на спокойные и слегка колеблющиеся изображения визирных целей, когда их случайные колебания не превышают $2''$.

Следует отметить, что утренний период «выгоднейшего» времени наблюдений несравненно короче, чем вечерний, а иногда и вовсе отсутствует. При увеличении облачности, усилении ветра и понижении температуры воздуха этот период заметно увеличивается по сравнению с таковым при безоблачной тихой и жаркой погоде.

В крупных городах наблюдения целесообразно выполнять ранней весной и осенью, когда температурные контрасты в черте города сравнительно малы, а следовательно, невелико и влияние рефракции. В жаркую летнюю погоду при ($T_{\text{ср. сут}} \geqslant \geqslant 20°$) боковая рефракция в суточном ходе переходит через нулевое значение утром примерно через 2 ч после восхода, а вечером — примерно за столько же времени до захода Солнца, изменяя при этом всякий раз знаки на противоположные (см. рис. 75). Для существенного ослабления влияний местных полей рефракции рекомендуется в жаркую погоду летом симметричные измерения углов относительно момента изотермии воздуха начинать не ранее чем через 1 ч после восхода Солнца и продолжать их не более полутора часов (при хорошей видимости); вечерние же наблюдения следует пре-

кращать не позднее чем за 1 ч до захода Солнца несмотря даже на хорошую видимость наблюдаемых целей.

Выше отмечалось, что астрономические азимуты на пунктах Лапласа определяют обычно ночью, когда влияние боковой рефракции максимально. Для того чтобы практически полностью устранить влияние боковой рефракции, необходимо азимуты земных предметов определять как вечером в течение трех часов перед заходом Солнца, так и утром после восхода Солнца, выполняя наблюдения в обоих случаях симметрично во времени относительно соответствующего момента изотермии воздуха, когда боковая рефракция равна или почти равна нулю.

Глава 9

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ВЫСОКОТОЧНЫХ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 68. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. УРАВНИВАНИЕ СТАНЦИИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ПОРЯДКЕ НАБЛЮДЕНИЙ

Известны разные методы угловых измерений, однако далеко не все из них применяются при наблюдениях в государственной геодезической сети. В целях существенного уменьшения объема вычислительных работ при уравнивании геодезической сети и получения координат пунктов с возможно большей точностью, результаты угловых измерений в государственной геодезической сети должны быть, во-первых, представлены в виде одного ряда равноточных направлений, имеющих на всех пунктах один и тот же вес; во-вторых, получены с возможно большей точностью при наименьших затратах труда и времени на измерения и вычисления.

Решение первой задачи связано с разработкой и применением наиболее совершенных способов (программ) угловых измерений; решение второй задачи сводится к наиболее полному ослаблению в процессе наблюдений влияния всех источников ошибок измерений, особенно систематических, в том числе личных, приборных, а также из-за внешней среды.

При неравноточности результатов измерений возникает необходимость совместного уравнивания результатов угловых измерений за все условия, возникающие на каждом отдельном пункте, и все геометрические условия, возникающие в геодезической сети, причем с учетом весов непосредственно измеренных величин. В этом случае даже в небольших сетях возникает огромное число уравнений поправок, которые необходимо

решать совместно; в этом случае задача уравнивания становится сложной и неоправданно трудоемкой. Однако, если результаты измерений и уравнивания углов на станции представлены в виде одного ряда направлений, имеющих все один и тот же вес, объем уравнительных вычислений существенно уменьшается, а сами вычисления несравненно упрощаются. Кроме того, углы, образованные комбинацией любой пары направлений, имеют в этом случае один и тот же вес, равный половине веса угла. Такой ряд направлений имеет то существенное достоинство, отмечал Ф. Н. Красовский, что может при уравнивании сети рассматриваться как ряд непосредственно измеренных направлений, в которые и определяют поправки. Благодаря этому уравнивание направлений на станциях отделяется от уравнивания сети в целом, в результате решение последней задачи, сохраняя полную строгость, чрезвычайно упрощается. В итоге получаются те же самые результаты, что и при совместном уравнивании сети за условия станций и геометрические условия, а объем уравнительных вычислений существенно сокращается [14].

Поэтому требование представления результатов угловых измерений на каждой станции в виде одного ряда направлений с одинаковыми весами имеет принципиальное значение. Для того чтобы выяснить условия, при которых результат измерений и уравнивания станции может быть представлен в виде одного ряда направлений с одинаковыми весами, необходимо рассмотреть сначала общий случай уравнивания станции при произвольном порядке наблюдений.

Условимся называть в дальнейшем совокупность направлений, измеренных в одной группе каждое с определенным весом p_j, группой направлений, а последовательность всех r таких групп, отвечающих определенным требованиям, программой наблюдений, определяющей сущность способа угловых измерений. Каждая отдельная группа может состоять из разного числа направлений, изменяющихся от 2 до n. Группа из двух направлений ($k=2$) представляет собой отдельно измеряемый угол β, образованный парой направлений j и l, т. е. $\beta=j\cdot l=l-j$.

Пусть на пункте направления с номерами 1, 2, ..., n измерены[1] в одной или в r разных группах, содержащих каждая одинаковое или разное число k направлений ($2\leqslant k_i\leqslant n$). Для любой i-й группы измеренных направлений примем следующие обозначения: j — номера направлений ($j=1, 2, 3, \ldots, n$); a_j — значения направлений ($a_j=a_1, a_2, \ldots, a_n$); δ_j — погреш-

[1] Измерение направления состоит в точном наведении трубы теодолита на наблюдаемую цель и фиксации отсчета по лимбу при произвольной или заданной его ориентировке.

ности направлений ($\delta_j=\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$); p_j — веса измеренных направлений ($p_j=p_1, p_2, \ldots, p_n$); σ_i — сумма весов направлений ($\sigma_i=p_1+p_2+\ldots+p_n$); Σ_i — сумма произведений ($\Sigma_i=p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_na_n$).

В каждую i-ю группу могут входить как все направления, так и их часть k_i ($2\leqslant k_i\leqslant n$). Если в i-й группе измерены не все n направления, а только их часть $k_i<n$, то будем полагать, что остальные направления измерены в этой группе с весом, равным нулю ($p_j=0$).

В качестве неизвестных, определяющих положение каждого последующего направления $j=2, 3, \ldots, n$ относительно начального ($j=1$), примем углы

$$x_1=[1.2],\quad x_2=[1.3],\ \ldots,\ x_{n-1}=[1.n].$$

Уравненные значения этих углов будем определять под условием $\Sigma p\delta^2=\min$ из совместной обработки результатов измерений, полученных во всех r группах программы наблюдений.

Допустим, что при идеально точной установке алидады на отсчет по лимбу, равный нулю, коллимационная плоскость трубы теодолита составляет с вертикалом начального направления малый угол ε. Тогда при идеально точном отсчитывании и идеально точном визировании на начальный пункт получим $a_i=\varepsilon_i$. С учетом этого и указанными выше обозначениями напишем для измеренных направлений любой i-й группы следующие уравнения поправок:

$$\begin{aligned}
&\delta_1=\varepsilon_i-a_1=0 && \text{с весом } p_1;\\
&\delta_2=\varepsilon_i+x_1-a_2 && \text{то же } p_2;\\
&\delta_3=\varepsilon_i+x_2-a_3 && \text{» » } p_3;\\
&\delta_4=\varepsilon_i+x_3-a_4 && \text{» » } p_4;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_n=\varepsilon_i+x_{n-1}-a_n && \text{» » } p_n,
\end{aligned}\qquad (9.1)$$

где ε_i — погрешность начального направления в группе. Веса неизмеренных направлений в группе принимают равными нулю.

От уравнений вида (9.1), составленных для направлений всех групп ($i=1, 2, \ldots, r$), перейдем к системе редуцированных нормальных уравнений, в которых путем преобразования коэффициентов и свободных членов исключены погрешности ε_i начальных направлений всех групп. Редуцированные нормальные уравнения запишем в матричной форме

$$NX=L, \qquad (9.2)$$

где

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot\ \cdot \\ x_{n-1} \end{Vmatrix}; \tag{9.3}$$

$$L = \begin{Vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot\ \cdot \\ L_{n-1} \end{Vmatrix}; \tag{9.4}$$

$$N = \begin{Vmatrix} \sum\limits_{j^*=1}^{n} \left[\frac{p_2 p_{j^*}}{\sigma}\right] & -\left[\frac{p_2 p_3}{\sigma}\right] & -\left[\frac{p_2 p_4}{\sigma}\right] & \cdots & -\left[\frac{p_2 p_n}{\sigma}\right] \\ -\left[\frac{p_3 p_2}{\sigma}\right] & \sum\limits_{j^*=1}^{n} \left[\frac{p_3 p_{j^*}}{\sigma}\right] & -\left[\frac{p_3 p_4}{\sigma}\right] & \cdots & -\left[\frac{p_3 p_n}{\sigma}\right] \\ -\left[\frac{p_4 p_2}{\sigma}\right] & -\left[\frac{p_4 p_3}{\sigma}\right] & \sum\limits_{j^*=1}^{n} \left[\frac{p_4 p_{j^*}}{\sigma}\right] & \cdots & -\left[\frac{p_4 p_n}{\sigma}\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\left[\frac{p_n p_2}{\sigma}\right] & -\left[\frac{p_n p_3}{\sigma}\right] & -\left[\frac{p_n p_4}{\sigma}\right] & \cdots & \sum\limits_{j^*=1}^{n} \left[\frac{p_n p_{j^*}}{\sigma}\right] \end{Vmatrix}, \tag{9.5}$$

где j^* — номера всех направлений 1, 2, ..., n кроме того направления, к которому относится конкретная строка матрицы (9.5).

Свободные члены L_1 вычисляют по формулам

$$L_1 = [p_2 a_2] - \left[\frac{p_2}{\sigma}\Sigma\right]; \quad L_3 = [p_4 a_4] - \left[\frac{p_4}{\sigma}\Sigma\right];$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{9.6}$$

$$L_2 = [p_3 a_3] - \left[\frac{p_3}{\sigma}\Sigma\right]; \quad L_{n-1} = [p_n a_n) - \left[\frac{p_n}{\sigma}\Sigma\right].$$

Решив нормальные уравнения (9.2), найдем вектор X уравненных углов $x=[1.j]$, отсчитываемых от начального (первого) направления ($j=2, 3, \ldots, n$),

$$X=QL, \tag{9.7}$$

где $Q=N^{-1}$ — обратная матрица коэффициентов нормальных уравнений. Обратный вес $1/P_{1.j}$ уравненных углов $x=[1.j]$ равен соответствующим диагональным элементам весовой матрицы Q.

§ 69. УСЛОВИЯ ПОЛУЧЕНИЯ РАВНОТОЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ НА ПУНКТЕ

При произвольном порядке угловых измерений на станции иногда трудно установить связи между весами $P_{j.l}$ уравненных углов $[j.l]$ и весами P_j (P_l) уравненных направлений j (l) = $=1, 2, \ldots, n$. Во многих случаях эта задача вообще не имеет решения.

На практике уравненные направления на станции необходимо получать с заранее заданными весами: разными $P_j \neq P_l$ либо одинаковыми $P_j=P_l=\text{const}$ ($j, l=1, 2, \ldots, n$).

В том случае, когда данная пара направлений j и l, образующих любой угол $j.l$, измерена совместно в одной или в нескольких группах программы наблюдений, вес p_{jl} измерения этого угла во всех группах вычисляется по формуле

$$p_{j.l}=\left[\frac{p_j p_l}{\sigma}\right] (j \neq l = 1, 2, \ldots, n), \tag{9.8}$$

где $\sigma_i=(p_1+p_2+\ldots+p_k)_i$ — сумма всех измеренных направлений (в том числе j и l) в i-й группе; число k_i направлений в каждой группе может изменяться в пределах: $2 \leqslant k \leqslant n$, где n — число направлений на пункте.

Можно доказать, что для получения уравненных на станции направлений j (l) с конкретными значениями весов P_j (P_l) следует использовать такую программу угловых измерений, чтобы выполнялось равенство

$$p_{j.l}=\frac{P_j P_l}{[P]} (j \neq l = 1, 2, \ldots, n), \tag{9.9}$$

причем для всех углов

$$\begin{array}{llll} 1.2 & 1.3 & 1.4 \ldots & 1.n \\ & 2.3 & 2.4 \ldots & 2.n \\ & & 3.4 \ldots & 3.n, \\ & & \ldots\ldots & \\ & & n-1 . & n \end{array} \tag{9.9а}$$

число которых r равно числу сочетаний из n по 2, т. е. $r=n\,(n-1)/2$; $[P]=P_1+P_2+\ldots+P_n$.

Выше отмечалось, что результаты угловых измерений на каждом пункте триангуляции должны быть представлены в виде одного ряда равноточных направлений, имеющих один и тот же заданный вес $P_j=\text{const}$. Приняв в равенстве (9.9) $P_1=P_2=\ldots=P_n=\text{const}$, получим

$$p_{j.\,l}=\left[\frac{p_j p_l}{\sigma}\right]=\frac{P}{n}=\text{const}\quad (j\neq l=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{9.10}$$

Равенства (9.10) должны выполняться для всех углов (9.9a), образующихся при попарном сочетании всех направлений на пункте. При соблюдении условий (9.10) уравненные на станции направления получат один и тот же вес, равный

$$P=np_{j.\,l}=\text{const}. \tag{9.11}$$

Если программа наблюдений такова, что в каждой i-й группе направления 1, 2, ..., n измеряются с одинаковыми весами

$$(p_1=p_2=\ldots=p_n)_i=p_i=\text{const}, \tag{9.12}$$

изменяющимися только при переходе от одной группы направлений к другой, то равенство (9.10) примет вид

$$p_{j.\,l}=\left[\frac{p_i}{k_i}\right]_{j.\,l}=\frac{P}{n}=\text{const}\quad (j\neq l=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{9.13}$$

Если каждый угол $j.\,l$ измеряется в строго одинаковом числе t разных групп направлений ($t=\text{const}$), то должно соблюдаться требование

$$\left(\frac{p_i}{k_i}\right)_{j.\,l}=\text{const} \tag{9.14}$$

и поэтому вместо равенства (9.13) получим

$$p_{j.\,l}=t\left(\frac{p_i}{k_i}\right)_{j.\,l}=\frac{P}{n}=\text{const}\quad (j\neq l=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{9.15}$$

Таким образом, результаты наблюдений на пункте могут быть представлены в виде одного ряда равноточных направлений только в том случае, если, во-первых, программа наблюдений позволяет получить из измерений все без исключения углы (9.9, a) и, во-вторых, каждый из этих углов $j.\,l$ будет измерен со строго одинаковым весом $p_{j.\,l}=P/n=\text{const}$, где P — заданный вес уравненных направлений, n — число направлений на пункте.

При выполнении условий (9.15) уравненные на станции углы $[j.\,l]$ вычисляют по формулам

$$[1.2] = \frac{2\cdot 1.2 + (1.3 - 1.2) + \ldots + (1.n - 2.n)}{n};$$

$$[1.3] = \frac{2\cdot 1.3 + (1.2 + 2.3) + \ldots + (1.n - 3.n)}{n}; \qquad (9.16)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[1.n] = \frac{2\cdot 1.n + (1.2 + 2.n) + \ldots + (1.n - 1 + n - 1.n)}{n},$$

где каждый угол $j.\,l$, измеренный в строго одинаковом числе t разных групп направлений ($t=1, 2, \ldots$), находится как среднее, т. е.

$$j.\,l = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}(j.\,l)_i, \qquad (9.17)$$

где $(j.\,l)_i$ — величина угла, полученная из измерений в i-й группе направлений. Любые другие уравненные углы $[j.\,l]$ могут быть получены как разности $[j.\,l]=[1.\,l]-[1.\,j]$ или вычислены по формулам вида (9.16).

При соблюдении условий (9.15) средняя квадратическая ошибка единицы веса, получаемая при уравнивании угловых измерений на станции, равна

$$\mu = \sqrt{\frac{\frac{p_i}{k_i}\left[v^2_{j.\,l}\right]}{\sum_{i=1}^{r}(k_i - 1) - (n - 1)}}. \qquad (9.18)$$

Среднюю квадратическую ошибку уравненного направления вычисляют по формуле

$$M_н = \sqrt{\frac{\left[v^2_{j.\,l}\right]}{\left[\sum_{i=1}^{r}(k_i - 1) - (n - 1)\right]nt}}. \qquad (9.19)$$

Если каждая группа состоит из одинакового числа направлений ($k_i = k = \text{const}$), формулы для μ и $M_н$ примут более простой вид

$$\mu = \sqrt{\frac{p\left[v^2_{j.\,l}\right]}{(n-1)(nt-k)}}; \qquad (9.20)$$

$$M_н = \sqrt{\frac{k\left[v^2_{j.\,l}\right]}{nt(n-1)(nt-k)}}. \qquad (9.21)$$

В формулах (9.18—9.21) разности $v_{j.l} = (j.1)_i - [j.l]$ между измеренными и уравненными величинами вычисляют для всех углов (9.9 *а*), образующихся при разложении всех групп направлений на всевозможные угловые комбинации; например, в группе из трех направлений 1.2.3 вычисляют все три угла 1.2; 1.3 и 2.3 и для каждого из них находят разности v_{12}, v_{13} и v_{23}.

Основные принципы высокоточных измерений горизонтальных направлений и углов

Для получения равноточных направлений на каждом пункте и достижения наиболее высокой точности результатов измерений принято высокоточные измерения каждого направления и каждого угла выполнять по строго одинаковой, наиболее совершенной методике и в то время суток, когда влияние внешней среды на результаты измерений минимально и относительно стабильно, т. е. в периоды «выгоднейшего» времени наблюдений.

Измерения на пункте следует организовывать с учетом следующих требований:

1) каждое направление должно измеряться на разных диаметрах лимба, равномерно распределенных по всей окружности;

2) в каждом полуприеме должно быть обеспечено полное единообразие всех измерительных операций по каждому наблюдаемому направлению;

3) должна быть достигнута полная симметрия в расположении одних и тех же блоков теодолита относительно каждого наблюдаемого направления;

4) направления в каждом приеме должны измеряться симметрично во времени относительно среднего для приема времени наблюдений;

5) все направления и углы на каждом пункте должны быть измерены симметрично относительно момента изотермии воздуха (как при вечерних, так и при утренних наблюдениях).

Для высокоточных угловых измерений в геодезических сетях повышенной точности необходимо применять такие методы, которые позволяют: получать результаты измерений с наивысшей точностью; представлять результаты измерений на станции в виде одного ряда равноточных направлений с весами, по возможности одинаковыми на всех пунктах сети; свести к минимуму затраты труда и времени на измерения и вычисления на пункте.

§ 70. СПОСОБ КРУГОВЫХ ПРИЕМОВ

Наиболее простым способом угловых измерений, позволяющим представить результаты наблюдений на пункте в виде одного ряда равноточных направлений, является способ измерения направлений. Суть этого способа состоит в следующем. При неподвижном лимбе вращают алидаду теодолита по ходу часовой стрелки и последовательно наводят зрительную трубу на первый, второй, третий и т. д., и наконец, на последний наблюдаемый пункт; при этом каждый раз производят отсчеты по горизонтальному кругу. Данный комплекс измерений составляет первый полуприем. Затем трубу переводят через зенит и, вращая алидаду против часовой стрелки, наводят трубу на те же пункты, но в обратной последовательности: на последний пункт, на предпоследний и т. д., и наконец, на первый, т. е. выполняют второй полуприем. Два полуприема составляют один прием измерений, число которых устанавливается в зависимости от требуемого веса уравненных направлений.

Если в конце каждого полуприема трубу повторно наводят на начальное направление и снова берут отсчеты по лимбу, т. е. производят замыкание горизонта, то такой способ измерения направлений называют способом круговых приемов.

Способ круговых приемов был предложен в 1816 г. выдающимся русским геодезистом и астрономом академиком В. Я. Струве. Способ Струве получил широкое распространение почти во всех странах. В СССР он применяется при построении геодезических сетей 2—4 классов, а также сетей более низкой точности. В США его используют даже в триангуляции 1 класса, так как способ круговых приемов экономически наиболее эффективен при угловых измерениях.

Программа и порядок наблюдений на пункте триангуляции. Бригада выполняет сначала комплекс подготовительных работ, затем производит осмотр геодезического знака, а при необходимости выполняет мелкий ремонт; откапывает центр пункта до марки с меткой, к которой относят результаты угловых измерений; поднимает на геодезический сигнал теодолит и необходимое для работы снаряжение; устанавливает «верховую» палатку или заменяющий ее брезент для защиты теодолита от воздействия солнечных лучей и ветра. Наблюдатель в результате тщательного осмотра геодезического знака должен убедиться в устойчивости и прочности столика сигнала для установки теодолита и в том, что внутренняя пирамида сигнала, несущая столик, нигде не соприкасается ни с полом площадки для наблюдателя, ни с лестницей. При обнаружении недостатков наблюдатель обязан их устранить. В центре сто-

лика намечают точку и устанавливают над ней теодолит. Если в комплекте теодолита имеется центрировочная плита для обеспечения большей устойчивости, то сначала над этой точкой устанавливают плиту, а затем теодолит скрепляют с ней.

Прежде чем приступить к наблюдениям, необходимо с помощью теодолита и в соответствии со схемой геодезической сети опознать на местности все подлежащие наблюдениям геодезические пункты и при наведении трубы записать отсчеты по горизонтальному и вертикальному кругам с точностью до 1′. Затем следует составить таблицу установок лимба, которая по существу является программой работы при угловых измерениях.

Теодолит устанавливают на столик сигнала не менее чем за 40 мин до начала измерений, а затем тщательно выверяют его. При наступлении хорошей видимости, спокойных или слегка колеблющихся (в пределах $\pm 2''$) изображений наблюдаемых целей приступают к измерению горизонтальных направлений.

При измерении направлений круговыми приемами соблюдают следующие правила:

1. В первом приеме алидаду вращают только по ходу часовой стрелки, а во втором, после перевода трубы через зенит,— только в обратном направлении.

2. В первом полуприеме перекрестие сетки нитей зрительной трубы немного переводят через предмет, а во втором — немного не доводят до него. Это делают для того, чтобы наведение зрительной трубы на цель всегда осуществлялось при вращении наводящего винта алидады только по ходу часовой стрелки (на ввинчивание).

3. Перед началом каждого полуприема выполняют несколько вращений алидады в направлении ее движения в данном полуприеме.

4. При наблюдениях теодолитами с поверительной трубой порядок измерений дополняется следующим. Каждое наблюдение состоит из трех наведений биссектора окулярного микрометра главной трубы на предмет и одновременных с ними трех наведений окулярного микрометра поверительной трубы на марку, установленную на расстоянии порядка 1 км, или на заменяющий ее хорошо видимый и близко расположенный геодезический знак.

5. Для того чтобы обеспечить независимость измерений направлений в разных приемах и одновременно ослабить влияние ошибок диаметров лимба на средний результат, лимб между приемами переставляют на угол

$$\delta = (180°/m) + i,$$

где m — число приемов, i — цена деления лимба.

На пунктах 2 класса направления измеряют 12—15-ю круговыми приемами, на пунктах 3 класса — 9, а на пунктах 4 класса — 6.

В измеренные направления вводят поправки: за незамыкание горизонта, за рен (при $r>0{,}5''$), за наклон вертикальной оси теодолита (при углах наклона визирных лучей 1° и более). Контроль результатов угловых измерений осуществляют в каждом полуприеме по расхождениям результатов наблюдений на начальное направление в начале и конце полуприема, а в приемах — по колебаниям направлений в отдельных приемах, отсчитываемых от начального направления, приведенного к нулю. Так, например, в триангуляции 2—4 классов расхождения между результатами наблюдений на начальное направление в начале и конце полуприема не должны превышать 5 и 6″ соответственно для теодолитов типа Т05 и Т1, а колебания направлений в отдельных приемах, приведенных к общему нулю, соответственно 4 и 5″.

Уравнивание результатов измерений на станции. Оценка точности. В каждом приеме вычисляют сначала средние из двух полуприемов значения измеренных направлений; затем распределяют с обратным знаком невязки за «незамыкание горизонта» во все направления пропорционально их номерам, и наконец, все направления приводят к начальному, приняв его равным 0°00′00,00″. Уравненные на станции направления, точнее углы $[1.j]$, отсчитываемые от начального, находят как среднее из m приемов измерений

$$[1.j] = \frac{1}{m} \Sigma\, 1.j.$$

Уравненные углы $[j.l]$, образованные любой другой парой направлений j и l, находят как разности уравненных направлений, точнее углов, отсчитываемых от начального.

$$[j.l] = [1.l] - [1.j].$$

Вес P уравненного направления при $p_i=m$, $k_i=n$ и $t=1$ в соответствии с формулой (9.15) равен

$$P = nt\frac{p_i}{k_i} = m,$$

т. е. при измерении направлений круговыми приемами вес уравненного направления принимают равным числу приемов измерений.

Среднюю квадратическую ошибку единицы веса вычисляют по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{n\Sigma\left[v_{1.j}^2\right] - \Sigma\left[v_{1.j}\right]^2}{n(n-1)(m-1)}}, \qquad (9.22)$$

где $v_{1.j}=1.j-[1.j]$ — уклонения измеренных в приемах направлений от их средних значений из m приемов; n — число направлений.

На практике вместо точной формулы (9.22) чаще используют приближенную формулу Петерса

$$\mu=\frac{1{,}25}{\sqrt{m(m-1)}}\frac{\Sigma|v_{1.j}|}{n}=k\frac{\Sigma|v_{1.j}|}{n},$$

где $\Sigma|v_{1.j}|$ — сумма абсолютных величин уклонений измеренных в приемах направлений от их средних значений, вычисленная по всем направлениям и всем приемам; m — число приемов; n — число направлений. Значения k при разных m следующие:

m	6	9	12	15
k	0,23	0,15	0,11	0,08

Средняя квадратическая ошибка уравненных направлений (средняя величина ее на станции) равна

$$M_{н}=\frac{\mu}{\sqrt{m}},$$

где m — число приемов измерений; средняя квадратическая ошибка уравненного угла составляет $M_{у}=M_{н}\sqrt{2}$.

Средняя квадратическая ошибка каждого уравненного направления может быть вычислена, если определить все углы $j.l$, образующиеся при попарном сочетании всех измеренных n направлений (число таких углов $r=n(n-1)/2$), а затем найти отклонения в приемах $v_{j.l}=j.l-[j.l]$ измеренных углов $j.l$ от их уравненных (средних из приемов) значений $[j.l]$.

Пусть q номер направления, для которого следует найти среднюю квадратическую ошибку. Все углы $j.l$ разделим на две подгруппы: одну подгруппу составят все те углы, которые образованы с участием направления с номером q, и обозначим их через $q.l$; во вторую подгруппу войдут все остальные углы, не содержащие направления с номером q; их обозначим через $i.k$.

Приняв такие обозначения, найдем среднюю квадратическую ошибку любого уравненного направления с номером q по формуле, вывод которой приводить не будем

$$M_{q}=\sqrt{\frac{(n-2)\left[v_{q.l}^{2}\right]-\left[v_{i.k}^{2}\right]}{m(m-1)(n-1)(n-2)}}, \qquad (9.23)$$

где m — число приемов, n — число направлений $v_{q.l}=q.l-[q.l]$; $v_{i.k}=i.k-[i.k]$.

Математическая обработка угловых измерений на станции. Составляют таблицу результатов измерений в приемах (табл. 18); затем для каждого направления, приведенного к начальному, т. е. для углов $1.j$ выводят среднее, которое и принимают за уравненное направление, точнее, уравненный угол $[1.j]$. Далее приступают к оценке точности. Для углов $1.j$ вычисляют в приемах отклонения $v_{1.j}=1.j-[1.j]$ от среднего, а для всех других углов $j.l=1.l-1.j$ отклонения $v_{j.l}$ по формуле $v_{j.l}=v_{1.l}-v_{1.j}$, а также другие величины, необходимые для оценки точности по приведенным выше формулам.

В итоге находят ошибку единицы веса

$$\mu=\sqrt{\frac{n\Sigma\left[v_{1.j}^2\right]-\Sigma\left[v_{1.j}\right]^2}{n\,(n-1)\,(m-1)}}=\sqrt{\frac{4\cdot 78{,}50-146{,}50}{4\cdot 3\cdot 11}}=1{,}13'',$$

а также среднюю для пункта величину средней квадратической ошибки уравненного направления

$$M_{\text{н}}=\frac{\mu}{\sqrt{m}}=\frac{1{,}13}{\sqrt{12}}=0{,}33''.$$

Наконец, составляют таблицу уравненных направлений и вычисляют по формуле (9.23) средние квадратические ошибки M_q каждого из них (табл. 19).

Правильность вычисления ошибок M_q и ошибки $M_{\text{н}}$ проверяют, используя очевидное равенство

$$\sum_{q=1}^{n} M_q^2=nM_{\text{н}}^2.$$

При вычислении M_q по формуле (9.23) $\Sigma M_q^2=0{,}42$, а при вычислении μ и $M_{\text{н}}$ с точностью до $0{,}001''$ получим $nM_{\text{н}}^2=0{,}42$, что и подтверждает достоверность полученных M_q и $M_{\text{н}}$.

На 15 пунктах триангуляции 2 класса с пятью направлениями на каждом были вычислены по формуле (9.23) средние квадратические ошибки M_q. Измерения направлений на всех пунктах выполнены 15-ю круговыми приемами. Средняя для всех 15 пунктов величина средней квадратической ошибки $M_{q\,(\text{ср})}$ для каждого направления оказалась равной

Направление	1	2	3	4	5
M_q	0,19	0,26	0,27	0,31	0,28

Начальное направление на всех пунктах равно нулю. Этот пример подтверждает, что способ круговых приемов действительно обеспечивает получение практически равноточных направлений. Первое (начальное) направление получается не-

Таблица 18

Результаты измерений и уравнивания направлений на пункте триангуляции 2 класса (начальное направление равно 0°00′00,00″)

Номер приема	1.2		1.3		1.4		$v_{2.3}$	$v_{2.4}$	$v_{3.4}$	$[v_{1.j}]$
	63°15′	$v_{1.2}$	109°47′	$v_{1.3}$	186°34′	$v_{1.4}$				
1	44,0″	—1,32″	24,1″	—0,12″	47,2″	—1,86″	+1,20″	—0,54″	—1,74″	—3,30″
2	45,8	+0,48	26,7	+2,48	51,5	+2,44	+2,00	+1,96	—0,04	+5,40
3	44,3	—1,02	22,4	—1,82	50,1	+1,04	—0,80	+2,06	+2,86	—1,80
4	43,0	—2,32	24,8	+0,58	45,9	—3,16	+2,90	—0,84	—3,74	—4,90
5	46,7	+1,38	27,3	+3,08	50,8	+1,74	+1,70	+0,36	—1,34	+6,20
6	44,0	—1,32	22,5	—1,72	48,2	—0,86	—0,40	+0,46	+0,86	—3,90
7	44,6	—0,72	23,9	—0,32	49,4	+0,34	+0,40	+1,06	+0,66	—0,70
8	46,0	+0,68	23,0	—1,22	48,2	—0,86	—1,90	—1,54	+0,36	—1,40
9	46,4	+1,08	23,3	—0,92	49,7	+0,64	—2,00	—0,44	+1,56	+0,80
10	47,8	+2,48	25,4	+1,18	49,9	+0,84	—1,30	—1,64	—0,34	+4,50
11	44,9	—0,42	24,0	—0,22	50,2	+1,14	+0,20	+1,56	+1,36	+0,50
12	46,4	+1,08	23,2	—1,02	47,6	—1,46	—2,10	—2,54	—0,44	—1,40
Среднее	45,32		24,22		49,06					
Контроль	Σv	+0,06		—0,04		—0,02	—0,10	—0,08	+0,02	
	$[v_{j.j}^2]$	21,68		27,18		29,65	31,45	24,69	32,89	

$\Sigma \left| v_{1.j} \right| = 45{,}36$; $\Sigma [v_{1.j}^2] = 78{,}50$; $\Sigma [v_{1.j}]^2 = 146{,}50$.

Таблица 19

Направление q	Уравненное направление	$[v^2_{q.\,l}]$	$[v^2_{l.\,k}]$	M_q
1	0°00′00,00″	78,51	89,03	0,29″
2	63 15 45,32	77,82	89,72	0,29
3	109 47 24,22	91,92	76,02	0,37
4	186 34 49,06	87,23	80,31	0,34

$\Sigma M_q^2 = 0{,}42$

сколько точнее, в среднем в $\sqrt{2}$ раз, чем остальные. Это объясняется тем, что при замыкании горизонта на первое направление производится в два раза больше наведений трубы теодолита чем на остальные.

Способ круговых приемов имеет следующие важные достоинства.

1. Очень простая программа угловых измерений, позволяющая получить уравненные направления с одинаковыми весами.

2. Сравнительно большое число приемов непосредственных измерений каждого направления ($m = 12 \div 15$ на пунктах триангуляции 2 класса); благодаря этому получают надежные результаты измерений и одновременно обнаруживают и устраняют допущенные погрешности при измерении того или иного направления.

3. Существенное ослабление влияния систематических погрешностей диаметров лимба на средние из приемов результаты измерений.

4. Достижение высоких технико-экономических показателей в случае хорошей одновременной видимости по всем наблюдаемым направлениям.

Способу присущи и недостатки.

1. Сравнительно большая продолжительность одного приема наблюдений при большом числе направлений на пункте (~ 1 мин. на одно направление). Чем дольше длится прием наблюдений, тем в большей мере ощущается влияние погрешностей, увеличивающихся пропорционально времени (например, из-за кручения сигнала и т. п.).

2. Требование одновременной и хорошей видимости по всем наблюдаемым направлениям, что не всегда выполнимо. Видимость по отдельным направлениям может ухудшаться во время наблюдений, например, из-за дождя в той или иной части горизонта, появления облачности, вследствие чего наблюдаемый геодезический знак, проектирующийся на темный фон леса или земли, становится невидимым и т. п. Направления, по которым видимость во время наблюдений неудовлетвори-

тельна, пропускают, а затем позднее доизмеряют их с одним или двумя смежными и начальным направлениями. Это приводит к нарушению программы угловых измерений и неравноточности уравненных направлений, а также к снижению производительности труда при наблюдениях.

3. На пунктах с большим числом направлений направления разбивают на две и даже три группы, имеющие общие связующие направления, и затем измерения в каждой группе выполняют отдельно. В этом случае нарушается равноточность уравненных направлений, увеличивается объем и время наблюдений на пункте.

4. Начальное направление на пункте имеет несколько большую точность, чем все остальные.

Несмотря на отмеченные недостатки, способ круговых приемов как ни один другой широко используется при угловых измерениях в геодезических сетях разной точности, так как при хорошей видимости обеспечивает высокие технико-экономические показатели.

§ 71. СПОСОБ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВ ВО ВСЕХ КОМБИНАЦИЯХ

Данный способ предложил К. Ф. Гаусс, а позднее его усовершенствовал Шрейбер. В прежней геодезической литературе он известен как способ Шрейбера. Суть этого способа состоит в измерении на пункте углов во всех комбинациях, образующихся при всевозможных попарных сочетаниях всех направлений. При n направлениях измеряют следующие углы:

$$\begin{array}{llll} 1.2 & 1.3 & 1.4 \ldots & 1.n \\ & 2.3 & 2.4 \ldots & 2.n \\ & & 3.4 \ldots & 3.n \\ & & \ldots\ldots & \\ & & & n-1\,.\,n \end{array} \qquad (9.24)$$

Число таких углов равно числу сочетаний из n по 2, т. е.

$$r = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}. \qquad (9.25)$$

Например, на пункте с пятью направлениями измеряют 10 углов (рис. 81).

Вес уравненных на станции направлений в соответствии с формулой (9.11) вычисляют по формуле

$$P = mn, \qquad (9.26)$$

где m — число приемов измерений каждого угла, n — число направлений на пункте;

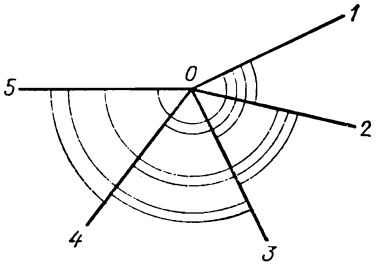


Рис. 81. Схема измерения углов во всех комбинациях на пункте с пятью направлениями

вес уравненного угла равен половине веса уравненного направления

$$P_у = mn/2. \tag{9.27}$$

Для того чтобы все уравненные направления на пунктах одного и того же класса имели один и тот же вес при разном их числе, Шрейбер поставил первое требование, чтобы произведение mn на всех пунктах было равно постоянной величине, т. е. $P=mn=\text{const}$.

Способ применяется в триангуляции и полигонометрии 1 и 2 классов. Вес уравненных направлений $P=mn$ принимают равным:

триангуляция:	
1 класс	35 ÷ 36
2 класс	21 ÷ 25
полигонометрия:	
1 класс	48
2 класс	36

При наблюдениях с высоких сигналов вес уравненных направлений увеличивают на 25—30 %. В триангуляции и полигонометрии 3—4 классов данный способ не применяется из-за существенного увеличения числа измеряемых углов на пункте.

Для того чтобы обеспечить независимость измерений углов и одновременно ослабить влияние ошибок диаметров лимба, Шрейбер сформулировал второе требование: каждое направление необходимо измерять при одном и том же положении лимба только, по возможности, один раз.

Это требование может быть выполнено при надлежащей системе перестановок лимба. При любом произвольном положении лимба можно измерить на независимых диаметрах лимба $n/2$ углов при n четном и $(n—1)/2$ углов при n нечетном. Всего на пункте измеряется $r=n(n—1)/2$ углов. Поэтому чтобы обеспечить независимость измерений каждой такой группы углов, необходимо при переходе от одной группы к другой сделать определенное число перестановок лимба, равное

при n четном

$$\frac{n(n-1)}{2} : \frac{n}{2} = n - 1; \qquad (9.28)$$

при n нечетном

$$\frac{n(n-1)}{2} : \frac{n-1}{2} = n.$$

Поскольку каждый угол должен быть измерен m приемами с перестановкой лимба между приемами на угол $\delta = (180°/m) + i$, то перестановки лимба при переходе от измерений одной группы непримыкающих друг к другу углов к другой должна производиться на угол σ, равный

при n четном

$$\sigma = \frac{\delta}{n-1} + i; \qquad (9.29)$$

при n нечетном

$$\sigma = \frac{\delta}{n} + i.$$

При расчетах углов δ и σ учитывают цену i наименьшего деления лимба, чтобы ослабить влияние короткопериодических ошибок диаметров лимба.

Рассчитаем таблицу установок лимба, например, для $n=4$, $mn=24$, $i=10'$ (табл. 20). Для углов $j.l$, отсчитываемых не от начального ($j=1$) направления (записанных ниже горизонтальной черты), следует перейти от табличных установок лимба к так называемым рабочим. Для этого надо к каждой табличной установке лимба прибавить измеренный с точностью до $1'$ угол $1.j$ между начальным (первым) направлением и левым направлением измеряемого угла $j.l$ ($j \neq 1$). Полученные результаты рекомендуется округлить до числа, кратного цене i деления лимба.

Таблица 20

Угол	Приемы					
	I	II	III	IV	V	VI
1.2	0°00′	30°10′	60°20′	90°30′	120°40′	150°50′
1.3	10 10	40 20	70 30	100 40	130 50	161 00
1.4	20 20	50 30	80 40	110 50	141 00	170 10
2.3	20 20	50 30	80 40	110 50	141 00	170 10
2.4	10 10	40 20	70 30	100 40	130 50	161 00
3.4	0 00	30 10	60 20	90 30	120 40	150 50

Методика измерения отдельного угла. Каждый угол при данной установке лимба измеряют двумя полуприемами. В первом полуприеме измеряют искомый угол, а во втором — дополнение его до 360°. Алидада в обоих полуприемах вращается в одном и том же направлении. При переходе от приема к приему требуется изменять направление вращения алидады на противоположное. Все подлежащие наблюдениям углы должны быть измерены в разных условиях, т. е. в течение вечера (утра) рекомендуется измерить все углы сначала одним приемом, затем эти же углы вторым приемом, третьим и т. д.

При отсутствии видимости на какой-либо пункт не рекомендуется измерять другие углы более чем двумя приемами подряд.

В целях компенсации ошибок из-за рефракции измерения каждого угла как при вечерних, так и при утренних наблюдениях следует выполнять симметрично относительно соответствующего момента изотермии воздуха, когда колебания изображений минимальны, условия видимости наилучшие, а боковая рефракция равна или почти равна нулю.

Уравнивание на станции. Оценка точности. Сначала вычисляют среднюю из m приемов величину каждого угла

$$j.\,l = \frac{1}{m}\,\Sigma\,(j.\,l)_i$$

при соблюдении установленных допусков на расхождения в приемах. Используя средние из приемов значения углов, вычисляют уравненные на станции углы:

$$\begin{aligned}
[1.2] &= \frac{2\cdot 1.2 + (1.3 - 2.3) + \ldots + (1.\,n - 2.\,n)}{n};\\
[1.3] &= \frac{2\cdot 1.3 + (1.2 + 2.3) + \ldots + (1.\,n - 3.\,n)}{n};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[1.n] &= \frac{2\cdot 1.\,n + (1.2 + 2.\,n) + \ldots + (1.\,n - 1 + n - 1.\,n)}{n},
\end{aligned} \tag{9.30}$$

где n — число направлений на пункте.

Из формул (9.30) видно, что любой уравненный угол $[j.l]$ находится как среднее весовое: непосредственно измеренному углу приписывают вес, равный двум, а всем остальным значениям его, получаемым из комбинаций соответствующих пар углов, приписывают вес, равный единице.

Уравненные направления 1, 2, 3, ..., n получают числовые значения: 0°00′00, 00″, [1.2], [1.3], ..., $[1.n]$ соответственно.

Среднюю квадратическую ошибку единицы веса вычисляют по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{2m\Sigma v^2}{(n-1)(n-2)}}, \qquad (9.31)$$

где $v = j.l - [j.l]$ — разности между измеренными (средними из приемов) и уравненными значениями углов; m — число приемов; n — число направлений.

Средняя квадратическая ошибка уравненных направлений равна

$$M_н = \frac{\mu}{\sqrt{mn}} = \sqrt{\frac{2\Sigma v^2}{n(n-1)(n-2)}}, \qquad (9.32)$$

а средняя квадратическая ошибка уравненных углов

$$M_у = \frac{\mu}{\sqrt{mn/2}} = \sqrt{\frac{4\Sigma v^2}{n(n-1)(n-2)}}. \qquad (9.33)$$

Приведем пример обработки угловых измерений на пункте с четырьмя направлениями. Вычисления выполняют следующим образом.

1. Записывают результаты измерений.

Угол	*Среднее из приемов*
1.2	61°18′48,57″
1.3	117 27 18,04
1.4	175 49 02,59
2.3	56 08 28,36
2.4	114 30 13,39
3.4	58 21 45,02

2. Вычисляют уравненные углы (табл. 21).

Таблица 21

1.2	1.3	1.4	2.3	2.4	3.4
48,57″	18,04″	2,59″	28,36″	13,39″	45,02″
48,57	18,04	2,59	28,36	13,39	45,02
49,68	16,93	1,96	29,47	14,02	44,55
49,20	17,57	3,06	28,37	13,38	45,03
Среднее 49,00	17,64	2,55	28,64	13,54	44,90
$v = -0,43$	+0,40	+0,04	−0,28	−0,15	+0,12

$\Sigma v^2 = 0,4618$

Таблица 22

Номер направления	Уравненное направление	Вес направления
1	0°00′00,00″	$n = 4$
2	61 18 49,00	$m = 9$
3	117 27 17,64	$P = mn = 36$
4	175 49 02,55	

3. Составляют сводную таблицу уравненных направлений (табл. 22).

4. Находят среднюю квадратическую ошибку единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{2m\Sigma v^2}{(n-1)(n-2)}} = \sqrt{\frac{18 \cdot 0{,}4618}{3 \cdot 2}} = 1{,}18''.$$

5. Вычисляют среднюю квадратическую ошибку уравненного угла

$$M_y = \frac{\mu}{\sqrt{mn/2}} = \frac{1{,}18}{\sqrt{18}} = 0{,}28''.$$

Способ измерения углов во всех комбинациях имеет следующие достоинства.

1. Результаты уравнивания угловых измерений на станции представляются в виде одного ряда равноточных направлений.

2. Углы можно измерять в любой последовательности, выбирая для наблюдений наиболее благоприятные условия видимости и обеспечивая тем самым хорошую однородность и высокую точность результатов измерений.

3. Благодаря малой продолжительности одного приема (2—4 мин) измерение каждого угла выполняют при достаточно стабильном состоянии геодезического сигнала и внешней среды, вследствие чего точность измерений угла в меньшей степени зависит от кручения сигнала, чем при наблюдениях по способу круговых приемов.

4. Благодаря большому числу перестановок горизонтального круга значительно ослабляется влияние ошибок диаметров лимба на результаты измерений.

Способу присущи также и недостатки.

1. Значительное уменьшение числа m приемов измерения углов с ростом числа n направлений на пунктах. Например, при $mn \approx 24$ имеем

n	3	4	5	6	7	8	9
m	8	6	5	4	3	3	3

При малом числе приемов непосредственного измерения углов снижается точность их средних из приемов значений, а следовательно, и точность уравненных углов.

2. Существенное увеличение числа $N=mr$ измеряемых углов во всех приемах с ростом числа n направлений на пунктах. Например, при $mn\approx 24$ и $r=n(n-1)/2$ получим

n	3	4	5	6	7	8	9
N	24	36	50	60	63	84	108

С увеличением числа направлений объем работы на пункте увеличивается, а точность уравненных углов, наоборот, несколько понижается, так как при малом числе приемов измерений недостаточно полно ослабляется влияние всех видов систематических ошибок — приборных, от внешней среды и личных.

3. Для того чтобы увеличить число приемов измерений каждого угла на пунктах с большим числом направлений ($n=7\div 9$), последние делят на 2—3 группы, образующие условие горизонта, и затем углы каждой группы измеряют по полной программе при заданном весе $P=mn$. В этом случае заметно возрастает объем угловых измерений на пункте, а уравненные направления получают разные веса.

§ 72. ВИДОИЗМЕНЕННЫЙ СПОСОБ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВ В КОМБИНАЦИЯХ

При наблюдениях на пунктах с большим числом направлений ощутимо проявляются недостатки основных способов угловых измерений. Поэтому в триангуляции 2 класса на пунктах с большим числом направлений целесообразно использовать другие способы, наиболее подходящие для подобных ситуаций. Одним из таких способов является способ, предложенный в 1950 г. А. Ф. Томилиным, для угловых измерений в сплошных сетях триангуляции 2 класса, получивший позднее указанное выше название.

В этом способе на пункте с n направлениями измеряют две группы углов:

$$\begin{matrix} 1.2 & 2.3 & 3.4 & \ldots & n.1 \\ 1.3 & 2.4 & 3.5 & \ldots & n.2 \end{matrix}, \qquad (9.34)$$

т. е. углы между смежными направлениями и углы, являющиеся суммой двух смежных углов; число всех углов равно $2n$.

Каждый угол измеряют на разных установках лимба по той же методике, как и при измерении углов во всех комбинациях. Число приемов измерения углов принимают одинако-

вым и равным *5* или *6* независимо от числа направлений на пункте.

В данном способе измеряют не все углы (9.24).

Число недостающих углов, равное $\Delta r = n(n-1)/2 - 2n = n(n-5)/2$, увеличивается по мере роста числа n направлений на пункте:

n	5	6	7	8	9
Δr	0	3	7	12	18

На пунктах с пятью направлениями измеряют все без исключения углы (9.24), т. е. как в способе Шрейбера. Поскольку при $n \geqslant 6$ измеряются не все углы (9.24), то уравненные на станции углы и направления имеют разные веса. Веса уравненных углов при $n = 7 \div 9$ могут различаться в полтора раза, что является одним из недостатков данного способа.

Следствием измерения не всех углов (9.24) является также и то, что формулы для вычисления поправок в измеренные углы имеют довольно сложный вид и не удобны для практического использования, так как поправки в углы в этом случае представлены в виде функций свободных членов большого числа условных уравнений, возникающих на станции [8].

К достоинствам данного способа следует отнести то, что при $n = 7 \div 9$ число приемов непосредственных измерений углов, равное $5 \div 6$, больше, чем при использовании способа Шрейбера и поэтому точность непосредственно измеренных углов при прочих равных условиях выше, чем при измерении их по способу Шрейбера. Кроме того, способ Томилина требует меньшего объема измерений чем способ Шрейбера; применяется в триангуляции 2 класса на пунктах с 6—9 направлениями.

§ 73. СПОСОБ НЕПОЛНЫХ ПРИЕМОВ

При разработке способа, предложенного Ю. А. Аладжаловым в 1954 г., предусматривалось составление таких программ угловых измерений, которые были бы эквивалентны программам способа измерения углов во всех комбинациях (в смысле получения равноточных направлений с заданным весом), требовали меньшего объема измерительных операций на пункте и одновременно позволяли увеличить число приемов непосредственных измерений каждой группы направлений по сравнению с таковыми при измерении углов во всех комбинациях.

Другими словами, была поставлена задача в возможно большей мере избавиться от недостатков, присущих способу Струве и способу Шрейбера при наблюдении пунктов с большим числом направлений в триангуляции 2 класса.

При разработке конкретных программ наблюдений были приняты во внимание следующие соображения:

объем работы на станции тем меньше, чем больше число направлений включается в каждую группу;

чем меньше направлений в группе, тем больше возможностей продолжать измерение разных групп направлений при благоприятных условиях в случае меняющейся видимости по разным направлениям;

при 4-х и более направлений в группе необходимо замыкать горизонт при наблюдениях, чтобы своевременно обнаружить и устранить недопустимые погрешности измерений, возникающие по тем или иным причинам, а это неизбежно ведет к увеличению объема работы на станции;

чем больше направлений включено в группу, тем больше при заданном весе P число приемов непосредственных измерений направлений в группах, тем полнее ослабляется влияние разного рода систематических ошибок, в том числе ошибок диаметров лимба.

Поскольку слишком большое и слишком малое число направлений в группах, характерное для способов Струве и Шрейбера, приводит к указанным выше недостаткам, то в каждую отдельную группу направлений целесообразно включать не более трех направлений. С учетом приведенных выше соображений такое число направлений в группах ($k=3$) является вполне обоснованным.

В соответствии с требованиями (9.15) можно составить множество разных программ наблюдений при различном сочетании направлений в группах (по три в каждой). Это в частности подтверждают опубликованные в печати способы Ю. А. Аладжалова (1954 г.), В. Н. Ганьшина (1955 г.) и Н. В. Яковлева (1959 г., см. § 74).

Программы наблюдений в способе Аладжалова строились следующим образом. Сначала выписывались все углы (9.24), а затем каждые три угла объединялись в группу из трех направлений. Например, углы 1.2, 1.3 и 2.3 объединялись в группу 1.2.3; углы 2.4, 2.5 и 4.5 — в группу 2.4.5 и т. д.

Чисто механический подход к решению данной задачи привел к тому, что из шести опубликованных Ю. А. Аладжаловым программ для $n=4\div9$, только в двух (при $n=7$ и 9) удалось объединить все углы (9.24) в группы по три направления в каждой (табл. 23), при $n=4$; 5; 6; 8 кроме групп из трех направлений предусмотрено измерение отдельных углов, дополняющих программу наблюдений до требуемого числа углов (9.24).

Способ Аладжалова применяется в триангуляции 2 класса при наблюдениях на пунктах с 7—9 направлениями.

Для того чтобы обеспечить независимость измеренных направлений и одновременно ослабить влияние ошибок диаметров лимба, переставляют горизонтальный круг между при-

Таблица 23

Номер группы	Программа наблюдений при разном числе n направлений на пункте		
	7	8	9
1	1.2.3	1.2.3	1.2.3
2	2.4.5	1.4.8	4.5.6
3	3.4.6	1.5.7	7.8.9
4	3.5.7	2.4.5	1.4.7
5	5.6.1	2.7.8	2.5.8
6	6.7.2	3.4.6	3.6.9
7	4.7.1	3.5.8	1.5.9
8		1.6	2.4.9
9		2.6	3.5.7
10		4.7	2.6.7
11		5.6	1.6.8
12		6.7	3.4.8
13		6.8	
14		3.7	
m	5	5/3	4

емами на угол $\delta = (180°/m) + i$, а при переходе от одной группы направлений к другой — на угол $\sigma = (\delta/r) + i$, где m — число приемов, r — число групп направлений в программе наблюдений, i — цена наименьшего деления на лимбе.

Вес уравненных направлений вычисляют по формуле

$$P = 2mn/k, \tag{9.35}$$

где m — число приемов измерений направлений и отдельных углов (см. табл. 23); n — число направлений на пункте; k — число направлений в группе ($k=3$); для углов $k=2$.

Уравнивание на станции. Оценка точности. Сначала вычисляют средние из m приемов значения измеренных в группах направлений и отдельных углов. Затем, используя эти средние значения, вычисляют все углы (9.24), выводимые по три угла из каждой группы, состоящей из трех направлений. Считая эти углы как непосредственно измеренные, находят по формулам (9.30) уравненные углы $[1.j]$.

Средние квадратические ошибки уравненных направлений вычисляют по формуле

$$M = \sqrt{\frac{3\Sigma v^2}{n(n-1)(n-3) + rn}}, \tag{9.36}$$

где $v = j.l - [j.l]$ — разности между средними из приемов и уравненными значениями углов (9.24); n — число направлений на

пункте; r — число отдельных углов в программе наблюдений.

Способ обладает рядом достоинств.

1. Результаты уравнивания угловых измерений на станции представляются в виде одного ряда равноточных направлений.

2. Объем работы на пункте в среднем на 20—25 % меньше, чем при измерении углов во всех комбинациях.

3. Число приемов непосредственных измерений групп направлений при $n=7\div9$ больше, чем при измерении углов во всех комбинациях, что способствует более полному ослаблению ошибок измерений.

4. В случае переменных условий видимости по разным направлениям способ дает возможность измерять направления, по которым в каждый момент времени имеется хорошая видимость.

Среди недостатков отметим следующие.

1. Отсутствует какая-либо система образования групп из трех направлений, что создает неудобства при угловых измерениях на пункте.

2. При $n=8$ программа наблюдений предусматривает измерение большого числа отдельных углов, что не способствует повышению как точности, так и производительности труда при наблюдениях. Кроме того, в этом случае несколько нарушается равноточность уравненных направлений, поскольку не выполняется условие (9.15).

3. Программа наблюдений не предусматривает ослабление односторонне действующих ошибок измерений.

§ 74. СПОСОБ СИММЕТРИЧНЫХ КОМБИНАЦИЙ НАПРАВЛЕНИЙ

Выше отмечалось, что программ наблюдений, состоящих из групп по три направления в каждой и удовлетворяющих требованиям (9.15), можно предложить довольно много. Однако для геодезического производства наиболее эффективными будут те из них, которые рассчитаны на наиболее полную компенсацию систематических и односторонне действующих ошибок, возникающих в процессе измерений углов и направлений теодолитом, и, кроме того, имеют определенную, легко запоминаемую систему образования групп на пунктах с разным числом направлений, что создает определенные удобства в работе.

Для наиболее полной компенсации систематических и односторонне действующих ошибок измерений, возникающих, например, из-за люфта подъемных винтов при вращении алидады теодолита, необходимо, чтобы программы наблюдений предусматривали измерение возможно большего числа углов, дополняющих друг друга до 360°. Выполнение этого требования, впервые указанного еще К. Ф. Гауссом, ведет как к симметрии

Таблица 24

Номер группы	Программа наблюдений при разном числе направлений на пункте						
	3	4	5	6	7	8	9
1	1.2.3	1.2.4	1.2.4	1.2.4	1.2.4	1.2.4	1.2.4
2	2.3.1	2.3.1	2.3.5	2.3.5	2.3.5	2.3.5	2.3.5
3	3.1.2	3.4.2	3.4.1	3.4.6	3.4.6	3.4.6	3.4.6
4		4.1.3	4.5.2	4.5.1	4.5.7	4.5.7	4.5.7
5			5.1.3	5.6.2	5.6.1	5.6.8	5.6.8
6			1.2.5	6.1.3	6.7.2	6.7.1	6.7.1
7			2.3.1	2.3.1	7.1.3	7.8.2	7.8.2
8			3.4.2	4.5.3		8.1.3	8.1.3
9			4.5.3	6.1.5		1.5	9.2.6
10			5.1.4	2.4.6		2.6	1.5.9
11						3.7	9.3.7
12						4.8	4.8.9
t	3	2	3	2	1	1	1
m	4	4	2	3	5	4/3	4
m'	12	8	6	6			
P	24	21	20	24	23	21	24

наблюдений каждого направления в программе в целом, так и к повышению точности результатов измерений.

В этой связи особый интерес представляют программы предложенного В. Н. Ганьшиным способа циклов для угловых измерений. К сожалению, автор не дал сколько-нибудь простых и удобных формул для вычисления как уравненных на станции направлений и углов, так и их средних квадратических ошибок.

Учитывая положительные свойства способа неполных приемов и способа циклов, а также принимая во внимание идею К. Ф. Гаусса о необходимости измерения углов и их дополнений до 360° были предложены усовершенствованные программы наблюдений (табл. 24) для способа симметричных комбинаций направлений и выведены при этом простые формулы (9.16) для вычисления уравненных на станции углов, а также формулы (9.18)—(9.21) для их средних квадратических ошибок.

Каждое направление во всех группах программы наблюдений при $n=3\div9$ бывает начальным, средним и конечным в группе (см. табл. 24), что обеспечивает симметрию наблюдений. Группы в большинстве случаев образуются по единому правилу: i, $i+1$, $i+3$, где i — порядковый номер направления на пункте.

Благодаря этим свойствам измеряются не только искомые углы $\alpha=j.l$, но и их дополнения до 360°, что способствует при

вычислении уравненных углов компенсации односторонне действующих ошибок измерений, возникающих например, из-за люфта подъемных винтов при вращении алидады теодолита и др. Кроме того, легко запоминаемые программы наблюдений удобны в работе. При $n=8$ дополнительно к группам из трех направлений измеряются только четыре угла, вместо семи, как в программе Аладжалова (см. табл. 23).

Каждая группа направлений измеряется по той же методике, как и в случае измерений круговыми приемами, но без замыкания горизонта, т. е. по способу направлений. При $n=8$ дополнительные углы измеряют как в способе Шрейбера (см. § 71). Для того чтобы обеспечить независимость измерений направлений лимб между приемами переставляют на угол $\delta=(180°/m)+i$, а между группами направлений на угол $\sigma=(\delta/r)+i$, где m — число приемов, r — число групп направлений, i — цена наименьшего деления лимба.

Число приемов измерений каждой группы направлений вычисляют по формуле

$$m=\frac{kP}{2nt}, \tag{9.37}$$

где k — число направлений в группе (для отдельного угла $k=2$), P — заданный вес уравненного направления, n — число направлений на пункте, t — число разных групп, в которых по m приемов измеряется каждый из углов (9.24); при $t>1$, т. е. при $n=3\div6$ общее число приемов измерений каждого угла равно $m'=mt$ (см. табл. 24 для случая $P=20$—24).

Обработку наблюдений на станции выполняют следующим образом:

1) в каждой группе выводят средние из приемов значения направлений, а также средние из приемов углы (при $n=8$);

2) в каждой группе из трех направлений вычисляют значения всех трех углов, которые образуются при попарном сочетании направлений;

3) при $n=3\div6$, т. е. при $t>1$ получают средние значения одноименных углов из t разных групп направлений;

4) используя найденные значения всех углов (9.24), образующихся на станции при сочетании направлений из n по 2, вычисляют уравненные углы по формулам (9.30), т. е. как в способе измерения углов во всех комбинациях.

Вес уравненного направления определяют по формуле

$$P=2mnt/k, \tag{9.38}$$

где m — число приемов измерений; n — число направлений; t — число повторений каждого угла (9.24) в программе наблюдений (см. табл. 24); k — число направлений в группе (для отдельного угла $k=2$).

Средняя квадратическая ошибка уравненного направления равна

$$M = \sqrt{\frac{k\left[v_{j.l}^2\right]}{nt\,(n-1)\,(nt-k)}},$$

где $v_{j.l}=j.l-[j.l]$ — разности между углами $j.l$, измеренными в группах m приемами и их уравненными значениями $[j.l]$. При $t>1$ (см. табл. 24), т. е. при $n=3\div6$ число разностей $v_{j.l}$ будет в t раз больше числа углов (9.24); $k=3$; n — число направлений на пункте.

Среди достоинств данного способа отметим следующие.

1. Результаты угловых измерений на станции представляются в виде одного ряда равноточных направлений.

2. Имеет место определенная система образования групп на пунктах с разным числом направлений, что создает удобства при наблюдениях. Данный способ предусматривает компенсацию односторонне действующих ошибок в отличие от способа неполных приемов.

3. Объем угловых измерений на пункте (по числу наведений трубы теодолита на наблюдаемые пункты) в среднем в полтора раза меньше, а число всех приемов ($m'=mt$) непосредственных измерений каждого угла $j.l$ в разных группах, в среднем в полтора раза больше, чем при измерении углов во всех комбинациях.

4. В случае переменных условий видимости по разным направлениям данный способ дает возможность измерять те направления, по которым в конкретный период времени имеется хорошая видимость, что выгодно отличает его от способа круговых приемов.

К недостаткам способа относятся следующие:

1. Программы наблюдений имеют более сложную структуру, чем в способе круговых приемов и при измерении углов во всех комбинациях.

2. При переменных условиях видимости по разным направлениям способ по оперативности наблюдений несколько уступает способу измерения углов во всех комбинациях.

§ 75. ВИДОИЗМЕНЕННЫЙ СПОСОБ КРУГОВЫХ ПРИЕМОВ

Измеренные на пункте направления искажаются вследствие влияния внешней среды, в том числе рефракции. Поэтому число приемов наблюдений недостаточно точно характеризует действительный вес каждого измеренного направления. И. М. Конопальцев, стремясь получить все углы, отсчитываемые от начального направления на пункте, с одинаковыми

весами, предложил в процессе наблюдений добиваться того, чтобы средние квадратические ошибки каждого такого угла, вычисленные по отклонениям от среднего из приемов, были одинаковыми.

Задача решается следующим образом. Сначала все направления измеряют круговыми приемами по стандартной программе. Затем для каждого угла 1.2; 1.3; ...; 1.n по отклонениям от среднего в приемах вычисляют средние квадратические ошибки m_{12}, m_{13}, ..., $m_{1\,n}$. Те углы 1.j, ошибки которых превышают допустимую $m_{\text{доп}}$, измеряют дополнительно до выполнения требования $m_{1.j} \leqslant m_{\text{доп}}$. При этом сами значения $m_{1.j}$ не вычисляют, а заменяют их некоторыми эквивалентами — дифференцированными допусками, зависящими от числа приемов и разностей значений в приемах каждого угла 1.j, измеренного по основной и дополнительной программам.

За уравненные направления, отсчитываемые от начального, принимают для каждого из них среднее арифметическое из основных и дополнительных приемов измерений. Строго говоря, при такой программе измерений нарушаются условия (9.15), требующие, чтобы с одинаковым весом измерялись не только углы 1.j, отсчитываемые от начального направления, но и все без исключения углы (9.24). Уравненные углы в последнем случае должны вычисляться по формулам (9.30). На это указывает и автор способа [12]. Данный способ удобен в случае переменных условий видимости по разным направлениям.

§ 76. СПОСОБ ПРИВЯЗКИ ОТДЕЛЬНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ К МАРКЕ

В горных районах с особенно неблагоприятными погодными условиями возможны случаи, когда видимость наблюдаемых пунктов отсутствует в течение многих дней и даже недель и появляется на короткие промежутки времени, причем неодновременно по разным направлениям. В таких случаях целесообразно использовать французский способ угловых измерений, суть которого заключается в следующем.

На расстоянии 1—2 км от пункта устанавливают специальную марку (визирную цель). Углы измеряют между маркой и каждым направлением в отдельности в те периоды времени, когда появляется видимость по каждому конкретному направлению.

Поскольку углы между направлениями на геодезические пункты получаются косвенно как разность соответствующей пары непосредственно измеренных углов, то для определения их с тем же весом, что и при наблюдениях круговыми приемами, углы между маркой и направлениями следует измерять с двойным весом.

Измерение углов выполняют при независимых установках лимба, равномерно распределенных по всей окружности. Уравнивание на станции сводится к вычислению средних значений углов из приемов.

К достоинствам способа относятся: 1) возможность измерения углов в относительно короткие сроки в исключительно неблагоприятных погодных условиях в горных районах; 2) достаточно полное ослабление влияний ошибок диаметров лимба.

Недостатки способа: 1) углы между направлениями на геодезические пункты получают косвенно, а не из непосредственных измерений, что снижает их точность; 2) в основе способа лежит предположение, что направление в марку неизменно в течение всего периода наблюдений на пункте. На самом же деле это не совсем так, поскольку каждое измеряемое направление изменяется во времени под воздействием рефракции и других факторов.

§ 77. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИВЕДЕНИЯ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОПРАВОК ЗА ЦЕНТРИРОВКУ И РЕДУКЦИЮ

Определение элементов приведения

При угловых измерениях на каждом пункте необходимо, чтобы ось вращения теодолита J, установленного на столике сигнала, и ось симметрии визирного цилиндра V находились на одной отвесной линии, проходящей через центр пункта в точке O (рис. 82). Однако в действительности такого совпадения нет. Поэтому перед началом наблюдений на пункте и после их окончания определяют элементы центрировки теодолита (e, θ) и элементы редукции визирной цели (e_1, θ_1), называемые элементами приведения, а затем вычисляют поправки в измеренные направления за центрировку и редукцию.

Для определения элементов приведения над центром пункта устанавливают облегченную мензулу или столик, на горизонтальную поверхность которого прикрепляют центрировочный лист и стрелкой показывают на нем направление на север. Затем с помощью вспомогательного теодолита, установленного на расстоянии примерно в полтора раза больше, чем высота геодезического сигнала, проектируют на этот лист ось вращения теодолита и ось визирного цилиндра. Проектирование выполняют с трех установок теодолита, размещенных по азимуту через 120° (при КП и КЛ). Аналогичным образом при трех установках теодолита проектируют центр пункта на этот лист. При этом образуются треугольники погрешностей, стороны которых не должны превышать: 3 мм при проектировании центра пункта, 5 мм — при проектировании оси теодолита и 10 мм — при проектировании оси визирной цели. При соблюдении этих

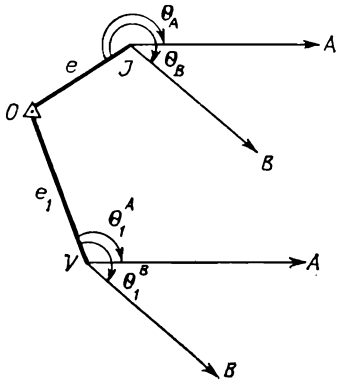


Рис. 82. Элементы приведения на пункте триангуляции

допусков искомые точки должны находиться в центре соответствующего треугольника погрешностей.

Из точек J и V, в которых находятся теодолит и визирная цель, проводят направления на начальный пункт A и какой-либо пункт B. Точки J и V соединяют с точкой O и линейкой измеряют с точностью до 0,001 м линейный элемент центровки $e=OJ$ и линейный элемент редукции $e_1=OV$. В точках J и V большим транспортиром с точностью до 15′ измеряют углы $\theta(\theta_A, \theta_B)$ и $\theta_1(\theta_1^A, \theta_1^B)$ ориентирующие линейные элементы e и e_1 относительно направлений на пункты A, B и т. д. Углы θ и θ_1 отсчитывают от направления на центр пункта по ходу часовой стрелки. Кроме того, транспортиром измеряют на центровочном листе угол между направлениями на пункты A и B и сравнивают с его значением, полученным из измерений теодолитом для контроля правильности проведения направлений на пункты A и B. Расхождения в значениях угла допускаются до 1°.

Если линейные элементы приведения велики и значительно превышают установленные инструкцией [8] допуски ($e\leqslant 5$ см, $e\leqslant 10$ см), их определяют аналитическим способом [23].

Вычисление поправок за центровку и редукцию

Пусть на пункте с центром в точке O выполняются угловые измерения, теодолит находится в точке J, визирный цилиндр в точке V (рис. 83). Из точки J проведем направление $JA=0°$ на начальный пункт A и направление JB на какой-либо другой пункт B; из точки V — направления VA и VB на те же пункты. Обозначим M измеренные направления на пункте, отсчитываемые от начального. Пусть e, θ — элементы центровки, а e_1, θ_1 — элементы редукции на пункте O. Проведем из точки O направление OB' параллельно направлению JB. Угол $c''=\angle B'OB$ равен поправке за центровку теодолита, которую необходимо ввести в измеренное направление JB, чтобы получить искомое направление OB между центрами пунктов O и B. Углы c'' при точках O и B равны. Решив треугольник JOB, в котором $s=OB$ — длина стороны между пунктами O и B, а угол OJB равен $(M+\theta)-360°$, напишем

$$\frac{e}{s}=\frac{\sin c}{\sin[(M+\theta)-360°]}. \qquad (9.39)$$

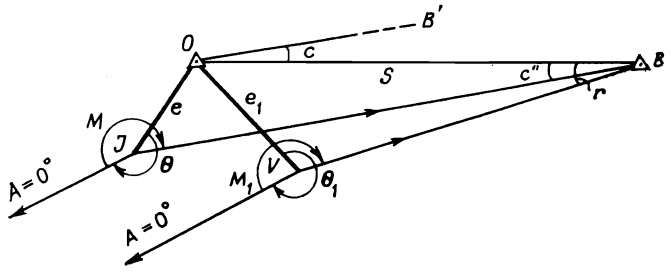


Рис. 83. Поправки в направления за центрировку теодолита и редукцию визирной цели

Так как угол c мал, формула для вычисления поправок в измеренные направления за центрировку теодолита будет иметь вид

$$c = \frac{e \sin (M + \theta)}{s} \rho. \tag{9.40}$$

Поскольку визирная цель V находится не над центром пункта O, измеренное на пункте B направление BV следует исправить поправкой $r = \angle OBV$ за редукцию визирной цели V. Решив треугольник OBV, в котором $s = OB$, а угол OVB равен $(M_1 + \theta_1) - 360°$, найдем малый угол r, т. е. поправку в направление BV за редукцию визирной цели

$$r = \frac{e_1 \sin (M_1 + \theta_1)}{s} \rho. \tag{9.41}$$

Необходимо отметить, что поправки за центрировку теодолита вводят в направления, измеренные на пункте O, а поправки за редукцию визирной цели со своим знаком в обратные направления, т. е. в направления AV, BV, ..., поскольку визирование с пунктов A, B, ... производится не на центр пункта O, а на визирную цель V, не совпадающую с ним.

Поправки c и r в триангуляции и полигонометрии 1—2 классов вычисляют с точностью до 0,001″, а на пунктах 3 и 4 классов до 0,01″.

Контроль угловых измерений в полевых условиях. Используя приведенные к центрам пунктов направления, наблюдатель в полевых условиях вычисляет: невязки треугольников по мере их замыкания, свободные члены полюсных условий и среднюю квадратическую ошибку измеренного угла и сравнивает их значения с допустимыми. При появлении недопустимых отклонений наблюдатель обязан выполнить повторные измерения.

РАЗДЕЛ IV

Высокоточное и тригонометрическое нивелирование

Глава 10

ГОСУДАРСТВЕННАЯ НИВЕЛИРНАЯ СЕТЬ СССР

§ 78. НИВЕЛИРНЫЕ СЕТИ. ИХ НАЗНАЧЕНИЕ

Нивелирные сети подразделяются на государственные и ведомственные (маркшейдерские, на строительных площадках и т. п.). Под государственной нивелирной сетью понимают систему размещенных на всей территории страны надежно закрепленных на местности геодезических пунктов (реперов), высоты которых определены в единой системе от одного исходного пункта, принятого за начало отсчета высот.

Государственная нивелирная сеть СССР строится по принципу «от общего к частному» и делится на четыре класса: I, II, III и IV. Нивелирная сеть I класса является главной высотной основой на территории страны и создается с наивысшей точностью при использовании наиболее точной измерительной техники и наиболее совершенных методов высокоточного нивелирования с одновременным выполнением гравиметрической съемки. Нивелирная сеть II класса является сгущением высокоточной нивелирной сети страны и относится к разряду точных. На основе нивелирной сети II класса создаются нивелирные сети III, а затем IV класса.

Государственные нивелирные сети I и II классов как наиболее точные предназначены, в первую очередь, для распространения единой системы высот на всей территории страны. Используются они также и в научных целях. К числу научных проблем и задач, решаемых методами высокоточного нивелирования отдельно или в совокупности с другими видами геодезических измерений, относятся:

детальное изучение фигуры физической поверхности Земли и ее внешнего гравитационного поля;

определение разностей высот и наклонов среднеуровенных поверхностей морей и океанов;

изучение вековых поднятий или опусканий крупных блоков земной коры;

определение деформаций уровенных поверхностей Земли, вызываемых перемещениями подземных масс;

изучение современных вертикальных движений земной поверхности, в том числе в сейсмически активных районах в целях поиска предвестников крупных землетрясений и последующего их прогноза;

микросейсмическое районирование территории крупных городов, необходимое для составления генеральных планов их развития, определения наиболее надежной конструкции и допустимой этажности строительства промышленных и гражданских объектов и т. п.

Перечисленные проблемы и задачи находятся на стыке многих наук, в том числе таких как геодинамика, геофизика, геология, гидрология, океанография и т. п. Высокоточное нивелирование I—II классов дает наиболее точные количественные данные об изучаемых объектах и явлениях природы в виде разностей высот точек земной поверхности и изменений этих высот во времени. Для того чтобы на основе этих данных можно было сделать научно обоснованные выводы, необходимо выполнять нивелирование с максимально высокой точностью и с учетом всех факторов, влияющих на его точность.

Земная кора с течением времени испытывает медленные поднятия и опускания, причем с различной скоростью в разных физико-географических районах. Вследствие вертикальных движений земной коры изменяются высоты нивелирных марок и реперов, причем на разную величину в зависимости от их местоположения. Поэтому точность нивелирной сети с течением времени постепенно понижается, сеть «стареет». Для того чтобы точность нивелирной сети не стала ниже допустимого уровня и отвечала запросам ближайшего будущего, нивелирование в сети необходимо периодически повторять через определенные интервалы времени, зависящие от величины скоростей вертикальных движений земной коры и требуемой точности нивелирной сети. В государственной нивелирной сети СССР повторное нивелирование I—II классов выполняют в среднем через 25 лет. В сейсмоактивных районах со значительными скоростями движений земной коры повторное нивелирование должно выполняться чаще, чем в других районах. В результате повторного нивелирования получают не только новые, более точные высоты марок и реперов на эпоху нивелирования, но и данные, необходимые для определения величины и знака вертикальных движений земной коры, которые необходимы при решении не только соответствующих научных задач, но и чисто практических задач, связанных, например, с гидромелиоративным строительством на больших площадях, и т. п.

Государственные нивелирные сети III и IV классов служат основой для создания высотного обоснования топографических

съемок и решения разнообразных инженерных задач на местности, требующих знания высот точек ее поверхности со сравнительно высокой точностью.

В особую группу следует выделить нивелирные сети высокой точности, создаваемые в крупных городах, на геодинамических полигонах, а также на строительных площадках. Все виды таких нивелирных сетей имеют свои особенности, связанные со спецификой их назначения и построения. На каждом конкретном объекте такая нивелирная сеть создается по специальной программе. В высотном отношении все эти сети должны быть привязаны к государственной нивелирной сети страны.

§ 79. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О РАЗВИТИИ НИВЕЛИРНЫХ РАБОТ В ДОРЕВОЛЮЦИОННОЙ РОССИИ

Исходный пункт нивелирной сети. За начало счета высот в нивелирной сети СССР принят средний уровень Балтийского моря. Первые наблюдения в России за колебаниями уровня Балтийского моря были начаты в 1703 г. по указу Петра I; регулярные же наблюдения были организованы в Военной гавани Кронштадта на о. Котлин в 1804 г. Однако впоследствии футшток (рейка с делениями, по которой определяется высота уровня воды) был разрушен и результаты измерений оказались утраченными. В 1825 г. наблюдения за уровнем Балтийского моря были возобновлены и ведутся по сей день.

Футшток был установлен на одной из опор Синего моста через Обводной канал в Кронштадте (в канале нет таких сильных вертикальных колебаний поверхности воды, как у берега открытого залива).

В 1840 г. выдающийся русский гидрограф М. Ф. Рейнеке обработал материалы наблюдений за 1825—1840 гг., вычислил среднюю высоту уровня Балтийского моря и зафиксировал ее на гранитном устое Синего моста (где находится футшток) с помощью глубоко выбитой на поверхности устоя горизонтальной черты. В 1872 г. эта черта (марка Рейнеке) впервые была принята за исходный «нуль» при определении высот геодезических пунктов. В 1890 г. пулковский астроном Ф. Ф. Витрам установил на месте марки Рейнеке медную пластину с горизонтальной чертой, совместив ее с чертой Рейнеке. В 1913 г. Х. Ф. Тонберг на месте пластины Витрама, которая с течением времени выпала, укрепил новую пластину с горизонтальной и вертикальной линиями, на пересечении которых имелось отверстие для подвесной рейки. Контролем правильности установки этой пластины на прежнем месте служило превышение между прежней чертой и репером на постаменте памятника П. К. Пахтусову — известному исследователю Новой Земли. В 1951 г.

пластину Тонберга дополнительно оборудовали специальной защитной рамкой из бронзово-никелевого сплава. На рамке написано: «Исходный пункт нивелирной сети СССР».

Таким образом, счет нивелирных высот в дореволюционное и в настоящее время ведется в СССР от среднего уровня Балтийского моря, выведенного М. Ф. Рейнеке за период наблюдений 1825—1840 гг.

Первая связь исходного высотного пункта в Кронштадте с береговыми марками на ст. Ораниенбаум (ныне г. Ломоносов) была осуществлена известным русским геодезистом и астрономом Н. Я. Цингером зимой 1871—1872 гг. К настоящему времени насчитывается уже десять таких связей. Последняя, наиболее точная передача высоты выполнена в 1969 г. Институтом физики и астрономии АН ЭССР методом гидростатического нивелирования со средней квадратической ошибкой 0,8 мм на всю длину нивелирной трассы (5 км).

Становление и развитие нивелирных работ. В 1864 г. Международная геодезическая ассоциация (МГА) рекомендовала создавать в каждой стране не только триангуляционные, но и нивелирные сети высокой точности (со случайной ошибкой $\eta = 3—5$ мм/км). Первые работы по геометрическому нивелированию в России были начаты Корпусом военных топографов (КВТ) в 1873 г., т. е. раньше, чем, например, во Франции (1884 г.), Швеции (1886 г.) и других странах. До 1873 г. высоты пунктов в геодезических сетях определялись методом тригонометрического нивелирования, с помощью нивелир-теодолитов с вертикальными кругами прокладывались так называемые нивелир-теодолитные ходы с точностью порядка 11 мм/км.

В 1873 г., приступая к геометрическому нивелированию, Военно-топографический отдел (ВТО) Главного штаба разработал первую инструкцию по нивелированию, устанавливающую четкую регламентацию выполнения этих работ, в которой нашли отражение рекомендации МГА относительно точности нивелирования ($\eta \leqslant 3—5$ мм/км).

Для геометрического нивелирования были изготовлены нивелиры с увеличением зрительной трубы сначала $6—8^x$, а через два года — с увеличением 14^x и ценой деления уровня 4—5″ на 2 мм. Уровень был скреплен с подставкой нивелира, рейки применялись шашечные, расстояния между нивелиром и рейками до 100 м. При определении превышений производились отсчеты по уровню нивелира и по рейке (по трем нитям сетки).

Первый нивелирный ход большой протяженности был проложен в 1873—1876 гг. между Москвой и Петербургом со средней квадратической случайной 6,2 мм/км и систематической 0,9 мм/км ошибками. Эта точность оказалась ниже рекомендо-

ванной инструкцией 1873 г., однако существенно выше точности при проложении нивелир-теодолитных ходов.

Новый этап в развитии нивелирных работ в России начался с 1887 г., когда ВТО Главного Штаба впервые разработал общую программу создания нивелирной сети на территории страны и новую инструкцию для точного нивелирования. Нивелирную сеть предусматривалось создавать поэтапно. В первую очередь в течение 12 лет было намечено построить нивелирную сеть в Европейской части России. Сеть была запроектирована в виде восьми замкнутых нивелирных полигонов от западной границы страны до линии Петербург-Ряжск-Воронеж-Новочеркасск и одной висячей линии Ряжск-Оренбург. Общая протяженность этих линий нивелирования — 13752 версты (1 верста = 1,0668 км). В эту сеть было включено 11 футштоков Балтийского, Черного и Азовского морей.

Линии нивелирования были проложены вдоль действующих или строящихся железных дорог и закреплены марками, заложенными в стены зданий через каждые 20—25 верст.

Вторая очередь нивелирных работ предусматривала связь нивелирной сети Европейской части России с Большой Сибирской нивелировкой, проходящей примерно по 52-й параллели вдоль будущей Транссибирской магистрали, а также проложение нивелирных линий Ростов-Владикавказ-Тифлис, Поти-Тифлис-Баку, Сызрань-Царицын-Астрахань и некоторых других.

Первая программа нивелирных работ в России предполагала решение не только практических задач, но и ставила научные проблемы, определив основные направления развития точного нивелирования на несколько десятилетий вперед. Программа предусматривала решение таких научно-технических задач, как определение разностей уровней Балтийского, Черного и Азовского морей, связь нивелирной сети России через нивелирные сети других стран с Северным и Средиземным морями и др.

Для повышения точности измерений с 1887 г. нивелирование стали проводить два исполнителя в прямом и обратном направлениях с помощью нивелиров ВТО—I, оснащенных зрительными трубами с увеличением 30—40^{x}. Длина визирного луча от нивелира до рейки была уменьшена до 85 м (40 саженей). Рейки применяли шашечные двусторонние (одна сторона рейки выражена в долях сажени). Вероятная ошибка нивелирования не должна была превышать 3 мм/км. Однако технические требования инструкции не были реализованы: случайная ошибка нивелирования оказалась равной 4—4,5 мм/км, а систематическая — до 1 мм/км.

В 1882—1883 гг. известный военный геодезист Д. Д. Гедеонов провел теоретический анализ выполненных в 1881—1882 гг.

нивелировок и разработал рекомендации, направленные на повышение точности. В частности, он предложил изменить конструкцию нивелира, скрепить уровень с трубой, а не с подставкой, как было ранее. По его предложению ВТО изготовил новые нивелиры ВТО—II с ценой деления цилиндрического уровня 2—7″ и увеличением зрительной трубы 35—40^{x}. Кроме того, ВТО утвердил Инструкцию для производства нивелировок (1883 г.).

Инструкция 1883 г. действовала до 1913 г. и предусматривала ряд мер по совершенствованию методики нивелирования, в частности, был введен симметричный во времени порядок отсчетов по рейкам. Благодаря применению нивелиров усовершенствованной конструкции и использованию новой методики нивелирования его точность за период с 1883 до 1913 г. заметно повысилась: случайная ошибка уменьшилась до 2—3 мм/км, а систематическая — до 0,5 мм/км.

В 1894 г. под руководством известного военного геодезиста С. Д. Рыльке было выполнено первое уравнивание русской нивелирной сети, построенной в 1871—1893 гг. Был составлен каталог высот пунктов, известный под названием Каталог Рыльке, он содержал высоты 1092 марок нивелирной сети с общей протяженностью ходов 13000 км. Средняя квадратическая ошибка нивелирования, полученная из уравнивания сети, оказалась не более 3 мм/км.

Первая нивелирная сеть 1871—1893 гг. сохраняла свое значение до конца 40-х годов XX столетия, т. е. до времени полной ее замены новыми нивелирными линиями. Значение ее было огромным не только для решения практических задач картографирования страны и производства инженерных изысканий при строительстве дорог и мелиорации земель, но и для научных целей.

В тесной взаимосвязи науки и производства были разработаны теория и методика высокоточного нивелирования, совершенствовались приборы. Корпус военных топографов первым в России стал применять метрическую систему мер при геодезических работах. Большое внимание уделялось вопросам нивелирной рефракции, получившей отражение в работах ученых-геодезистов того времени С. Д. Рыльке, Н. Я. Цингера, Осипова.

На основе результатов нивелирования впервые было установлено, что уровень Черного, Азовского, Адриатического и Северного морей ниже уровня Балтийского моря. Для С. Д. Рыльке и других ученых-геодезистов того времени это было полной неожиданностью. По их представлениям это противоречило теории гравитационного поля Земли и не согласовывалось с плотностями и соленостью вод Черного и Балтийского морей. Поэтому при вычислении высот уровни поверх-

ностей Черного и Балтийского морей С. Д. Рыльке принял одинаковыми. Балтийско-Черноморская система высот использовалась до 1943 г., удовлетворяя практические запросы картографирования территории страны.

Намеченная в 1887 г. программа нивелирных работ последовательно осуществлялась и развивалась. В Европейской части страны сгущались полигоны, линии нивелирования прокладывались на Кавказе и в Средней Азии. В 1901 г. началось нивелирование по линии Челябинск-Владивосток вдоль Транссибирской магистрали.

Как отмечалось выше, инструкция по нивелированию (1883 г.) действовала до 1913 г. В соответствии с рекомендациями МГА 1912 г., предусматривающими дальнейшее повышение точности нивелирования, в 1913 г. была введена новая Инструкция для нивелировок высокой точности, производимых Корпусом военных топографов, ее издание было осуществлено только в 1921 г. Согласно этой инструкции случайные ошибки нивелирования не должны были превышать 1,5 мм/км, а систематические — 0,3 мм/км. Технические требования к приборам не изменились, длина визирного луча была уменьшена до 65 м. Первая нивелирная линия высокой точности в соответствии с требованиями инструкции 1913 г. была проложена между Петроградом и Одессой в 1913—1917 гг.

В период с 1887 до 1917 г. было проложено 45,5 тыс. км нивелирных ходов, в среднем в год по 1300 км. При всем положительном научно-техническом и народнохозяйственном значении созданной нивелирной сети необходимо отметить, что она была слишком разряженной на огромной территории, закрепление сети стенными марками через 20—25 км создавало значительные трудности в развитии нивелирных сетей сгущения и при производстве топографических съемок. Нивелирные сети, построенные до 1913 г., не отличались однородностью. До введения в 1902 г. метрической системы мер не были согласованы длины нивелирных реек с нормальными мерами. Нормальной мерой служила медная линейка № 68 длиной 42 см, которая сравнивалась с помощью «нормального» ярда Долонда с английской нормальной мерой — Портландским ярдом. Высоты Каталога Рыльке вычислены в этой мере. Расхождение между длиной линейки № 68 и нормальным жезлом Пулковской обсерватории составляло 0,232 мм. Более поздние инструкции больше внимания стали уделять регулярному эталонированию нивелирных реек и сравнению рабочих мер с нормальными мерами длины.

Несмотря на недостатки, нивелирная сеть 1887—1907 гг., имела важное научное и народнохозяйственное значение почти до 1950 г., когда она была полностью заменена повторным нивелированием более высокой точности

§ 80. РАЗВИТИЕ ОСНОВНОЙ НИВЕЛИРНОЙ СЕТИ СССР В ПЕРИОД 1917—1950 гг.

После учреждения в марте 1919 г. Высшего геодезического управления основной объем астрономо-геодезических работ, в том числе по точному и высокоточному нивелированию, стали выполнять две ведущие геодезические организации страны: Военно-топографическое управление (ВТУ) и Высшее геодезическое управление (ВГУ), на которое возлагалось руководство всеми геодезическими и картографическими работами в масштабе всей страны.

В целях координации основных геодезических работ, выполняемых ВГУ и ВТУ, с февраля 1924 г. начало функционировать постоянное Совещание ответственных работников ВТУ Штаба РККА и ВГУ ВСНХ. Это Совещание в 1924 г. по предложению Ф. Н. Красовского рассмотрело и утвердило основные положения по составлению проекта рядов триангуляции 1 класса и проекта полигонов линий нивелирования высокой точности в пределах территории Европейской части СССР.

Были определены основные требования к проектируемой нивелирной сети высокой точности.

1. Основная сеть высокоточного нивелирования должна состоять из полигонов периметром 800—1000 км. На востоке и юго-востоке России разрешалось увеличение указанных размеров полигонов.

2. В эту сеть не должны входить прежние нивелирные линии, точность которых ниже требуемой (по тому времени) для высокоточного нивелирования. При необходимости такие нивелирные линии должны быть проложены вновь.

3. Сеть нивелирных полигонов по возможности должна быть согласована с полигонами триангуляции 1 класса и охватывать всю Европейскую часть СССР до Урала.

Кроме того, проект сети предусматривал проложение 27 так называемых магистральных линий высокоточного нивелирования. Примерно половину этих линий намечено было проложить в течение ближайших пяти лет силами ВГУ и ВТУ. Весь проект нивелирной сети в Европейской части СССР планировалось реализовать в течение 10—15 лет.

Для технического руководства при производстве высокоточного и точного нивелирования ВГУ в 1925 г. ввело первую Инструкцию по нивелированию высокой точности, составленную при участии и под редакцией Ф. Н. Красовского. Эта инструкция предусматривала дальнейшее повышение точности высокоточного нивелирования. Средние квадратические ошибки не должны были превышать: случайная — 1 мм/км и систематическая — 0,3 мм/км. Наряду с принятым ранее методом нивели-

рования с отсчетами по трем нитям было предусмотрено введение более современного и точного способа наведения с использованием штриховых реек.

Для дальнейшего развития нивелирной сети огромное значение имели решение Первого (1926 г.) и Второго (1927 г.) геодезических совещаний, созываемых Геодезическим комитетом Госплана СССР. Совещания проходили под председательством академика Ю. М. Шокальского, в их работе принимали участие такие видные ученые-геодезисты, как Ф. Н. Красовский, А. А. Михайлов, М. Д. Бонч-Бруевич, Н. А. Павлов, Н. Г. Келль и другие.

В 1933 г. в соответствии с решениями Второго геодезического совещания под руководством А. М. Вировца было выполнено в ЦНИИГАиК новое, второе после 1894 г., уравнивание нивелирной сети, созданной в Европейской части России с 1875 по 1932 г. и имеющей общую протяженность 69450 км. По оценке Ф. Н. Красовского, совместное влияние случайных и систематических ошибок на 1 км высокоточного нивелирования, вычисленное по расхождениям превышений прямых и обратных ходов, оказалось равным 1,1 мм, а по невязкам замкнутых полигонов — 2,7 мм. Невязки полигонов отражают совокупное влияние всех видов систематических ошибок нивелирования, а также влияние изменений высот реперов вследствие вертикальных движений земной коры. Поэтому ошибки, вычисленные по невязкам полигонов, всегда больше ошибок, определенных по расхождениям превышений из прямых и обратных ходов. В результате этого уравнивания был подведен итог более чем полувековой работы геодезистов по созданию грандиозной по тому времени сети высокоточного и точного нивелирования на Европейской части страны, имеющей важное научное и народнохозяйственное значение.

В деле дальнейшего совершенствования и развития нивелирных работ в предвоенные годы значительную роль сыграла статья Ф. Н. Красовского «О современной постановке высокоточного и точного нивелирования», опубликованная в 1938 г. в журнале «Геодезист». В ней были подвергнуты критике программные и методические вопросы нивелирования: указано на необходимость тщательных исследований систематических ошибок нивелирования, при этом особое внимание обращено на влияние рефракции и подчеркнуто большое значение исследований Н. А. Павлова по нивелирной рефракции (1933—1937 гг.), направленных на совершенствование методики нивелирования и повышение его точности (применение высоких штативов до 1,9 м, измерение температуры и ее градиентов по особой программе, выполнение измерений при высоте визирного луча не менее 0,7 м и длине до 50 м и т. д.). Подвергнуты критике вопросы оценки точности нивелирования по формулам

Лаллемана и Руне; отмечено, что неучет действия рефракции, вероятно, приводит к преуменьшенным значениям вычисленных систематических ошибок на километр хода и настоящая научно обоснованная оценка результатов высокоточного и точного нивелирования нуждается в совершенствовании. Большое внимание уделено задачам, решаемым с помощью высокоточного нивелирования, к которым Ф. Н. Красовский относил следующие задачи геологии и геодезии:

определение разностей уровней морей и океанов;

исследование вековых движений суши;

изучение вертикальных смещений земной поверхности в некоторых районах, не связанных с вековыми движениями суши, в том числе смещений, вызванных землетрясениями;

изучение деформаций уровенной поверхности, вызываемых перемещениями подземных масс.

Отмечено, что полигоны высокоточного нивелирования следует проектировать в зависимости от требований геологии и геофизики, а не механически через равные промежутки между линиями одинакового направления. Показано, что для высотного обоснования топографических съемок даже на огромной территории страны достаточно ограничиться проложением только точных нивелировок со случайными $\eta=2$ мм/км и систематическими $\sigma=0{,}2$ мм/км ошибками; высокоточное же нивелирование предназначено для решения научных задач и должно выполняться с предельно высокой точностью.

Данная статья Ф. Н. Красовского оказала большое влияние на организацию и постановку последующих работ по высокоточному и точному нивелированию в СССР.

Начиная с 1938 г., нивелирные линии впервые стали закрепляться на местности, кроме стенных марок, грунтовыми реперами, в том числе, хотя и редко, фундаментальными и даже вековыми. Необходимость введения новых типов нивелирных знаков была связана с освоением в геодезическом отношении обширных территорий, где, как правило, не было каменных зданий для закладки стенных марок. Фундаментальные и вековые реперы служили для наиболее надежного закрепления нивелирных линий на местности и решения научных задач геодезии, геофизики, геологии и других наук о Земле.

В 1939 г. были утверждены «Основные положения о построении государственной опорной геодезической сети», в которые вошел раздел и по нивелирным работам. Основные положения (1939 г.) определили четкую классификацию нивелирных построений на всей территории страны и сыграли важную роль в упорядочении нивелирных работ. Нивелирные сети подразделялись на четыре класса. Высокоточное нивелирование относилось к I классу, а точное — ко II классу. В качестве

Таблица 25

Класс	Случайная ошибка η, мм/км	Систематическая ошибка σ, мм/км
I	1,0	0,2
II	2,0	0,4
III	8,0	0,8
IV	20,0	2,0

главной высотной основы была принята нивелирная сеть I класса, были установлены предельные допустимые значения средних квадратических ошибок нивелирования (табл. 25).

В трудные годы Великой Отечественной войны 1941—1945 гг. нивелирование I—II классов выполнялось главным образом в восточных районах страны, в том числе по Транссибирской магистрали, железной дороге Оренбург-Ташкент-Красноводск, т. е. по тем линиям, которые в прошлом были проложены КВТ, а теперь подлежали модернизации.

К концу 1945 г. сеть нивелирных полигонов, построенных за период 1875—1945 гг., охватила не только Европейскую часть СССР, но и Урал, Среднюю Азию, Казахстан, часть Сибири и Дальнего Востока. Общая протяженность этих линий нивелирования к концу 1945 г. составила 171 тыс. км, из которых 125 тыс. км, т. е. 73 %, было проложено после Великой Октябрьской социалистической революции.

В послевоенные годы развернулись работы по сплошному государственному картографированию территории страны в масштабе 1 : 100 000, по топографическим съемкам крупных масштабов 1 : 5000—1 : 2000 в Европейской части СССР и т. д. Все это настоятельно требовало упорядочения и дальнейшего развития нивелирной сети I и II классов. В связи с этим ГУГК были приняты программные решения:

ввести в стране единую систему координат и высот;

проложить в Европейской части СССР в сжатые сроки новые линии нивелирования I и II классов, связав уровни Баренцева, Балтийского и Черного морей;

выполнить нивелирование некоторых линий II класса, знаки которых были утрачены во время войны;

произвести новое, т. е. третье уравнивание нивелирной сети и т. д.

В целях реализации этих планов и развития Основных положений (1939 г.) было издано «Временное наставление по нивелированию I класса», разработанное при участии А. М. Вировца, Н. А. Павлова и В. И. Фурсова.

В приложении к этому наставлению была дана схема предварительного проекта нивелирной сети I класса для всей тер-

ритории страны. Проект предусматривал построение сети в виде полигонов в Европейской части СССР, Средней Азии, Казахстане и Западной Сибири, а также проложение висячих линий для связи с некоторыми футштоками морей Тихого и Северного Ледовитого океанов. В наставлении приведены специальные указания по рекогносцировке и проектированию нивелирных линий I класса, закреплению их фундаментальными и вековыми грунтовыми реперами. В качестве основного метода нивелирования рекомендован метод совмещения при использовании нивелиров с плоскопараллельной пластиной и штриховых реек. Каждый нивелирный ход I класса должен был прокладываться по двум парам переходных точек, образуя «правую» и «левую» линии нивелирования. Особое внимание уделялось ослаблению влияния рефракции, уменьшилась длина визирного луча до 50 м, увеличилась высота его прохождения над земной поверхностью. Эти и другие мероприятия, указанные в наставлении, были направлены на повышение точности главной высотной основы территории страны. Случайная и систематическая ошибки нивелирования I класса не должны были превышать $\eta \leqslant 1{,}0$ мм/км и $\sigma \leqslant 0{,}2$ мм/км соответственно.

В наставлении подчеркивалось научное значение нивелирования I класса, отмечалось, в частности, что для изучения вертикальных движений земной коры нивелирование должно повторяться каждые 25 лет. К реализации проекта нивелирной сети I класса ГУГК приступило с 1945 г.

7 апреля 1946 г. было принято постановление Совета Министров СССР «О введении единой системы геодезических координат и высот на территории СССР». Согласно этому постановлению высоты на всей территории СССР должны отсчитываться от уровня Балтийского моря, точнее, от нуля Кронштадтского футштока, за который принята горизонтальная черта на пластине, установленной на устое Синего моста через Обводной канал в Кронштадте.

В предверии следующего очередного уравнивания основной нивелирной сети I и II классов постановлением коллегии ГУГК от 12 августа 1946 г. было предусмотрено:

восстановление и проложение новых нивелирных линий в районах, освобожденных от оккупации, не позднее 1948 г.;

осуществление связи нивелирования I класса с другими высокоточными нивелирными линиями;

привязку всех футштоков на побережье Балтийского моря;

выполнить повторное нивелирование по линиям I и II классов (разрядов по инструкции 1933 г.), проложенным с 1876 по 1917 г., независимо от сохранившихся на этих линиях знаков (реперов).

Таким образом, точное и высокоточное нивелирование, выполненное КВТ, исключалось из практического пользования и теперь используется только для изучения вертикальных движений земной коры.

В 1948 г. А. М. Вировец и Н. А. Павлов в ЦНИИГАиК разработали «Основные положения по общему уравниванию основной нивелирной сети СССР». Уравнивание грандиозной нивелирной сети I и II классов выходило за рамки обычной задачи уравнивания. Предстояло решить ряд научных и методических вопросов, в том числе таких как учет аномалий силы тяжести при вычислении нормальных высот, установление весов превышений по нивелирным линиям, оценка точности нивелирования и др.

В общее уравнивание включались нивелирные линии, удовлетворяющие требованиям Основных положений (1939 г.), общей протяженностью 139 тыс. км. Уравнивание выполнялось по методу наименьших квадратов в Центральной вычислительной части ГУГК под руководством известного геодезиста Д. А. Ларина. Веса превышений по линиям, а в случае их разнородности — их частей принимались равными

$$P_i = c/m_i^2,$$

где $c = \text{const}$, m_i — средняя квадратическая ошибка превышения;

$$m_i^2 = (\eta^2 + \sigma^2 L_{ip})\, L_i,$$

где η и σ — случайная и систематическая ошибки нивелирования на 1 км хода, L_{ip} — длина отрезка линии L_i, на котором разности прямых и обратных превышений обладают свойством систематических ошибок.

Это третье после 1894 г. общее уравнивание основной нивелирной сети страны было успешно завершено в 1950 г. Уравненные высоты служили исходными при уравнивании нивелирных сетей III и IV классов.

В результате этого уравнивания к началу 50-х годов были систематизированы разрозненные материалы всех нивелирных работ, выполненных многими ведомствами, упорядочена нивелирная сеть страны, значительно улучшилось обеспечение данными нивелирования различных отраслей народного хозяйства.

§ 81. СОВРЕМЕННАЯ НИВЕЛИРНАЯ СЕТЬ СССР

Государственная нивелирная сеть СССР по-прежнему подразделяется на нивелирные сети I, II, III и IV классов. Главной высотной основой являются нивелирные сети I и II классов. Нивелирные линии I и II классов прокладывают преимуще-

ственно по железным, шоссейным и улучшенным грунтовым дорогам, а при их отсутствии, особенно в труднодоступных северных, северо-восточных и горных районах — по берегам больших рек, тропам и зимникам. Во всех случаях стремятся к тому, чтобы линии нивелирования проходили по трассам с наиболее благоприятными для данного района грунтовыми условиями, по наименее пересеченной местности с небольшими уклонами.

Нивелирная сеть I класса строится в виде замкнутых полигонов и отдельных линий большой протяженности. Нивелирная сеть II класса опирается на нивелирные линии I класса и создается в виде замкнутых полигонов, периметр которых в настоящее время колеблется от 400 до 800 км в обжитых и от 1000 до 2000 км в необжитых районах. Полигоны, образованные нивелирными линиями I и II классов на востоке страны, достигают иногда 6—7 тыс. км.

Нивелирные сети III и IV классов прокладывают внутри полигонов высшего класса как отдельными линиями, так и в виде систем линий с узловыми точками. Периметры полигонов нивелирования III класса, как правило, не должны превышать 150 км, в северных и северо-восточных районах страны они могут увеличиваться до 300 км. Периметры полигонов и длины отдельных линий нивелирования IV класса допускаются не более 50 км.

Линии нивелирования всех классов закрепляют на местности постоянными знаками (реперами или стенными марками) не реже чем через 5 км по трассе. В труднодоступных районах на отдельных участках, где условия для закладки нивелирных знаков неблагоприятны, расстояния между знаками увеличивают до 6—7 км. На нивелирных линиях I и II классов через 50—60 км закладывают фундаментальные реперы, а в 50—150 м от них рядовые реперы-спутники. Фундаментальные реперы устанавливают также в узловых пунктах нивелирования I и II классов, вблизи морских уровнемерных станций и основных речных (озерных) водомерных постов.

В сетях I, II и III классов нивелирование по каждой линии выполняют в прямом и обратном направлениях. В сетях IV класса нивелирные ходы прокладывают только в одном направлении, висячие ходы III и IV классов не допускаются.

Вдоль всех линий нивелирования I и II классов, а в горных районах и по линиям III класса по специальной программе измеряют силу тяжести с целью исправления измеренных превышений поправками за переход к системе нормальных высот.

Невязки (в мм) в полигонах и по линиям нивелирования I, II, III и IV классов не должны превышать соответственно

$3\sqrt{L}$, $5\sqrt{L}$, $10\sqrt{L}$ и $20\sqrt{L}$, где L — периметр полигона или длина линии, км.

С течением времени постепенно повышаются требования к точности и плотности построения основной нивелирной сети I и II классов. Поэтому эта сеть непрерывно развивается и модернизируется в масштабе территории всей страны. К 1967 г. на Европейской части СССР, в Казахстане, Средней Азии и Западной Сибири была построена нивелирная сеть I класса из 20 замкнутых полигонов со средним периметром 2800 км. Общая протяженность линий нивелирования I класса к этому времени составляла 45 000 км. Эта огромная по размерам нивелирная сеть высшего класса точности связала между собой средние уровни водной поверхности многих морей: Баренцева, Карского, Балтийского, Черного, Азовского, Каспийского, Аральского и позволила с высокой точностью определить разности их уровней.

Одновременно с нивелирной сетью I класса развивалась и нивелирная сеть II класса. К 1967 г. она покрыла всю страну, кроме северных районов. Периметры нивелирных полигонов II класса в Европейской части страны равны в среднем 400—600 км, а в труднодоступных и малообжитых районах Сибири и Дальнего Востока достигают 2000—3000 км.

Успешная реализация программы 1945 г. развития нивелирных линий I класса, все возрастающее значение точного нивелирования для изучения современных движений земной коры, грандиозный размах гидромелиоративного строительства на огромных площадях, а также другие научные и народнохозяйственные задачи потребовали разработки новой программы дальнейшего развития основной нивелирной сети СССР и проведения ее очередного уравнивания.

В 1967—68 гг. ЦНИИГАиК по заданию ГУГК под руководством И. И. Энтина разработал новую программу дальнейшего развития государственной нивелирной сети I и II классов. Этот проект, с приложением схемы проектируемых линий нивелирования и объяснительной записки, в которой дано научно-техническое обоснование намеченных работ, был рассмотрен и утвержден ГУГК в 1968 г.

Новая программа 1968 г. предусматривала развитие нивелирных линий I и II классов, в первую очередь, в северных и восточных районах страны, перспективных в промышленном отношении.

Полигоны нивелирования I класса в Европейской части СССР намечалось сгустить и уменьшить их периметр в среднем до 1800 км. Кроме того, было намечено выполнить повторное нивелирование по линиям, проложенным 20—25 лет тому назад, как это было предусмотрено Временным наставлением

(1945 г.). Впервые в геодезической практике предусматривалось проведение целенаправленных повторных нивелирных работ высокой точности для изучения современных движений земной коры, особенно в сейсмоактивных районах. Особое внимание уделялось упорядочению связи нивелирной сети с уровнемерными морскими станциями наблюдений за вековыми изменениями средних уровней морей.

Нивелирную сеть II класса намечено было построить в течение 10—15 лет в виде полигонов, сплошь покрывающих всю территорию страны, включая о. Сахалин. В обжитых районах, в том числе в Сибири, периметр полигонов намечалось уменьшить до 400—800 км, а в труднодоступных и необжитых районах сократить его до 1000—2000 км.

К середине 70-х годов высокоточная нивелирная сеть I и II классов в соответствии с программой 1968 г. практически, хотя и с разной плотностью нивелирных линий, была развита на всей территории СССР. Общая протяженность нивелирных линий I класса к этому времени составила 70 тыс. км, а линий II класса — 360 тыс. км. Назрела необходимость очередного, четвертого после 1894 г., уравнивания столь огромной и точной нивелирной сети, какой не имеет ни одна другая страна мира.

При уравнивании нивелирная сеть I и II классов была разделена на два блока: «Запад» и «Восток». Граница раздела проходила по линии I класса: Архангельск-Казань-Аральское море-Арысь, западнее которой была создана густая сеть нивелирования I класса.

Западный блок уравнивался коррелатным способом, а восточный — параметрическим. Вычисления выполнялись в системе нормальных высот от нуля Кронштадтского футштока, связанного с нивелирной сетью на материке методом гидростатического нивелирования, выполненного в 1969 г. со средней квадратической ошибкой передачи высот на материк, равной 0,8 мм на всю длину нивелирного хода (5 км).

В каждом блоке уравнивание нивелирных линий I и II классов проводилось совместно, с учетом их весов, вычисленных по формулам
для I класса

$$p = 1/3L;$$

для II класса

$$p = 1/L,$$

где L — длина нивелирной линии, км.

В уравнивание включались нивелирные линии, невязки (в мм) которых в полигонах удовлетворяли следующим требованиям:

для I класса

$$\omega_{доп} = 3 \text{ мм} \sqrt{L};$$

для II класса по блоку «Запад»

$$\omega_{доп} = 5 \text{ мм} \sqrt{L};$$

для II класса по блоку «Восток»

$$\omega_{доп} = 6 \text{ мм} \sqrt{L}.$$

Для полигонов, образованных линиями I и II классов совместно, допустимые невязки (в мм) вычислялись по формулам
для блока «Запад»

$$\omega_{доп} = \sqrt{9L_{I} + 25L_{II}};$$

для блока «Восток»

$$\omega_{доп} = \sqrt{9L_{I} + 36L_{II}}.$$

Уравниваемая нивелирная сеть I и II классов (оба блока) состояла более чем из 500 полигонов различного периметра: от нескольких сотен километров на западе до 6—7 тыс. км на востоке страны.

Из уравнивания были получены следующие средние квадратические ошибки на 1 км нивелирного хода:

Блоки	*I класс*	*II класс*
«Запад»	1,6 мм	2,7 мм
«Восток»	2,1	3,6

Были вычислены также средние квадратические ошибки m определения уравненных высот нивелирных реперов в разных районах страны относительно нуля Кронштадтского футштока (табл. 26).

На основе приведенных данных можно сделать вывод о том, что огромная по размерам основная нивелирная сеть СССР, простирающаяся по долготе более чем на 10 000 км и по широте более чем на 3000 км, построена с исключительно высокой точностью. Наиболее удаленные от Кронштадтского

Таблица 26

№ п.п	Район	m, мм	№ п/п	Район	m, мм
1	Астрахань	49	5	Владивосток	112
2	Новосибирск	62	6	Певек	142
3	Якутск	93	7	Амгуэма (Берингово море)	149
4	Тикси	102			

футштока пункты определены со средней квадратической ошибкой всего лишь 15 см. Получены исключительно ценные и важные для науки и народного хозяйства данные по высотному обеспечению территории страны в единой системе нормальных высот, отсчитываемых от нуля Кронштадтского футштока (от уровня Балтийского моря).

Построение новой высокоточной нивелирной сети СССР, осуществленное в послевоенный период в течение практически последних 30 лет, является выдающимся достижением советской геодезической науки и производства. Создание этой уникальной нивелирной сети высокой точности является достойным вкладом в развитие геодезии, океанографии, геофизики и других наук о Земле.

На основе высот каталога опорной нивелирной сети I и II классов 1977 г. завершено уравнивание и отдельных нивелирных линий II класса, не вошедших в каталог 1977 г., а также всех линий нивелирования III и IV классов. Единая система высот распространена таким образом на всю территорию СССР.

Особо важное значение единая система высот 1977 г. имеет для топографических съемок шельфа северных и восточных морей нашей страны. На суше и в морских условиях теперь обеспечено единство изображения рельефа поверхности Земли и морского дна, а на топографических картах может быть отражена вся динамика изменений уровня омывающих страну морей.

§ 82. ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ ВЫСОКОТОЧНОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ

Комплексное развитие наук о Земле предусматривает решение в частности таких важных проблем естествознания, как изучение строения земной коры и верхней мантии Земли в целях исследования процессов формирования и закономерностей размещения полезных ископаемых;

геолого-геофизические исследования шельфовой зоны и Мирового океана;

дальнейшая разработка методов прогнозирования погоды и стихийных бедствий, в том числе, крупных землетрясений и т. д.

В решении этих важнейших проблем определенную роль могут сыграть и высокоточные нивелирные сети. В 1976 г. ЦНИИГАиК по заданию ГУГК разработал программу дальнейшего развития основной нивелирной сети для территории СССР.

Данная программа высокоточного нивелирования предусматривает:

дальнейшее сгущение государственной нивелирной сети I и II классов в масштабе всей страны;

повторное нивелирование отдельных линий для изучения современных вертикальных движений земной коры и получения результатов нивелирования, относящихся к одной эпохе;

упорядочение нивелирных связей с государственной сетью уровнемерных станций для изучения динамики уровня Мирового океана, отдельных морей и крупных озер;

дальнейшее развитие высокоточного нивелирования в комплексе с геофизическими и другими измерениями на геодинамических полигонах.

В результате реализации данной программы полигоны нивелирования I класса уменьшатся в среднем до 1,5 тыс. км в Европейской части страны, Средней Азии и Казахстане и до 2,5 тыс. км в Сибири и на Дальнем Востоке; нивелирные полигоны II класса в среднем до 0,5 и 1,2 тыс. км соответственно; также уменьшатся периметры нивелирных полигонов в сейсмоактивных районах.

Такая тенденция постепенного сгущения нивелирных линий I и II классов в целях создания более точной и плотной основной нивелирной сети страны сохранится, вероятно, и в последующие десятилетия, поскольку периметры нивелирных полигонов достаточно велики и пока не позволяют изучать современные движения земной коры с требуемой детальностью и точностью в масштабе всей страны.

С течением времени, как показывает практика, возникают новые, все более сложные научные, научно-технические и народнохозяйственные задачи, требующие дальнейшего повышения точности построения опорных геодезических сетей, в том числе, нивелирных сетей I и II классов. Однако чем выше точность реально существующей опорной геодезической сети, тем сложнее дальнейшее повышение ее точности, поскольку на более высоком уровне точности необходимо изучение и учет влияния все более тонких эффектов и источников ошибок, которые прежде были неощутимы и, следовательно, недостаточно изучены. Это требует разработки и создания более точной, совершенной и прогрессивной измерительной техники высокоточного нивелирования; всестороннего изучения и учета влияния новых еще не выявленных источников систематических ошибок, в том числе приборных, от внешней среды и личных; совершенствования методов измерений и методов математической обработки, причем с учетом вертикальных движений земной поверхности и необходимостью приведения результатов высокоточного нивелирования на определенную эпоху, например, на эпоху 2000,0 г. Однако последняя проблема чрезвычайно осложняется из-за незнания закономерностей движений

земной поверхности и ее решение следует искать на стыке комплекса наук о Земле, в том числе геодезии, геодинамики, геологии и др.

Глава 11

ПРОЕКТИРОВАНИЕ. РЕКОГНОСЦИРОВКА И ЗАКРЕПЛЕНИЕ НИВЕЛИРНЫХ ЛИНИЙ

§ 83. ПРОЕКТИРОВАНИЕ НИВЕЛИРНЫХ ЛИНИЙ I И II КЛАССОВ

Нивелирные, как и все другие геодезические сети, создаются в соответствии с разработанными и утвержденными техническими проектами. В техническом проекте разрабатывается схема и программа построения нивелирной сети, отражаются физико-географические и климатические особенности района работ; приводятся сведения о глубинах промерзания или протаивания грунтов, исходные данные для вычисления высот реперов, а также сведения о типах и количестве реперов, заложенных ранее и вновь проектируемых, дается описание ранее выполненных нивелирных работ с указанием способов их связи с проектируемыми; излагаются сведения о гравиметрических определениях вдоль проектируемых линий нивелирования I и II классов, а также вдоль линий III класса, прокладываемых в горных районах; при повторном нивелировании в сетях I и II классов дается обоснование изменений и дополнений, вносимых в положение на местности и закрепление существующих линий нивелирования; рассматриваются приборы и методы нивелирования, а также методы математической обработки и оценки точности результатов нивелирования; разрабатываются вопросы организации работ, мероприятия по технике безопасности и охране труда; составляется смета расходов.

Схему нивелирной сети разрабатывают на картах масштаба 1 : 100 000—1 : 300 000. Детали проекта при необходимости уточняют по картам более крупного масштаба. При проектировании нивелирных сетей II, III и IV классов на карту наносят имеющиеся пункты нивелирования, триангуляции, полигонометрии и трилатерации всех классов, находящиеся на расстояниях не более 3 км до проектируемых линий нивелирования. В том случае, когда нивелирные линии III и IV классов проектируют с целью определения высот пунктов плановой геодезической сети (триангуляции и т. п.), на карту наносят пункты как существующей, так и вновь проектируемой геодезической сети.

Нивелирные линии разных классов проектируют последовательно, т. е. сначала линии нивелирования I класса, затем II,

III и, наконец, IV класса. Нивелирные линии I класса размещают, как отмечалось выше, вдоль железных дорог и крупных автомагистралей, по берегам больших рек, а в северных и северо-восточных районах страны также по тропам, зимникам и т. п. Во всех случаях необходимо стремиться к тому, чтобы нивелирные линии I и II классов проходили по трассам, удобным для производства высокоточного нивелирования (плотные грунты, незначительные уклоны местности и т. п.).

При разработке технического проекта особое внимание уделяют связи каждой вновь проектируемой линии с существующими. При этом руководствуются следующими требованиями.

Начало и конец каждой вновь проектируемой линии должны быть надежно связаны с существующими линиями нивелирования более высокого или того же класса. Связь должна быть простой, без лишних перекрытий.

Каждая вновь проектируемая линия должна быть надежно связана с пересекаемыми ею существующими линиями нивелирования всех классов.

Связь проектируемых и существующих линий I и II классов выполняют путем включения одного репера существующей линии в проектируемую и выполнения контрольного нивелирования одной секции этой линии, примыкающей к данному реперу. При нивелировании I класса за контрольную принимают, как правило, секцию, примыкающую к фундаментальному реперу. При связи линий II класса контрольное нивелирование выполняют по секции между рядовыми реперами.

Связь проектируемых линий нивелирования I класса с существующими линиями III и IV классов предусматривают, как правило, только в том случае, когда реперы линий нивелирования III и IV классов расположены не далее 500 м от линии нивелирования I класса.

Связь проектируемых линий III и IV классов с существующими линиями I, II, III и IV классов выполняют путем включения одного репера существующей линии в проектируемую. Привязка линий нивелирования III и IV классов к фундаментальным реперам не разрешается.

Существующие реперы (стенные марки) нивелирования всех классов точности, расположенные на проектируемой линии, включают в нее. Реперы прежних нивелирных линий, расположенных вблизи проектируемой, привязывают к последней путем проложения от них отдельных ходов к двум реперам проектируемой линии.

На каждый образуемый узел связи линий нивелирования составляют особую схему в крупном масштабе, на которой показывают как направления всех линий, узла связи, так и существующие реперы, подлежащие включению в проектируемую линию или в контрольный ход нивелирования.

При передаче высот через широкие водные препятствия нивелирные линии намечают в наиболее узких местах, используя острова и мели. При ширине водного препятствия более 150 м при нивелировании I, II и III классов предусматривают закладку реперов по одному на каждом берегу по возможности в незатопляемой зоне и почти на одной высоте (превышение между реперами допускается не более 0,5 м).

При составлении проекта повторного нивелирования по линиям I и II классов руководствуются следующими требованиями.

В случае редкого размещения реперов в ранее проложенной линии нивелирования ее дополнительно закрепляют реперами современных типов. Если отдельные участки старой линии подлежат изменению, то предусматривают привязку наиболее надежных реперов прежней к реперам новой линии. Для определения разностей уровней морей и изучения их динамики во времени в нивелирные ходы включают основные реперы морских и речных уровнемерных (водомерных) станций, к которым затем привязывают рабочие реперы, футштоки, мареографы и рейки, используемые при наблюдениях за уровнем водной поверхности. При этом уровнемерные станции и водомерные посты оборудуют не менее чем тремя реперами: двумя основными, один из которых фундаментальный, и одним рабочим. Основные реперы предназначены для проверки неизменности положения рабочего репера и закрепления нуля поста. Рабочий репер служит для систематического контрольного нивелирования измерительных устройств; его располагают в непосредственной близости от этих устройств и вне зоны затопления высокими водами.

При проектировании нивелирных сетей III и IV классов для высотного обоснования топографических съемок в масштабе 1 : 10 000, выполняемых в равнинных и всхолмленных районах, в нее включают все пункты всех классов триангуляции, полигонометрии и трилатерации, а в горных районах — возможно большее их число.

При развитии нивелирных сетей III и IV классов для топографических съемок в масштабах 1 : 5000 и крупнее учитывают требования «Основных положений по созданию топографических планов масштабов 1 : 5000, 1 : 2000, 1 : 1000 и 1 : 500» и соответствующих инструкций.

§ 84. РЕКОГНОСЦИРОВКА НИВЕЛИРНЫХ ЛИНИЙ I И II КЛАССОВ

Одним из первых этапов реализации технического проекта нивелирной сети является рекогносцировка нивелирных линий на местности. В задачу рекогносцировки входят: определение на

местности наиболее оптимального варианта проложения запроектированных нивелирных линий и узлов связи; уточнение и обозначение на местности мест закладки реперов; выбор типов нивелирных реперов в зависимости от климатических условий, а также рельефа и грунтов в районе работ; сбор сведений, необходимых для наилучшей организации и производства работ по созданию нивелирной сети; уточнение схемы сети и сметы расходов.

Рекогносцировщик должен иметь опыт работы по нивелированию и достаточную подготовку для оценки влияния различных природных факторов на устойчивость и сохранность реперов. В выборе обоснованных вариантов проложения нивелирных линий I класса и мест закладки реперов при рекогносцировке, кроме геодезиста, принимает участие геолог.

Перед выездом на полевые работы собирают сведения о ранее проложенных линиях в районе работ, в том числе, схемы и названия линий, описание местоположения реперов, их типы и чертежи, карты, абрис, описания и сведения местных жителей.

Места для закладки новых реперов выбирают вблизи характерных контуров и ориентиров на местности, которые в дальнейшем облегчат отыскание реперов и опознавание их на аэрофотоснимках. При отсутствии контуров и ориентиров указывают рекомендуемые способы маркировки реперов.

Места для закладки реперов выбирают с учетом обеспечения долговременной сохранности и неизменности положения реперов по высоте. Наиболее желательна закладка реперов в скальных породах, а также на возвышениях с крупнозернистыми слабоувлажненными грунтами. Грунтовые воды в местах закладки должны быть не ближе 3—4 м от поверхности земли, а расположение реперов в переувлажненных и заболоченных грунтах должно быть редким исключением.

Не следует устанавливать реперы в зоне карстовых и оползневых явлений, на затопляемых участках, а также на участках, где в скором времени предполагается проведение строительных, гидротехнических, дорожных, горных и сельскохозяйственных работ. Места, где намечена разработка полезных ископаемых, также не пригодны для закладки реперов.

На пахотных землях места для закладки реперов выбирают в перелесках, на полезащитных лесных полосах, обочинах дорог, а также вблизи опор линий электропередач и воздушных линий связи.

В районах подвижных песков места для закладки реперов намечают на закрепленных растительностью межбарханных понижения, а также на краях такыров, менее подверженных увлажнениям.

В районах многолетней мерзлоты реперы закладывают по возможности на возвышенных участках местности с небольшой глубиной протаивания грунта. При этом их не следует намечать на таликах, открытых южных склонах, местных понижениях, участках со значительным развитием морозобойных трещин, неглубоким залеганием подземного льда, а также на участках полигональной тундры и на старых гарях.

Особенно сложен выбор мест для закладки фундаментальных реперов. При этом следует учитывать характер грунтов и гидрологию на глубине до 4—5 метров (для этих целей используют легкие механические буры). В горных районах для закладки таких реперов выбирают места по возможности со скальным грунтом. Если скальная порода покрыта слоем рыхлого грунта, определяют толщину этого слоя.

Стенные реперы закладывают в стены существующих прочных каменных, кирпичных, бетонных и железобетонных зданий и сооружений, а также в вертикальные поверхности монолитных скал. В районах многолетней мерзлоты стенные реперы закладывают в стены зданий и сооружений, построенных только на скальных грунтах. Не рекомендуется закладывать стенные реперы в стены зданий и сооружений, водонапорных башен, расположенных вблизи железнодорожных путей [20].

При выборе мест для закладки реперов рекогносцировщик намечает наиболее удобное и выгодное направление линии нивелирования, по возможности минуя косогоры, крутые подъемы, места с рыхлым грунтом, болота, кустарники, посевы и т. д.

При рекогносцировке намечают линии нивелирования через водные препятствия шириною более 100 м и места для закладки грунтовых реперов в случае нивелирования через широкие водные препятствия по специальной программе.

В результате рекогносцировки получают: схему линий нивелирования и размещения реперов, составленную на картах масштаба 1 : 100 000 или 1 : 300 000, уточненные схемы узлов связи запроектированной линии с существующими, уточненные схемы линий нивелирования через водные препятствия, описания (абрис) мест закладки реперов, акты на утраченные и ненайденные нивелирные знаки, список обследованных и восстановленных нивелирных знаков, материалы геологического обследования мест закладки реперов на нивелирных линиях I класса, уточненную смету расходов на построение нивелирной сети, объяснительную записку с рекомендациями по организации нивелирных работ с учетом требований по технике безопасности и охране труда.

§ 85. ЗАКРЕПЛЕНИЕ НИВЕЛИРНЫХ ЛИНИЙ НА МЕСТНОСТИ

Положение пунктов нивелирной сети закрепляют на местности реперами. Для того чтобы обеспечить сохранность сети на местности и ее высокую точность в течение длительного времени каждый отдельный репер независимо от физико-географических и климатических условий должен быть надежно закреплен в грунте и, следовательно, не должен испытывать ни малейших перемещений относительно него по высоте.

На репер, заложенный в грунт, действуют силы выпучивания, направленные вверх, и силы сопротивления, направленные вниз. Для обеспечения неизменности положения репера по высоте необходимо, чтобы силы выпучивания не превышали сил сопротивления. Теоретические расчеты и практика показывают, что величина тех и других сил зависит от многих факторов: от вида грунта и его физико-механических свойств (скала, глина, известняк и т. п.), влажности, глубины залегания грунтовых вод и глубины промерзания или протаивания грунта; формы и размеров репера, площади соприкосновения поверхности репера с грунтом и сил сцепления с ним, глубины закладки основания репера относительно земной поверхности и т. д. Теоретически строгий учет действия этих и других факторов при разработке конструкции репера и условий его закладки достаточно сложен, особенно потому, что силы выпучивания в деятельном слое грунта существенно изменяются в течение года, причем по-разному в разных климатических и физико-географических районах.

В ЦНИИГАиК в течение многих лет под руководством М. С. Успенского проводились специальные исследования по изучению устойчивости положения реперов в различных грунтах и в разных климатических зонах. Было установлено, что в районах с сезонным промерзанием или оттаиванием грунтов основание репера, его якорь необходимо устанавливать на 0,5—1 м ниже границы деятельного слоя грунта. При этом должны быть известны конкретные глубины промерзания и протаивания грунтов для каждого района работ. В результате выполненных в ЦНИИГАиК исследований составлена Схематическая карта глубин промерзания и протаивания грунтов на территории СССР для установления глубины закладки центров и реперов [1].

На этой карте вся территория страны разделена на зоны с более или менее однотипными грунтами. На ней показаны следующие зоны:

---

[1] *Инструкция.* Центры и реперы государственной геодезической сети.— М.: Недра, 1973.

сезонного промерзания грунтов, с выделением в ней северной и южной частей;

распространения многолетней мерзлоты, также с выделением в ней северной и южной частей;

песков, с выделением районов с подвижными и неподвижными песками.

Для каждой конкретной зоны разработаны особые конструкции реперов, обеспечивающие их стабильное положение в грунте по высоте и сохранность в течение длительного времени. Все реперы подразделены на 11 групп (типов) и составлена Схема областей применения различных типов центров и реперов, приведенная в той же инструкции.

По надежности закрепления в грунте реперы подразделяются на рядовые, закладываемые на линиях нивелирования всех классов через 5—7 км, и фундаментальные, дополнительно устанавливаемые на нивелирных линиях I и II классов через 50—60 км.

По конструкции и местам закладки нивелирные реперы подразделяются на: грунтовые, скальные и стенные. Например, грунтовые реперы (рис. 84) типа 5 применяют в северных районах зоны сезонного промерзания грунтов при закреплении нивелирных линий I — IV классов и нивелирных линий I и II классов в южных районах этой зоны.

Репер состоит из железобетонного пилона в форме параллелепипеда с поперечным сечением 16×16 см и бетонной плиты (якоря). В верхней грани пилона зацементирована марка со сферической поверхностью. Пилоны могут быть заменены асбоцементными трубами диаметром 14—16 см, заполненными бетоном.

При закладке реперов в котлованы используют якори квадратного сечения размерами: в южной зоне — 50×50×20 см, в северной — 60×60×20 см. При закладке реперов в пробуренные скважины диаметром 50 см бетонный якорь изготовляют того же диаметра, что и скважины. Высота якоря в южной зоне — 20 см, а в северной — 35 см; при диаметре скважины 35 см диаметр якоря также 35 см, высота его в южных районах зоны — 50 см, в северных — 80 см.

Нижнее основание репера данного типа располагают на 50 или 65 см ниже границы промерзания грунта при высоте якоря 20 и 35 см соответственно. При высоте якоря 80 см глубину закладки увеличивают на 50 см. Металлическая марка, закрепленная в верхней части бетонного пилона, должна быть на 50 см ниже поверхности земли.

На расстоянии 1 м от репера устанавливают опознавательный знак в виде четырехгранного железобетонного пилона, в верхней части которого прикрепляют на болтах охранную плиту из чугуна или силумина с надписью: «Геодезический

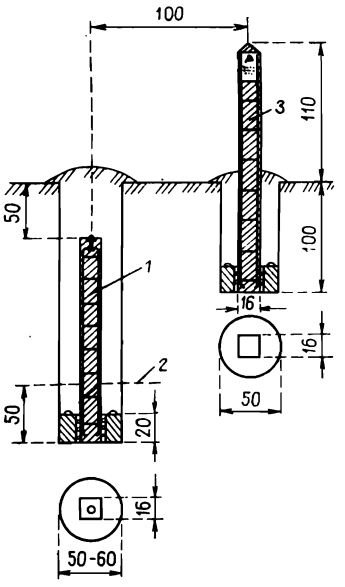


Рис. 84. Грунтовый репер (тип 5):
1 — железобетонный пилон с маркой и якорным устройством; *2* — граница промерзания (оттаивания) грунта; *3* — опознавательный знак

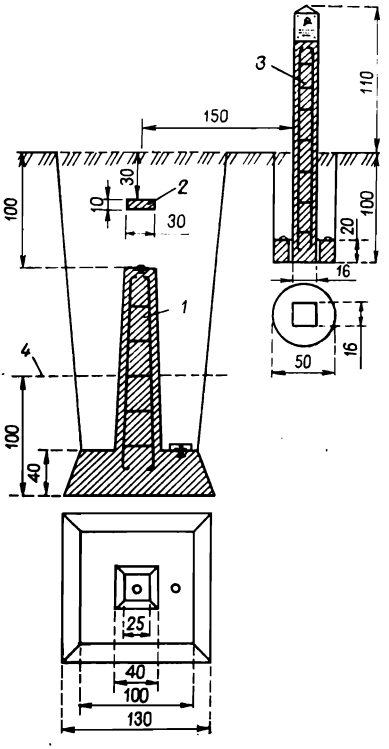


Рис. 85. Фундаментальный репер

пункт. Охраняется государством». Охранная плита должна быть обращена в сторону репера.

В зоне распространения многолетней мерзлоты (к северу от линии Воркута-порт Хантайка-Олекминск-Алдан-Аян) применяют грунтовые реперы типа 7, т. е. такие, как центры пунктов в триангуляции (см. рис. 34). Протаивание грунта для установки трубчатых реперов в районах многолетней мерзлоты осуществляют с помощью термобура или пароотаивателя.

В районах подвижных песков применяют грунтовые реперы типа 9 (см. рис. 35).

В скальных грунтах нивелирные линии I и II классов закрепляют грунтовыми реперами типа 10 или 11 (см. рис. 36).

Фундаментальный репер (рис. 85, размеры даны в см) для районов с сезонным промерзанием грунтов изготовляется из железобетона в виде усеченной четырехгранной пирамиды *1*, составляющей единое целое с бетонной плитой, устанавливаемой на дно котлована глубиной не менее 2,5 м. При этом нижнее основание плиты должно располагаться на 1 м ниже границы наибольшего оттаивания грунта *4*, а верхняя часть

пилона — на 1 м ниже земной поверхности. В верхней части и пилона и плиты укрепляются нивелирные марки, изготовленные из чугуна, бронзы или другого нержавеющего металла. Над репером на глубине 0,3 м от земной поверхности закладывают железобетонную опознавательную плиту *2* размером $30 \times 30 \times 10$ см.

На расстоянии 1,5 м от репера устанавливают опознавательный железобетонный столб с охранной плитой *3*. Репер окапывают опознавательной канавой.

Подробное описание всех 11 типов нивелирных реперов, применяемых в разных физико-географических районах территории СССР, с указанием методов изготовления, закладки, оформления и т. п. дано в инструкции «Центры и реперы государственной геодезической сети».

§ 86. ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЛИНИЙ НИВЕЛИРОВАНИЯ

Высоты реперов в нивелирных сетях СССР вычисляют относительно уровня Балтийского моря (от нуля Кронштадтского футштока) в системе нормальных высот. Для перехода к этой системе высот измеренные превышения между реперами нивелирования I и II классов, а также нивелирования III класса в горных районах, исправляют поправками, которые вычисляют по формуле, указанной в инструкции [11]

$$f_{ik} = -\frac{1}{\gamma_m}(\gamma_{ok} - \gamma_{oi}) H_m + \frac{1}{\gamma_m}(g - \gamma_m) h_{ik},$$

где γ_m — приближенное значение нормальной силы тяжести, равное для всей территории СССР 980 000 мГал; γ_{oi} и γ_{ok} — нормальная сила тяжести на отсчетном эллипсоиде в точках i и k соответственно; H_m — среднее значение из нормальных высот точек i и k; g — измеренное значение силы тяжести; γ — значение нормальной силы тяжести; $(g - \gamma)_m$ — среднее из аномалий силы тяжести в точках i и k; h_{ik} — измеренное превышение между точками i и k.

Расстояния s между смежными гравиметрическими пунктами (табл. 27) устанавливают в зависимости от уклонов местности [21].

В горных районах выполняют дополнительные гравиметрические определения: на всех реперах линий нивелирования I и II классов, на основных перегибах рельефа местности, на всех поворотах линий нивелирования.

На линиях нивелирования III класса в горных районах с уклонами местности до 0,2 для вычисления поправок f используют данные имеющейся гравиметрической съемки при

Таблица 27

Класс нивелирования	Расстояния s (в км) при уклонах местности				
	более 0,2	0,2—0,1	0,1—0,08	0,08—0,06	0,06—0,04
I	—	—	1	2	2
II	1	2—3	4	4	6

расстояниях между гравиметрическими пунктами не более 10 км.

При уклонах более 0,2 выполняют дополнительную гравиметрическую съемку по специальной программе. При уклонах менее 0,05 поправки f в измеренные превышения при нивелировании III класса не вычисляют.

При нивелировании I и II классов на местности с уклонами от 0,04 до 0,03 поправки f в превышения вычисляют на основе гравиметрических определений на пунктах нивелирования или карты детальной гравиметрической съемки с сечением до 2 мГал. При уклонах менее 0,03 можно пользоваться любой гравиметрической картой.

Точки местности, на которых следует выполнить гравиметрические определения, намечают на карте при составлении проекта нивелирной сети. Гравиметрические пункты закрепляют на местности временными знаками или совмещают с характерными местными предметами (километровыми столбами, устоями мостов и т. п.), которые включают в нивелирную линию. При выполнении гравиметрических определений на ранее проложенных линиях нивелирования высоты гравиметрических пунктов определяют с точностью 2—3 м любыми методами. Плановые координаты гравиметрических пунктов определяют с ошибками не более 500 м по картам масштаба 1 : 100 000 и крупнее, а также другими способами.

Поправки f за переход к системе нормальных высот вычисляют на стадии предварительных вычислений и с их учетом составляют ведомости измеренных превышений.

Глава 12

ВЫСОКОТОЧНЫЕ НИВЕЛИРЫ И ИНВАРНЫЕ РЕЙКИ

§ 87. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫСОКОТОЧНЫМ НИВЕЛИРАМ И ИНВАРНЫМ РЕЙКАМ

Высокоточные нивелиры

При высокоточном нивелировании необходимо определять превышения с наивысшей точностью, характеризуемой в настоящее время средними квадратическими ошибками на 1 км двойного хода: случайной 0,3—0,5 мм и систематической 0,03—0,05 мм. Для того чтобы обеспечить столь высокую точность результатов измерений необходимо использовать нивелиры и рейки соответствующей точности, а также применять наиболее совершенные методы наблюдений и обработки их результатов, позволяющие наиболее полно ослаблять влияние всех видов источников ошибок, в том числе личных, приборных и от внешней среды, особенно ошибок систематических независимо от их величины.

При нивелировании на каждой станции в момент отсчета по рейке визирный луч должен быть строго горизонтален. В горизонтальное положение визирный луч приводят с помощью уровня или компенсатора, причем с некоторой средней квадратической ошибкой $m_г$.

Рассчитаем допустимую величину этой ошибки и соответствующее ей увеличение зрительной трубы и цену деления уровня. При этом будем полагать, что условие параллельности оси уровня и визирной оси трубы выполнено или учтено дополнительно, а расстояние от нивелира до рейки равно 50 м.

Пусть установленная средняя квадратическая ошибка определения среднего превышения из прямого и обратного ходов на 1 км нивелирного хода равна минимальной величине

$$m_{h_{ср}} = 0{,}25 \text{ мм/км}.$$

Тогда ошибка определения превышения только из прямого или обратного хода не должна превышать

$$m_{h_{пр}} = m_{h_{ср}}\sqrt{2} = 0{,}35 \text{ мм/км}.$$

При расстояниях между нивелиром и рейками 50 м в нивелирном ходе длиной 1 км в условиях равнинной местности необходимо выполнить измерение на десяти нивелирных станциях. С учетом этого допустимая средняя квадратическая ошибка определения превышений на каждой отдельной станции должна быть не более

$$m_{h_{ст}} = \frac{m_{h_{пр}}}{\sqrt{10}} = \frac{0{,}35}{\sqrt{10}} = 0{,}11 \text{ мм}.$$

Превышения между точками определяют на каждой станции дважды (по основной и дополнительной шкалам реек) по правилу «взгляд назад минус взгляд вперед», т. е.

$$h_{ст} = З — П,$$

и затем находят среднее из двух значений превышения.

Приняв ошибки взгляда на каждую рейку одинаковыми и равными $m_{взг}$, выразим среднюю квадратическую ошибку определения превышения на станции через ошибки взгляда:

$$m_{h_{ст}} = m_{взг}\sqrt{2}.$$

Это равенство остается без изменения и в том случае, когда превышения вычисляют только по основным или только по дополнительным шкалам реек. Если известны $m_{h_{ст}}$, можно найти среднюю квадратическую ошибку взгляда по одной шкале рейки

$$m_{взг} = \frac{m_{h_{ст}}}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}11}{\sqrt{2}} = 0{,}08 \text{ мм}.$$

Ошибка взгляда складывается из трех составляющих. Прежде чем произвести отсчет по рейке, совмещают изображения противоположных концов пузырька уровня (с ошибкой $m_{сов}$) путем наклона трубы нивелира с помощью элевационного винта. Затем наводят биссектор микрометра на штрих рейки (с ошибкой $m_{нав}$). Наконец, по шкале микрометра фиксируют отсчет (с ошибкой $m_{о}$). Поскольку ошибка отсчета на порядок меньше других ($m_{о} = 0{,}1\,\mu = 0{,}005$ мм, где μ — цена деления шкалы микрометра), то ею в данном случае можно пренебречь. Тогда для ошибки взгляда получим

$$m^2_{взг} = m^2_{сов} + m^2_{нав}.$$

Потребуем чтобы ошибка взгляда $m_{взг}$ была меньше или равна ошибке $m_{г}$ горизонтирования визирного луча, т. е. $m_{взг} \leqslant m_{г}$. Тогда в соответствии с принципом равных влияний будем иметь

$$m_{сов} = m_{нав} = m_{г}.$$

С учетом этого равенства

$$m_{взг} = m_{г}\sqrt{2},$$

откуда найдем

$$m_{г} = \frac{m_{взг}}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}08}{\sqrt{2}} = 0{,}06 \text{ мм}.$$

Полученная величина ошибки $m_г = 0{,}06$ мм соответствует принятому расстоянию $d = 50$ м между нивелиром и рейками. Выразив эту ошибку в угловой мере, найдем таким образом допустимую величину средней квадратической ошибки горизонтирования визирного луча, осуществляемого с помощью уровня или компенсатора наклона нивелира,

$$m''_г = \frac{m}{d}\rho = \frac{0{,}06 \cdot 2 \cdot 10^5}{50\,000} \leqslant 0{,}23''.$$

Приняв эту величину за исходную, рассчитаем требуемую цену деления уровня и необходимое увеличение трубы нивелира.

Минимальное смещение пузырька уровня, которое можно заметить на глаз, составляет $\tau/10$, где τ — цена деления шкалы уровня на 2 мм. В высокоточных нивелирах применяют систему призм, позволяющих совмещать изображения противоположных концов пузырька уровня, благодаря чему ошибка приведения пузырька уровня в нуль-пункт уменьшается в 4—5 раз (в среднем в 4,5 раза) и становится равной

$$m_{сов} = \frac{\tau}{10 \cdot 4{,}5} = \tau/45.$$

Отсюда получим

$$\tau'' = 45 m_{сов}.$$

Подставив вместо $m_{сов}$ установленную ошибку горизонтирования визирного луча $m_г = m_{сов} = 0{,}23''$, найдем искомую цену деления уровня

$$\tau = 45 \cdot 0{,}23 = 10''.$$

Необходимое увеличение трубы нивелира рассчитаем следующим образом. Известно, что средняя квадратическая ошибка наведения биссектора микрометра на штрих рейки при благоприятных погодных условиях зависит от расстояния d между нивелиром и рейкой, предельной разрешающей способности глаза $P_г$ и увеличения v зрительной трубы нивелира. Эта зависимость при заданном расстоянии d устанавливается формулой

$$m_{нав} = \frac{P_г}{v}.$$

Учитывая, что предельная разрешающая способность глаза равна $P_г = 10''$ [22] и приняв во внимание полученное выше для расстояния $d = 50$ м значение ошибки наведения

$m_{нав} = m_г = 0{,}23''$, найдем требуемое увеличение зрительной трубы нивелира для расстояний до реек не более 50 м, равное

$$v = \frac{p_г}{m_{нав}} = \frac{10}{0{,}23} = 43^{\times}.$$

Выполненные выше расчеты являются приближенными, однако они хорошо согласуются с практикой. Они показывают, что нивелиры, предназначенные для высокоточного нивелирования, должны иметь зрительную трубу с увеличением не менее $40^{\times}$, точный уровень с ценой деления не более $10''$ на 2 м, и обеспечивать горизонтирование (самоустановку) визирного луча со средней квадратической ошибкой порядка $0{,}2''$. Для приведения перед каждым отсчетом по рейке визирной оси в горизонтальное положение со столь высокой точностью (полагая, что угол $i=0$) нивелир, кроме точного уровня, должен иметь элевационный винт высокого качества, позволяющий осуществлять наклоны трубы с такой же точностью. Для оценки дробной части делений рейки при отсчетах по ней с точностью до 0,01 мм служит оптический микрометр нивелира соответствующей точности. Следует иметь в виду, что нивелирные работы высокой точности выполняют в разнообразных физико-географических и климатических условиях при температуре воздуха от —30 до +50 °С. Поэтому высокоточный нивелир должен исправно работать во всем этом диапазоне температур, без сколько-нибудь заметного снижения приборной точности. В связи с этим ставится, в частности, требование, чтобы изменение угла i между осью уровня и визирной осью трубы при изменении температуры нивелира на один градус не превышало $0{,}5''$. Для удобства работы с нивелиром сетка нитей, а также изображения противоположных концов пузырька уровня и отсчетной шкалы оптического микрометра должны находиться в поле зрения трубы. Масса нивелира должна быть сравнительно небольшой. С учетом всех этих противоречивых требований разрабатываются и создаются современные нивелиры высокой точности.

Инварные рейки

Нивелирные рейки являются рабочей мерой длины при определении превышений, поэтому они должны быть изготовлены очень тщательно, а деления нанесены с предельно высокой точностью. Рейки в течение длительного времени эксплуатации должны сохранять длины метровых и любых других интервалов практически неизменными при работе в разнообразных физико-географических и климатических условиях при температуре воздуха от —30 до +50 °С. Для того чтобы длина всей рейки и отдельных интервалов возможно меньше зависела от

изменений температуры, рабочую часть рейки, на которой находится шкала с делениями, изготовляют из инвара, имеющего малый температурный коэффициент расширения, равный в среднем $(2 \div 2{,}5) \times 10^{-6}$. При выполнении особо точных измерений в горных районах при ясной погоде летом, когда разница температур инварных полос задней и передней реек достигает 10 °С и более, рейки должны быть снабжены термодатчиками для определения их температуры и вычисления соответствующих поправок в результаты измерений. Рейки должы систематически эталонироваться на стационарном компараторе с целью определения поправок в метровые, а при необходимости, и в дециметровые интервалы. В принципе следовало бы определять и учитывать поправки в положение каждого отдельного штриха на шкале рейки. Рейки, равно как и нивелиры, требуют аккуратного обращения с ними и тщательного ухода как в процессе работы, так и при их хранении. Они вместе с нивелирами должны систематически подвергаться исследованиям с целью определения их пригодности для высокоточных измерений.

§ 88. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СХЕМА И ОСНОВНЫЕ ЧАСТИ ВЫСОКОТОЧНОГО НИВЕЛИРА

В настоящее время высокоточные нивелиры выпускаются двух типов: нивелиры с уровнем при трубе и нивелиры с компенсаторами углов наклона трубы. Высокоточный нивелир состоит из следующих основных частей (рис. 86): осевой системы, зрительной трубы, точного уровня или заменяющего его компенсатора углов наклона трубы, отсчетного устройства.

Осевая система состоит из вертикальной оси *1*, жестко соединенной с подставкой *9* нивелира, и втулки *2*, соединенной с корпусом трубы нивелира. На подставке нивелира крепится круглый уровень с ценой деления порядка $8'$ для приведения вертикальной оси в отвесное положение. Осевая система высокоточных нивелиров с уровнем при трубе позволяет вращать трубу нивелира не только вокруг вертикальной оси, но и дает возможность наклонять трубу в вертикальной плоскости на небольшие углы относительно горизонта с помощью элевационного винта *8*, когда пузырек уровня приводят на середину.

Зрительная труба прямая, центральная. Ее основными частями являются объектив, окуляр, фокусирующая линза и сетка нитей. Правая часть биссектора сетки нитей (рис. 87) имеет вид острого угла, биссектрисой которого является продолжение горизонтальной нити, расположенной в левой части биссектора. Такая форма биссектора сетки нитей позволяет повысить точность наведения биссектора на штрих рейки.

Точный уровень при трубе нивелира, а также компенсатор углов наклона трубы предназначены для приведения визирной

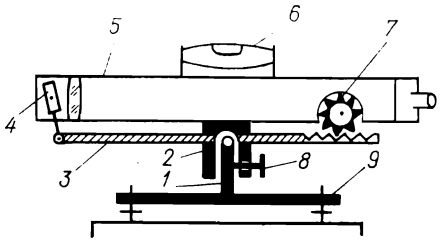


Рис. 86. Геометрическая схема высокоточного нивелира:

1 — вертикальная ось; *2* — втулка; *3* — рычаг; *4* — плоскопараллельная пластина; *5* — зрительная труба; *6* — точный уровень; *7* — измерительная шестерня; *8* — элевационный винт; *9* — подставка

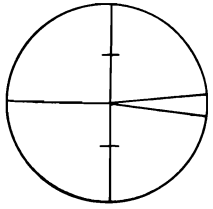


Рис. 87. Сетка нитей трубы высокоточного нивелира

оси трубы в горизонтальное положение. Высокоточные нивелиры без компенсатора имеют контактный уровень со стеклянной трубкой с запаянными концами, которая помещается внутри ампулы уровня с наполнителем. Такой уровень обеспечивает высокую чувствительность к наклонам трубы во всем рабочем диапазоне изменений температуры от —20 до +50 °С, что очень важно. Уровень снабжен юстировочными винтами для установки его оси параллельно визирной оси трубы. Для того чтобы привести пузырек уровня в нуль-пункт, когда визирная ось трубы горизонтальна, с помощью элевационного винта наклоняют трубу нивелира до тех пор, пока не совместятся изображения противоположных концов пузырька. Устройство компенсаторов углов наклона трубы нивелира может быть весьма разнообразным.

Отсчетное устройство высокоточного нивелира представляет собой оптический микрометр, в который входит плоскопараллельная пластинка (см. рис. 86), помещаемая перед объективом или внутри трубы; измерительная шестерня, соосно соединенная с головкой, на шкале которой нанесено 100 делений, соответствующих одному делению на рейке, т. е. 5 мм; рычаг, на одном конце шарнирно соединенный с плоскопараллельной пластинкой, а на другом, имеющий зубчатку, входящую в сцепление с измерительной шестерней. Возможны и другие схемы устройства оптического микрометра.

При производстве отсчетов по рейке (рис. 88) с помощью элевационного винта наклоняют трубу нивелира и совмещают изображения концов пузырька контактного уровня. При этом визирная ось трубы должна занять горизонтальное положение *MN*. Затем наклоняют плоскопараллельную пластинку *1*, перемещая рычаг *2* путем вращения головки *3* отсчетного устройства, пока биссектор сетки нитей трубы не совместится с изображением ближайшего (младшего) штриха *a* на рейке. Взяв

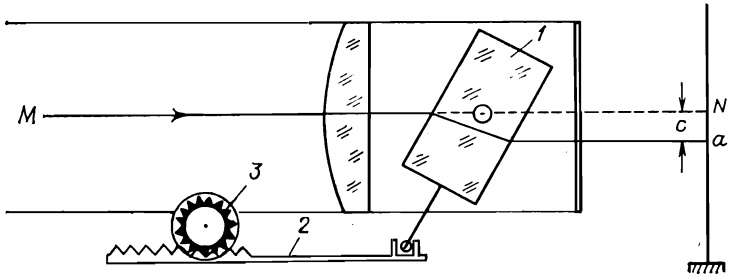


Рис. 88. Схема работы оптического микрометра нивелира

отсчет по шкале микрометра, определим таким образом дробную часть $c=aN$ деления рейки. Этот отсчет прибавляют к значению штриха a и получают окончательный отсчет по рейке в виде суммы $N=a+c$. Пусть, например, биссектор сетки нитей наведен на штрих рейки $a=77{,}5$ и отсчет по шкале микрометра равен $c=44$, тогда окончательный отсчет по рейке, выраженный в полудециметрах, будет $N=a+c=77{,}544$.

§ 89. ВЫСОКОТОЧНЫЕ НИВЕЛИРЫ С УРОВНЕМ

В настоящее время выпуск нивелиров в нашей стране осуществляется в соответствии с ГОСТ 10528—76 «Нивелиры». Нивелиры подразделяются на высокоточные, имеющие шифр Н-05, точные Н-3 и технические Н-10. Первые служат для определения превышений со средней квадратической ошибкой не более 0,5 мм на 1 км двойного хода, вторые — с ошибкой не более 3 мм/км и третьи — с ошибкой не более 10 мм/км (при этом имеются в виду ошибки, вычисляемые по расхождениям превышений из прямых и обратных ходов).

Нивелиры Н-05 предназначены для нивелирования I и II классов в государственной геодезической сети, на геодинамических полигонах и при инженерно-геодезических работах высокой точности. Нивелиры Н-3 используют для нивелирования III и IV классов, а также при инженерно-геодезических изысканиях.

Нивелиры выпускают с уровнем при трубе и с компенсатором углов наклона нивелира. При наличии компенсатора шифр нивелира дополняется буквой К, например, Н-05К.

Высокоточные нивелиры Н-05 и Н-05К должны удовлетворять следующим требованиям (табл. 28).

Кроме нивелиров Н-05, серийный выпуск которых начат в начале 80-х годов, в геодезическом производстве широко используются высокоточные нивелиры прежних конструкций, например, такие как НА-1, НБ, Н-1, Н-2.

Таблица 28

Параметр	Н-05	Н-05К
Средняя квадратическая ошибка превышения на 1 км двойного хода, мм, не более	0,5	0,5
Средняя квадратическая ошибка превышения на станции, мм, не более, при расстоянии от нивелира до реек:		
30 м	0,15	0,15
50 м	0,20	0,20
Увеличение зрительной трубы не менее, крат	40	40
Цена деления уровня на 2 мм:		
при трубе, угл. с	10±1	
установочного, угл. мин	5±1	5±1
Цена деления шкалы отсчетного микрометра, мм	0,05	0,05
Наименьшее расстояние визирования, не более, м	5	5
Диапазон работы компенсатора, не более, угл. мин		±8
Ошибка самоустановки линии визирования, не более, угл. с	—	0,2
Систематическая ошибка работы компенсатора на 1′ наклона оси нивелира, не более, угл. с	—	0,05
Время затухания колебаний подвесной системы компенсатора, не более, с	—	2

Нивелиры типа НА-1 были одними из первых отечественных нивелиров высокой точности, серийный выпуск которых был налажен в конце 30-х годов. Плоскопараллельная пластинка оптического микрометра в нивелирах этого типа установлена перед объективом трубы в виде насадки на трубу и соединена с помощью рычага с отсчетным барабаном. Пластинка и рычаг не защищены должным образом от влияний внешней среды (отсутствует даже предохранительное стекло перед пластинкой), что является одним из существенных недостатков этого нивелира. В настоящее время нивелиры НА-1 применяются при нивелировании не выше II класса.

На смену нивелирам НА-1 пришли более совершенные нивелиры типа НБ, конструкция которых была разработана В. А. Белицыным и Б. В. Фефиловым. Серийный выпуск нивелиров НБ был начат в конце 40-х годов. Характерной особенностью этих нивелиров является то, что плоскопараллельная пластинка оптического микрометра помещена внутри трубы и с помощью зубчатых передач непосредственно связана с отсчетным барабаном микрометра. Благодаря этому была повышена надежность и точность работы отсчетного устройства, а следовательно, и точность нивелира в целом. Нивелиры типа НБ до сих пор применяются для нивелирных работ высокой точности.

Последующие изыскания приборостроителей привели к разработке и созданию высокоточных Н1 и точных Н2 нивелиров

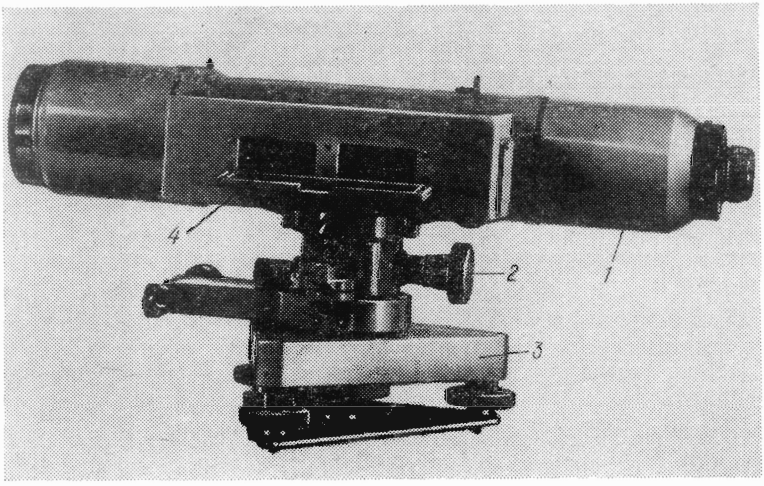


Рис. 89. Нивелир Н1:
1 — зрительная труба нивелира; *2* — элевационный винт; *3* — подставка с подъемными винтами; *4* — контактный уровень

более совершенной конструкции, предназначенных соответственно для нивелирования I и II классов. Серийный выпуск нивелиров типа Н1 был начат в начале 60-х годов, а нивелиров типа Н2 — в начале 70-х.

При разработке конструкции нивелира Н1 за основу был принят нивелир типа НБ. Поэтому оптическая схема данного прибора (рис. 89) принципиально не отличалась от схемы нивелира НБ. Плоскопараллельная пластинка по-прежнему находится внутри трубы. Нивелир Н1 по своим техническим характеристикам (табл. 29) отличается от нивелира НБ главным образом тем, что имеет оптику более высокого качества и оснащен теплозащитным кожухом, предохраняющим зрительную трубу и контактный уровень с призменным блоком от резких колебаний температуры воздуха. Кожух позволяет выравнивать температуру всех внутренних узлов нивелира. Благодаря этому изменения угла i между осью уровня и визирной осью трубы становятся более плавными и меньшими по величине, что положительно сказывается на точности результатов нивелирования.

Одним из важных достоинств данного нивелира является то, что цена деления оптического микрометра не зависит от расстояния между нивелиром и рейками, поскольку плоскопараллельная пластинка находится внутри трубы в пучке сходящихся лучей и мало подвержена температурным воздействиям. При трубе нивелира имеется цилиндрический контактный

Таблица 29

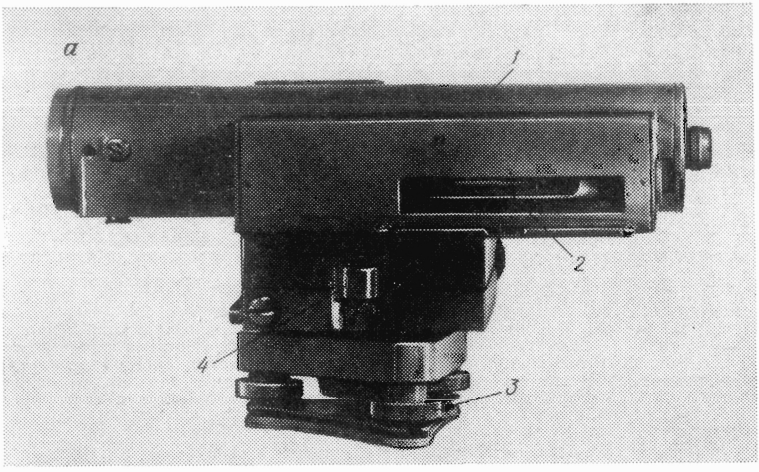
Техническая характеристика	Н1 (СССР)	Н-05 (СССР)	Ni004 (ГДР)	НС-2 (СССР)	Ni002 (ГДР)	Ni007 (ГДР)
Увеличение зрительной трубы, крат	45	42	44	45	40	31,5
Диаметр свободного отверстия объектива, мм	60	52	56	50	55	40
Наименьшее расстояние визирования, м						
с насадкой	4,2	1,0	3,0	4,5	1,5	2,2
без насадки		5,0				
Коэффициент дальномера	100	100	100	100	100	100
Постоянная дальномера, м	0,35	0,00	0,00	0,00	0,37	0,00
Цена деления уровня на 2 мм:						
при трубе, угл. с	10	10	10	—	—	—
установочного, угл. мин	2	5	2	5	8	8
Цена деления шкалы микрометра, мм	0,05	0,05	0,05	—	0,05	0,05
Диапазон работы компенсатора, угл. мин	—	—	—	10	10	10
Чувствительность компенсатора к наклонам трубы нивелира, угл. с	—	—	—	0,3	0,05	0,15
Масса нивелира без упаковки, кг	6,9	5,6	6,2	7,0	6,5	3,9

компенсированный уровень с ценой деления 10″ на 2 мм. При изменении температуры нивелира на 1 °С длина пузырька уровня изменяется не более чем на 0,1—0,2 мм. Нивелир имеет элевационный и наводящий по азимуту винты; предназначен для нивелирования I класса.

Высокоточный нивелир Н-05 (рис. 90, *а*) разработан на базе нивелира Н-2. Нивелир имеет апохроматическую зрительную трубу (рис. 91) с увеличением 42^{x}; перед объективом трубы размещены насадочная линза *1*, оптический клин *2* и плоскопараллельная пластинка *3*. Оптическая схема нивелира передает изображение концов пузырька цилиндрического контактного уровня, а также шкалы отсчетного устройства в поле зрения трубы (см. рис. 90, *б*). Оптический клин позволяет регулировать величину угла i путем поворота его вокруг визирной оси трубы. Зрительная труба, контактный уровень с блоком призм, передающих изображения, помещены в теплозащитный кожух, благодаря чему изменения угла i при изменении температуры нивелира на 1 °С не превышает 0,5″.

Нивелир Н-05 удобен в работе и обеспечивает высокую точность результатов нивелирования I—II классов (см. табл. 29).

Высокоточный нивелир Ni 004 Народного предприятия «Карл Цейс Йена» (ГДР) характеризуется высокими техническими показателями (см. табл. 29). Он широко используется при ни-



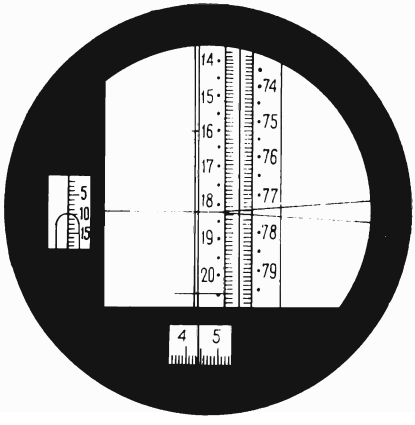


Рис. 90. Нивелир Н-05 (*а*): *1* — зрительная труба в термоизолирующем кожухе; *2* — контактный уровень; *3* — подставка нивелира; *4* — установочный уровень; поле зрения трубы (*б*)

велировании I и II классов. Все основные части нивелира, включая зрительную трубу, контактный цилиндрический уровень с компенсированной ампулой, оптический микрометр с плоскопараллельной пластинкой, расположенной между защитным стеклом и объективом трубы, помещены в теплозащитный стальной кожух. Одним из основных достоинств нивелира является незначительное изменение угла i при изменении температуры нивелира на 1 °С. В поле зрения трубы выведены изображения сетки нитей, концов пузырька уровня и отсчетной шкалы оптического микрометра, что создает удобства в работе с нивелиром. Для повышения точности наведения биссектора на штрих при разных расстояниях от нивелира до рейки сетка нитей имеет два подвижных биссектора

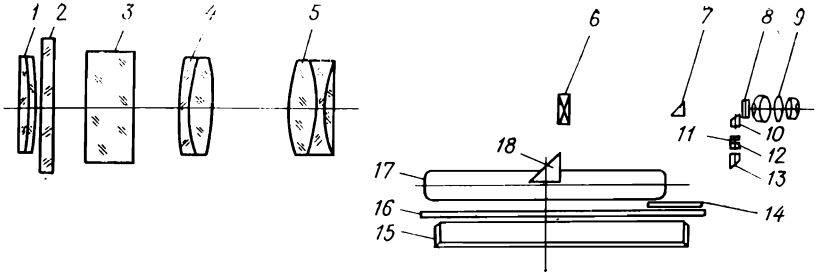


Рис. 91. Оптическая схема нивелира Н-05:
1 — насадочная линза; *2* — оптический клин; *3* — плоскопараллельная пластинка; *4—5* — линзы объектива; *6* — фокусирующая линза; *7* — передающая призма оптического микрометра; *8* — сетка нитей; *9* — окуляр; *10—13* и *18* — оптическая система передачи изображения концов пузырька уровня в поле зрения окуляра; *14* — шкала оптического микрометра; *15* — зеркало подсветки; *16* — защитное стекло цилиндрического уровня *17*

с разными углами — один в правой части поля зрения для расстояний более 20 м, другой (с большим углом) — в левой части для расстояний менее 20 м.

§ 90. ВЫСОКОТОЧНЫЕ НИВЕЛИРЫ С КОМПЕНСАТОРАМИ

В связи с автоматизацией процесса геодезических измерений, широкое распространение получили нивелиры с самоустанавливающейся линией визирования, у которых вместо уровня использован компенсатор углов наклона нивелира, позволяющий автоматически и почти мгновенно приводить визирную ось трубы в горизонтальное положение, причем с высокой точностью. Благодаря этому существенно повышается производительность труда при измерениях на станциях.

Основы теории нивелиров с компенсаторами впервые были заложены советским ученым В. Н. Чуриловским в 1937 г. Первый нивелир с самоустанавливающейся линией визирования НС-2 (см. табл. 29), нашедший практическое применение, был создан в ЦНИИГАиК в 1945 г. Г. Ю. Стодолкевичем. В этом нивелире использован жидкостный компенсатор. Большой вклад в развитие теории жидкостных и других компенсаторов внесли Н. А. Гусев, Ю. И. Беспалов, Ф. Г. Кочетов и др.

В настоящее время выпускаются разнообразные нивелиры с компенсаторами (несколько десятков типов). Многие из них отличаются очень высокой точностью, компактностью и оригинальностью способов компенсации угла наклона зрительной трубы. В качестве чувствительных элементов в компенсаторах применяют маятниковые системы, уровни и гидростатические устройства. Наибольшее распространение получили маятниковые компенсаторы, изменяющие направление хода визирной оси.

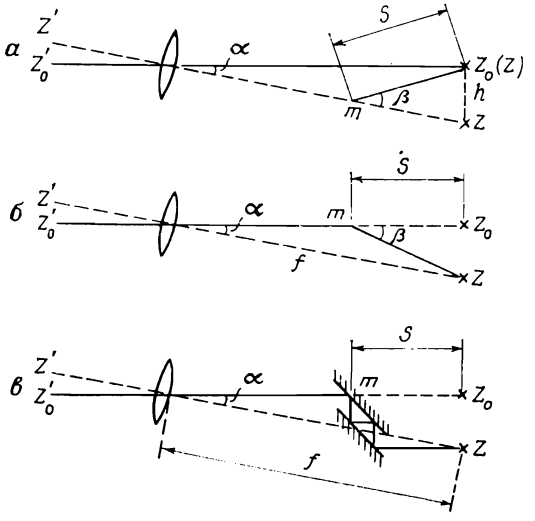


Рис. 92. Способы компенсации угла наклона зрительной трубы

Рассмотрим основные способы компенсации угла наклона зрительной трубы. Пусть визирная ось $Z'Z$ трубы образует с горизонтальным направлением $Z_0'Z_0$ малый угол α, а перекрестие сетки нитей находится в точке Z. Компенсировать угол наклона α зрительной трубы можно тремя способами: 1) перемещением сетки нитей из положения Z в положение Z_0 (рис. 92, *а*); 2) изменением направления горизонтального луча в точке m так, чтобы он прошел через перекрестие Z смещенной сетки (рис. 92, *б*); 3) параллельным смещением горизонтального луча на такую величину Z_0Z, чтобы он прошел через перекрестие Z смещенной сетки (рис. 92, *в*).

Все компенсаторы в зависимости от способа компенсации угла наклона зрительной трубы можно подразделить на три типа: 1) компенсаторы с подвижной сеткой нитей; 2) компенсаторы с поворотом визирного луча и 3) компенсаторы с параллельным смещением визирного луча. Компенсаторы первых двух типов должны удовлетворять уравнению

$$f\alpha = s\beta,$$

где f — фокусное расстояние объектива, α — наклон зрительной трубы, s — расстояние от точки m поворота луча до сетки нитей, т. е. длина рычага физического маятника, несущего сетку нитей, β — наклон рычага. Отношение

$$f/s = \beta/\alpha = K$$

называют угловым увеличением компенсатора.

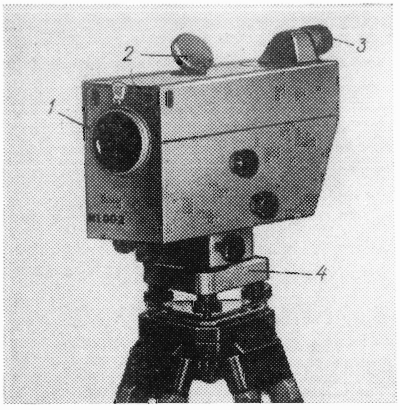
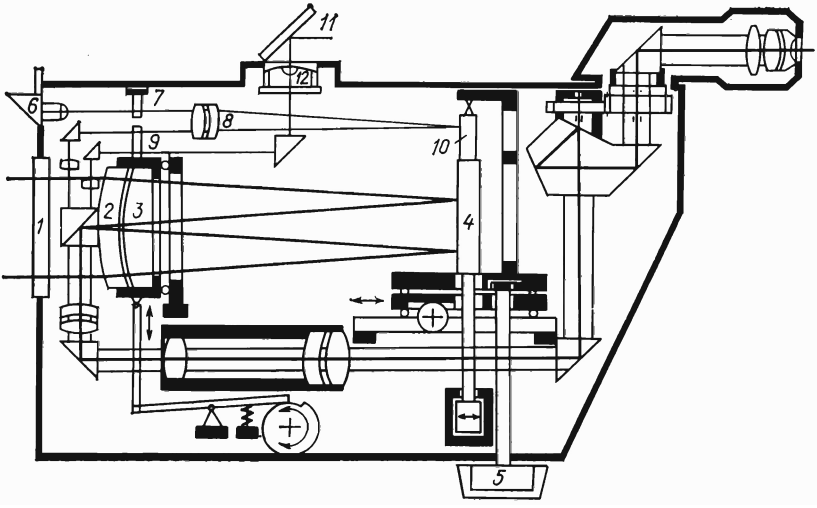


Рис. 93. Нивелир с компенсатором Ni002:

1 — объектив; *2* — зеркало установочного уровня; *3* — окуляр; *4* — подставка нивелира

Рис. 94. Оптическая схема нивелира с компенсатором Ni002:

1 — клинообразное защитное стекло; *2* — сетка нитей; *3* — объектив; *4* — зеркало компенсатора; *5* — переключатель компенсатора; *6* — призма подсветки; *7* — жесткий индекс микрометра; *8* — объектив; *9* — шкала оптического микрометра; *10* — зеркало; *11* — зеркало установочного уровня *12*



Компенсатор третьего типа, смещающий луч параллельно самому себе, должен удовлетворять уравнению

$$f\alpha = \nu s\alpha \text{ или } f = \nu s,$$

где ν — коэффициент, зависящий от числа отражений визирного луча, s — длина рычага физического маятника. Описание и теория расчетов компенсаторов различных типов приведены в работах [13, 22].

Нивелир Ni 002 с компенсатором (рис. 93) выпускается Народным предприятием «Карл Цейс Йена» (ГДР), характеризуется высокими технико-экономическими показателями (см. табл. 29) и широко используется в геодезическом производстве при моторизованном нивелировании I—II классов. Компенсатор нивелира (рис. 94) изготовлен в виде подвижного

зеркала *3*, которое находится на расстоянии $f/2$ от главной точки объектива трубы нивелира. Коэффициент углового увеличения компенсатора равен 1. Объектив зрительной трубы нивелира двухкомпонентный. На передней компоненте установлена сетка нитей. Перед объективом расположено защитное стекло, изготовленное в виде оптического клина.

Для ослабления влияния ошибок, обусловленных недо- или перекомпенсацией наклона трубы нивелира, имеется переключатель, позволяющий поворачивать компенсатор с зеркалом на 180°. Отсчеты по основной шкале рейки берут при одном, а по дополнительной шкале — при другом (после поворота компенсатора на 180°) положении зеркала компенсатора. В поле зрения трубы передаются изображения сетки нитей, шкалы оптического микрометра и установочного (круглого) уровня.

Визирный луч приводится в горизонтальное положение почти мгновенно (через 0,5 с) со средней квадратической ошибкой не более 0,05″ (в среднем при двух положениях компенсатора). Нивелир работает при температуре от —20 до +50 °С. Для удобства работы с нивелиром фокусирующая линза трубы, оптический микрометр и винт азимутальной наводки трубы имеют две головки, расположенные по обе стороны нивелира. Кроме того, окуляр зрительной трубы, размещенный на верхней стенке корпуса нивелира, может поворачиваться по азимуту от 0 до 240°, что позволяет наводить трубу нивелира поочередно на одну и другую рейки, не меняя местоположение наблюдателя.

Нивелир Ni 007 с компенсатором (рис. 95) Народного предприятия «Карл Цейс Йена» (ГДР) имеет форму перископа. Он также как и Ni 002 обладает высокими технико-экономическими показателями (см. табл. 29) и предназначен для нивелирования II, III и IV классов. Согласно оптической схеме нивелира (рис. 96) визирный луч проходит через защитное стекло, пентапризму и направляется в объектив. Пентапризму используют в качестве оптического микрометра при нивелировании II класса. Она может поворачиваться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к визирной линии, смещая при этом горизонтальный луч по высоте максимально на 5+0,5 мм. При нивелировании III и IV классов пентапризму закрепляют неподвижно при помощи арретира и используют шашечные рейки с сантиметровыми делениями.

Между сеткой нитей и фокусирующей линзой находится компенсатор — прямоугольная призма, подвешенная на металлической ленточке — рычаге в точке, совмещенной с главной задней точкой объектива. Длина рычага маятниковой подвески, т. е. расстояния от точки подвеса до поверхности призмы, принята равной величине $s=f/2$, где f — фокусное расстояние объектива.

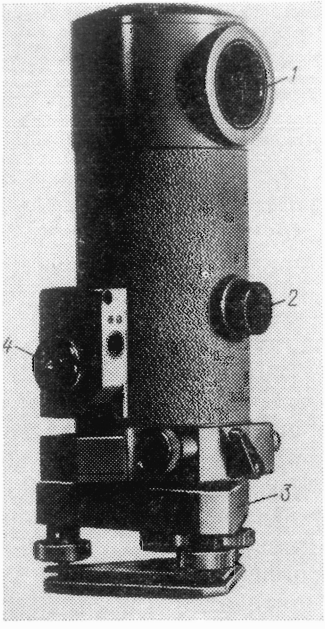


Рис. 95. Нивелир с компенсатором Ni007:
1 — объектив трубы; *2* — головка отсчетного устройства; *3* — подставка нивелира; *4* — окуляр трубы

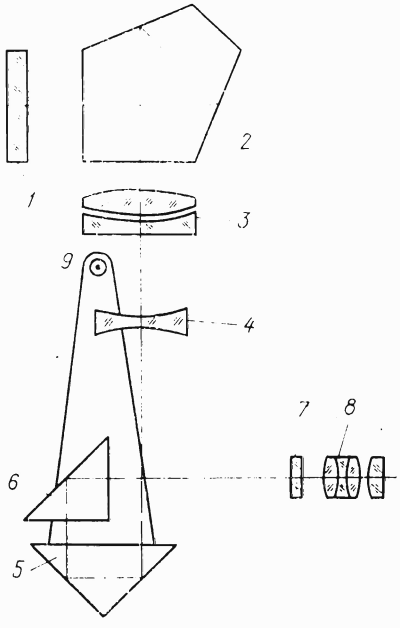


Рис. 96. Оптическая схема нивелира Ni007:
1 — защитное стекло; *2* — пентапризма; *3* и *4* — линзы объектива; *5* — компенсатор; *6* — прямоугольная призма; *7* — сетка нитей; *8* — окуляр; *9* — точка подвеса компенсатора

При наклоне вертикальной оси нивелира на малый угол α сетка нитей трубы опустится вниз на величину $h=f\alpha$, призма также опустится вниз и кроме того сместится в плоскости горизонта по направлению визирного луча на величину $x=s\alpha$; визирный же луч на выходе его из призмы сместится на $2x$, т. е. на удвоенную величину. Основным условием компенсации угла наклона нивелира является соблюдение равенства $f\alpha=2x=h$. При $x=s\alpha$ получим $s=f/2$. В нивелире Ni 007 это условие выполнено. Поэтому визирный луч при выходе из зрительной трубы всегда горизонтален.

Угол наклона вертикальной оси нивелира не должен превышать 10′. Точность установки визирной линии в горизонтальное положение колеблется от 0,5 до 1″ в зависимости от угла наклона нивелира. При нивелировании II класса расстояния от нивелира до реек рекомендуются не более 35 м, поскольку увеличение трубы нивелира невелико ($31{,}5^{x}$), а точность горизонтирования визирного луча сравнительно мала.

Демпфирование. После установки нивелира с компенсатором на штатив колебания качающихся элементов компенсатора

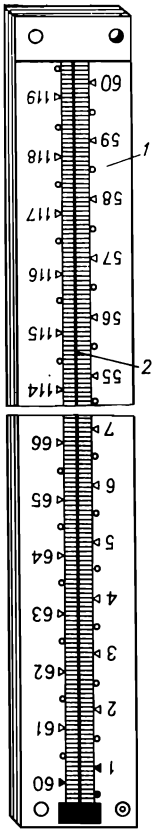
должны затухать практически мгновенно (в течение долей секунды). Для этого используют специальное устройство — демпфер, который «гасит» эти колебания. Демпферы бывают разных типов: воздушные, жидкостные, магнитные и др. В компенсаторах маятникового типа чаще всего используют воздушные демпферы в виде цилиндра со свободно перемещающимся внутри него поршнем. Зазор между поршнем и стенками цилиндра должен быть достаточно малым, чтобы в левой и правой частях цилиндра при качании маятниковой системы могли создаваться зоны поочередно повышенного и пониженного давления воздуха, что приводит к быстрому затуханию колебаний маятника. В жидкостных компенсаторах гашение колебаний осуществляется только за счет вязкости самой жидкости, заполняющей демпфирующее устройство. В магнитных демпферах гашение колебаний металлических маятников в неоднородном магнитном поле достигается благодаря вихревым токам, возникающим в результате индукции.

Особенности нивелиров с компенсаторами. Нивелирам с компенсатором присущи как достоинства, так и недостатки. Одним из важных достоинств является то, что производительность работы с таким нивелиром повышается за счет уменьшения времени измерений на станции до 40 % по сравнению с использованием нивелиров с точным уровнем при трубе. Следует отметить также сравнительно малую чувствительность компенсатора к изменениям температуры, что позволяет во многих случаях обходиться без зонта при работе в ясную погоду.

К числу наиболее существенных недостатков нивелира с компенсатором следует отнести появление систематических ошибок нивелирования, связанных с тем, что приведение визирной линии в горизонтальное положение с помощью компенсатора осуществляется не абсолютно точно, а с некоторой постоянной погрешностью, величина которой зависит от типа компенсатора, величины наклона зрительной трубы и расстояния между передней главной точкой объектива трубы и вертикальной осью нивелира. На это следует обратить особое внимание при высокоточном нивелировании. Кроме того, на точность работы нивелира оказывает некоторое влияние магнитное поле Земли.

§ 91. ИНВАРНЫЕ НИВЕЛИРНЫЕ РЕЙКИ

Рейки нивелирные применительно к нивелирам Н-05, Н-3 и Н-10 выпускаются также трех типов: РН-05, РН-3 и РН-10 в соответствии с ГОСТ 11158—83 «Рейки нивелирные». Рейки РН-05 предназначены для высокоточного нивелирования со средней квадратической ошибкой 0,5 мм на 1 км двойного хода.



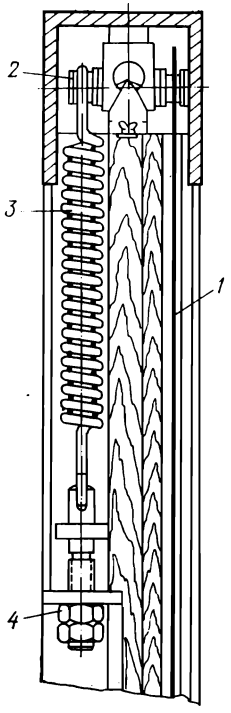


Рис. 97. Инварная нивелирная рейка:
1 — деревянный кожух; *2* — инварная лента с делениями

Рис. 98. Устройство для натяжения инварной ленты

Рейка РН-05 (рис. 97) имеет деревянный корпус длиной 3060 мм, шириной 85 мм и толщиной 40 мм. На скошенной к середине лицевой грани корпуса сделан продольный паз глубиной 6—8 мм, в котором помещена инварная лента с нанесенными на ней делениями. Длина инварной ленты 3000 мм, ширина 25 мм, толщина 0,6 мм. Нижний конец ленты *1* (рис. 98) наглухо скреплен со стальным наконечником корпуса рейки (пяткой), а верхний конец соединен со стальным рычагом *2*, к другому концу которого прикреплена пружина *3*. В нижней части пружина прикреплена к корпусу рейки с тыльной стороны; гайками *4* можно регулировать натяжение инварной полосы, которое должно быть постоянным и равным 200 Н.

На инварной ленте нанесены две шкалы делений (см. рис. 97): основная (справа) и дополнительная (слева). Штрихи на каждой шкале нанесены через 5 мм (между их осями);

толщина штриха 1 мм, длина 6 мм. Одна шкала сдвинута относительно другой на половину деления, т. е. на 2,5 мм. Деления на основной шкале подписаны от 0 до 60, а на дополнительной от 60 до 119; выражены они в полудециметрах. Нуль основной шкалы совмещен с нижней плоскостью пятки рейки. Разность отсчетов по дополнительной и основной шкале равна постоянной величине 59,25 полудециметров.

На задней стороне рейки имеются две откидные ручки и круглый уровень с ценой деления 10′ на 2 мм. Во время отсчетов рейку устанавливают на костыль отвесно и удерживают в таком положении с помощью подпорок.

К качеству изготовления инварной рейки предъявляются повышенные требования. Неперпендикулярность пятки рейки к оси шкалы не должна изменять положение рейки по высоте более чем на 0,08 мм. Начало шкалы рейки должно быть совмещено с пяткой с ошибкой не более 0,10 мм. Стрелка прогиба рейки в средней части ее не должна превышать 3 мм. Коэффициент линейного расширения инварной ленты должен быть не более 2,5 мкм на 1 °С. Нивелирные рейки должны быть устойчивыми к механическим воздействиям и сотрясениям при их транспортировании.

Деления на шкале инварной полосы наносят с высокой точностью. Наименьшие деления на рейке не должны отличаться от 5 мм более чем на 0,05 мм. Ошибки метровых интервалов и всей шкалы рейки должны быть не более 0,10 мм. Средняя длина метра каждого комплекта пары реек не должна отличаться от номинала более чем на 0,15 мм, а при работах в горах более чем на 0,05 мм.

Перед началом и после окончания полевых работ инварные рейки эталонируют на компараторе МИИГАиК или на компараторе типа МК-1. В результате эталонирования определяют с ошибкой не более 0,01 мм длины метровых интервалов между полудециметровыми делениями 10—30, 30—50 основной шкалы и 70—90, 90—110 дополнительной шкалы рейки.

В период полевых работ для проверки неизменности длины метровых интервалов их измеряют повторно через каждые два месяца контрольной линейкой. В случае изменения длин метровых интервалов более чем на 0,1 мм рейки дополнительно эталонируют на компараторе МК-1; на нем же ежегодно эталонируют и контрольные линейки.

Для новых реек с помощью контрольной линейки определяют ошибки дециметровых интервалов 02—10, 10—30, 30—50, 50—58 основной шкалы и 60—70, 70—90, 90—110, 110—118 дополнительной шкалы. Ошибки дециметровых делений не должны превышать 0,10 и 0,20 мм при нивелировании I и II классов соответственно. При нивелировании в северных, северо-вос-

точных и горных районах страны эти допуски уменьшаются в два раза.

Перед выездом на полевые работы контролируют натяжение инварной полосы, а также, определяют цену деления уровня на экзаменаторе, проверяют прогиб рейки, перпендикулярность плоскости пятки к оси рейки, а также совпадение плоскости пятки с нулем основной шкалы и разность нулей реек, входящих в комплект.

В период полевых работ ежедневно перед началом утренних и вечерних наблюдений проверяют правильность установки уровня на рейке; через каждые две недели определяют стрелку прогиба рейки, а через каждые два месяца контролируют длины метровых интервалов шкал рейки контрольной линейкой.

В результате неправильного хранения и обращения с рейкой она может деформироваться. Прогиб рейки может стать причиной понижения точности нивелирования. Следует всегда помнить, что рейки являются рабочей мерой длины, а следовательно, и превышений, поэтому поддерживать их надо всегда в хорошем состоянии. Стрелку прогиба требуется определять не реже двух раз в месяц и своевременно принимать меры по устранению прогиба рейки.

Для определения стрелки прогиба надо положить рейку горизонтально на боковое ребро, натянуть тонкую нить между концами рейки и с помощью линейки или миллиметровой бумаги измерить в горизонтальной плоскости расстояния a_1, a_2 и a_3 от этой нити до поверхности инварной полосы вблизи делений рейки 02, 30 и 58 соответственно. По полученным расстояниям вычисляют стрелку прогиба

$$f = a_2 - \frac{1}{2}(a_1 + a_3),$$

которая не должна превышать 3 мм. Если во время полевых работ прогиб стал более 3 мм, то при перерывах в работе рейку укладывают горизонтально плашмя на упоры так, чтобы под действием собственной массы рейка вновь стала прямолинейной.

Глава 13

ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫСОКОТОЧНЫХ НИВЕЛИРОВ

§ 92. ПРОГРАММА ИССЛЕДОВАНИЙ НИВЕЛИРОВ С УРОВНЕМ

При получении нивелира с завода, а также после капитального ремонта, сопровождаемого разборкой прибора, выполняют следующие лабораторные исследования.

1. Исследование оптических и измерительных характеристик зрительной трубы, в том числе, определение качества центрировки и сборки оптической системы трубы; определение хроматической и сферической аберраций, коэффициентов светопропускания и светорассеяния; разрешающей силы, увеличения и поля зрения трубы; параллакса сетки нитей и наименьшего расстояния визирования; вычисление средней квадратической ошибки наведения биссектора микрометра на штрих рейки.

2. Исследование цилиндрического уровня, включая определение цены его деления, средней квадратической ошибки совмещения изображений концов пузырька, а также качества изготовления внутренней поверхности ампулы.

3. Определение цены деления круглого уровня.

4. Исследование работы оптического микрометра и определение цены деления отсчетной шкалы. Выявление возможных изменений цены деления на разных частях шкалы при разных расстояниях до рейки и вследствие изменений температуры нивелира.

5. Исследование правильности хода фокусирующей линзы трубы.

6. Определение коэффициента дальномера и асимметрии нитей.

7. Поверка работы элевационного винта и определение цены его оборота.

8. Исследование изменений угла между осью уровня и визирной осью трубы при изменении температуры нивелира.

Перед началом полевого сезона и в период полевых работ высокоточные нивелиры исследуют по сокращенной программе, которая позволяет систематически следить за состоянием нивелира и контролировать его соответствие предъявляемым техническим требованиям. Ниже рассмотрены основные виды таких исследований.

§ 93. ИССЛЕДОВАНИЯ КОНТАКТНОГО УРОВНЯ ВЫСОКОТОЧНОГО НИВЕЛИРА

Контактный уровень является наиболее ответственной частью нивелира, так как от качества и точности его изготовления во многом зависит точность результатов нивелирования. Поэтому уровень высокоточного нивелира тщательно исследуют. С этой целью определяют среднюю цену деления уровня; исследуют качество изготовления внутренней поверхности ампулы и выявляют те участки, где кривизна, а следовательно, и цена деления уровня имеют аномальные значения; находят среднюю квадратическую ошибку совмещения изображений концов пузырька уровня.

Определение цены деления уровня на экзаменаторе

Уровни высокоточных нивелиров исследуют на экзаменаторе, выполнив предварительно те же подготовительные работы, как и при исследовании уровня теодолита. Экзаменатор устанавливают на железобетонный или кирпичный столб в помещении со стабильной температурой. Нивелир ставят на экзаменатор за 2—3 ч до начала исследований. Рядом с экзаменатором помещают термометр с ценой деления 0,2—0,5 °С. При изменении температуры за время исследований на 2 °С или больше, исследования бракуют и повторяют заново.

Программа исследований включает два приема измерений, а каждый прием состоит из прямого и обратного ходов. Перед началом исследований определяют число делений t, на которое надо переставлять измерительный винт экзаменатора, чтобы число перемещений пузырька уровня из одного крайнего положения в другое (исключая по 1—2 деления от краев) было не менее 6—8.

В первом полуприеме нивелир ставят объективом к винту экзаменатора. На шкале измерительного винта, ввинчивая его, ставят отсчет — нуль делений. Вращая элевационный винт нивелира, левый конец пузырька уровня (как видно в поле зрения трубы) совмещают с отсчетом, равным 1—2 делениям. Спустя минуту, когда пузырек успокоится, делают первую пару отсчетов (л, п) по концам пузырька и записывают их. Затем, продолжая вращать измерительный винт только на ввинчивание, переставляют его точно на t делений и при каждой установке берут отсчеты по концам пузырька уровня. Первые и последние 1—2 деления ампулы не используют.

Прежде чем перейти к обратному ходу, ввинчиванием измерительного винта наклоняют нивелир еще на 20—30″, а затем, вращая его в обратном направлении, т. е. на вывинчивание, ставят шкалу этого винта на отсчет, который был последним в прямом ходе. Спустя минуту, берут отсчеты по концам пузырька и записывают их. Продолжая вращать винт экзаменатора только на вывинчивание, последовательно устанавливают его шкалу на те же отсчеты, что и в прямом ходе, а спустя минуту после каждой установки, берут отсчеты по концам пузырька.

Для того чтобы программа измерений была строго симметричной, второй прием необходимо выполнять следующим образом. Измерительный винт экзаменатора поворачивают ввинчиванием на 180° и ставят на его шкале отсчет 90 делений (шкала содержит 180 делений). Трубу нивелира также поворачивают на 180° окуляром к винту экзаменатора. С помощью элевационного винта нивелира левый конец пузырька устанавливают в конце шкалы примерно на тот отсчет, который был

последним в прямом ходе первого приема. На этом подготовительные операции заканчиваются.

При измерении во втором приеме вращением измерительного винта по ходу часовой стрелки сначала увеличивают наклон нивелира на 20—30″. Затем, действуя этим винтом только на вывинчивание, ставят на шкале винта отсчет 90 делений, и, спустя минуту, берут отсчеты по концам пузырька. При переходе от одной установки к другой винт переставляют на то же число делений t, что и в прямом ходе, и при каждой установке, спустя минуту, фиксируют отсчеты по концам пузырька уровня. Все остальные действия в прямом и обратном ходах выполняют так же, как в первом приеме, с той лишь разницей, что в прямом ходе измерительным винтом экзаменатора действуют на вывинчивание, а в обратном — на ввинчивание.

Обработку измерений выполняют следующим образом. На каждой i-й установке винта экзаменатора вычисляют длину пузырька уровня и по ее колебаниям судят о правильности измерений: разность между наибольшим и наименьшим значениями (л+п) в приеме должна быть не более 0,5 деления. Затем для каждой установки винта экзаменатора вычисляют положение пузырька уровня относительно его нуль-пункта как разности $l_i = (\text{п}—\text{л})_i$. Находят перемещения пузырька уровня при переходе от одной установки измерительного винта к последующей, как разности $r_i = l_i — l_{i+1}$. Для одноименных установок винта экзаменатора вычисляют среднее $r_m = (r_{\text{пр}} + r_{\text{обр}})/2$ из прямого и обратного ходов в приеме. Затем, используя все r_m, полученные в обоих приемах, вычисляют среднее $r_{\text{ср}} = (\Sigma r_m)/n$, а также $\delta = r_m — r_{\text{ср}}$, по величине которых судят о качестве изготовления внутренней поверхности ампулы (δ не должны превышать одного полуделения уровня).

Используя значения r_m в приемах, вычисляют цену деления τ' для разных частей ампулы уровня:

$$\tau' = \frac{2t\mu}{r_m},$$

где t — число делений, на которое переставляется винт экзаменатора; μ — цена одного деления головки этого винта ($\mu = 1''$). По значениям τ' можно сделать заключение о том, как изменяется цена деления уровня на разных участках его шкалы.

Средняя для уровня в целом цена одного деления равна

$$\tau = \frac{1}{n} \Sigma\tau',$$

где n — число значений τ'.

Вычислив разности $v=\tau'-\tau$, находят среднюю квадратическую ошибку определения средней цены деления уровня

$$m_\tau = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n\,(n-1)}}\,.$$

Определение средней квадратической ошибки совмещения изображений концов пузырька уровня

Исследования выполняют на экзаменаторе. Нивелир устанавливают на горизонтальную площадку экзаменатора окуляром к измерительному винту и затем приводят пузырек цилиндрического уровня примерно на середину. Программа исследований состоит из пяти приемов измерений, а каждый прием из прямого и обратного ходов. В прямом ходе ввинчиванием измерительного винта экзаменатора точно совмещают изображения концов пузырька уровня и, спустя 5—10 с, если положение концов уровня не изменилось, берут отсчет по шкале измерительного винта экзаменатора. Если концы немного разошлись, то их снова совмещают ввинчиванием винта и после этого производят отсчеты. Затем вывинчиванием измерительного винта смещают изображения концов пузырька уровня на 5—8 делений; наконец ввинчиванием винта точно совмещают их и берут отсчет по шкале винта.

Всего в прямом ходе при ввинчивании винта экзаменатора выполняют подряд 10 точных совмещений концов пузырька уровня и каждый раз берут отсчеты по шкале измерительного винта. Обратный ход выполняют аналогичным образом, но с той разницей, что окончательное совмещение концов пузырька уровня перед отсчетом выполняют при вывинчивании винта экзаменатора. Как и в прямом ходе делают по 10 совмещений и отсчетов (табл. 30).

Среднюю квадратическую ошибку совмещения вычисляют в каждом полуприеме:

$$m'_{\text{сов}} = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}}\,,$$

где v — уклонения отдельных отсчетов по шкале винта экзаменатора от среднего арифметического из них в полуприеме, n — число значений v.

Из 5 приемов измерений получают по 5 значений $m_{\text{сов}}'$ для ввинчивания и вывинчивания измерительного винта. При хорошем качестве уровня и тщательном исследовании величина ошибки $m_{\text{сов}}'$ находится в пределах 0,20—0,35″. Среднюю из

Таблица 30

№ п п	Отсчеты по шкале винта			
	при ввинчивании	v_1	при вывинчивании	v_2
1	21,4″	+0,26″	21,8″	+0,45″
2	21,3	+0,16	21,2	—0,15
3	21,3	+0,16	21,4	+0,05
4	20,7	—0,44	21,5	+0,15
5	21,3	+0,16	21,2	—0,15
6	20,7	—0,44	21,1	—0,25
7	20,8	—0,34	21,3	—0,05
8	21,0	—0,14	21,3	—0,05
9	21,6	+0,46	21,4	+0,05
10	21,3	+0,16	21,3	+0,05
Среднее	21,14	0,00	21,35	0,00
	$m'_{\text{сов}} = 0{,}32''$		$m'_{\text{сов}} = 0{,}20''$	

прямых и обратных ходов всех пяти приемов ошибку вычисляют по формуле

$$m_{\text{сов}} = \sqrt{\frac{1}{k}\Sigma m'^{2}_{\text{сов}}},$$

где k — число значений $m_{\text{сов}}'$.

Окончательное значение $m_{\text{сов}}$, вычисленное по этой формуле из 5 приемов, не должно превышать для высокоточных нивелиров 0,3″, что при расстоянии 50 м до рейки соответствует ошибке отсчета по рейке 0,08 мм.

§ 94. ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ ОПТИЧЕСКОГО МИКРОМЕТРА

Ранее указывалось на то, что фактическая цена деления отсчетной шкалы оптического микрометра может несколько отличаться от ее расчетного значения и быть разной на различных частях шкалы; она может изменяться из-за изменений температуры и расстояний от нивелира до реек. Кроме того, оптический микрометр может иметь мертвый ход, отрицательно влияющий на точность его работы. Все эти факторы, характеризующие погрешности работы микрометра, должны учитываться при выполнении нивелирных работ.

Цена деления оптического микрометра может быть определена как в лабораторных, так и в полевых условиях. При лабораторных определениях используют специальную шкалу с точно нанесенными на ней делениями по 0,7—1 мм и толщиной штрихов 0,1 мм. До начала исследований шкалу компари-

Таблица 31

Высокоточный нивелир; $L = 10{,}0$ м; $t = +18{,}5°$

Номер приема	Номер штриха шкалы	Отсчеты по микрометру			Разность «ввинчивание» минус вывинчивание»	Интервал между штрихами шкалы, мм		Цена деления $\tau = a/c$, мм
		при ввинчивании	при вывинчивании	средний		из компарирования a	из измерений микрометром c	
1	19,5	3,2	3,2	3,20	0,0			
	19,4	17,4	17,1	17,25	+0,3	0,730	14,05	0,0520
	19,3	32,0	31,2	31,60	+0,8	0,729	14,35	0,0508
	19,2	46,7	46,1	46,40	+0,6	0,736	14,80	0,0497
	19,1	61,4	61,1	61,25	+0,3	0,731	14,85	0,0492
	19,0	76,1	75,6	75,85	+0,5	0,720	14,60	0,0493
	18,9	90,7	90,4	90,55	+0,3	0,751	14,70	0,0511
	18,8	104,7	104,6	104,65	+0,1	0,723	14,10	0,0513
				Среднее	+0,4			0,0505

руют на инструментальном микроскопе. Расстояния между осями смежных штрихов определяют с ошибками не более 0,007 мм.

Нивелир и подставку, поддерживающую шкалу в вертикальном положении, закрепляют на устойчивых основаниях на расстоянии 7—10 м между ними. Программа исследований состоит из шести приемов. Между приемами изменяют высоту нивелира подъемными винтами или положение шкалы по высоте на 0,8—1 мм. В каждом последующем приеме начальный штрих шкалы должен быть другим; перед началом каждого приема определяют температуру воздуха.

Прием измерений состоит из прямого и обратного ходов (табл. 31). В прямом ходе тщательно совмещают изображения концов пузырька уровня и затем головку микрометра вращают на ввинчивание и последовательно наводят биссектор микрометра на 7—8 штрихов шкалы. При этом отсчеты по микрометру будут возрастать от 0 до 100 делений. Во время измерений следят за тем, чтобы изображения концов пузырька оставались совмещенными, в противном случае прием повторяют снова. В обратном ходе головку микрометра вращают в обратном направлении (на вывинчивание) и последовательно наводят биссектор на те же штрихи, что и в прямом ходе, но от последнего к первому.

Аналогичным образом выполняют остальные приемы измерений и обрабатывают их результаты. Если значения цены деления τ на разных частях шкалы микрометра отличаются от

среднего более чем на 0,0025 мм, то нивелир направляют на завод для юстировки.

Для исследований в полевых условиях возможных изменений цены деления шкалы микрометра от изменений температуры воздуха и расстояний до рейки применяют специальную реечку, на которой с высокой точностью наносят две соприкасающиеся шкалы делений, смещенные относительно друг друга на 1 мм. Штрихи толщиной 1 мм на обоих шкалах наносят через 2 мм. До и после исследований шкалы эталонируют с точностью не ниже 0,01 мм.

Исследования выполняют на ровной местности при расстояниях до рейки 30, 50, 70 м и при разной температуре воздуха, например, при 5; 15 и 25 °С, т. е. в том диапазоне температур, который соответствует условиям выполнения высокоточного нивелирования в конкретном районе работ. Полевые исследования могут быть выполнены поэтапно, в течение всего полевого сезона. Например, первый раз цена деления может быть определена ранней весной, затем в начале лета и т. д., т. е. при существенно разной температуре воздуха. Исследования целесообразно проводить в облачную и даже пасмурную погоду при спокойных или слегка колеблющихся изображениях наблюдаемой шкалы.

Для каждого расстояния от нивелира до рейки (30, 50 и 70 м) цену деления микрометра определяют по той же методике и в том же объеме, как и при лабораторных исследованиях, изложенных выше, с той лишь разницей, что применяется другая шкала с точными делениями. В начале и конце каждого приема измерений должна быть измерена температура воздуха до 0,1 °С.

Из примера (табл. 32) видно, что цена деления микрометра исследуемого нивелира НІ не зависит от изменений температуры. Однако зависимость ее от расстояний L до рейки четко

Таблица 32

Нивелир Н1 № 00001

Дата	Температура воздуха, °С	Цена деления микрометра, мм, при расстояниях, м			Среднее τ, мм
		30	50	70	
25.05	+8,1	0,0500	0,0509	0,0518	0,0509
3.07	+15,8	0,0511	0,0519	0,0541	0,0524
1.08	+25,3	0,0514	0,0518	0,0528	0,0520
Среднее	+16,4	0,0508	0,0515	0,0529	0,0518

прослеживается и выражается эмпирической формулой $\Delta\tau = 0{,}0508 + 0{,}0003\ (L - 30)$, где $(30 \leqslant L \leqslant 70$ м).

Мертвый ход оптического микрометра. Он возникает при наличии даже незначительных зазоров в узле связи плоскопараллельной пластинки и рычага, соединенного с помощью передач с отсчетной шкалой. О наличии мертвого хода свидетельствует постоянство знака разностей отсчетов, полученных при наведении биссектора микрометра на один и тот же штрих неподвижной шкалы при «ввинчивании» и «вывинчивании» головки микрометра.

Для исследуемого нивелира (см. табл. 31) все разности «ввинчивание минус вывинчивание» имеют один и тот же знак, причем положительный, и равны в среднем 0,4 деления отсчетной шкалы. Это значит, что микрометр данного нивелира имеет мертвый ход, который с течением времени, по мере изнашивания трущихся соединений в узле связи, может увеличиться по модулю.

Мертвый ход целесообразно исследовать у всех нивелиров с плоскопараллельной пластинкой по специальной программе, для получения наиболее точных данных о его величине. Программа исследований может быть, например, такой: при каждой установке шкалы микрометра 10, 30, 50, 70 и 90 делений необходимо ввинчиванием и вывинчиванием головки микрометра выполнить по 10 наведений биссектора на хорошо видимый штрих шкалы, установленный на расстоянии 5—10 м. Затем следует вычислить разности «ввинчивание минус вывинчивание» и вывести из них среднее значение, которое и будет характеризовать величину и знак мертвого хода микрометра. Если мертвый ход больше или равен половине деления отсчетной шкалы микрометра, то при отсчетах по рейке последнее движение головки микрометра при наведении биссектора на штрих рейки следует обязательно заканчивать на «ввинчивание». Этого правила в принципе следует придерживаться всегда, независимо от наличия мертвого хода. При несоблюдении этого правила результаты нивелирования будут содержать ошибки за мертвый ход микрометра.

§ 95. ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ ЭЛЕВАЦИОННОГО ВИНТА НИВЕЛИРА И ПРАВИЛЬНОСТИ ХОДА ФОКУСИРУЮЩЕЙ ЛИНЗЫ ТРУБЫ

Исследование работы элевационного винта

В задачу исследований входит выявление нарушений плавности наклона трубы нивелира при вращении элевационного винта, а также определение цены оборота винта.

Исследования выполняют на экзаменаторе. Подготовка к исследованиям та же, как при исследовании цилиндрического

уровня. Если у элевационного винта нет указателя числа оборотов, то наносят штрихи для их определения.

Программа исследований состоит из двух приемов, а каждый прием из прямого и обратного ходов.

Работа элевационного винта считается удовлетворительной, если цена деления оборота винта в средней части его находится в интервале 60—180″, а ее значения, получаемые при ввинчивании и вывинчивании на этом же участке винта, различаются не более чем на 10″. Существенные различия в цене оборота (более 10″) при ввинчивании и вывинчивании элевационного винта указывают либо на неисправности возвратной пружины, либо на неудовлетворительную сборку и юстировку механизма, наклоняющего трубу. Эти недостатки необходимо устранить в мастерской до выезда на полевые работы. В противном случае точное совмещение концов изображений пузырька уровня следует выполнять только ввинчиванием элевационного винта, что создает ряд неудобств в работе с нивелиром и может отрицательно повлиять на точность нивелирования.

Исследование правильности хода фокусирующей линзы трубы

Когда превышения определяют при значительном неравенстве расстояний от нивелира до задней и передней реек, например, при нивелировании через водные препятствия, это исследование следует выполнять особенно тщательно.

На местности в какой-либо точке *О* забивают нивелирный костыль и с центром в этой точке с помощью троса строят одну четверть окружности радиусом 50 м. На этой окружности через каждые 10 м забивают костыли в точках с номерами *А*, *1*, *2*, *3*, ..., *7*. Исследование сводится к определению превышений между точкой *1* и всеми последующими по основной и дополнительной шкалам рейки дважды: первый раз при установке нивелира в точке *О* и последовательной установке рейки в точках *1*, *2*, *3*, ..., *7* (выполняют прямой и обратный ходы); второй раз — при установке нивелира на окружности в точке *А* и последовательной установке рейки на тех же точках *1*, *2*, *3*, ..., *7* (в прямом и обратном ходах); таких приемов должно быть не менее трех, причем при разных горизонтах нивелира. При нивелировании из точки *О* визирование на все точки выполняют без перефокусировки трубы, так как длина визирного луча во всех случаях одинакова. При нивелировании из точки *А* положение фокусирующей линзы приходится изменять вследствие возрастания длины визирного луча от точки *А* к точкам *1*, *2*, *3*, ..., *7*. Расхождения в величинах превышений, полученных в первом и втором случаях, содержат информацию о величине и характере изменения ошибок, обусловленных *неправильностями* хода фокусирующей линзы.

§ 96. ИССЛЕДОВАНИЯ НИВЕЛИРОВ С КОМПЕНСАТОРАМИ

Полная программа исследований нивелиров с компенсаторами, кроме осмотра и поверок предусматривает исследование оптических и измерительных характеристик зрительной трубы, определение цены деления круглого уровня, исследование работы оптического микрометра, определение коэффициента дальномера, исследование правильности хода фокусирующей линзы. Эти исследования выполняют так же, как и у нивелиров с цилиндрическим уровнем.

Кроме того, у нивелиров с компенсатором исследуют чувствительность установки пузырька уровня в нуль-пункт, определяют диапазон работы компенсатора, исследуют точность самоустановки визирного луча в одно и то же положение при разных наклонах оси нивелира, определяют систематическую ошибку работы компенсатора и время полного затухания колебаний его подвесной системы, исследуют влияние магнитного поля Земли на работу компенсатора.

Исследование чувствительности установочного уровня

Вследствие погрешностей изготовления и шлифовки внутренней поверхности ампулы пузырек круглого уровня из-за трения при перемещении и приведении его на середину, не дает правильного представления о реальном направлении вертикальной оси уровня, а следовательно, и оси нивелира. В задачу исследований входит определение средней квадратической величины колебаний вертикальной оси уровня при установке пузырька на середину, т. е. определение его чувствительности в нуль-пункте, а также пригодности уровня для использования в высокоточных нивелирах.

Исследования выполняют на экзаменаторе. Перед началом исследований поверяют и юстируют круглый уровень нивелира. Экзаменатор и установленный на его площадке нивелир, обращенный окуляром трубы к измерительному винту экзаменатора, приводят в рабочее состояние. Ставят отсчет по шкале винта, примерно равный нулю.

Выполняют четыре приема измерений: первый прием при начальной ориентировке трубы нивелира $A=0°$, второй — при $A=90°$, третий и четвертый — при $A=180$ и $270°$ соответственно. За начальное ориентирное направление можно принять направление трубы, обращенной, например, окуляром к измерительному винту экзаменатора. При начальной ориентировке трубы ($A=0°$) вывинчиванием винта экзаменатора наклоняют нивелир на 3—4′, а затем ввинчиванием его приводят пузырек установочного уровня нивелира точно на середину и берут отсчет по шкале измерительного винта экзаменатора. Эту опера-

цию при данной ориентировке трубы повторяют по десять раз. Из каждых десяти отсчетов выводят среднее, вычисляют отклонения от среднего и находят сумму их квадратов Σv_0^2, индекс внизу указывает на ориентировку трубы (в данном случае $A=0°$).

Каждый последующий прием измерений выполняют аналогичным образом, при этом в первом и третьем приемах (при $A=0$ и 180°) точную установку пузырька уровня на середину производят ввинчиванием измерительного винта экзаменатора, а во втором и четвертом приемах (при $A=90$ и 270°) — вывинчиванием.

В результате всех измерений и вычислений получают четыре суммы квадратов отклонений от соответствующих средних: Σv_0^2, Σv_{90}^2, Σv_{180}^2 и Σv_{270}^2. Вычислив сумму всех этих величин, находят среднюю квадратическую ошибку, характеризующую чувствительность пузырька уровня в нуль-пункте, а следовательно, и ошибку приведения вертикальной оси нивелира в отвесное положение

$$m_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{\Sigma\Sigma v^2}{k\,(n-1)}},$$

где k — число приемов, n — число установок пузырька уровня на середину в каждом приеме.

Для нивелиров, предназначенных для нивелирования I и II классов величина этой ошибки не должна превышать 0,5 и 1′ соответственно. Такое же расхождение возможно между наибольшим и наименьшим средними в приемах отсчетами по шкале винта экзаменатора. Уровни, не отвечающие этим требованиям, следует заменить на более качественные.

Определение диапазона работы компенсатора

Предельные углы наклона оси нивелира в разных направлениях, при которых компенсатор еще приводит визирную линию в горизонтальное положение без заметного влияния систематических ошибок, можно определить следующим образом. Нивелир устанавливают на площадку экзаменатора так, чтобы вертикальная ось его находилась возможно ближе к оси вращения экзаменатора, а труба была обращена объективом к его измерительному винту, отсчет на шкале которого ставят на нуль делений. Перед объективом нивелира помещают автоколлиматор, а при отсутствии его, на расстоянии нескольких метров от него ставят реечку с миллиметровыми делениями. Пузырьки установочных уровней нивелира и экзаменатора приводят на середину. Затем вращением измерительного винта

экзаменатора придают нивелиру положительный наклон (объективом вверх), равный последовательно 0, 2, 4, 6′, ... и на каждой установке экзаменатора фиксируют отсчеты по коллиматору (реечке), которые при переходе от одной установки к другой будут изменяться незначительно и примерно на одинаковую величину. Наклонять продолжают до тех пор, пока резко не изменится отсчет по коллиматору, скачком, это укажет на прекращение работы компенсатора. По шкале винта экзаменатора определяют полученный предельный угол наклона. Такие измерения повторяют 2—3 раза и из них находят среднее значение предельного угла, из которого вычитают 2′ и получают таким образом предельный угол удовлетворительной работы компенсатора при продольном наклоне нивелира вверх объективом.

Точно таким же образом определяют предел работы компенсатора при отрицательном продольном наклоне нивелира (объективом вниз).

Пределы работы компенсатора при боковом (поперечном) наклоне нивелира определяют при тех же установках экзаменатора (положительных и отрицательных) и по той же методике, что и в случае продольных наклонов нивелира. Разница состоит только в том, что трубу нивелира поворачивают по азимуту на 90°, а коллиматор (реечку) переставляют так, чтобы можно было произвести соответствующие отсчеты при разных наклонах экзаменатора (вверх и вниз).

У нивелиров, предназначенных для нивелирования I и II классов, предельный угол работы компенсатора при наклоне оси нивелира в разных направлениях должен быть не менее 8′.

Определение времени затухания колебаний подвесной системы компенсатора

На точность нивелирования и производительность труда при нивелировании большое влияние оказывает качество демпфирования чувствительного элемента компенсатора. Возможны случаи, когда из-за непрекращающихся колебаний подвесной системы компенсатора невозможно произвести отсчет по рейке. При этом возникает необходимость исследования качества демпфирования, т. е. определения времени полного затухания колебаний подвесной системы компенсатора. В лабораторных условиях время затуханий можно получить приближенно, засекая секундомером начало колебательного процесса. Более точно его можно определить, применяя специальные электронные устройства. У высокоточных нивелиров время полного затухания колебаний чувствительного элемента компенсатора не должно превышать 2 с.

§ 97. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОШИБОК САМОУСТАНОВКИ ВИЗИРНОГО ЛУЧА НИВЕЛИРА

Одним из главных требований, предъявляемых к высокоточным нивелирам с компенсаторами, является автоматическое приведение визирного луча трубы в горизонтальное положение со случайной средней квадратической ошибкой $m_к$ не более 0,2″ и систематической ошибкой $\sigma_к$ не более 0,05″ на одну угловую минуту наклона оси нивелира. Для проверки соблюдения данного требования определяют фактические величины этих ошибок из исследований нивелира на экзаменаторе с ценой деления измерительного винта $\mu = 1''$. В качестве вспомогательных измерительных средств используют автоколлиматор типа АК — 0,25 или АК — 0,5. При отсутствии автоколлиматора можно использовать реечку с точно нанесенными на ней штрихами через 3—5 мм.

Нивелир устанавливают на площадке экзаменатора так, чтобы подвесная система компенсатора находилась над горизонтальной осью вращения экзаменатора, а окуляр трубы был обращен к его измерительному винту. Отсчет по шкале измерительного винта ставят на нуль. Перед трубой нивелира соосно устанавливают автоколлиматор. Площадку экзаменатора, трубу нивелира и трубу автоколлиматора с помощью установочных уровней приводят в горизонтальное положение.

При отсутствии автоколлиматора нивелир поворачивают объективом к измерительному винту экзаменатора и в створе визирного луча на расстоянии 4—5 м (как можно дальше) устанавливают вертикальную реечку с делениями на стене.

Измерения выполняют следующим образом. Ввинчиванием измерительного винта наклоняют экзаменатор, а следовательно, и нивелир на угол, близкий к предельному углу работы компенсатора $\alpha_{пред.}$ Затем, вращая винт в обратном направлении (на вывинчивание), при $\alpha_{пред} = 11 \div 12'$ последовательно задают наклон оси нивелира, равный 10; 8; 6; 4; 2; 0; —2; —4; —6; —8; —10′, и при каждой i-й установке фиксируют отсчеты a_i' по автоколлиматору или по реечке с делениями. Для повышения точности каждого отсчета его получают как среднее не менее чем из 3—5 наведений биссектора. Указанные действия составляют прямой ход первого приема.

При переходе к обратному ходу наклон оси нивелира сначала увеличивают (на 20—30″), а затем, действуя измерительным винтом экзаменатора только на ввинчивание, задают нивелиру те же наклоны (установки), что и в прямом ходе, но теперь в обратном направлении (от отрицательных углов наклона оси нивелира к положительным). При каждой i-й установке в обратном ходе берут отсчеты a_i'' по автоколлиматору или по реечке. На этом первый прием измерений заканчивается.

При продольном наклоне оси нивелира выполняют два таких приема. При наблюдениях на реечку измеряют расстояние от оси вращения экзаменатора до нее с точностью до 0,1 м.

При поперечном наклоне оси нивелира измерения выполняют при тех же установках экзаменатора (от $+10'$ до $-10'$ и обратно) аналогичным образом также двумя приемами. Перед началом этих приемов трубу нивелира поворачивают по азимуту на 90° и соответственно переставляют автоколлиматор (или реечку с делениями) и снова измеряют расстояние от нее до оси нивелира.

Обработку измерений в каждом приеме выполняют отдельно. Для каждой i-й установки (наклона) оси нивелира вычисляют средний из прямого и обратного ходов отсчет $a_i = 1/2(a_i' + a_i'')$, а также разности этих отсчетов $d_i = a_i'' - a_i'$.

При наблюдениях с помощью автоколлиматора среднюю для всего диапазона работы компенсатора случайную среднюю квадратическую ошибку самоустановки визирного луча в одно и то же положение вычисляют по формуле

$$m_к = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{2n}},$$

где n — число всех разностей d_i во всех приемах вместе взятых. Величина этой ошибки не должна превышать $0{,}2''$.

Таблица 33

Наклон α_i	Прямой ход a_i'	Обратный ход a_i''	Среднее $a = \frac{1}{2}(a' + a'')$	Разность $d = a'' - a'$
$+10'$	$4{,}10''$	$4{,}20''$	$4{,}15''$	$+0{,}10''$
$+8$	4,30	4,15	4,22	$-0{,}15$
$+6$	4,15	4,25	4,20	$+0{,}10$
$+4$	4,05	4,15	4,10	$+0{,}10$
$+2$	3,80	4,00	3,90	$+0{,}20$
0	3,90	3,90	3,90	00,00
2	3,80	4,00	3,90	$+0{,}20$
-4	3,80	3,90	3,85	$+0{,}10$
-6	3,85	3,80	3,82	$-0{,}05$
-8	3,75	3,65	3,70	$-0{,}10$
-10	3,60	3,60	3,60	0,00
Среднее	3,91	3,96	3,94	$\Sigma d^2 = 0{,}1650$

$$m_к = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{2n}} = \sqrt{\frac{0{,}1650}{22}} = 0{,}09''.$$

При наблюдениях на реечку по этой формуле вычисляют сначала два значения ошибки: $m_к'$ — по данным первых двух приемов (при расстоянии S_1 до реечки), мм; $m_к''$ — по данным двух других приемов (при расстоянии S_2), мм. Окончательное значение ошибки m из всех приемов (в угл. с) находят по формуле

$$m_к = \frac{\rho''}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{m_к'}{S_1}\right)^2 + \left(\frac{m_к''}{S_2}\right)^2}.$$

В качестве примера определим случайную среднюю квадратическую ошибку самоустановки визирного луча нивелира Ni 007 (табл. 33). По данным одного приема измерений, выполненных с помощью автоколлиматора, получено $m_к = 0{,}09''$, а по данным всех приемов измерений $m_к = 0{,}11''$.

§ 98. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ РАБОТЫ КОМПЕНСАТОРА

Вследствие погрешностей сборки и юстировки угловое увеличение компенсатора (коэффициент стабилизации) может несколько отличаться от его расчетного значения. Это приводит к появлению систематической ошибки m_α горизонтирования визирного луча, вычисляемой по формуле

$$m_\alpha = \alpha \sigma_к,$$

где α — угол наклона оси нивелира, угл. мин; $\sigma_к$ — систематическая ошибка работы компенсатора, выражаемая в секундах дуги на одну минуту наклона оси нивелира. Систематическая ошибка $\sigma_к$ должна быть как можно меньше ($\sigma_к \leqslant 0{,}05''$), ее необходимо периодически определять из специальных исследований.

Систематическую ошибку $\sigma_к$ находят из обработки тех же измерений, которые используют для определения случайной ошибки $m_к$ самоустановки визирного луча (см. табл. 33).

Если нивелир (точнее, подвесная система компенсатора) установлен не над осью вращения экзаменатора, а на некотором расстоянии l от нее, то при наклонах экзаменатора на углы α будут изменяться отсчеты по шкале автоколлиматора, наведенного на сетку нитей нивелира. Эти изменения при таком расположении нивелира будут происходить по двум причинам: из-за изменений высоты горизонта нивелира на величину

$$\Delta = \frac{\alpha}{\rho} l,$$

где α — угол наклона экзаменатора, $\rho = 206265''$ и из-за ошибок горизонтирования визирного луча трубы на величину $m_\alpha = \alpha \sigma_к$.

Таблица 34

Угол наклона α, угл. мин	Ошибка Δ, мм, при расстояниях l, мм				
	0	100	200	300	400
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,06	0,12	0,17	0,23
4	0,00	0,12	0,23	0,35	0,46
6	0,00	0,17	0,35	0,52	0,70
8	0,00	0,23	0,46	0,69	0,93
10	0,00	0,29	0,58	0,87	1,16

Ошибки Δ (в мм) из-за неправильного расположения нивелира на площадке экзаменатора достаточно велики (табл. 34). Однако их влияние можно свести к нулю, установив нивелир (его компенсатор) над осью вращения экзаменатора, так как при $l=0$ ошибки $\Delta=0$.

При определении ошибки самоустановки визирного луча (см. табл. 33) нивелир Ni007 был расположен над осью вращения экзаменатора ($l=0$). Поэтому систематическое уменьшение (увеличение) отсчетов a_i' и a_i'' по мере изменения угла наклона α_i экзаменатора (нивелира) можно объяснить главным образом влиянием ошибок горизонтирования визирного луча. Поскольку углы наклона α известны, то систематическую ошибку $\sigma_к$ работы компенсатора можно вычислить по формуле

$$\sigma_{к\,(i)} = \frac{a_i - a_0}{\alpha_i},$$

где a_0 — средний отсчет по автоколлиматору при отсутствии наклона оси нивелира; a_i — то же, но при наклоне оси на угол α_i.

По этой формуле для каждого угла α_i наклона нивелира вычисляют $\sigma_{к\,(i)}$, а затем находят среднюю величину этой ошибки

$$\sigma_к = \frac{1}{n} \Sigma \sigma_{к\,(i)}$$

с использованием результатов измерений, полученных при всех n углах наклона нивелира (положительных и отрицательных).

Выполняют четыре приема измерений. Средние из четырех приемов отсчеты a_i (табл. 35) при каждом угле α_i наклона нивелира используют для вычисления систематической ошибки $\sigma_к$ работы компенсатора.

Значение $\sigma_к$ соответствует наклону оси нивелира на одну угловую минуту. Отсчет a_0 вычисляют как среднее арифметическое из всех отсчетов a_i (см. табл. 35), т. е. $a_0 = \frac{1}{n} \Sigma a_i = 3{,}92''$,

Таблица 35

Наклон α_i	a_i	$a_i - a_0$	$\sigma_{\kappa i} = \frac{a_i - a_0}{\alpha_i}$	v
+10′	4,24″	+0,32″	+0,032″	+0,004″
+8	4,16	+0,24	+0,030	+0,002
+6	4,14	+0,22	+0,037	+0,009
+4	4,04	+0,12	+0,030	+0,002
+2	3,94	+0,02	+0,010	—0,018
0	3,85	—0,07	—	—
—2	3,86	—0,06	+0,030	+0,002
—4	3,82	—0,10	+0,025	—0,003
—6	3,78	—0,14	+0,023	—0,005
—8	3,68	—0,24	+0,030	+0,002
—10	3,61	—0,31	+0,031	+0,003

$a_0 = 3{,}92$ $\quad \sigma_\kappa = +0{,}028$ $\quad \Sigma v^2 = +0{,}00048$

$$\sigma_\kappa = \frac{1}{n} \Sigma \Delta\sigma_{\kappa i} = 0{,}028''$$

$$m_\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n(n-1)}} = 0{,}003''$$

так как именно он соответствует строго отвесному положению оси нивелира, когда $\alpha = 0$, а не зафиксированный при измерениях отсчет, равный 3,85″. В самом деле, при строго отвесном исходном положении оси нивелира наклон ее в разные стороны на строго одинаковые углы $+\alpha$ и $-\alpha$ должен давать одинаковые по модулю и разные по знаку отклонения $(a_i - a_0)$, что и происходит в действительности в пределах ошибок измерений (табл. 36). Отсюда следует, что средние значения a_α из каждой пары отсчетов при $+\alpha$ и $-\alpha$

$$a_\alpha = \frac{a_{+\alpha} + a_{-\alpha}}{2}$$

должны быть одинаковыми по величине, поскольку они определяют строго отвесное положение оси нивелира и должны быть равными среднему отсчету $a_0 = 3{,}92$.

Если вместо среднего отсчета $a_0 = 3{,}92''$ взять отсчет $a_0' = 3{,}85''$ (см. табл. 35), то все отклонения $(a_i - a_0)$ не будут попарно симметричны при наклонах нивелира на $+\alpha$ и $-\alpha$, например, при $\alpha = \pm 10'$ получим $\Delta_{+10} = +0{,}39''$ и $\Delta_{-10} = -0{,}24''$.

Причина этого заключается в неточности приведения оси нивелира с помощью установочного уровня в строго отвесное исходное положение, закрепляемое нулевым отсчетом по шкале измерительного винта экзаменатора. При цене деления уровня

Таблица 36

Программа измерений	Значение a_α при попарных наклонах оси нивелира					
	$+10'$ -10	$+8'$ -8	$+6'$ -6	$+4'$ -4	$+2'$ -2	Среднее
Один прием (см. табл. 33)	3,88	3,96	4,01	3,92	3,90	3,93
Четыре приема (см. табл. 35)	3,92	3,92	3,96	3,93	3,90	3,92

$\tau = 8'$ и приведении пузырька в нуль-пункт можно ожидать установку оси нивелира с ошибкой, равной $0{,}2\tau = 1{,}6'$. Фактическую величину этой ошибки можно рассчитать путем интерполирования отсчетов a_i и наклонов α_i (см. табл. 35). Отсчету $a_0 = 3{,}92''$ соответствует наклон $\alpha_0 = 1{,}56'$. Это и будет та ошибка в установке оси нивелира, которая приводит к нежелательным последствиям. Как видим, расчетные и фактические данные неплохо согласуются между собой.

Хорошая при всех положительных и отрицательных углах наклона α оси нивелира сходимость значений систематической ошибки $\sigma_к$, свидетельствует об удовлетворительной работе компенсатора на всем рабочем диапазоне и о правильности рекомендуемой методики определения данной ошибки.

§ 99. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ ВИЗИРНОЙ ОСИ ТРУБЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ НИВЕЛИРА

Высокоточное нивелирование выполняют, как правило, в ранние утренние часы, а также в вечернее время; для этого времени суток при безоблачном небе в жаркую летнюю погоду характерны наиболее резкие перепады температуры воздуха. Из-за изменений температуры возникают деформации нивелира, которые в свою очередь обусловливают изменения угла i между осью цилиндрического уровня и визирной осью трубы. Поэтому для уменьшения величины изменений угла i при изменении температуры, зрительную трубу, цилиндрический уровень и отсчетное устройство помещают в теплозащитный металлический корпус.

У современных высокоточных нивелиров с уровнем изменение угла i при изменении температуры на 1 °С не должно превышать $0{,}5''$. Фактическую величину изменений угла i и величину угла отклонения визирной линии (у нивелиров с компен-

сатором) при изменении температуры определяют из исследований нивелира в термокамере, причем как при положительной, так и при отрицательной температуре.

Исследуемый нивелир устанавливают на устойчивом основании в специальной термокамере с окном для наблюдений, перекрытом плоскопараллельной пластинкой. Термокамера должна быть снабжена устройством для изменения температуры от —30 до +50°, а также необходим термометр и вытяжное окно. Для измерений применяют автоколлиматор или рейку. По мере изменения температуры через каждые 8—10° фиксируют показания термометра и берут отсчеты по рейке или шкале автоколлиматора.

Величину изменений угла i при изменении температуры на 1 °С вычисляют по формуле

$$\delta i = \frac{\Delta h \cdot \rho}{s \cdot \Delta T},$$

где Δh — изменение отсчета по рейке (в мм) при изменении температуры на ΔT градусов; s — расстояние от нивелира до рейки (в мм); $\rho = 206265''$. Из всех полученных результатов находят среднее значение для δi, которая должна быть не более 0,5″ на 1 °С.

Глава 14

ИСТОЧНИКИ ОШИБОК ПРИ ВЫСОКОТОЧНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ НИВЕЛИРОВАНИИ И МЕТОДЫ ОСЛАБЛЕНИЯ ИХ ВЛИЯНИЙ

§ 100. ЛИЧНЫЕ ОШИБКИ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ НИВЕЛИРОВАНИИ

По природе происхождения ошибки измерений при геометрическом нивелировании подразделяют на три группы: личные, приборные (инструментальные) и от внешней среды, которые в свою очередь делятся на случайные и систематические. При высокоточном геометрическом нивелировании наиболее опасными и трудно устранимыми являются систематические ошибки. На нивелирных линиях большой протяженности (в сотни и тысячи километров) влияние систематических ошибок, даже очень малых по величине, постепенно накапливается и может заметно искажать результаты нивелирования. Поэтому при высокоточном нивелировании необходимо с особой тщательностью выявлять всевозможные источники систематических ошибок измерений, какими малыми они ни казались бы, и предусматривать меры по существенному ослаблению их влияний на измеряемые превышения между реперами. Однако и влияние

случайных ошибок измерений также должно быть сведено к минимуму.

Личные ошибки измерений при нивелировании возникают из-за несовершенства работы измерительной системы прибор — наблюдатель. К личным могут быть отнесены случайные ошибки совмещения изображений концов пузырька уровня $m_{\text{сов}}$, ошибки наведения биссектора микрометра на штрих рейки $m_{\text{нав}}$ и ошибки отсчитывания по шкале микрометра трубы $m_{\text{отс}}$ при производстве отсчетов по нивелирным рейкам. Совокупное влияние этих ошибок, называемое согласно [10] ошибкой взгляда $m_{\text{взг}}$ равно

$$m^2_{\text{взг}} = m^2_{\text{сов}} + m^2_{\text{нав}} + m^2_{\text{отс}}. \qquad (14.1)$$

Ошибка совмещения изображений концов пузырька уровня $m_{\text{сов}}$ зависит от разрешающей способности глаза; особенностей устройства оптической системы, передающей изображение пузырька уровня к глазу наблюдателя; цены деления уровня; качества шлифовки внутренней поверхности ампулы уровня и т. п. Ошибка совмещения $m_{\text{сов}}$ у современных высокоточных нивелиров обычно не превышает 0,3″, что при расстоянии 50 м от нивелира до рейки вызывает ошибку в отсчете по рейке $m_{\text{отс}}$, равную 0,07 мм.

Ошибка наведения $m_{\text{нав}}$ биссектора сетки нитей трубы на штрих рейки с помощью микрометра с плоскопараллельной пластинкой в первом приближении может быть вычислена по формуле

$$m_{\text{нав}} = P_{\text{г}}/v = 10''/v, \qquad (14.2)$$

где $P_{\text{г}} = 10''$ — предельная разрешающая способность глаза; v — увеличение трубы нивелира. При $v = 40^{\text{x}}$ ошибка $m_{\text{нав}} = 0{,}25''$, что при расстоянии 50 м до рейки дает ошибку наведения $m_{\text{нав}} = 0{,}06$ мм. Величина ошибки наведения зависит также от вида сетки нитей трубы. Для того чтобы повысить точность наведения, используют подвижный биссектор сетки нитей в виде острого угла, в который вводят изображение штриха рейки при отсчетах по ней (см. рис. 87). Величина ошибки наведения существенно зависит от амплитуды колебания изображений штрихов рейки; поэтому высокоточное нивелирование следует выполнять только на спокойные или слегка колеблющиеся изображения, когда можно уверенно брать отсчеты по рейкам.

Ошибка отсчитывания $m_{\text{отс}}$ по шкале оптического микрометра трубы не превышает 0,2 деления, что при ее цене 0,05 мм дает ошибку в отсчете по рейке, равную 0,01 мм.

При использовании нивелиров с компенсаторами визирная ось трубы приводится в горизонтальное положение автоматически с помощью компенсатора. Поэтому в данном случае ошибка

взгляда, в отличие от (14.1) состоит только из двух составляющих:

$$m^2_{\text{взг}} = m^2_{\text{нав}} + m^2_{\text{отс}}. \qquad (14.3)$$

Систематические ошибки визирования при геометрическом нивелировании могут возникать, например, при наведении клинообразного биссектора сетки нитей на штрих рейки с некоторой постоянной для наблюдателя ошибкой, а также в том случае, когда на станции штрихи одной рейки освещены лучами Солнца, а другой находятся в тени. Эти ошибки малы по величине и должным образом не исследованы.

§ 101. ПРИБОРНЫЕ ОШИБКИ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ НИВЕЛИРОВАНИИ

В группу приборных отнесем ошибки измерений, обусловленные недостатками изготовления, сборки и юстировки нивелира, а также погрешностями работы отдельных узлов и нивелира в целом. Сначала рассмотрим ошибки, присущие нивелирам с цилиндрическим контактным уровнем при трубе.

К числу наиболее существенных приборных ошибок относятся *ошибки из-за непараллельности визирной оси трубы и оси контактного уровня.* Допустим, что угол i в вертикальной плоскости между этими осями равен постоянной величине (i = const) и пусть З′ и П′ — отсчеты по задней и передней рейкам при $i \neq 0$, а З и П — отсчеты при $i = 0$ (рис. 99).

В этом случае

$$\text{З} = \text{З}' - d_{\text{з}} \operatorname{tg} i; \quad \text{П} = \text{П}' - d_{\text{п}} \operatorname{tg} i$$

и поэтому превышение h на станции, свободное от ошибки из-за угла i будет равно

$$h = (\text{З} - \text{П}) = (\text{З}' - \text{П}') - \operatorname{tg} i\,(d_{\text{з}} - d_{\text{п}}).$$

Превышение ΔH между реперами найдем как сумму

$$\Delta H = \Sigma h = \Sigma\,(\text{З}' - \text{П}') - \operatorname{tg} i \Sigma\,(d_{\text{з}} - d_{\text{п}}). \qquad (14.4)$$

Второй член в этой формуле представляет собой поправку в превышение за влияние угла i. При одинаковых расстояниях $d_{\text{з}} = d_{\text{п}}$ от нивелира до задней и передней реек эта поправка исключается. Поэтому нивелирование выполняют из середины и следят за тем, чтобы разности расстояний $(d_{\text{з}} - d_{\text{п}})$ на каждой станции и сумма их между смежными реперами не превышали установленных допусков. Например, при нивелировании 1 класса требуется, чтобы на каждой станции $(d_{\text{з}} - d_{\text{п}}) \leqslant 0{,}5$ м, а в секции между соседними реперами накопление этих разностей было не более 1 м. Угол i допускается не более 10″.

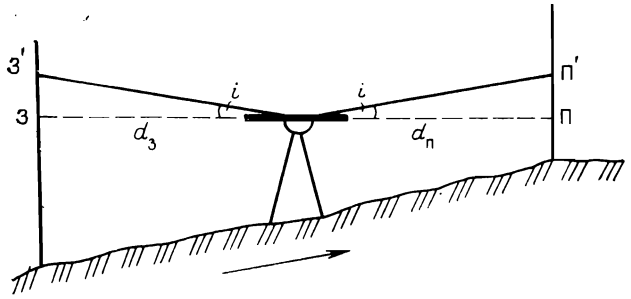


Рис. 99. Схема влияния угла i на отсчеты по рейкам

В процессе нивелирования по мере изменений температуры воздуха изменяется величина угла i. Поэтому даже при нивелировании из середины влияние изменений угла i не исключается из результатов наблюдений. Для того чтобы ослабить влияние этой ошибки на измеренные превышения, необходимо применять современные нивелиры с теплозащитным металлическим кожухом, у которых угол i изменяется не более чем на 0,5″ при изменении температуры на 1 °С. Кроме того, наблюдения на станциях следует выполнять по строго симметричной во времени программе измерений: ЗППЗ или ПЗЗП; прямой и обратный ходы прокладывать один утром, а другой вечером, т. е. при разных знаках приращения температуры воздуха в ее суточном ходе, а следовательно, при разных знаках приращений угла i в эти часы суток; необходимо тщательно защищать нивелир от прямого попадания на него солнечных лучей как во время работы на станции, используя зонт, так и при переходе от одной станции к другой, прикрывая нивелир белым чехлом; всякий раз перед началом работы нивелир следует выдерживать в тени на штативе не менее 45 минут, чтобы его температура стала равной температуре окружающего воздуха.

Ошибки из-за преждевременной остановки пузырька уровня при горизонтировании нивелира. Возникают они вследствие прилипания наполнителя (жидкости) к стенкам ампулы уровня. Эти ошибки малы, но являются систематическими. Для того чтобы ослабить их влияние, необходимо совмещать изображения концов пузырька уровня всегда однообразно, делая последнее движение головки элевационного винта трубы перед совмещением только на ввинчивание. Тогда вычисленное на станции превышение практически не будет искажено влиянием данной ошибки.

Ошибки из-за мертвого хода оптического микрометра. При наличии мертвого хода отсчеты по шкале микрометра при наведении биссектора на один и тот же штрих рейки ввинчива-

нием и вывинчиванием головки оптического микрометра не равны друг другу. Для того чтобы исключить влияние этой ошибки необходимо последнее движение биссектора при наведении на штрих рейки заканчивать всегда на «ввинчивание» головки микрометра, тогда превышение, получаемое как разность отсчетов по задней и передней рейкам, будет свободно от влияния данной ошибки.

Ошибки из-за отличия фактической цены деления отсчетной шкалы микрометра от номинальной ($\mu=0{,}05$ мм). Согласно Инструкции по нивелированию расхождение фактической и номинальной цены деления допускается до $\Delta\mu_{max}=0{,}0025$ мм. При нивелировании возможны случаи, когда разность отсчетов по шкале микрометра при наведении биссектора на заднюю и переднюю рейки может быть равна 99 делениям. Это при $\Delta\mu_{max}=0{,}0025$ мм может дать максимальную ошибку в превышении, равную $\Delta h_{max}=99\times\Delta\mu=0{,}25$ мм. Средняя же величина этой ошибки на каждой станции будет в 2—3 раза меньше. Несмотря на случайный характер распределения данной ошибки, ее влиянием пренебречь нельзя. Необходимо либо тщательно определять и учитывать изменение цены деления шкалы микрометра в процессе нивелирования либо должным образом откорректировать цену деления микрометра в заводских условиях.

Ошибки из-за конструктивных недостатков нивелира. У некоторых нивелиров горизонтальная ось, вокруг которой поворачивается труба в вертикальной плоскости путем вращения элевационного винта, расположена на некотором расстоянии l от вертикальной оси нивелира. При наклоне вертикальной оси нивелира на малый угол β относительно отвесной линии (из-за неизбежных неточностей юстировки круглого уровня и неточности приведения пузырька на середину) изменяется высота визирного луча при наблюдениях на заднюю и переднюю рейки на величину

$$\Delta h=2l\sin\beta. \qquad (14.5)$$

Угол β зависит от цены деления τ установочного уровня нивелира и его можно принять равным в лучшем случае $\beta_1=0{,}2\,\tau$, а в худшем $\beta_2=\tau$. У нивелира Ni 004 $l=60$ мм и $\tau=2'$. Для указанных двух случаев неточной установки оси нивелира в отвесное положение ($\beta_1=0{,}4'$ и $\beta_2=2'$) ошибка определения превышения на станции будет равна $\Delta h_1=0{,}01$ мм и $\Delta h_2=0{,}05$ мм соответственно. Для уменьшения величины этой ошибки необходимо тщательно, с ошибкой β не более $0{,}5'$ (при $l=50$—60 мм), приводить вертикальную ось нивелира в отвесное положение.

Ошибки из-за смещения пузырька уровня в сторону Солнца. Если трубу нивелира, не защищенного зонтом, повернуть в сторону Солнца, то под действием солнечных лучей подъемные винты со стороны Солнца нагреются и несколько удлинятся,

вследствие чего труба немного наклонится, причем так, что пузырек уровня сместится в сторону Солнца. Так появится систематическая ошибка, знак которой зависит от угла между направлением на Солнце и направлением нивелирного хода. Для ослабления влияний данной ошибки необходимо нивелир защищать от попадания на него солнечных лучей как во время работы на станции, так и при переходе от одной станции к другой.

Нивелирам с компенсаторами присущи следующие приборные ошибки.

Ошибка $m_к$ самоустановки визирного луча в одно и то же положение. Эта ошибка является случайной. Ее величина зависит от чувствительности компенсатора. Требуется, чтобы у высокоточных нивелиров эта ошибка была не более 0,2″.

Систематическая ошибка $\sigma_к$ работы компенсатора. Эта ошибка приводит к систематической недокомпенсации или перекомпенсации наклона оси нивелира. В результате чего визирная ось трубы нивелира приводится к горизонтальное положение с некоторой систематической ошибкой. Требуется, чтобы систематическая ошибка работы компенсатора у высокоточных нивелиров была не более 0,05″ на 1′ наклона оси нивелира.

Систематическая ошибка $m_г$ горизонтирования визирного луча. Данная ошибка по существу лимитирует точность нивелирования, выполняемого нивелирами с компенсаторами. Величина ошибки $m_г$ при известной систематической ошибке работы компенсатора $\sigma_к$ вычисляется в угловой мере по формуле

$$m_г = \alpha\sigma_к,$$

где α — продольный наклон оси нивелира, угл. мин. Влияние этой ошибки (в мм) на превышение, измеренное на станции, удваивается и равно

$$m_h = \frac{2\alpha\sigma_к}{\rho} s, \qquad (14.6)$$

где $\rho = 206265''$; s — расстояние от нивелира до рейки, мм. Ошибка удваивается потому, что угол α наклона оси нивелира относительно направления нивелир — рейка при наблюдениях на заднюю рейку имеет один знак, а после поворота верхней части нивелира на 180° и наведении трубы на переднюю рейку становится другим.

Приняв $s = 50$ м, $\rho = 206\,265''$ и $\sigma_к = 0{,}05''$, получим следующие значения систематической ошибки m_h определения превышений на каждой станции при разных углах наклона оси нивелира α:

α, угл. мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8
m_h, мм	0,00	0,02	0,05	0,08	0,10	0,12	0,15	0,18	0,20

Необходимо потребовать, чтобы систематическая ошибка оп-

ределения превышений на каждой станции m_h была не более 0,005 мм или, что все равно, не более 0,05 мм на километр нивелирного хода. В этом случае вертикальную ось нивелира следует приводить в отвесное положение с ошибкой $\alpha \leqslant 0{,}2'$. Однако реализовать это требование практически невозможно вследствие того, что современные нивелиры с компенсатором имеют мало чувствительные уровни с ценой деления $\tau = 8'$. В самом деле, при остаточной погрешности юстировки уровня, равной 0,2 деления, и такой же погрешности приведения пузырька уровня на середину, что фактически всегда имеет место, ошибка установки вертикальной оси нивелира достигает $\alpha = 0{,}4\tau$, что при $\tau = 8'$ дает $\alpha = 3'$. Однако в реальных условиях геодезического производства эта ошибка нередко может удваиваться и достигать 6 и даже 8′, т. е. целого деления уровня (по 0,5 дел. за неточность юстировки уровня и неточность приведения пузырька на середину). Отсюда видно, что даже в общем случае, при $\alpha = \tau/3 = 3'$, систематическая ошибка $\sigma_к$ определения превышений на каждой станции при $s = 50$ м и $\sigma_к = 0{,}05''$ будет достигать 0,08 мм, что может привести к систематической ошибке на на один километр нивелирного хода, равной 0,8 мм.

Для того чтобы существенно уменьшить влияние систематической ошибки горизонтирования визирного луча на точность определения превышений, необходимо уменьшить допуск на систематическую ошибку $\sigma_к$ работы компенсатора до $\sigma_к \leqslant 0{,}03''$ (вместо $\sigma_к \leqslant 0{,}05''$) и снабдить нивелиры с компенсатором более точным установочным уровнем с ценой деления $\tau \leqslant 2 \div 3'$.

Ошибки из-за тепловых воздействий у нивелиров с компенсатором гораздо меньше, чем у нивелиров с уровнем, поэтому в ряде случаев допустима работа без зонта.

§ 102. ВЛИЯНИЕ ОШИБОК ИНВАРНЫХ РЕЕК

Ошибки делений инварных реек. В настоящее время штрихи на шкалах инварных реек наносят либо путем фотографического копирования образцовых шкал, либо с помощью тщательно изготовляемых бумажных трафаретов шкал. Оба эти метода имеют один и тот же недостаток: невозможность нанесения штрихов с предельно высокой точностью, например, такой, как при разделении лимбов высокоточных теодолитов (десятые доли микрометра). Инструкция [10] требует, чтобы ошибки наименьших (5 мм) делений рейки были не более 0,05 мм, а ошибки длины метра рейки — не более 0,10 мм.

Точное положение любого штриха с номером i задается расчетным расстоянием l_i между нулевым (начальным) и данным штрихом рейки. Фактическое положение штриха характеризуется расстоянием l_i'. Разность $\Delta_i = l_i - l_i'$ представляет собой поправку за неточность нанесения штриха. Зная l_i и измерив

на компараторе расстояния l_i', можно получить поправки Δ_i для каждого штриха рейки. Штрихи на каждой шкале рейки нанесены через 5 мм. При длине рейки 3000 мм число штрихов на одной шкале равно 600. Следовательно, для основной и дополнительной шкал рейки надо в принципе определить из измерений на компараторе 1200 поправок Δ_i. Но это достаточно трудоемкая задача. Поэтому поправки Δ_i для каждого отдельного штриха рейки не определяют и не учитывают при определении превышений.

Задачу исправления превышений за погрешности нанесения штрихов рейки решают только в первом приближении. С этой целью на компараторе на каждой шкале рейки измеряют по два примыкающих друг к другу метровых интервала и вычисляют среднее значение метра l_1' первой рейки. Точно так же определяют среднее значение метра l_2' второй рейки, входящей в комплект. Затем находят среднюю величину одного метра комплекта реек $l'=1/2(l_1'+l_2')$ и поправку $\varepsilon=l-l'$ как разность номинальной ($l=1000{,}00$ мм) и фактической длины l' среднего метра реек.

Поправка ε (в мм) приходится на каждый метр превышения h, измеренного между реперами. Поэтому поправка в превышение h (в м) за отличие средней длины метра реек от номинальной будет равна

$$\delta h_{(мм)}=\varepsilon h. \tag{14.7}$$

Среднюю квадратическую ошибку определения поправки δh найдем по формуле

$$m_{\delta h}=\sqrt{m_\varepsilon^2 h^2+m_h^2\varepsilon^2}\,. \tag{14.8}$$

На основании этой формулы можно показать, что при высокоточном нивелировании 1 класса поправку ε в средний метр комплекта реек надо определять из эталонирования со средней квадратической ошибкой порядка 4—5 мкм. В настоящее время эталонирование инварных реек выполняют в основном на компараторах типа МК-1, дающих среднюю квадратическую ошибку $m_\varepsilon=0{,}01$—$0{,}02$ мм, что в 2—4 раза хуже, чем требуется. Поэтому в целях ослабления влияния ошибок эталонирования реек на измеренные превышения длины среднего метра реек необходимо определять на более точном компараторе, например, на компараторе МИИГАиК. В принципе же надо определять поправки к каждому штриху рейки на интерференционном компараторе.

Ошибки из-за неравенства высот нулей реек и несовпадения нулей основных шкал с плоскостью пяток. Влияние этих ошибок полностью устраняется, если при нивелировании число станций между реперами четное. В этом случае на конечные реперы будет ставиться одна и та же рейка и поэтому при вычислении

превышения по разностям отсчетов З—П эти ошибки исключатся.

Ошибки из-за несовершенства изготовления пятки рейки. Если поверхность пятки рейки не является плоскостью (имеет углубления, выступы) или не перпендикулярна к плоскости инварной полосы, то в этом случае возникают ошибки, аналогичные ошибкам из-за неравенства высот нулей реек. В этом случае применяют специальные подпятники к рейкам с плоской поверхностью пятки, число станций между смежными реперами должно быть обязательно четным, чтобы исключить возникающую в данном случае дополнительную ошибку за разность высот нулей реек (одну и ту же рейку ставят на начальный и конечный реперы).

Ошибки из-за неточной установки рейки в отвесное положение. Рейку, установленную на костыль, приводят в отвесное положение с помощью круглого уровня с ценой деления $\tau = 10'$ и поддерживают в таком положении двумя подпорками. Рассчитаем величину ошибки ε в отсчете по рейке, возникающей из-за наклона рейки на угол α, равный, например, половине цены деления уровня.

Пусть l — максимальный отсчет по рейке, тогда

$$\varepsilon = l - l\cos\alpha \approx \frac{1}{2} l\alpha^2, \tag{14.9}$$

где угол α дан в радианах. Приняв $l_{max} = 3000$ мм и $\alpha = 5'/\rho'$, найдем $\varepsilon_{max} = 0{,}004$ мм.

Ошибки из-за коробления реек. Коробление реек, происходящее из-за значительного изменения влажности деревянного корпуса рейки или неправильного ее хранения (не на ребре, без футляра и т. п.), вызывает изгиб рейки, вследствие чего изменяется длина рейки, т. е. хорды, соединяющей начальный и конечный штрихи инварной полосы. При стрелке прогиба $f = 3$ мм рейка укорачивается на 0,01 м, а при $f = 5$ мм — на 0,02 мм. Для того чтобы выправить рейку и тем самым уменьшить величину ошибки из-за стрелки прогиба, необходимо систематически в процессе полевых работ определять стрелку прогиба и при $f = 5$ мм укладывать рейку на упоры так, чтобы под действием собственной массы рейки стрелка прогиба исчезла.

Ошибки из-за температурных влияний. Если рейка проэталонирована, т. е. определены ее метровые интервалы, при температуре $T_э$, а нивелирование выполнено при температуре $T_н$, то измеренные превышения на станциях надо исправить поправками

$$\delta_t = \alpha_1 (T_н' - T_э)\,З - \alpha_2 (T_н'' - T_э)\,П, \tag{14.10}$$

где α_1 и α_2 — коэффициенты линейного расширения инварных полос задней и передней реек; $T_н'$ и $T_н''$ — их температура

в момент определения превышения на станции, З и П — отсчеты (в м) по задней и передней рейкам соответственно.

По данным ЦНИИГАиК коэффициент линейного расширения инварных реек колеблется в довольно большом диапазоне: $\alpha = +(0{,}5 \div 3{,}5) \cdot 10^{-6}$. Поэтому использование осредненного для всех реек коэффициента $\alpha_{ср} = +2$ мкм на 1 м, как это рекомендует инструкция [10], нельзя признать обоснованным, так как в ряде случаев из-за существенной разницы реального и рекомендуемого среднего коэффициента расширения при вычислении поправок произойдет не улучшение, а ухудшение результатов нивелирования. Коэффициенты линейного расширения необходимо определять с требуемой точностью для каждой конкретной инварной рейки и только после этого вычислять поправки за температуру.

Исследования ЦНИИГАиК показали, что в ясную жаркую погоду летом температура освещенной лучами Солнца инварной полосы задней (передней) рейки выше температуры не освещенной Солнцем инварной полосы другой рейки, причем нередко, на 5 °С. При пасмурной погоде, т. е. при отсутствии солнечного освещения реек, температура реек практически одинакова. В солнечную погоду разница температуры воздуха и инварных полос реек слишком велика, она достигает нередко 10—15 °С. Поэтому температуру инварных полос следует измерять специальными термодатчиками, устанавливаемыми на рейках, и ни в коем случае не использовать результаты измерений температуры воздуха для вычисления поправок в превышения за температуру реек.

Сделаем приближенный расчет возможной поправки за температуру в измеренное превышение h между конечными реперами нивелирной секции, используя менее строгую формулу

$$\delta h_t = \alpha (t_н - t_э) h, \qquad (14.11)$$

где α — средний для пары реек коэффициент линейного расширения; $t_н$ — средняя температура реек при нивелировании всей секции, °С; h — превышение по секции, м. Пусть $\alpha = 2 \times 10^{-6}$; $t_н - t_э = +8$ °С; $h = 200$ м. При этих данных получим $\delta h_t = +3{,}2$ мм.

Это доказывает, что неучет поправок за температуру инварных реек может во многих случаях, особенно при работе в горных районах, привести к существенным ошибкам нивелирования.

Ошибки из-за отличия натяжения инварной полосы рейки от нормального. При изменении натяжения инварной ленты изменяется ее длина, что ведет к появлению систематических ошибок при нивелировании. Чтобы устранить их, необходимо ежегодно перед выездом на полевые работы проверять с динамометром натяжение инварной полосы и при необходимости при-

водить его к нормальному $P=20$ кг юстировочными гайками. Отклонение натяжения от нормального не должно превышать 1 кг, которое приводит к изменению длины инварной полосы примерно на 1 мкм.

§ 103. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ. НИВЕЛИРНАЯ РЕФРАКЦИЯ

В группу ошибок, обусловленных влиянием внешней среды, входят: нивелирная рефракция, ошибки из-за вертикальных перемещений костылей и штатива, из-за гидротермических движений земной поверхности, приливных движений земной коры, изменений наклонов уровенной поверхности Земли, происходящих по разным причинам; ошибки из-за медленных тектонических поднятий или опусканий земной коры; ошибки из-за выпучивания или оседания реперов; ошибки из-за мгновенных изменений высоты реперов вследствие землетрясений.

Нивелирная рефракция. Процесс геометрического нивелирования протекает в самом нижнем трехметровом слое атмосферы, где наблюдаются несравненно более резкие изменения температуры по высоте, чем в более высоких слоях. Чем больше по величине вертикальные градиенты температуры на пути визирного луча, тем при прочих равных условиях больше и влияние рефракции. Под действием вертикальной рефракции визирный луч искривляется (рис. 100) и вместо отсчета по рейке в точке a (b), когда отсутствует рефракция, получают отсчет в другой точке $a'(b')$. Превышение h, свободное от влияния нивелирной рефракции равно

$$h=a-b=(a'-b')+(aa'-bb')=h'+\delta h, \qquad (14.12)$$

где $h'=a'-b'$ — измеренное превышение, $\delta h=aa'-bb'$ — поправка за рефракцию. В солнечную жаркую погоду летом при низком прохождении визирного луча над почвой и сравнительно больших расстояниях от нивелира до реек нивелирная рефракция может существенно искажать результаты нивелирования,

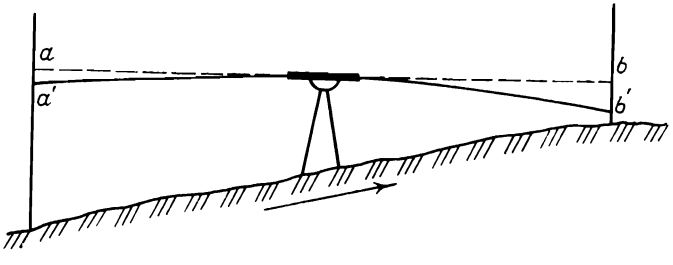


Рис. 100. Схема влияния нивелирной рефракции на отсчеты по рейкам

особенно на наклонных трассах большой протяженности. Поэтому проблема определения и наиболее полного исключения из результатов нивелирования ошибок из-за рефракции имеет большое значение для практики.

Первые результаты научных исследований, независимо выполненных в России и во Франции, были опубликованы в 1889 г. С. Д. Рыльке и Ш. Лаллеманом. Обстоятельные исследования по нивелирной рефракции принадлежат Бесту (Великобритания), Руне (Швеция), Куккамяки (Финляндия), Павлову (СССР) и др.

К настоящему времени получено большое число формул для вычисления поправок в превышения за влияние нивелирной рефракции с использованием результатов измерений метеорологических элементов и их градиентов в окрестности нивелира и реек. Однако все эти формулы не позволяют получить сколько-нибудь надежные значения поправок в превышения при нивелирных работах, выполняемых в разнообразных физико-географических и климатических условиях.

В СССР первые наиболее обстоятельные теоретические и экспериментальные исследования нивелирной рефракции были выполнены в 1933—1940 гг. проф. Н. А. Павловым в ЦНИИГАиК. Этим исследованиям проф. Ф. Н. Красовский придавал большое значение. Многие результаты были учтены при разработке методов высокоточного нивелирования и получили отражение в Наставлении по нивелированию (1945 г.). Однако некоторые теоретические разработки, в частности формулы для вычисления поправок за рефракцию, а также предложение использовать высокие штативы (до 2 м) не нашли применения на практике.

Теоретически строгая формула для вычисления поправок за рефракцию в отсчеты по рейкам при нивелировании может быть легко выведена из формулы (8.15). Умножив левую и правую части этой формулы на s/ρ, где s — расстояние от нивелира до рейки, $\rho = 206\,265''$, и принимая $\sin z = 1$, получим формулу для вычисления поправок δ (в мм) в отсчеты по рейкам за влияние рефракции:

$$\delta = 0{,}1108 \int_0^{\Sigma} \frac{p}{T^2} \left(0{,}0342 + \frac{\partial T}{\partial H}\right)(s - y)\, dy. \qquad (14.13)$$

Как отмечалось выше, сомножитель $p/T^2 \approx 0{,}009$ практически постоянен на всем пути визирного луча в каждый фиксированный момент времени. Поэтому давление p и температуру $T = 273{,}16 + T$ °С достаточно измерить на высоте визирного луча вблизи трубы нивелира в период наблюдений на станции. Гораздо сложнее определить градиенты температуры воздуха на всем пути визирного луча в момент производства отсчетов по

рейке. Они остаются неизвестными, так как не измеряются. Не зная реальных значений градиентов на пути визирного луча в момент отсчета по рейке, нельзя вычислить поправку за рефракцию. Это обстоятельство является одной из главных причин того, что различные формулы, предложенные многими исследователями для вычисления поправок за рефракцию с использованием измерений температуры воздуха около нивелира и реек, не нашли применения. Дело осложняется еще и тем, что в нижнем трехметровом слое воздуха, где протекает процесс нивелирования, градиенты температуры непрерывно изменяются в пространстве и во времени. Даже очень сложная аппроксимация распределения температуры по высоте в пространстве между рейками с использованием измерений температуры только в окрестности нивелира и реек не приводит к желаемой цели, поскольку модель, составленная по ограниченному числу измерений температуры, далека от истины, на что обратил внимание еще Ф. Н. Красовский в «Руководстве по высшей геодезии».

Трудности определения поправок за рефракцию при отсутствии измерений градиентов температуры на всем пути визирного луча в момент производства отсчетов по рейкам вынуждают геодезистов проводить обширные исследования нивелирной рефракции и на их основе разрабатывать методические приемы существенного ослабления ее влияний. Ф. Н. Красовский отмечал, что исследования рефракции должны дать ответы на вопросы о выгоднейшем в течение дня времени нивелирования, предельном расстоянии между рейками, а также о наименьшей высоте визирного луча над почвой.

Из физики приземного слоя атмосферы известно, что вертикальные градиенты температуры тем больше по величине, чем ближе к земной поверхности слой воздуха, для которого они вычислены. Это подтверждается данными распределения измеренных градиентов температуры по высоте (градус/100 м) и во времени, полученными для июля месяца в Солбери Плейн (Южная Англия) над открытой долиной (табл. 37)[1].

В самом нижнем слое атмосферы, в котором проходит процесс геометрического нивелирования (0—3 м), градиенты температуры существенно изменяются по величине даже при незначительном изменении высоты элементарного слоя воздуха над почвой. Четко прослеживается суточный ход градиентов температуры. Наибольшей величины градиенты достигают в полуденное время, а также около полуночи, причем в нижнем слое воздуха (0—3 м) днем они существенно больше по модулю, чем ночью. В суточном ходе градиенты температуры

[1] *Гейгер Р.* Климат приземного слоя воздуха/Пер. с нем.— М.: Иностранная литература, 1960.

Таблица 37

Слой воздуха, м	Часы суток							
	4	6	8	12	16	18	20	24
0,025—0,30	30,0	—71,0	—362,0	—503,0	—244,0	—28,0	105,0	83,3
0,30—1,20	17,9	—1,9	—25,9	—48,2	—28,4	—5,6	21,0	25,3
1,20—7,10	8,5	—3,4	—10,5	—17,3	—12,5	—5,7	4,3	9,4
7,10—17,10	2,4	—0,6	—2,2	—2,7	—2,8	—1,3	3,8	2,8

утром и вечером переходят через нуль, изменяя при этом всякий раз знаки на противоположные.

Так как нивелирная рефракция функционально связана с вертикальными градиентами температуры, то для нее характерны те же закономерности изменений в пространстве и во времени, а также от состояния погоды, что и для градиентов температуры. Поэтому, детально изучив особенности изменений величины и знака вертикальных градиентов температуры в зависимости от разных факторов, можно заранее выработать комплекс мероприятий по существенному ослаблению влияний нивелирной рефракции на результаты нивелирования.

При нивелировании на наклонных трассах визирные лучи, идущие от нивелира до задней и передней реек, проходят на разной высоте над почвой (см. рис. 100). Поскольку градиенты температуры на большей высоте по модулю меньше, чем на более низкой, то при нивелировании на наклонных трассах градиенты температуры на пути визирного луча будут возрастать по модулю при переходе от одной рейки, где луч проходит выше над почвой, к другой, где луч проходит ниже над почвой. Такое распределение вертикальных градиентов на пути визирного луча между рейками в случае наклонной трассы закономерно. Это значит, что более низкий луч будет всегда больше искривлен из-за влияния рефракции, чем более высокий. Другими словами, влияние рефракции при нивелировании на наклонных трассах имеет характер явно выраженных систематических ошибок, а не случайных, как это ошибочно утверждается в некоторых работах. При этом ошибки из-за рефракции в отсчетах будут всегда больше у той рейки, где визирный луч проходит ближе к поверхности почвы. Ошибки из-за рефракции имеют характер случайных ошибок при нивелировании только в равнинной местности, где наклоны земной поверхности к горизонту малы и носят случайный характер на трассе большой протяженности.

Для получения количественных оценок влияний рефракции на отсчеты по рейкам и на превышения на станциях преобразуем формулу (14.13) к более простому виду, полагая при этом,

что в момент отсчетов по рейкам известны средние значения E вертикальных градиентов температуры воздуха (град/м) на пути визирного луча между нивелиром и рейкой:

$$E = \frac{1}{n} \Sigma \frac{\partial T}{\partial H}, \tag{14.14}$$

а также средние значения температуры T и давления p, которые, как отмечалось выше, достаточно измерить вблизи нивелира на высоте трубы в момент производства отсчетов по рейкам. Формула (14.13) после интегрирования, с учетом средних на пути луча значений E, p и T, примет вид

$$\delta = (1{,}89 + 55{,}39E) \frac{p}{T^2} s^2 \cdot 10^{-3}, \tag{14.15}$$

где δ — поправка в отсчет по рейке, мм; E — среднее значение вертикальных градиентов температуры на пути визирного луча, град/м, p — давление, мм; $T = 273{,}2 + T$ °С — температура воздуха вблизи нивелира; s — расстояние от нивелира до рейки, м.

Обозначим среднее значение градиентов температуры на пути визирного луча до задней рейки $E_з$, а до передней рейки — $E_п$. Тогда поправка δh (в мм) в превышение на станции будет равна

$$\delta h = \delta_з - \delta_п = 55{,}39 \frac{p}{T^2} s^2 (E_з - E_п) \cdot 10^{-3}. \tag{14.16}$$

Используя градиенты температуры (см. табл. 37), рассчитаем по формулам (14.15) и (14.16) возможное влияние рефракции на отсчеты по рейкам и на превышения на станции. При этом допустим, что на наклонных участках местности градиенты температуры на пути визирного луча изменяются линейно при переходе от задней рейки к передней. В этом случае путем линейной интерполяции найдем средние значения градиентов температуры на пути визирного луча от нивелира до задней рейки $E_з$, а также до передней рейки $E_п$, полагая что высота визирного луча у передней рейки существенно меньше, чем у задней. Расчеты сделаем при $s = 50$ м для трех случаев, когда высота визирного луча у передней рейки равна П = 0,3 м, 0,5 м и 0,8 м, а у задней рейки З = 3 м или 2,5 м (табл. 38). Через $\delta_з$ и $\delta_п$ обозначим поправки за рефракцию в отсчеты по задней и передней рейкам соответственно; $\delta h = \delta_з - \delta_п$ — поправка в превышение.

Из анализа приведенных данных следует вывод о том, что при расстояниях от нивелира до рейки 50 м и наименьшей высоте визирного луча П = 0,3 м средняя за сутки в целом поправка δh в превышение по модулю равна 0,75 мм (при колебаниях от 0,09 до 2,15 мм); при П = 0,5 м она равна 0,25 мм

Таблица 38

Часы суток	1-й случай			2-й случай			3-й случай		
	З-3,0 м; П-0,33 м			З-2,45 м; П-0,50 м			З-3,0 м; П-0,75 м		
	$\delta_з$	$\delta_п$	δh	$\delta_з$	$\delta_п$	δh	$\delta_з$	$\delta_п$	δh
4	+0,23	+0,32	—0,09	+0,23	+0,28	—0,05	+0.20	+0,24	—0,04
6	—0,15	—0,45	+0,30	—0,03	—0,12	+0,09	+0,01	+0.02	—0,01
8	—0,92	—2,50	+1,58	—0,43	—0,93	+0,50	—0,18	—0,25	+0,07
12	—1,37	—3,52	+2,15	—0,71	—1,42	+0,71	—0,36	—0,49	+0,13
16	—0,69	—1,71	+1,02	—0,39	—0,72	+0,33	—0,21	—0,28	+0,07
18	—0,08	—0,18	+0,10	—0,04	—0,07	+0,03	—0,03	—0,03	0,00
20	+0,38	+0,83	—0,45	+0,28	+0,45	—0,17	+0,20	+0,27	—0,07
24	+0,38	+0,71	—0,33	+0,32	+0,45	—0,13	+0,25	+0,32	—0,07
Среднее			0,75			0,25			0,06

(при колебаниях от 0,03 до 0,71 мм) и при П=0,8 м она равна всего лишь 0,06 мм (при колебаниях от 0,0 до 0,13 мм). Как и следовало ожидать, чем меньше высота визирного луча над почвой, тем больше влияние рефракции на отсчеты по рейкам и на превышения при наклонных трассах нивелирования.

Ошибки из-за нивелирной рефракции испытывают явно выраженный суточный ход. Наибольшей величины они достигают в околополуденное время, а наименьшей — в периоды утренней и вечерней изотермии, когда они равны или почти равны нулю. Днем и ночью нивелирная рефракция имеет противоположные знаки. Смена знаков происходит дважды в сутки — в моменты утренней и вечерней изотермии воздуха.

Ошибки из-за рефракции при прочих равных условиях зависят от длины визирного луча: чем длиннее луч, тем больше величина ошибки и, наоборот, при уменьшении длины луча уменьшается и величина ошибки. Из формул (14.15) и (14.16) видно, что при увеличении (уменьшении) длины луча s в k раз ошибки из-за рефракции увеличиваются (уменьшаются) в $k^2=(s_2/s_1)^2$ раз. Например, при нивелировании II класса $s_2=65$ м, а при нивелировании I класса $s_1=50$ м. Следовательно, при нивелировании II класса при прочих равных условиях ошибки из-за рефракции будут в среднем в $k^2=(65/50)^2=1{,}7$ раза больше, чем при нивелировании I класса.

Методические приемы ослабления влияний нивелирной рефракции на результаты высокоточного нивелирования.

Опираясь на теорию рефракции, построенную с учетом физики приземного слоя атмосферы, и учитывая результаты исследований рефракции, получившие отражение в инструкциях по нивелированию, можно в сжатом виде сформулировать ос-

новные рекомендации по существенному ослаблению влияний рефракции на результаты высокоточного нивелирования.

1. Нормальную длину визирного луча между нивелиром и рейками необходимо уменьшить до рационально минимальной величины, причем с учетом производительности труда при нивелировании, так как чем короче расстояния между рейками, тем ниже производительность труда. Во многих странах с небольшой территорией нормальная длина визирного луча при нивелировании I класса принята равной 25 м. Поскольку территория СССР огромна, то при таких коротких расстояниях, как 25 м, потребуется слишком много времени для выполнения измерений в основной нивелирной сети страны. Поэтому с учетом этого обстоятельства нормальная длина визирного луча принята равной 50 м при нивелировании I класса и 65 м при нивелировании II класса.

2. Высота визирного луча над подстилающей поверхностью должна быть не менее 0,8 м, так как при меньшей высоте порядка 0,5 м ошибки из-за рефракции в отсчетах по рейке даже в часы, благоприятные для нивелирования, например, около 8—9 ч утра, могут достигать значительной величины: до 0,5 мм при $s=50$ м и 0,8 мм при $s=65$ м. При высоте визирного луча 0,3 м, которая допускается при $s=30$ м в нивелирных работах II класса, ошибки из-за рефракции в те же часы могут достигать в отсчетах по рейкам 1 мм и более. Это слишком большие ошибки, поэтому даже при нивелировании II класса не следует заметно уменьшать высоту визирного луча даже при расстояниях в два раза меньших нормального (30 м вместо 65 м).

3. Величина систематических ошибок из-за рефракции зависит от времени нивелирования в течение дня и от погодных условий. Высокоточное нивелирование следует выполнять в периоды «выгоднейшего» для наблюдений времени, когда градиенты температуры, а следовательно, и нивелирная рефракция равны или почти равны нулю, т. е. в периоды утренней и вечерней изотермии воздуха, когда видимость наилучшая, а колебания изображений почти отсутствуют. Однако эти периоды кратковременны. Поэтому высокоточное нивелирование следует выполнять как утром, так и вечером по возможности симметрично во времени относительно соответствующего момента изотермии воздуха на высоте визирного луча. Утром наблюдения следует начинать примерно через полчаса после восхода Солнца, а вечером летом — примерно с 17 ч местного времени. Прекращать наблюдения как утром, так и вечером следует сразу же после ухудшения видимости и появления ощутимых колебаний изображений, затрудняющих точное наведение биссектора микрометра на штрихи рейки.

В пасмурную и прохладную погоду (при $T\leqslant 10$ °С) вертикальные градиенты температуры воздуха малы, поэтому неве-

лико и влияние рефракции. В этом случае период времени, благоприятного для высокоточного нивелирования, существенно расширяется.

В целях наиболее полного ослабления влияний нивелирной рефракции П. В. Павлив [20] рекомендует при отсчетах по рейке биссектор сетки нитей трубы нивелира совмещать с нижним положением колеблющегося изображения штриха рейки (в трубах с обратным изображением — с верхним положением).

4. Прямой и обратный нивелирные ходы рекомендуется прокладывать в разное время суток (один утром, другой вечером), т. е. при разном тепловом режиме земной поверхности: в первой половине дня земная поверхность нагревается лучами Солнца, а во второй половине постепенно остывает. При этом целесообразно потребовать, чтобы каждое превышение между одними и теми же переходными точками в прямом ходе определялось при одном знаке вертикальных градиентов температуры воздуха, а в обратном — при другом. Тогда при выводе среднего из прямого и обратного ходов произойдет частичная компенсация ошибок из-за рефракции. Этого можно добиться, если каждое данное превышение определять как утром, так и вечером, причем в обоих случаях либо до наступления момента изотермии, либо после него.

§ 104. ВЕРТИКАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОСТЫЛЕЙ И ШТАТИВА

Из опыта высокоточного нивелирования известно, что нивелирные башмаки и костыли, на которые устанавливают нивелирные рейки, а также штатив испытывают вертикальные перемещения в грунте, вследствие чего в результате нивелирования появляются систематические ошибки. В ЦНИИГАиК под руководством И. И. Энтина были выполнены тщательно поставленные исследования, позволившие путем непосредственных измерений установить некоторые закономерности вертикальных перемещений костылей и штатива для различных грунтов. Были определены величины таких перемещений костыля за разные промежутки времени после установки нивелирной рейки на костыль (табл. 39).

В результате выполненных исследований были сделаны следующие основные выводы.

1. Нивелирные костыли всегда оседают под воздействием собственной массы, массы рейки и неизбежного нажима при удерживании рейки на костыле.

2. Наиболее быстрое и интенсивное оседание костыля происходит в течение первых 10—20 с после установки рейки; затем оно замедляется, но остается еще ощутимым в течение

Таблица 39

Участок и грунт	Число штативов	Перемещения, мкм, при первой установке рейки, спустя					Перемещения через 2 мин после снятия рейки, мкм	Перемещения, мкм, при второй установке рейки, спустя		
		10 с	20 с	1 мин	2 мин			10 с	20 с	2 мин (наибольшее)
					среднее	наибольшее				
Грунтовая дорога	10	—9	—11	—14	—16	—30	+4	—3	—6	—11
Бровка шоссе	10	—6	—8	—9	—10	—20	+9	—3	—5	—6
Полотно железной дороги	10	—8	—8	—10	—10	—19	+7	—4	—5	—8
Песчаный грунт	10	—17	—20	—23	—24	—61	+3	—7	—11	—21
Торфяной грунт	10	—107	—130	—152	—168	—233	+118	—78	—117	—168

Примечание. Знак минус указывает на оседание, а знак плюс — на выпирание костыля в разных грунтах.

1—2 мин. Через 4—5 мин положение костыля почти полностью стабилизируется.

3. После снятия рейки костыль выпирается из грунта, причем в ряде случаев не возвращается в первоначальное положение, особенно на торфяных и песчаных грунтах. В сильно уплотненных грунтах костыль практически полностью возвращается в первоначальное положение.

4. При повторной установке рейки костыль оседает на величину в 2—3 раза меньшую, чем при первой. При последующих установках рейки положение костыля по высоте почти не изменяется. В рыхлых и сыпучих грунтах после многократных установок и снятия рейки с костыля он выпирается из грунта, поскольку после снятия рейки под костыль всякий раз подсыпаются частички грунта.

5. Штатив, как правило, выпирается из грунта во время работы с нивелиром, причем тем больше, чем сильнее вдавлены ножки в грунт, чем туже затянуты зажимные винты штатива и чем ближе к ножкам штатива находится наблюдатель.

6. В течение первых 5 мин вертикальное перемещение штатива происходит пропорционально времени, затем оно замедляется и через 10—15 мин прекращается. На грунтах средней плотности штатив выпирается за 5 мин в среднем на 10—15 мкм; на торфянистых и увлажненных грунтах эта величина может быть в несколько раз больше.

Вертикальные перемещения костылей и штатива являются одним из основных источников систематических ошибок при

высокоточном нивелировании. Для ослабления влияний этих ошибок рекомендуется выполнять следующие рекомендации:

1. Трассу нивелирования следует выбирать так, чтобы она проходила по возможности по грунтам средней плотности (по бровке шоссе или железной дороги, по хорошим грунтовым дорогам, по естественным грунтам с невысоким травяным покровом).

2. Прямой и обратный ходы должны проходить по одной и той же трассе и по возможности по одним и тем же переходным точкам. Число станций в прямом и обратном ходах должно быть чётным и одинаковым.

3. Костыли левой и правой нивелирных линий необходимо располагать на расстоянии не менее 0,5 м друг от друга. Не следует слишком сильно вдавливать в грунт ножки штатива и туго затягивать зажимные винты. Костыли и ножки штатива рекомендуется обходить на расстоянии не менее 0,5 м.

4. Наблюдения на каждой станции необходимо выполнять по строго симметричной программе, начиная на нечетных станциях с задней, а на четных с передней рейки или наоборот.

5. Отсчеты по рейке следует брать, спустя полминуты после установки ее на костыль. Не следует допускать сильных нажимов на рейку и костыль. При сильном и порывистом ветре выполнять нивелирование не рекомендуется, поскольку в этом случае усиливаются нажимы на рейку и костыль.

6. Применять нивелирные башмаки вместо костылей нельзя, так как они перемещаются в грунте значительно больше чем костыли.

§ 105. ГИДРОТЕРМИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В зимнее время года грунт промерзает на максимальную глубину, а грунтовые воды опускаются как можно ниже. Весной после обильного снеготаяния и паводка талых вод уровень грунтовых вод достигает максимума, грунт набухает и несколько приподнимается, причем в низинах гораздо больше, чем на возвышенных участках. К концу весны прекращаются снеготаяние и паводки, начинает постепенно опускаться уровень грунтовых вод, грунт уплотняется и медленно оседает. По мере приближения летнего периода земная поверхность интенсивно прогревается, грунтовые воды уходят в более низкие слои, а гидротермические движения постепенно уменьшаются. К началу лета они практически прекращаются, если не считать отдельные нарушения, обусловленные выпадением обильных осадков в виде дождя. К концу осени после обильных дождей уровень грунтовых вод снова поднимается. С наступлением морозов земная поверхность начинает постепенно промерзать

на все большую глубину и начинают действовать силы морозного пучения.

Таким образом, гидротермические движения земной поверхности имеют явно выраженный сезонный ход. Поскольку нивелирные реперы закладываются в верхний слой грунта, подверженный гидротермическим движениям, то они участвуют в этом движении, в результате чего их высоты испытывают сезонный ход.

Величины гидротермических движений различны в разных районах страны. Так, например, в условиях Верхне-Колымского нагорья годовая амплитуда таких колебаний достигает нередко 300 мм. В Подмосковье в начале апреля 1964 г. был зарегистрирован случай, когда земная поверхность в одном из низинных участков опустилась за 25 дней на 25 мм, а в начале мая эти движения полностью прекратились.

Для того чтобы ослабить влияние гидротермических движений земной поверхности на результаты высокоточного нивелирования, необходимо, во-первых, реперы закладывать на возвышенных местах, менее всего подверженных гидротермическим движениям; во-вторых, не следует выполнять нивелирные работы в периоды наиболее интенсивных гидротермических движений в весеннее и осеннее время года, когда происходит наиболее интенсивное оттаивание и замерзание грунта; в-третьих, прямые и обратные ходы необходимо прокладывать, соблюдая принцип «восьмерки», в результате чего влияние этих движений приобретает характер случайных ошибок; наконец, не следует приступать к нивелирным работам сразу после прекращения обильного затяжного дождя и повышения уровня грунтовых вод после него.

§ 106. ИЗМЕНЕНИЕ ПРЕВЫШЕНИЙ ИЗ-ЗА ВЛИЯНИЯ ЛУНЫ И СОЛНЦА

Небесное тело массой M, находящееся на расстоянии r, вследствие притяжения вызывает на поверхности Земли отклонение отвеса, равное

$$U = \frac{3a^2M}{2r^3E} \sin 2Z, \tag{14.17}$$

где a — радиус Земли, E — ее масса, Z — зенитное расстояние небесного тела. Наибольшее отклонение отвеса вызывают наиболее близкие к Земле небесные тела — Луна и Солнце. Подставив соответствующие значения a, M, r и E, получим абсолютные отклонения отвеса (угловые секунды), вызываемые этими телами

$$U_{☽} = 0{,}0166 \sin 2Z_{☽};$$
$$U_{☉} = 0{,}0078 \sin 2Z_{☉}. \tag{14.18}$$

Вследствие приливов земной коры величина отклонений отвеса уменьшается в 1,188 раза. Поэтому их фактическая величина будет равна

$$U_{☽} = 0{,}0140 \sin 2Z_{☽};$$
$$U_{☉} = 0{,}0066 \sin 2Z_{☉}. \qquad (14.19)$$

Поправки δh (в мм/км) из-за изменения уклонений отвесных линий в превышение (разность высот), определяемое по линии с азимутом A при расстоянии L между реперами, вычисляют по формулам

$$\delta h_{☽} = 0{,}068L \sin 2Z_{☽} \cos (A_{☽} - A) \text{ мм/км};$$
$$\delta h_{☉} = 0{,}032L \sin 2Z_{☉} \cos (A_{☉} - A) \text{ мм/км}, \qquad (14.20)$$

где $A_{☽}$ и $A_{☉}$ — азимуты Луны и Солнца. Зенитные расстояния и азимуты Луны и Солнца определяют по формулам сферической астрономии.

Поскольку азимуты и зенитные расстояния Луны и Солнца непрерывно изменяются в течение суток и года в целом, то аналогичные изменения будут иметь и поправки δh в превышения. Эти поправки малы, и не превышают в сумме 0,1 мм/км. Поэтому их следует учитывать только при особо точных нивелирных работах, выполняемых, например, при изучении вертикальных движений земной коры на геодинамических полигонах, а также в ряде других случаев.

§ 107. ВЛИЯНИЕ ТЕКТОНИЧЕСКИХ И ДРУГИХ ЯВЛЕНИЙ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫСОКОТОЧНОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ

Медленные тектонические поднятия и опускания земной коры происходят практически повсеместно, причем с разной скоростью в различных районах. В Европейской части страны средняя скорость этих движений практически повсеместно не превышает $\pm 1 \div 4$ мм/год. Однако в таких районах, как Забайкалье, Кавказ и других скорость этих движений нередко достигает 15—20 мм/год. На расхождение прямых и обратных превышений эти движения земной коры практически не влияют, поскольку интервалы времени при проложении прямых и обратных нивелирных ходов слишком малы, чтобы влияние этих движений стало ощутимым.

Тектонические движения земной коры, несмотря на сравнительно малую их величину, могут по истечении длительного времени существенно искажать высоты реперов в нивелирной сети. Так, например, при несколько разной скорости поднятия (опускания) земной коры в двух соседних регионах, к примеру $+0{,}8$ мм/год и $+3{,}5$ мм/год, по истечении 20 лет высоты нивe-

лирных реперов могут измениться относительно друг друга на 54 мм. А ведь разности скоростей могут быть еще больше. Это обстоятельство доказывает, что не считаться с тектоническими движениями земной коры при создании опорной высокоточной нивелирной сети на огромной территории страны нельзя. Эти движения оказывают влияние и на невязки нивелирных полигонов. Это влияние будет тем больше, чем больше разрывы во времени между проложением нивелирных линий на разных участках полигона.

Если бы можно было надежно определять скорости тектонических движений в любом месте земной поверхности, то можно было исправлять высоты реперов за поднятия и опускания земной коры. Однако эти скорости определяются по результатам повторных нивелировок. Поэтому чтобы поддерживать точность нивелирной сети на уровне требований каждой эпохи измерений, необходимо нивелирование в этой сети повторять периодически, например, не реже чем через каждые 25 лет, как это принято в СССР [10].

Изменение превышений из-за изменения кривизны уровенной поверхности Земли. Уровенная поверхность Земли в разных ее частях может несколько деформироваться вследствие: перемещения обширных масс внутри Земли, из-за внезапного выпадения огромного количества осадков в виде дождя или снега в том или ином районе, в результате заполнения крупных водохранилищ и водоемов, а также вследствие изменения атмосферного давления. Каждый из этих факторов так или иначе изменяет гравитационное поле в конкретном районе, что ведет к изменению кривизны уровенных поверхностей, а следовательно, к изменению направлений отвесных линий, а значит и превышений. Изменения превышений сравнительно малы и, как правило, не превышают десятых долей миллиметра. Однако при высокоточных нивелирных работах, там где это возможно, необходимо учитывать влияние этих факторов на результаты нивелирования.

Выпучивание и оседание нивелирных реперов. В отдельных случаях при неудачном выборе должной глубины закладки реперов или при нарушении технологии их заложения в грунт реперы могут год за годом медленно подниматься под воздействием сил мерзлотного пучения и, реже, могут несколько оседать в рыхлых грунтах. Такие реперы могут быть обнаружены при повторном нивелировании, если их высоты изменятся на гораздо большую величину, чем высоты соседних реперов. Такие неудачно заложенные реперы необходимо исключить из нивелирной сети и вместо них по всем правилам заложить новые реперы.

Мгновенные изменения высот реперов в сейсмоактивных районах. В таких районах после землетрясения могут сущест-

венно измениться высоты значительного числа реперов, причем от нескольких миллиметров до нескольких метров, как например, в районах Газли, Ленинакана и др., где земная поверхность в одних местах опустилась, а в других поднялась на 1 м и более.

В таких случаях необходимо выполнить повторное нивелирование, причем не только в зоне землетрясения, но и вокруг нее на таком удалении, где влияние землетрясения на превышения между соседними реперами практически равно нулю.

Глава 15

МЕТОДЫ ВЫСОКОТОЧНОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 108. МЕТОД И ПРОГРАММА НИВЕЛИРОВАНИЯ I КЛАССА

Современные высокоточные нивелиры имеют оптический микрометр с плоскопараллельной пластинкой, позволяющий использовать способ совмещения при производстве отсчетов по рейкам. Вращая плоскопараллельную пластинку микрометра, совмещают биссектор сетки нитей трубы с изображением ближайшего к нему штриха нивелирной рейки и таким образом измеряют до 0,01 мм дробную часть деления, которую затем прибавляют к отсчету по штриху рейки. Перед каждым отсчетом по рейке тщательно совмещают изображения противоположных концов пузырька уровня, а при использовании нивелиров с компенсаторами следят за тем, чтобы положение линии визирования было стабильно.

Принятая в СССР программа нивелирования I класса предусматривает одновременное проложение двух линий нивелирования, отстоящих одна от другой примерно на 0,5 м (рис. 101). Справа по ходу линия называется правой линией нивелирования, а слева — левой линией нивелирования. Для производства нивелирования I класса необходим высокоточный нивелир, пара инварных реек (см. § 92), не менее 4—5 пар нивелирных костылей для установки на них нивелирных реек, топографический зонт и термометр для измерения температуры воздуха.

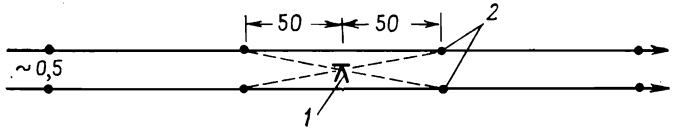


Рис. 101. Схема измерений на станции при нивелировании I класса:
1 — нивелир; *2* — нивелирные костыли

Костыли забивают в грунт попарно, на расстоянии друг от друга не менее 0,5 м. Расстояние между соседними парами костылей по ходу нивелирования в равнинной местности принимают равным 100 м. На местности с крутыми подъемами и спусками это расстояние может быть несколько уменьшено.

Большое число пар забитых в грунт костылей по ходу нивелирной трассы обеспечивает повышение производительности труда, так как установка нивелирных костылей опережает работу на нивелирной станции. Кроме того, такая программа нивелирования обеспечивает надежный контроль измерений на каждой станции и, если из-за неосторожности будет сбит тот или иной костыль, имеется возможность вернуться назад только на одну станцию, чтобы убедиться в неподвижности предыдущей пары костылей и продолжить от них работу далее, а не возвращаться на исходный репер, как это потребовалось бы при нивелировании по одной линии.

Нивелирные ходы прокладывают в прямом и обратном направлениях, причем по одной и той же трассе и по переходным точкам одного типа. Число станций в секции между смежными реперами при нивелировании как в прямом, так и в обратном направлениях делают одинаковым и обязательно четным, чтобы избавиться от ошибок из-за неравенства нулей пяток реек. Штатив нивелира устанавливают на станциях без перекосов и напряжений; две ножки штатива располагают вдоль линии нивелирования, а третью устанавливают попеременно то справа, то слева.

Напомним, что не рекомендуется сильно вдавливать в грунт ножки штатива и туго затягивать зажимные винты во избежание выпирания штатива из грунта во время измерений на станции.

Нормальная длина визирного луча принята равной 50 м. На участках со значительными уклонами и при подходах к реперам длина луча может уменьшаться. Расстояния от места установки нивелира до мест установки реек (до костылей) измеряют металлическим тросиком. Неравенство расстояний от нивелира до реек на станции не должно превышать 0,5 м. Накопление этих разностей в секции между смежными реперами корректируется по ходу работ и должно быть не более 1 м. Высота визирного луча над подстилающей поверхностью должна быть не менее 0,8 м. В отдельных случаях при длине визирного луча до 25 м разрешается уменьшить его высоту до 0,5 м.

Наблюдения на станциях при нивелировании I класса выполняют способом совмещения, соблюдая принцип симметричных измерений при переходе от станции с нечетным номером к станции с четным номером, а также при переходе от прямого хода к обратному. Обозначим через $З_о$ и $З_д$ отсчеты по

основной и дополнительной шкалам задней рейки, а через $П_о$ и $П_д$ — отсчеты по основной и дополнительной шкалам передней рейки.

В прямом ходе наблюдения на нечетных станциях начинают с отсчетов по задней рейке, а на четных — с передней и выполняют по следующей программе

Станция	*Правая линия нивелирования*	*Левая линия нивелирования*
Нечетная	$З_оП_оП_дЗ_д$	$З_оП_оП_дЗ_д$
Четная	$П_оЗ_оЗ_дП_д$	$П_оЗ_оЗ_дП_д$

В обратном ходе наблюдения на нечетных станциях начинают с передней рейки, а на четных — с задней. При переходе от прямого хода к обратному рейки меняют местами.

На каждой станции нивелирование выполняют сначала по правой линии, а затем по левой. В намеченном месте устанавливают штатив с нивелиром и приводят последний в рабочее состояние. Затем по команде наблюдателя реечники осторожно ставят рейки на правые по ходу костыли и с помощью уровня приводят их в отвесное положение, в котором поддерживают с помощью подпорок. На этом подготовительные работы к измерениям на станции завершаются. Наблюдения выполняют следующим образом:

1) с помощью круглого уровня и подъемных винтов приводят вертикальную ось нивелира в отвесное положение;

2) наводят трубу нивелира на основную шкалу задней (передней) рейки, стоящей на правом костыле; оптический микрометр нивелира ставят на отсчет 50; вращением элевационного винта совмещают приближенно изображения концов пузырька контактного уровня и берут дальномерные отсчеты по трем нитям;

3) с помощью элевационного винта наклоняют трубу и точно совмещают изображения концов пузырька уровня; биссектор микрометра наводят на ближайший штрих основной шкалы и производят отсчеты по рейке и шкале микрометра;

4) наводят трубу на основную шкалу другой рейки, стоящей также на правом костыле, и выполняют все действия, указанные в пп. 2 и 3;

5) трубу наводят наводящим винтом на дополнительную шкалу этой же рейки и вращением элевационного винта на четверть оборота несколько наклоняют ее; затем точно совмещают изображения концов пузырька уровня и фиксируют отсчеты по рейке и микрометру;

6) далее поворачивают нивелир вокруг вертикальной оси, наводят трубу на дополнительную шкалу передней рейки, попрежнему стоящей на правом костыле, и производят отсчеты

по рейке и микрометру; на этом работа на правой линии заканчивается;

7) переставляют рейки на левые костыли и выполняют наблюдения в той же последовательности, как при измерениях на правой линии нивелирования; на этом наблюдения на станции заканчиваются;

8) сделав необходимые вычисления и убедившись в соблюдении всех допусков, переходят на следующую станцию. На время перехода наблюдателя с нивелиром на другую станцию переднюю рейку снимают с костыля, а заднюю переносят в это время на следующий костыль.

Отсчеты по рейке производят не ранее чем через полминуты после окончательной установки рейки на костыль и после полного успокоения контактного уровня нивелира.

Нивелирование выполняют участками в 25—30 км по схеме «восьмерки», т. е. одну половину секций участка сначала проходят в прямом направлении, а другую — в обратном, затем наоборот. На каждой секции между смежными реперами нивелирование в прямом ходе выполняют утром (вечером), а в обратном, наоборот, вечером (утром). С меньшей строгостью это требование соблюдают осенью и при пасмурной погоде.

До начала наблюдений нивелир на штативе выдерживают в тени не менее 45 мин. Во время наблюдений на станции нивелир тщательно защищают от солнечных лучей с помощью зонта с белой подкладкой, а при переходе с одной станции на другую — с помощью просторного чехла из белой материи. Через каждые две станции термометром-пращом измеряют температуру воздуха на высоте нивелира. Рекомендуется фиксировать время наблюдений на каждой станции.

Утром нивелирование начинают через полчаса после восхода солнца и продолжают в течение примерно 3 часов, когда колебания изображений малы и можно уверенно наводить биссектор микрометра на штрихи реек. Вечером наблюдения начинают примерно за 5 ч до захода солнца и прекращают за 0,5 ч до него. Во всех случаях надо стремиться к симметрии измерений относительно момента изотермии воздуха при работе как утром, так и вечером. Не разрешается выполнять нивелирование в следующих случаях:

1) при колебаниях изображений, затрудняющих точное наведение биссектора микрометра на штрих рейки, и при «плавающих» изображениях;

2) при сильном и порывистом ветре;

3) при скачкообразных, а также резких изменениях температуры воздуха за короткий промежуток времени.

При нивелировании I класса следят также за тем, чтобы результаты измерений на каждой станции удовлетворяли следующим требованиям:

расхождение превышений, полученных из измерений по основной и дополнительной шкалам реек для правой и отдельно для левой линий нивелирования, не должно превышать 0,5 мм (10 делений шкалы микрометра);

расхождение превышений между одной и той же парой задних (передних) костылей, полученных из наблюдений на предыдущей и последующей станциях, не должны превышать 0,7 мм (14 делений шкалы микрометра).

Современная методика и программа нивелирования I класса разработаны с учетом максимального ослабления влияний различных источников ошибок и направлены на достижение наивысшей точности результатов измерений в массовых работах.

§ 109. МЕТОД И ПРОГРАММА НИВЕЛИРОВАНИЯ II КЛАССА

Для нивелирования II класса применяют такие же нивелиры и инварные рейки, как и для нивелирования I класса. Ошибки метровых шкал и всей шкалы рейки не должны превышать 0,20 мм, а при работе в горных районах — 0,10 м. До выезда на полевые работы нивелир и рейки должны быть исследованы, в результате чего должна быть установлена их пригодность для выполнения нивелирования.

Нивелирование II класса выполняют в прямом и обратном направлениях по той же методике, что и нивелирование I класса, но только по одной линии.

Нормальная длина визирного луча составляет 65 м. На участках со значительными уклонами и при подходе к реперам длина луча может уменьшаться. При использовании нивелиров с увеличением трубы не менее 44^x в случае благоприятных условий наблюдений разрешается увеличивать длину визирного луча до 75 м. При использовании нивелиров Ni 007 длина луча рекомендуется не более 40 м. Неравенство расстояний от нивелира до реек на станции должно быть не больше 1 м, а накопление этих разностей в секции — 2 м. Высота визирного луча над подстилающей поверхностью должна быть не менее 0,5 м; в отдельных случаях при длине визирного луча до 30 м его высоту разрешается уменьшить до 0,3 м.

Наблюдения на станциях выполняют по способу «совмещения». На нечетных станциях наблюдения начинают с задней рейки ($З_оП_оП_дЗ_д$), а на четных станциях — с передней ($П_оЗ_оЗ_дП_д$). В обратном ходе наблюдения на нечетных станциях начинают с передней, а на четных — с задней рейки. При переходе от прямого хода к обратному рейки меняют местами.

Все остальные рекомендации по высокоточному нивелированию (см. § 108) соблюдаются и при нивелировании II класса.

При нивелировании по каменистому или очень плотному, а также мерзлому грунту рекомендуется использовать костыли

длиной 10—20 см и толщиной до 3 см; при прохождении хода по мягкому грунту — деревянные колья с гвоздями в торцах. При нивелировании в обратном направлении колья несколько заглубляют в грунт.

Результаты нивелирования контролируют на каждой станции, по секциям между смежными реперами и по участкам между фундаментальными реперами.

На каждой станции вычисляют два значения превышения из наблюдений по основным и дополнительным шкалам реек, а также разность между отсчетами по основной и дополнительной шкалам каждой рейки. Расхождение между превышениями и разность высот нулей реек, вычисленная на станции и полученная из исследований реек, не должны превышать 0,7 мм (14 делений шкалы микрометра). При несоблюдении допусков наблюдения на станции выполняют заново, предварительно изменив высоту горизонта нивелира не менее чем на 3 см.

Разность превышений, полученных в секции из прямого и обратного ходов должна быть не более $\Delta \leqslant 5$ мм $\sqrt{L}$ при среднем числе n станций на один километр хода меньше 15 и $\Delta \leqslant 6$ мм $\sqrt{L}$ (L в км) при $n \geqslant 15$ или при нивелировании в труднопроходимых условиях. При несоблюдении допуска нивелирование по секции дополнительно повторяют в одном каком-либо направлении. Допустимое расхождение превышений из прямого и обратного ходов между фундаментальными реперами вычисляют по этим же формулам

§ 110. МОТОРИЗОВАННОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ

В последние годы при высокоточном нивелировании стали более широко использоваться автомашины для реализации самого процесса нивелирования. Автомашины оборудованы специальными приспособлениями, позволяющими, не выходя из них, устанавливать на грунт штатив с нивелиром, костыли с рейками и затем обычным образом определять превышения между точками, беря отсчеты по задней и передней рейкам. Такое нивелирование получило название моторизованного нивелирования. Для нивелирования используется, например, в ГДР нивелир с компенсатором Ni 002 Народного предприятия «Карл Цейс Йена», позволяющий брать отсчеты по задней и передней рейкам при одном и том же положении наблюдателя относительно нивелира (благодаря повороту окулярной трубки по азимуту). Моторизованное нивелирование при хорошо развитой сети автомобильных дорог позволяет повысить производительность труда на 40 % и снизить стоимость работ на 20—25 % по сравнению с таковыми при традиционном нивелировании. При моторизованном нивелировании особое внимание должно быть обращено на ослабление сущест-

венного влияния ошибок из-за рефракции, которые в данном случае заметно возрастают вследствие возникновения дополнительных локальных полей рефракции на пути визирного луча вблизи каждого автомобиля (на одном установлен нивелир, а на двух других — нивелирные рейки). Для более полного ослабления влияния различных источников ошибок, нивелирование выполняют по особой программе, разработанной для данного метода нивелирования.

§ 111. ОСОБЕННОСТИ ВЫСОКОТОЧНОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ В ГОРНЫХ РАЙОНАХ, СЕВЕРНЫХ ШИРОТАХ И КРУПНЫХ ГОРОДАХ

Особенности нивелирования в горных районах. Наиболее характерной особенностью нивелирования в горных условиях являются большие превышения между точками, а следовательно, короткие расстояния между нивелиром и рейками, а также резкие различия высот визирных лучей, идущих к задней и передней рейкам. В таких условиях работы резко увеличивается число нивелирных станций на 1 км хода; ошибки из-за рефракции приобретают характер явно выраженных систематических ошибок при подъеме и спуске с гор. Наиболее ощутимо сказывается влияние погрешностей определения средней длины метра реек.

Эталонирование инварных реек при работах в горных районах рекомендуется выполнять на стационарном компараторе с особой тщательностью перед началом, в середине и после окончания полевых работ. В течение полевого сезона необходимо ежемесячно выполнять контрольные определения длины метра реек с помощью контрольной линейки. Если средняя длина метра комплекта реек в процессе работ изменится более чем на 0,05 мм, то рейки должны быть дополнительно проэталонированы на стационарном компараторе. Инструкция [10] требует, чтобы средняя длина метра комплекта реек и длины отдельных метровых интервалов реек, предназначенных для работы в горных условиях, отличались от номинальной длины не более 0,05 мм и 0,1 мм при нивелировании I и II классов соответственно.

В измеренные превышения необходимо вводить поправки за изменения длины метра реек, за разность температуры инварной полосы при эталонировании и при выполнении нивелирных работ. Для этого следует определить коэффициент линейного расширения инварной полосы каждой рейки и снабдить рейки термодатчиками для измерения температуры в процессе нивелирования.

Для того чтобы уменьшить число станций на 1 км хода, рекомендуется применять штативы повышенной высоты (1,7—

1,8 м) и на каждой станции определять предельно большие превышения, не нарушая при этом установленного допуска минимальной высоты визирного луча над почвой.

Особое внимание при нивелировании в горах надо обратить на организацию работы нивелирной бригады. В течение каждого дня бригада выполняет измерения примерно на 200 станциях. Поэтому любые нецелесообразные затраты времени наблюдений на станции отрицательно сказываются на производительности труда. Необходимо при разбивке нивелирной трассы тщательно измерять расстояния между будущими стоянками нивелира и реек, а кроме того, с помощью простейшего нивелира или эклиметра проверять соблюдается ли условие прохождения визирного луча на требуемой высоте.

Нивелирные трассы в горах следует выбирать так, чтобы максимально уменьшить число секций с уклонами более 0,05. При закреплении нивелирных линий в горах предпочтение отдают скальным реперам. При благоприятных условиях скальные реперы закладывают через 1—2 км, грунтовые — через 3—4 км, фундаментальные — через 30—40 км. Вблизи глубинных разломов земной поверхности нивелирные знаки закладывают через 0,5—1,5 км, причем по обе стороны границы разлома и не менее чем по 2—3 знака на каждой стороне.

Особенности высокоточного нивелирования в северных широтах. Северные и северо-восточные районы нашей страны занимают обширные пространства и крайне неблагоприятны для высокоточного нивелирования. Около двух третей линий нивелирования в этих районах прокладывается по берегам больших и малых рек, по заболоченной тайге и тундре. Выбор мест для закладки реперов ведут с участием специалистов по мерзлотоведению. При рекогносцировке выбирают трассы с наиболее благоприятными для данного района грунтовыми условиями и наименее пересеченным рельефом. Рекомендуется свести к минимуму число секций и участков линий, нивелирование которых должно выполняться летом по растаявшим болотам. Запрещается намечать трассу и выполнять летом нивелирование в таких заболоченных местах, где под ножки штатива и под рейки требуется забивать колья длиной более 1 м. На сильно заболоченных участках нивелирование выполняют ранней весной по мерзлому грунту.

Для нивелирования применяют высокие штативы с длиной ножек 1,6—1,8 м. При нивелировании по мерзлому грунту к ножкам штатива с помощью болтов прикрепляют текстолитовые удлинители (25—30 см); нередко на металлические концы ножек крепят пластмассовые или роговые наконечники. При нивелировании по снегу к ножкам штатива крепят деревянные удлинители (30—40 см), концы которых делают утолщенными и тупыми. Для установки реек в зависимости от вида и состоя-

ния грунта применяют стальные костыли различной длины и формы; при нивелировании по глубокому снегу применяют деревянные башмаки размером 50×30×8 см с тремя шипами в нижнем основании. При установке штатива и башмаков наст разрыхляют, а снег тщательно трамбуют. Передвигаться около реек и нивелира следует с большой осторожностью. Вести нивелирование в периоды разрыхления наста и интенсивного снеготаяния не разрешается.

В период полярного дня нивелирование выполняют в вечерние и ночные часы: начинают не ранее 17 ч и заканчивают утром следующего дня не позднее 6—7 ч.

Особенности геометрического нивелирования в крупных городах. На территории крупных городов площадью $P > 1000$ км^2 высотная основа создается в виде нивелирных сетей I, II, III и IV классов; в городах площадью $400 \leqslant P \leqslant 1000$ км^2 — в виде нивелирных сетей II—IV классов; при $P < 400$ км — в виде системы нивелирных ходов III и IV классов.

Нивелирная сеть I класса представляет собой систему, состоящую, как правило, из 8—15 замкнутых полигонов, охватывающих как застроенную, так и незастроенную зоны города. Нивелирная сеть II класса развивается внутри полигонов I класса. Наибольшие расстояния между узловыми пунктами в сети II класса не должны превышать 15 км в застроенной и 20 км в незастроенной зонах; периметры полигонов II класса в этих зонах допускаются до 50 и 80 км соответственно. Внутри полигонов II класса создается нивелирная сеть III класса с расстояниями между узловыми пунктами, как правило, до 10 км в застроенной и до 15 км в незастроенной зонах; периметры полигонов — соответственно до 25 и 40 км. Дальнейшее сгущение нивелирной сети производится путем проложения нивелирных ходов IV класса; длины ходов между реперами высших классов допускаются до 2 км на застроенной и до 4 км на незастроенной территории; расстояния между узловыми пунктами — соответственно до 1 и 2 км. Периметры полигонов в сетях IV класса допускаются до 8 и 12 км в застроенной и незастроенной зонах города.

Характерной особенностью нивелирных сетей, создаваемых на городской территории, является большая плотность (число) нивелирных знаков, приходящихся на единицу площади (табл. 40).

Для закрепления нивелирных линий всех классов применяют нивелирные знаки разных типов: стенные марки, скальные и грунтовые реперы. В застроенной части города предпочтение отдают стенным знакам, которые закладывают в прочные каменные, бетонные и железобетонные здания и сооружения, построенные не менее чем за 5—7 лет до начала нивелирных работ.

Таблица 40

Классы нивелирования	Наибольшие расстояния между реперами, км		
	в центральной части города	на окраинах города	на незастроенной территории
I—II	2	2	3
III—IV	0,2—0,3	0,8	0,5—2

Из опыта геодезических работ установлено, что нивелирные знаки, независимо от их вида, размещенные на городской территории, с течением времени изменяют свое положение по высоте, причем на разные величины в разных районах города. Причин изменений высот знаков много. Среди них следует отметить такие, как изменение уровня грунтовых вод, возведение многоэтажных зданий, в которые заложены нивелирные марки; подземные разработки; морозное пучение реперов и т. д.

Для того чтобы нивелирная сеть на городской территории отвечала своему назначению, необходимо особое внимание уделить вопросам надежного закрепления нивелирных линий на местности и затем периодически, через определенные интервалы времени, зависящие от величин и особенностей изменения высот нивелирных знаков, выполнять повторное нивелирование в сети.

Все подземное хозяйство города в высотном отношении относится к нивелирной сети первой эпохи ее нивелирования. Поэтому при повторном нивелировании, несмотря на то, что высоты исходных знаков могут измениться, стремятся так или иначе сохранить ту систему высот (средний уровень), которая ближе всего соответствует первой эпохе нивелирования. Для этого в качестве исходного уровня целесообразно взять среднее из высот не менее 4—5 нивелирных реперов государственной нивелирной сети I—II классов, заложенных вдали и по разные стороны от застроенной части крупного города и мало подверженных вертикальным перемещениям.

В городах, находящихся в зоне повышенной сейсмической активности (7—9 баллов), нивелирные сети высокой точности строят по особой программе, предусматривающей частую повторяемость нивелирования и возможность проведения микросейсмического районирования территории города с одновременными геолого-геофизическими обследованиями территории города.

§ 112. ПОНЯТИЕ О СИСТЕМАХ НИВЕЛИРНЫХ ВЫСОТ

Допустим, что методом геометрического нивелирования (рис. 102) требуется определить высоту точки B относительно исходной точки O, находящейся на поверхности геоида. На каждой станции нивелирного хода, проложенного между точками O и B, визирную ось трубы нивелира совмещают с касательной к уровенной поверхности, перпендикулярной к отвесу в точке установки нивелира, и получают из измерений превышение Δh. Суммируя превышения Δh по всей линии нивелирования OB, находят высоту H_B точки B относительно точки O, т. е.

$$H_B = \sum_{O}^{B} \Delta h \tag{15.1}$$

или, приняв Δh за элементарное превышение dh:

$$H_B = \int_{(OB)} dh. \tag{15.2}$$

Высота H_B при высокоточных измерениях превышений зависит от выбранного пути нивелирования. Действительно, пусть OC — поверхность геоида, проходящая через начало отсчета высот в точке O, в которой потенциал силы тяжести равен W_0. Через точку B, в которой потенциал силы тяжести равен W_B, проведем уровенную поверхность AB. Затем через точки O и B проведем силовые линии OA и BC, перпендикулярные к поверхностям OC и AB, которые непараллельны и имеют волнообразный характер вследствие изменений силы тяжести при переходе от экватора к полюсам и наличия аномальных масс в земной коре. Вследствие этого отрезки OA и BC силовых линий в точках O и B будут не равны между собой, т. е. $|OA| \neq$

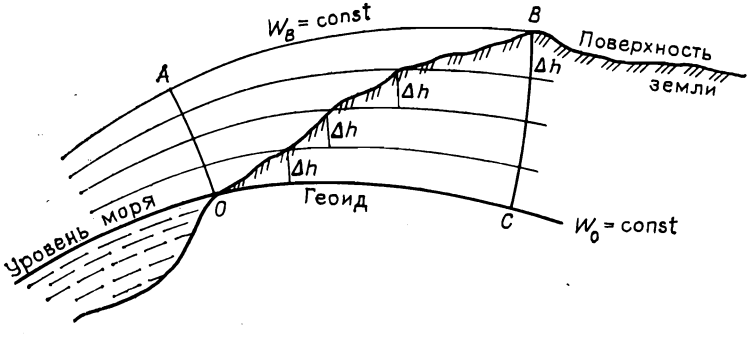


Рис. 102. Уровенные поверхности Земли и измеренные превышения

$\neq |BC|$. Это значит, что если нивелирный ход проложить по трассе OAB, то высота точки B будет равна отрезку OA, т. е.

$$H'_B = \int\limits_{(OAB)} dh = OA;$$

при проложении нивелирного хода по трассе OCB высота точки B будет равна отрезку CB, т. е.

$$H''_B = \int\limits_{(OCB)} dh = CB,$$

так как высоты точек при перемещении вдоль уровенных поверхностей AB и OC не изменяются.

Поскольку отрезки OA и CB (см. рис. 102) не равны между собой, то при нивелировании по трем трассам OAB, OB и OCB получим три разных значения высоты точки B. Такая неопределенность положения точки по высоте недопустима при высокоточном нивелировании. Поэтому в геодезии при точных работах применяют такие системы нивелирных высот, в которых высота любой точки не зависит от пути нивелирования.

Ортометрические высоты

Ортометрической высотой точки B (см. рис. 102) называется расстояние $H_B^g = CB$ между геоидом и данной точкой, отсчитываемое по силовой линии, проходящей через эту точку.

Ортометрическая высота вычисляется по формуле

$$H_B^g = \frac{1}{g_m} \int\limits_0^B g\,dh, \tag{15.3}$$

где g_m — среднее значение реальной силы тяжести на отрезке CB силовой линии между поверхностью Земли и поверхностью геоида; g — измеренные значения силы тяжести в точках нивелирной линии; dh — элементарные превышения между точками нивелирной линии.

Величину

$$\int\limits_0^B g\,dh = W_0 - W_B, \tag{15.4}$$

равную разности потенциалов силы тяжести W_0 и W_B соответственно на поверхности геоида и в точке B, называют геопотенциальным числом (величиной) этой точки. Поскольку геопотенциальное число (разность потенциалов) не зависит от пути между точками, то и ортометрические высоты (15.3) также не зависят от пути нивелирования. В нашей стране ортометри-

ческие высоты применялись примерно до середины 40-х годов, а затем по предложению М. С. Молоденского была принята разработанная им система нормальных высот.

Нормальные высоты

М. С. Молоденский доказал, что точные значения ортометрических высот (15.3) получить невозможно из-за того, что реальные значения силы тяжести g в точках силовой линии между поверхностью Земли и поверхностью геоида не известны. Для того чтобы устранить этот недостаток, М. С. Молоденский предложил ввести систему нормальных высот, в которой высота любой точки B вычисляется по формуле

$$H^{\gamma}_{B} = \frac{1}{\gamma_m} \int_0^B g dh, \qquad (15.5)$$

где γ_m — значение нормальной силы тяжести на высоте $H = \frac{1}{2} H^{\gamma}_{B}$ над эллипсоидом, вычисляемое по формулам (1.15) и (1.18). В СССР для вычисления по (1.15) нормальной силы тяжести γ_0 на поверхности эллипсоида принята формула Гельмерта

$$\gamma_0 = 978030\,(1 + 0{,}005302 \sin^2 B - 0{,}000007 \sin^2 2B) \text{ мГал},$$

полученная в 1909 г. для эллипсоида со сжатием $\alpha = 1 : 298{,}2$, которое незначительно отличается от сжатия эллипсоида Красовского.

Нормальные высоты, в отличие от ортометрических, определяются теоретически строго, поскольку значение нормальной силы тяжести γ_m в формуле (15.5) может быть вычислено практически безошибочно, в то время как в выражении (15.3) для определения среднего значения реальной силы тяжести g_m между геоидом и поверхностью Земли приходится использовать различные гипотезы о распределении плотности масс в теле Земли.

В практике топографо-геодезических и картографических работ принято нормальные высоты, вычисленные по формуле (15.5), отсчитывать от поверхности квазигеоида по нормалям к эллипсоиду в точках, высоты которых определяются.

Динамические высоты

Для точек, лежащих на одной и той же уровенной поверхности $W_B = \text{const}$, геопотенциальная величина $W_0 - W_B = \int_0^B g dh$, т. е. числитель дроби в формулах (15.3) и (15.5), неизменна по мо-

дулю. При переходе от экватора к полюсу изменяется величина как реальной g, так и нормальной силы тяжести γ, т. е. изменяется величина знаменателя в формулах (15.3) и (15.5). Это значит, что невозмущенная водная поверхность больших озер и водохранилищ, вытянутых в широтном направлении, будет иметь разные значения как нормальных, так и ортометрических высот в северной и южной части каждого из них. Так, например, разность нормальных высот уровенной поверхности на севере и юге Рыбинского водохранилища равна 8 мм; оз. Севан — 77 мм, а оз. Байкал — 165 мм. Это создает большие неудобства при гидротехническом строительстве и гидромелиоративных изысканиях. В подобных случаях целесообразно использовать такую систему нивелирных высот, в которой высоты уровня воды, находящейся в спокойном состоянии, остаются одинаковыми в любой части озера или водохранилища независимо от широты.

Такую систему высот можно получить, если в формуле (15.5) знаменатель дроби сделать постоянной величиной, равной нормальной силе тяжести, например γ_{45° на средней широте 45°. Тогда получим систему так называемых динамических высот, вычисляемых по формуле

$$H_B^d = \frac{1}{\gamma_{45^\circ}} \int_0^B g\,dh. \qquad (15.6)$$

Для того чтобы динамические высоты по величине мало отличались от нормальных в конкретном районе работ, в формуле (15.6) вместо γ_{45° надо взять γ_φ для широты φ данного района.

§ 113. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫСОКОТОЧНОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ

Математическая обработка результатов нивелирования подразделяется на два этапа: 1) предварительные вычисления и 2) уравнивание нивелирной сети за возникающие в ней геометрические условия.

Предварительные вычисления включают:

составление схемы нивелирной сети в заданном масштабе с указанием на ней положения и связей исходных и определяемых реперов, а также другой требуемой информации;

проверку материалов исследований нивелира и реек путем повторных вычислений искомых величин;

составление контрольной ведомости проверки вычислений, выполненных в журналах нивелирования;

вычисление поправок за отличие длины среднего метра реек от номинальной, а также поправок за температуру реек на станциях и исправление этими поправками измеренных превы-

шений отдельно для правой и левой линий нивелирования в прямом и обратном ходах;

вычисление поправок в измеренные превышения за переход к системе нормальных высот;

составление окончательной ведомости измеренных между реперами превышений, исправленных поправками за отличие длины среднего метра реек от номинальной, температуру реек и переход к системе нормальных высот;

контроль соблюдения допусков, предъявляемых к результатам нивелирования;

оценка точности нивелирования, включая вычисление случайных и систематических ошибок на один километр нивелирного хода.

Поправки в превышения за отличие длины среднего метра реек от номинальной

При эталонировании каждой инварной рейки на компараторе всякий раз получают по четыре значения l_i длины одного метра из измерений между штрихами 10—30, 30—50 основной шкалы и 70—90, 90—110 дополнительной шкалы. Для пары реек, входящих в комплект, получают восемь значений длины и находят длину среднего метра реек:

$$l_э = \frac{1}{n} \Sigma l_i, \tag{15.7}$$

где n — число значений l_i, а затем вычисляют отклонение длины среднего метра реек от номинальной:

$$\Delta l_э = l_э - 1000{,}00 \text{ мм}. \tag{15.8}$$

Инварные рейки эталонируют до и после полевого сезона, а при нивелировании в горах — еще и в середине. Если длина среднего метра реек в период между двумя смежными эталонированиями изменилась не более чем на 0,02 или 0,03 мм при нивелировании I и II классов соответственно, то из значений длины, полученных при двух эталонированиях, находят средние $l_э$ и $\Delta l_э$. Если расхождения превышают указанные величины, то отклонения $\Delta l_э$ интерполируют на среднюю дату нивелирования.

Поправку $\delta h_э$ (в мм) в измеренное превышение h' за отличие длины среднего метра реек от номинальной вычисляют по формуле

$$\delta h_э = \Delta l_э \cdot h', \tag{15.9}$$

где поправка $\Delta l_э$ выражена в миллиметрах, а превышение h' — в метрах. Исправленное превышение вычисляют по формуле

$$h = h' + \delta h_э. \tag{15.10}$$

Поправки в превышения за температуру инварных реек

Высокоточное нивелирование выполняют при температуре воздуха от —20 до +50 °С. При ясной погоде, когда инварная полоса одной рейки на станции освещена лучами Солнца, а другой находится в тени, разность температуры задней и передней реек нередко достигает 5 °С и более. Длина метровых интервалов и всей рейки в целом определяется на компараторе при температуре $t_э$; превышение на станции измеряется при другой температуре $t_н$. Поэтому возникает необходимость исправления измеренных превышений за разность температуры инварных реек при эталонировании и наблюдениях на каждой станции.

Обозначим: α' и α'' — коэффициенты линейного расширения, а $t_н'$ и $t_н''$ — температура инварных полос соответственно задней и передней реек при нивелировании на станции. Тогда поправка за температуру в измеренное превышение на станции $h'=З—П$ будет равна

$$\delta h_t = \alpha' (t_н' - t_э) З - \alpha'' (t_н'' - t_э) П, \qquad (15.11)$$

где З и П — отсчеты по задней и передней рейкам, (м).

По данным ЦНИИГАиК коэффициенты линейного расширения инварных полос у разных реек колеблются в довольно большом диапазоне: от $+0{,}5 \cdot 10^{-6}$ до $+3{,}5 \cdot 10^{-6}$. Поэтому для каждой рейки необходимо определить конкретный коэффициент линейного расширения и использовать его при вычислении поправок в превышения за температуру. Рекомендация инструкции [10] использовать некоторое среднее значение коэффициента $\alpha_{ср}=2 \cdot 10^{-6}$, если реальные коэффициенты неизвестны, вряд ли оправдана, так как в ряде случаев, например при $\alpha=0{,}5 \cdot 10^{-6}$, приведет не к уточнению, а искажению измеренных превышений.

Температуру инварных полос реек необходимо измерять термодатчиками, устанавливаемыми на рейках. Так как разность температуры воздуха и инварных полос, освещенных солнечными лучами, достигает нередко 10÷15 °С, пользоваться термометром-пращом не следует.

Поправки за температуру необходимо учитывать при нивелировании в горной местности и на трассах с уклоном 0,01 и более.

С учетом поправок $\delta h_э$ и δh_t измеренные в прямом и обратном ходах превышения вычисляют по формуле

$$h = h' + \delta h_э + \delta h_t. \qquad (15.12)$$

Поправки за переход к разностям нормальных высот

Выше отмечалось, что при топографо-геодезических работах в СССР применяется система нормальных высот. Опыт показывает, что практически более удобно вычислять не полные

значения нормальных высот (15.5), а их приращения. В связи с этим каждое измеренное превышение $h_{ik}=H_k-H_i$ между пунктами i и k исправляют поправкой f_{ik} за переход к разности нормальных высот, определяемой по формуле

$$f_{ik}=-\frac{1}{\gamma_m}(\gamma_{ok}-\gamma_{oi})H_m+\frac{1}{\gamma_m}(g-\gamma)_m h_{ik}, \qquad (15.13)$$

где γ_m — приближенное значение нормальной силы тяжести, принимаемое для всей территории СССР равным 980 000 мГал; γ_{oi} и γ_{ok} — значения нормальной силы тяжести на отсчетном эллипсоиде в точках i и k; H_m — среднее значение нормальной высоты пунктов i и k; g — измеренная сила тяжести; γ — нормальная сила тяжести; $(g-\gamma)_m$ — среднее из аномалий силы тяжести на пунктах i и k; h_{ik} — измеренное превышение между пунктами i и k.

Подробные указания и примеры вычисления поправок f_{ik} даны в инструкции [11]. Поправку f вводят в среднее превышение из прямого и обратного ходов, при составлении окончательной ведомости измеренных превышений, предварительно исправленных поправками $\delta h_э$ за отличие длины среднего метра реек от номинальной и поправками δh_t за температуру реек при нивелировании.

Окончательные значения измеренных превышений, исправленных всеми поправками, равны

$$h=h'+\delta h_э+\delta h_t+f. \qquad (15.14)$$

Контроль результатов нивелирования

Прежде чем приступить к уравниванию нивелирной сети, необходимо на стадии предварительных вычислений проверить соблюдение допусков, предъявляемых к результатам нивелирования. При этом используют превышения $h=h'+\delta h_э+\delta h_t$, исправленные поправками за отличие длины среднего метра реек от номинальной и поправками за температуру реек.

При нивелировании I класса для контроля правильности измерений вычисляют следующие разности превышений:

правого и левого нивелирования прямого хода

$$d_1=(h_{прав}-h_{лев})_{прям};$$

правого и левого нивелирования обратного хода

$$d_2=(h_{прав}-h_{лев})_{обр};$$

прямого и обратного ходов правого нивелирования

$$d_3=(h_{прям}-h_{обр})_{прав};$$

прямого и обратного ходов левого нивелирования

$$d_4 = (h_{\text{прям}} - h_{\text{обр}})_{\text{лев}};$$

средних результатов правого и левого нивелирования

$$d_5 = \frac{1}{2}(h_{\text{прям}} + h_{\text{обр}})_{\text{прав}} - \frac{1}{2}(h_{\text{прям}} + h_{\text{обр}})_{\text{лев}};$$

средних результатов прямого и обратного ходов

$$d_6 = \frac{1}{2}(h_{\text{прав}} + h_{\text{лев}})_{\text{прям}} - \frac{1}{2}(h_{\text{прав}} + h_{\text{лев}})_{\text{обр}}.$$

Каждая из разностей d_1, d_2 и d_6 не должна превышать величины

$$d_i \leqslant 3 \text{ мм } \sqrt{L} \qquad (15.15)$$

при числе нивелирных станций на один километр хода $n<15$ и величины 4 мм $\sqrt{L}$ при $n>15$, где L в км. При вычислении разностей d_i знак при $h_{\text{обр}}$ берут такой же, как при $h_{\text{прям}}$.

Правильность вычисления всех d_i в каждой секции между смежными реперами контролируют по формулам:

$$d_5 = \frac{1}{2}(d_1 - d_2); \quad d_6 = \frac{1}{2}(d_3 + d_4).$$

Из-за влияния ошибок округления возможны расхождения до 0,1 мм.

При нивелировании II класса разности d между превышениями из прямого и обратного ходов не должны превышать величины $d=5$ мм $\sqrt{L}$ при числе станций на один километр хода $n<15$ и величины $d=6$ мм $\sqrt{L}$ при $n>15$; L в км.

При проверке вычислений в полевых журналах контролируют соблюдение допусков, установленных для длины визирного луча и его высоты над подстилающей поверхностью, а также допусков неравенства расстояний от нивелира до реек и накопления их в секциях между смежными реперами.

Заключительным этапом предварительных вычислений является оценка точности результатов нивелирования.

§ 114. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫСОКОТОЧНОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ

Вопросам оценки точности результатов высокоточного геометрического нивелирования посвящены многие работы как советских ученых Н. А. Павлова, А. С. Чеботарева, В. И. Звонова, Д. А. Ларина и др., так и зарубежных Лаллемана, Рунэ, Виньяла, Куккамяки и др.

Наиболее широкое распространение получили формулы французского ученого Лаллемана, опубликованные в 1912 г.

Средняя квадратическая ошибка превышения между конечными точками нивелирного хода длиной L (в км) вычисляется по формуле

$$m^2 = \eta^2 L + \sigma^2 L^2, \tag{15.16}$$

где η — случайная и σ — систематическая средние квадратические ошибки на 1 км двойного нивелирного хода.

Пусть нивелирный ход длиной L состоит из n секций между смежными реперами, каждая по r км, и пусть d_i — разности превышений из прямого и обратного ходов в каждой секции. Тогда на основании формулы (15.16) напишем

$$\begin{aligned}
\eta^2 r_1 &= \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 - \sigma^2 r^2;\\
\eta^2 r_2 &= \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - \sigma^2 r^2;\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\eta^2 r_n &= \left(\frac{d_n}{2}\right)^2 - \sigma^2 r^2.
\end{aligned} \tag{15.17}$$

Обозначим s_i разности превышений из прямого и обратного ходов сравнительно большой длины L_j с однообразным накоплением на каждом из них систематических ошибок. В таких ходах влияние систематических ошибок на разность превышений конечных точек больше, чем ошибок случайных. Если пренебречь случайными ошибками, то для каждого такого хода L_j можно написать

$$\begin{aligned}
\left(\frac{s_1}{2}\right)^2 &= \sigma_1^2 L_1^2; \quad \sigma_1^2 = \frac{s_1^2}{4L_1^2};\\
\left(\frac{s_2}{2}\right)^2 &= \sigma_2^2 L_2^2; \quad \sigma_2^2 = \frac{s_2^2}{4L_2^2};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 &= \sigma_n^2 L_n^2; \quad \sigma_n^2 = \frac{s_n^2}{4L_n^2}.
\end{aligned} \tag{15.18}$$

Полученные таким образом ошибки σ_j для участков L_j имеют разные веса, пропорциональные их длинам. Для нивелирной линии в целом $L = \Sigma L_j$ среднее весовое значение этой ошибки равно

$$\sigma^2 = \frac{1}{4\Sigma L} \sum \frac{s^2}{L}. \tag{15.19}$$

Подставив σ^2 в выражения (15.17), которые напишем для

каждой секции r всех N нивелирных линий, а также учитывая, что в сети в целом $\Sigma r = \Sigma L$, получим формулу Лаллемана

$$\eta^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{\Sigma d^2}{\Sigma L} - \frac{\Sigma r^2}{(\Sigma L)^2}\sum\frac{s^2}{L}\right]. \qquad (15.20)$$

Для вычисления систематической ошибки σ в сети, состоящей из не менее 10 замкнутых полигонов, Лаллеман предложил еще и такую формулу

$$\sigma_R = \frac{1}{\Sigma L^2}\left[\frac{1}{2}\Sigma W^2 - \eta^2 \Sigma L\right], \qquad (15.21)$$

где W — невязки полигонов (с учетом ортометрической поправки за непараллельность уровенных поверхностей), включая и невязку внешнего полигона, оконтуривающего всю сеть в целом, равную ΣW.

Формулы Лаллемана не являются безупречными и неоднократно подвергались критике, поскольку они дают преуменьшенные значения ошибок σ и η, а формула (15.16) не отражает закон накопления ошибок на линиях большой протяженности и потому не характеризует реальную точность нивелирования.

Ошибки η и σ получаются преуменьшенными вследствие того, что постоянные ошибки, содержащиеся в d и s, не учитываются, например, ошибки из-за рефракции, из-за неточной длины принятого при вычислениях среднего метра реек и т. п., в то время как среднее превышение из прямого и обратного ходов искажено этими ошибками.

Кроме формул Лаллемана известно значительное число и других формул. Однако они практически дают те же результаты, что и формулы Лаллемана, поскольку используют одну и ту же исходную информацию, т. е. разности превышений из прямых и обратных ходов.

В СССР при нивелировании I класса среднюю квадратическую случайную ошибку среднего превышения на один километр хода вычисляют по формулам [11]:

$$\eta^2 = \frac{1}{4n}\left[\frac{d_5^2}{r}\right] \qquad (15.22)$$

и

$$\eta^2 = \frac{1}{4n}\left[\frac{d_6^2}{r}\right], \qquad (15.23)$$

а при нивелировании II класса:

$$\eta^2 = \frac{1}{8n}\left[\frac{d^2}{r}\right], \qquad (15.24)$$

где n — число секций в ходе, каждая длиной r км; разности d_5 и d_6 вычисляют по приведенным выше формулам, $d = h_{\text{пр}} - h_{\text{обр}}$.

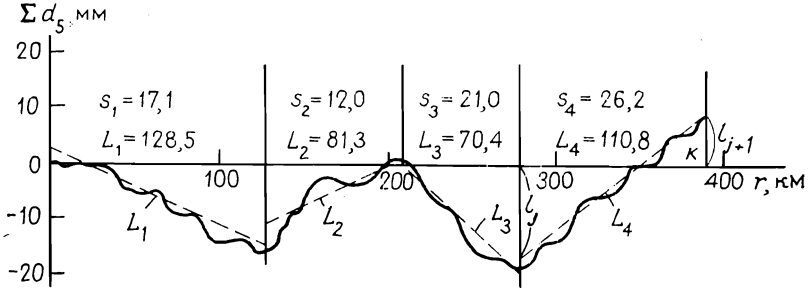


Рис. 103. График накопления систематических ошибок измерений при высокоточном нивелировании

Среднюю квадратическую систематическую ошибку σ среднего превышения на 1 км нивелирного хода I и II класса вычисляют по формуле

$$\sigma^2 = \frac{1}{4[L]}\left[\frac{s_j^2}{L_j}\right], \qquad (15.25)$$

где $[L]$ — суммарная длина всех нивелирных линий в сети; значения s_j и L_j определяют по графику, который строят следующим образом. По оси абсцисс (рис.103) откладывают в масштабе длины секций r_i, образующих нивелирную линию длиной $L=\Sigma r_i=ok$, а по оси ординат — накопления разностей $d_5(d_6)$ по секциям, т. е. суммы

$$\Delta_1 = d_5^{(1)}; \quad \Delta_2 = d_5^{(1)} + d_5^{(2)}; \quad \Delta_3 = d_5^{(1)} + d_5^{(2)} + d_5^{(3)}, \ \ldots;$$

$$\Delta_i = \sum_1^i d_5^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Затем ломаную кривую ON разбивают на участки с однообразным накоплением разностей $d_5(d_6)$ и ломаные линии на этих участках аппроксимируют прямыми линиями $L_1, L_2, \ldots, L_n$, показанными пунктиром. Используя этот график, определяют длины линий L_j с однообразным накоплением разностей $d_5(d_6)$, а также разности $s_j = l_{j+1} - l_j$ ординат l концов этих линий, значения которых и используют в формуле (15.25). Данная методика подбора линий L_j не лишена субъективизма. Более строгая методика подбора линий L_j дана в [20].

В качестве примера вычислим по формулам (15.22) и (15.23) случайные η и по формуле (15.25) систематические σ ошибки на 1 км нивелирного хода (табл. 41).

Точность определения превышений в нивелирной сети I класса характеризуется следующими средними квадратиче-

Таблица 41

d	n	$\frac{1}{4n}$	$\frac{1}{4[L]}$	$\left[\frac{d^2}{r}\right]$	$\left[\frac{s^2}{L}\right]$	η, мм	σ, мм
d_5	132	$\frac{1}{528}$	$\frac{1}{1995}$	70,94	8,27	0,37	0,06
d_6	132	$\frac{1}{528}$	$\frac{1}{1995}$	131,88	41,57	0,50	0,04

скими ошибками: $\eta_I \cong 0{,}5$ мм/км и $\sigma_I \cong 0{,}05$ мм/км; а в сети II класса: $\eta_{II} \cong 1{,}2$ мм/км и $\sigma_{II} \cong 0{,}2$ мм/км.

Как отмечалось выше, средние квадратические ошибки η и σ, вычисленные по разностям прямых и обратных превышений, приуменьшены по сравнению с их действительными значениями.

Суммарное влияние случайных и систематических ошибок на 1 км нивелирного хода можно вычислить по невязкам замкнутых полигонов, используя формулу

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{N}\left[\frac{W^2}{P}\right]}, \qquad (15.26)$$

где N — число полигонов, W — их невязки, P — периметры полигонов, в км. В нивелирных сетях I—II классов по невязкам полигонов получено $\mu = 1{,}4 \div 1{,}8$ мм/км.

На первый взгляд кажется, что по невязкам полигонов можно получить наиболее достоверную оценку точности нивелирования, поскольку невязки W являются следствием совокупного влияния всех источников ошибок нивелирования. Это справедливо только в том случае, если продолжительность нивелирных работ при проложении полигона мала и за это время не происходит ощутимых перемещений по высоте начального репера, на котором начинается и замыкается полигон, например, вследствие вертикальных движений земной коры в районе этого пункта. Такое положение вполне возможно, так как на проложение полигонов с периметром в несколько тысяч километров, которых в нивелирной сети еще достаточно много, особенно в Сибири и на Дальнем Востоке, уходит немало лет.

§ 115. УРАВНИВАНИЕ НИВЕЛИРНЫХ СЕТЕЙ I—II КЛАССОВ В СИСТЕМЕ НОРМАЛЬНЫХ ВЫСОТ

Вследствие неизбежных ошибок измерений появляются в нивелирных сетях геометрические невязки и возникает необходимость уравнивания сетей. В результате нивелирных работ,

сопровождаемых измерениями силы тяжести g, из измерений для каждого k-го пункта нивелирной сети I—II классов получают геопотенциальные числа

$$W_o - W_k = \int_o^k g dh, \tag{15.27}$$

в которые и следует определять поправки за уравнивания сети по методу наименьших квадратов с учетом их весов. Найдя уравненные геопотенциальные числа нивелирных пунктов (реперов), нетрудно получить их нормальные или динамические высоты по формулам (15.5) и (15.6) соответственно. Для этого надо вычислить для каждого пункта значение нормальной силы тяжести γ_m или γ_{45° соответственно и подставить их в эти формулы.

В СССР в соответствии с инструкцией [11] уравнивание нивелирных сетей I—II классов выполняют в системе нормальных высот, принимая в качестве непосредственно измеренных величин измеренные превышения (15.14), т. е. превышения, исправленные необходимыми поправками, в том числе поправками за переход к разностям нормальных высот.

Подготовка исходной информации. Прежде чем приступить к уравниванию нивелирной сети, необходимо: составить схему сети с указанием на ней исходных и узловых пунктов, а также ведомость, в которой должны быть приведены высоты исходных пунктов, измеренные превышения (15.14), исправленные необходимыми поправками, длины нивелирных линий или число станций в каждой из них.

Установление веса измеренных превышений. В принципе вес измеренного превышения для каждой нивелирной линии L следовало бы вычислять по формуле

$$p = \frac{c}{m_L^2}, \tag{15.28}$$

где c — некоторая постоянная для сети величина, $m_L{}^2$ — эмпирическая дисперсия измеренного превышения. Однако определить сколько-нибудь надежно значение ошибки m для каждого нивелирного хода невозможно из-за незнания влияний систематических ошибок. Поэтому вес измеренных превышений вычисляют по весьма приближенной формуле

$$p = \frac{c}{L} \quad \text{или} \quad p = \frac{c}{n}, \tag{15.29}$$

где L — длина нивелирной линии, км; n — число нивелирных станций в ходе.

При совместном уравнивании нивелирных сетей I и II классов необходимо установить наиболее точно соотношение весов p_{I} и p_{II} измеренных превышений в сетях I и II класса соответственно, причем не по длинам ходов и не числу станций в них. Иногда поступают следующим образом. Веса превышений нивелирных линий I и II классов вычисляют по формулам (15.29), но длины линий II класса или число станций заменяют эквивалентными длинами линий или числом станций I класса, определенными по формулам

$$L_{\text{э}} = \alpha L_{\text{II}} \quad \text{или} \quad n_{\text{э}} = \alpha n_{\text{II}}, \tag{15.30}$$

где α — коэффициент эквивалентности определяют по формуле

$$\alpha = V^2_{\text{доп. II}} / V^2_{\text{доп. I}}, \tag{15.31}$$

где $V_{\text{доп. I}}$ и $V_{\text{доп. II}}$ — допустимые невязки нивелирных ходов I и II классов равной длины. При

$$V_{\text{доп. I}} = 3 \text{ мм } \sqrt{L} \quad \text{и} \quad V_{\text{доп. II}} = 5 \text{ мм } \sqrt{L}$$

получим $\alpha \approx 3$.

Задача установления достоверных весов измеренных превышений в нивелирных сетях как одного, так и разных классов остается до сих пор проблематичной и ждет надлежащего решения.

Представляется, что коэффициент эквивалентности α в формуле (15.30) можно более точно определить следующим образом. Используя невязки W_{I} и W_{II} нивелирных полигонов только I класса и только II класса, расположенных на одной и той же территории, вычислим соответствующие значения средних квадратических ошибок на 1 км хода:

$$\mu_{\text{I}} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{I}}}\left[\frac{W^2_{\text{I}}}{P_{\text{I}}}\right]}, \qquad \mu_{\text{II}} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{II}}}\left[\frac{W^2_{\text{II}}}{P_{\text{II}}}\right]}, \tag{15.32}$$

где P_{I} и P_{II} — периметры полигонов I и II классов, км. Желательно, чтобы число полигонов N каждого класса было не менее 15—20. Используя μ_{I} и μ_{II}, определим коэффициент пропорциональности

$$\alpha = \frac{P_{\text{I}}}{P_{\text{II}}} = \frac{\mu^2_{\text{II}}}{\mu^2_{\text{I}}}. \tag{15.33}$$

Данное решение является также приближенным, но в отличие от (15.31), является более обоснованным, поскольку опирается на невязки полигонов, отражающие совокупное влияние случайных и систематических ошибок нивелирования как в сети I, так и в сети II класса.

Уравнивание нивелирных сетей параметрическим способом

При использовании ЭВМ наиболее подходящим является параметрический способ уравнивания нивелирных сетей, требующий выполнения следующих вычислительных операций.

Вычисление приближенных высот узловых пунктов. Приближенные высоты узловых пунктов следует определять с возможно большей точностью, чтобы свободные члены уравнений поправок были возможно меньше. Приближенную высоту каждого узлового пункта вычисляют как среднее весовое из всех ее значений H_k', полученных путем передачи высот с соседних пунктов с известными высотами, в том числе приближенными, т. е. находят

$$H_k^0 = \frac{pH_k'}{\Sigma p}, \tag{15.34}$$

где

$$H_k' = H_i' + h_{ik}', \tag{15.35}$$

p — вес превышения h_{ik}' нивелирной линии между пунктами i и k.

Составление уравнений поправок. *Пусть* h_{ik}' — измеренное превышение между двумя соседними узловыми пунктами i и k; v_{ik} — поправка в это превышение, определяемая из уравнивания сети под условием $\Sigma p v^2 = \min$; H_i^0 и H_k^0 — приближенные высоты этих пуктов, x_i и x_k — поправки из уравнивания к ним. С учетом этих обозначений напишем для разности высот пунктов i и k

$$h_{ik}' + v_{ik}' = (H_k^0 + x_k) - (H_i^0 + x_i), \tag{15.36}$$

откуда

$$v_{ik} = -x_i + x_k + (H_k^0 - H_i^0) - h_{ik}'. \tag{15.37}$$

Обозначив l_{ik} свободный член уравнения

$$l_{ik} = (H_k^0 - H_i^0) - h_{ik}', \tag{15.38}$$

придадим уравнению поправок (15.37) окончательный вид

$$v_{ik} = -x_i + x_k + l_{ik} \ . \ . \ . \text{ с весом } p_{ik}. \tag{15.39}$$

Уравнения поправок (15.39) составляют для всех линий, образующих нивелирную сеть. Число таких уравнений равно числу линий с измеренными превышениями h_{ik}'.

Уравнения поправок v_{ik} запишем в матричной форме

$$V = AX + l, \tag{15.40}$$

где V — вектор-столбец поправок v_{ik} в измеренные превышения; X — вектор-столбец поправок x_k в приближенные высоты

H_k^0 узловых пунктов; A — матрица коэффициентов уравнений поправок (15.39); l — вектор-столбец свободных членов l_{ik}. Диагональную матрицу весов уравнений поправок V обозначим P.

Составление и решение нормальных уравнений. Вычисление окончательных высот. От уравнений поправок V с учетом их весов P перейдем к системе нормальных уравнений

$$NX + L = 0, \tag{15.41}$$

где

$$N = A^{\mathrm{T}}PA; \tag{15.42}$$

$$L = A^{\mathrm{T}}Pl; \tag{15.43}$$

N — симметричная матрица коэффициентов нормальных уравнений; X — вектор-столбец определяемых поправок к приближенным высотам; A^{T} — транспонированная матрица коэффициентов уравнений поправок; P — диагональная матрица весов уравнений поправок; L — вектор-столбец свободных членов нормальных уравнений.

Число нормальных уравнений равно числу узловых пунктов, высоты которых определяются из уравнивания сети.

Умножив обе части уравнения (15.41) слева на матрицу N^{-1}, обратную матрице N коэффициентов нормальных уравнений, найдем вектор X неизвестных поправок x_k в приближенные высоты узловых точек

$$X = -N^{-1}L = -QL, \tag{15.44}$$

где $Q = N^{-1}$ матрица весовых коэффициентов

$$N^{-1} = Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}, \tag{15.45}$$

где n — число узловых точек в сети.

Окончательные высоты узловых пунктов, полученные из уравнивания сети, найдем по формуле

$$H_k = H_k^0 + x_k, \tag{15.46}$$

где H_k^0 — приближенное значение высоты пункта; x_k — поправка из уравнивания.

В целях контроля окончательные высоты узловых пунктов необходимо вычислить еще раз, но теперь несколько иначе. С этой целью вычислим по формуле (15.39) поправки v_{ik} в измеренные превышения, а затем вычислим уравненные превышения

$$h_{ik} = h'_{ik} + v_{ik}. \tag{15.47}$$

Используя уравненные превышения, определим вторично значения уравненных высот узловых пунктов:

$$H_k = H_i + h_{ik}. \tag{15.48}$$

Разность высоты одного и того же пункта, вычисленная дважды по формулам (15.46) и (15.48), не должна выходить за пределы ошибок округлений.

Уравненные высоты H_j промежуточных реперов j между узловыми пунктами i и k с уравненными высотами H_i и H_k вычислим по формуле

$$H_j = H_i - \frac{s_{ij}}{s}\,\omega \tag{15.49}$$

или

$$H_j = H_i - \frac{n_{ij}}{n}\,\omega, \tag{15.50}$$

где s — длина нивелирного хода между узловыми пунктами; n — число станций в ходе; s_{ij} и n_{ij} — расстояние и число станций от узлового пункта i до репера j, высота которого определяется; $\omega = \Sigma h' - (H_k - H_i)$ — невязка нивелирного хода.

Оценка точности уравненных высот узловых пунктов. Средняя квадратическая ошибка единицы веса, получаемая из уравнивания сети, равна

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{n-k}}, \tag{15.51}$$

где v_{ik} — поправки в измеренные с весами p превышения h'_{ik}; n — число этих поправок, равное числу нивелирных линий в сети; k — число узловых пунктов, высоты которых определяются.

Обратный вес уравненной высоты H_i любого узлового пункта i равен соответствующему диагональному элементу весомой матрицы, т. е.

$$\frac{1}{P_i} = Q_{ii}. \tag{15.52}$$

Средние квадратические ошибки уравненных высот H_i узловых пунктов вычисляют по формуле

$$m_{H_i} = \mu\sqrt{Q_{ii}}. \tag{15.53}$$

Средние квадратические ошибки определения разностей уравненных высот $h_{ik} = H_k - H_i$ узловых пунктов i и k находят по формуле

$$m_{h_{ik}} = \mu\sqrt{Q_{ii} - 2Q_{ik} + Q_{kk}}. \tag{15.54}$$

Глава 16

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ

§ 116. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В условиях равнинной и слегка холмистой местности высоты значительного числа геодезических пунктов определяют методом геометрического нивелирования. В сильно пересеченной местности и особенно в горных районах широкое применение находит метод тригонометрического нивелирования, позволяющий определять разности высот пунктов, используя длины сторон между пунктами и измеренные зенитные расстояния Z или углы наклона $\beta = 90° - Z$ наблюдаемых целей.

Метод тригонометрического нивелирования известен с давних пор. Его теория постепенно развивается и совершенствуется. Наиболее обстоятельные исследования в области тригонометрического нивелирования были выполнены в СССР в 1951—1955 гг. А. А. Изотовым и Л. П. Пеллиненом и опубликованы в Трудах ЦНИИГАиК. Тогда впервые в геодезической практике были получены формулы, учитывающие влияние аномалий гравитационного поля на результаты тригонометрического нивелирования.

Метод тригонометрического нивелирования по производительности труда при определении высот пунктов является наиболее экономичным. Однако по точности получаемых результатов он существенно уступает методу геометрического нивелирования.

Наиболее слабым местом данного метода является слишком большое влияние вертикальной рефракции, а также незнание уклонений отвесных линий на геодезических пунктах, что особенно отрицательно сказывается при работах в горных районах.

Влияние рефракции тем значительнее, чем больше расстояние между пунктами, поэтому, чтобы получить удовлетворительные результаты, рекомендуется превышения определять по наиболее коротким сторонам, т. е. при $S \leqslant 10$ км.

Получим исходные формулы для вычисления разности геодезических высот пунктов, полагая сначала, что рефракция и уклонения отвесных линий равны нулю.

Обозначим $H_1 = aA$ и $H_2 = bB$ — геодезические высоты точек A и B над эллипсоидом ab, отсчитываемые по нормалям AC и BC от его поверхности (рис. 104); $S_0 = ab$ — длина дуги нормального сечения AB эллипсоида в точке A; R — радиус кривизны этого сечения; $z_{12}{}^0$ и $z_{21}{}^0$ — теоретические (геодезические) зенитные расстояния точек B и A, отнесенные в точке A к нормали AC и в точке B к нормали BC.

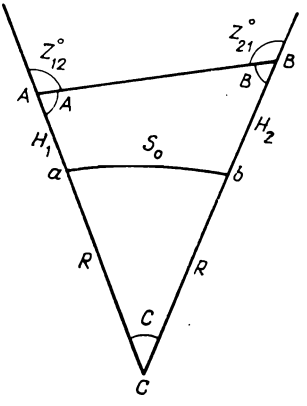


Рис. 104. Геодезические высоты пунктов и взаимно обратные теоретические зенитные расстояния

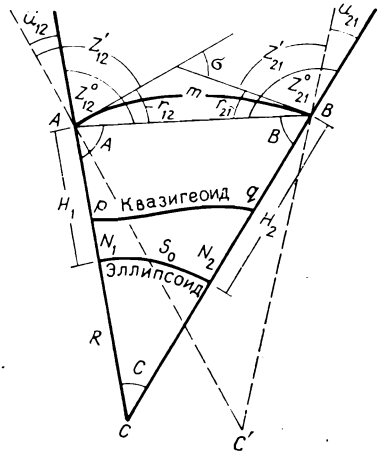


Рис. 105. Схема двухстороннего тригонометрического нивелирования с учетом влияния уклонений отвеса, рефракции и превышений квазигеоида

Углы в треугольнике ABC обозначим A, B, C и согласно теореме тангенсов напишем

$$\frac{BC-AC}{BC+AC}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}. \tag{16.1}$$

При расстояниях $S\leqslant 20$ км длину дуги нормального сечения ab с высокой точностью можно принять равной длине дуги окружности со средним радиусом R данного сечения. Тогда напишем

$$aC=bC=R;\quad AC=R+H_1;$$

$$BC=R+H_2;\quad A+B=180^\circ-C.$$

Подставив эти величины в формулу (16.1), получим

$$\frac{H_2-H_1}{2R+(H_1+H_2)}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

откуда

$$H_2-H_1=2R\left(1+\frac{H_1+H_2}{2R}\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}. \tag{16.2}$$

Аппроксимируя сечение ab эллипсоида дугой окружности радиуса R, найдем центральный угол между нормалями эллипсоида

$$C=\frac{S_0}{R}\rho. \tag{16.3}$$

Угол C мал, поэтому можно написать

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{C}{2}+\frac{C^3}{24}=\frac{s_0}{2R}+\frac{s_0^3}{24R^3}.$$

Членом $s_0^3/24R^3$ при $s_0\leqslant 20$ км практически всегда можно пренебречь и тогда

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{S_0}{2R}. \tag{16.4}$$

Подставив выражение (16.4) в формулу (16.2), получим исходные формулы для вычисления разности геодезических высот точек при $s\leqslant 20$ км:

$$H_2-H_1=s_0\left(1+\frac{H_1+H_2}{2R}\right)\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}$$

или

$$H_2-H_1=s\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}, \tag{16.5}$$

где

$$s=s_0\left(1+\frac{H_1+H_2}{2R}\right). \tag{16.6}$$

В формуле (16.6) s — расстояние между точками A и B, приведенное к их средней высоте над эллипсоидом.

Углы A и B, как и геодезические (теоретические) зенитные расстояния $z_{12}{}^0$ и $z_{21}{}^0$, измерить невозможно. Поэтому их следует выразить через непосредственно измеренные зенитные расстояния z. При этом должны быть приняты во внимание два важных обстоятельства. Во-первых, при измерении зенитных расстояний (рис. 105) вертикальная ось теодолита совмещается с отвесной линией AC' (BC'), а не с нормалью к эллипсоиду AC (BC), как это должно быть согласно формуле (16.5). Во-вторых, между точками A и B луч света из-за различия плотности атмосферы идет не по прямой AB, а по сложной кривой AmB, которая образует углы вертикальной рефракции r_{12} и r_{21} между касательными к углу в этих точках и хордой AB.

При определении превышений между любыми точками A и B применяют либо *одностороннее*, либо *двухстороннее тригонометрическое нивелирование*. В первом случае зенитное расстояние z_{ik} измеряют только на одном конце стороны, т. е. либо в точке A, либо в точке B; во втором случае в точке A и в точке B измеряют взаимно обратные зенитные расстояния z_{ik} и z_{ki}, причем, как правило, в разные дни.

Пусть u_{12} и u_{21} — составляющие уклонений отвеса на пунктах A и B в вертикальной плоскости, проходящей через точки A и B (см. рис. 105); z_{12}' и z_{21}' — измеренные взаимно обратные зенитные расстояния между отвесными линиями и касательными к лучу света в точках A и B, приведенные к центрам пунктов; r_{12} и r_{21} — углы вертикальной рефракции в этих точках.

Составляющую уклонения отвеса в направлении i—k вычисляют по формуле

$$u_{ik} = \xi_i \cos A_{ik} + \eta_i \sin A_{ik}, \tag{16.7}$$

где ξ и η — составляющие полного уклонения отвеса $u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ в плоскости меридиана и первого вертикала на пункте; A_{ik} — азимут направления i—k.

Углы вертикальной рефракции в первом приближении вычисляют по формуле

$$r = \frac{C}{2} k = \frac{s_0 \rho}{2R} k, \tag{16.8}$$

где C — центральный угол между нормалями к эллипсоиду в точках A и B; k — коэффициент земного преломления, под которым понимают отношение радиуса R земного эллипсоида к радиусу кривизны M луча света в предположении, что траектория луча в вертикальной плоскости представляет собой дугу окружности, что, однако, обстоит не совсем так.

§ 117. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗНОСТЕЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ВЫСОТ ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ НИВЕЛИРОВАНИИ

Допустим, что зенитное расстояние z_{12} измерено только на пункте A, а на пункте B оно не измерялось (см. рис. 105). Получим формулу для вычисления разности геодезических высот. Из треугольника ABC найдем

$$A = 180^\circ - z_{12}^0; \qquad B = 180^\circ - (A + C) = z_{12}^0 - C, \tag{16.9}$$

где

$$z_{12}^0 = z_{12}' + r_{12} - u_{12}. \tag{16.10}$$

При измерении зенитного расстояния z_{12} центр вертикального круга теодолита находится на «высоте прибора» i_1 над центром пункта A, а труба наводится на визирную цель пункта B на высоте l_2 над центром данного пункта. Поэтому приведенное к центру пункта измеренное зенитное расстояние будет равно

$$z_{12}' = z_{12} + \frac{l_2 - i_1}{s} \rho, \tag{16.11}$$

где z_{12} — непосредственно измеренное зенитное расстояние, s — длина стороны между пунктами A и B; $\rho = 206265''$.

Выражение (16.10) с учетом формул (16.3), (16.8) и (16.11) запишем в следующем виде:

$$z_{12}^0 = z_{12} + \frac{sk_{12}}{2R}\rho - u_{12} + \frac{l_2 - i_1}{s}\rho. \tag{16.12}$$

Подставив выражение (16.12) в формулы (16.9) и учитывая формулу (16.3), получим

$$A = 180° - z_{12} - \frac{sk_{12}}{2R}\rho + u_{12} - \frac{l_2 - i_1}{s}\rho;$$

$$B = z_{12} + \frac{sk_{12}}{2R}\rho - \frac{s}{R}\rho - u_{12} + \frac{l_2 - i_1}{s}\rho, \tag{16.13}$$

приняв в формуле (16.3) $s_0 = s$, что даже при $(H_1 + H_2)/2 = 2$ км и $s = 10$ км вызывает погрешность при вычислении угла B, не превышающую $0{,}10''$. Пренебрегая такой малой величиной, согласно формулам (16.13) напишем

$$\frac{A - B}{2} = 90° - z_{12} + s\frac{1 - k_{12}}{2R}\rho + u_{12} - \frac{l_2 - i_1}{s}\rho, \tag{16.14}$$

откуда найдем

$$\operatorname{tg}\frac{A - B}{2} = \operatorname{ctg}\left(z_{12} - \frac{1 - k_{12}}{2R}s - \frac{u_{12}}{\rho} + \frac{l_2 - i_1}{s}\right).$$

Вследствие малости поправочных членов с достаточной точностью напишем

$$\operatorname{tg}\frac{A - B}{2} = \operatorname{ctg} z_{12} + \left(\frac{1 - k_{12}}{2R}s + \frac{u_{12}}{\rho} - \frac{l_2 - i_1}{s}\right)\operatorname{cosec}^2 z_{12}$$

и после умножения на s получим искомую формулу для вычисления разности геодезических высот

$$H_2 - H_1 = s\operatorname{ctg} z_{12} + \left(\frac{1 - k_{12}}{2R}s^2 + \frac{u_{12}}{\rho}s - l_2 + i_1\right)\operatorname{cosec}^2 z_{12}. \tag{16.15}$$

Зенитные расстояния в геодезических сетях незначительно отличаются от 90°. При $87° \leqslant Z \leqslant 93°$ с достаточной точностью можно принять $\operatorname{cosec} z = 1$ и написать для данного случая

$$H_2 - H_1 = s\operatorname{ctg} z_{12} + \frac{1 - k_{12}}{2R}s^2 + \frac{u_{12}}{\rho}s - (l_2 - i_1). \tag{16.16}$$

В формуле (16.16) второе слагаемое, которое обозначим

$$v = \frac{1 - k_{12}}{2R}s^2 = \varepsilon_R + \varepsilon_r, \tag{16.17}$$

Таблица 42

Поправка, м	Длины сторон s, км					
	1	3	5	10	15	20
ε_R	0,08	0,71	1,96	7,8	17,6	31,4
ε_r:						
при $K = 0{,}13$	0,01	0,09	0,25	1,0	2,3	4,1
при $K = 0{,}22$	0,02	0,15	0,42	1,7	3,9	6,9

представляет собой суммарную поправку в превышение за кривизну Земли

$$\varepsilon_R = s^2/2R \tag{16.18}$$

и рефракцию

$$\varepsilon_r = -k_{12}s^2/2R. \tag{16.19}$$

Третье слагаемое в (16.16), которое обозначим

$$\varepsilon_u = u_{12}s/\rho, \tag{16.20}$$

представляет собой поправку за уклонение отвесной линии на пункте A.

Обратные превышения, т. е. разности высот $H_1 - H_2$, вычисляют по формуле

$$H_1 - H_2 = s\operatorname{ctg} z_{21} + \frac{1-k_{21}}{2R}s^2 - \frac{u_{21}}{\rho}s - (l_1 - i_2). \tag{16.21}$$

При высоте визирного луча порядка 6 м и выше коэффициент земного преломления, например, в Подмосковье летом равен примерно 0,13, а в периоды утренней и вечерней изотермии воздуха его среднее значение равно примерно 0,22.

Сравним величины поправок ε_R за кривизну Земли и поправок ε_r за рефракцию при $k=0{,}13$ и $k=0{,}22$ (табл. 42).

Таблица 43

Поправка ε_u, м, при следующих u	Длина стороны s, км					
	1	3	5	10	15	20
3″	0,01	0,04	0,07	0,15	0,22	0,29
5	0,02	0,07	0,12	0,24	0,36	0,48
15	0,07	0,22	0,36	0,73	1,09	1,45
30	0,15	0,44	0,73	1,45	2,18	2,91

Влияние уклонений отвесных линий на разность геодезических высот при одностороннем тригонометрическом нивелировании также достаточно велико (табл. 43).

Анализ приведенных данных показывает, что при точных работах необходимо одинаково тщательно определять и учитывать влияние как рефракции, так и уклонений отвесных линий.

§ 118. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗНОСТЕЙ НОРМАЛЬНЫХ ВЫСОТ ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ НИВЕЛИРОВАНИИ

Геодезические высоты точек, определяемые относительно поверхности принятого эллипсоида, используются при решении большого круга задач геодезии. Однако в повседневной практике топографо-геодезических, картографических и многих других работ наиболее широко используют высоты точек, определяемые относительно поверхности квазигеоида методом геометрического нивелирования. Их называют нормальными высотами и вычисляют по формуле (15.5).

Разности нормальных высот точек можно определить также из тригонометрического нивелирования. Пусть нормальные высоты точек A и B (см. рис. 105) равны соответственно $H_1^\gamma = pA$ и $H_2^\gamma = qB$. Поверхность квазигеоида достаточно сложна, имеет волнообразную форму и не параллельна поверхности земного эллипсоида. Поэтому в точках A и B высоты квазигеоида над эллипсоидом, равные соответственно $N_1 = ap$ и $N_2 = bq$, неодинаковы по величине ($N_1 \neq N_2$).

В соответствии с теорией М. С. Молоденского, геодезическая высота H любой точки равна сумме нормальной высоты H^γ и аномалии высоты ζ. Высота квазигеоида N численно равна аномалии высоты ζ (см. § 4). Поэтому для геодезических высот точек A и B напишем

$$H_1 = H_1^\gamma + N_1; \quad H_2 = H_2^\gamma + N_2. \tag{16.22}$$

Отсюда разность нормальных высот

$$H_2^\gamma - H_1^\gamma = H_2 - H_1 - (N_2 - N_1), \tag{16.23}$$

где $(N_2 - N_1)$ — разность высот квазигеоида между точками A и B.

Подставив в выражение (16.23) значение $H_2 - H_1$ из формулы (16.16), получим формулу для вычисления разности нормальных высот $H_2^\gamma - H_1^\gamma$ для случая $87° \leqslant z \leqslant 93°$ при одностороннем нивелировании

$$H_2^\gamma - H_1^\gamma = s \operatorname{ctg} z_{12} + \frac{1 - k_{12}}{2R} s^2 + \frac{u_{12}}{\rho} s - (N_2 - N_1) - (l_2 - i_1). \tag{16.24}$$

Таблица 44

№ п/п	Поправка	Равнинные районы, м	Горные районы, м
1	$\frac{u_{12}-u_{21}}{2\rho}s$	0,06	0,70
2	$\left(\frac{u_{12}+u_{21}}{2}-u_m\right)\frac{s}{\rho}$	0,02	0,28
3	$\frac{u_{12}-u_m}{\rho}s$	0,08	0,98
4	ΔE	0,01	0,30

Превышения квазигеоида N_2—N_1 между конечными точками любой стороны триангуляции s могут быть определены, например, методом астрономо-гравиметрического нивелирования [21] или по формуле [1]

$$N_2-N_1=u_m s-\Delta E, \tag{16.25}$$

где u_m — среднее интегральное значений уклонения отвеса вдоль линии s, ΔE — поправка за влияние рельефа, равная

$$\Delta E=\int_{AB}\frac{g-\gamma}{\gamma}dH-\frac{0{,}0052}{\rho''}(H_2-H_1)(B_2-B_1)\sin 2B_m, \tag{16.26}$$

где g—γ — аномалии силы тяжести в точках линии AB; dH — элементарное превышение; B_1 и B_2 — геодезические широты точек A и B; $B_m=(B_1+B_2)/2$. Для вычисления поправки ΔE и значений u_m необходимо выполнить гравиметрическую съемку местности и на ряде пунктов определить астрономические широты и долготы.

С учетом формул (16.25) и (16.26) формула (16.24) запишется в виде

$$H_2^{\gamma}-H_1^{\gamma}=s\operatorname{ctg}z_{12}+\frac{1-k_{12}}{2R}s^2+\frac{u_{12}-u_m}{\rho}s+\Delta E-(l_2-i_1). \tag{16.27}$$

По оценке А. А. Изотова и Л. П. Пеллинена поправки $(u_{12}-u_m)\frac{s}{\rho}$ в равнинных и горных районах при длинах сторон $s=10$ км равны в среднем 0,08 и 0,98 м, а поправки ΔE соответственно 0,01 и 0,30 м (табл. 44).

[1] *Изотов А. А., Пеллинен Л. П.* Исследования земной рефракции и методов геодезического нивелирования.— Труды ЦНИИГАиК, вып. 102.— М.: Геодезиздат, 1955.

Отсюда видно, что при $s=10$ км сумма 3-й и 4-й поправок за влияние уклонений отвесных линий и влияние рельефа местности на разности нормальных высот (16.27) при одностороннем тригонометрическом нивелировании в равнинной местности равна в среднем $\sim 0{,}09$ м, а в горах $\sim 1{,}28$ м. Отметим, что уклонения отвесных линий в ряде случаев могут быть в несколько раз больше их средних значений; соответственно увеличится и влияние их на разность нормальных высот, вычисляемых по формуле (16.24) или, что все равно, по формуле (16.27). Поэтому при точных работах влияние уклонений отвеса необходимо учитывать не только в горных районах, но и в равнинной местности, где уклонения отвеса нередко достигают 10—15″, как например, в районе Московской гравитационной аттракции.

Обратные превышения в системе нормальных высот $h_{21}= H_1^\gamma - H_2^\gamma$ вычисляются по формуле

$$H_1^\gamma - H_2^\gamma = s \operatorname{ctg} z_{21} + \frac{1-k_{21}}{2R} s^2 - \frac{u_{21}}{\rho} s - (N_1 - N_2) - (l_1 - i_2). \tag{16.28}$$

Прямые и обратные превышения, вычисленные по формулам одностороннего нивелирования, обычно различаются между собой по абсолютной величине. В горных районах значительные расхождения между прямыми и обратными превышениями вдоль линий тригонометрического нивелирования в первую очередь можно объяснить неучтенным влиянием уклонений отвеса и частично остаточным влиянием рефракции, связанным с неточностью принятого при вычислениях коэффициентов земного преломления. Существенное влияние уклонений отвеса в горных районах послужило основанием для разработки методов приближенного определения величины уклонений отвесных на пунктах в процессе уравнивания результатов тригонометрического нивелирования [12].

§ 119. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗНОСТЕЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ВЫСОТ ПРИ ДВУХСТОРОННЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ НИВЕЛИРОВАНИИ

При двухстороннем тригонометрическом нивелировании на обоих концах каждой стороны триангуляции измеряют взаимно обратные зенитные расстояния z_{12} и z_{21}. Получим формулы для вычисления разности геодезических высот точек A и B.

В треугольнике ABC (см. рис. 105,) для углов A и B напишем

$$A = 180^\circ - z_{12}^0; \quad B = 180^\circ - z_{21}^0, \tag{16.29}$$

где теоретические зенитные расстояния равны соответственно:

$$z_{12}^0 = z'_{12} + r_{12} - u_{12}; \quad z_{21}^0 = z'_{21} + r_{21} + u_{21}. \tag{16.30}$$

Приведенные к центрам знаков зенитные расстояния z_1' и z_2' выразим через непосредственно измеренные значения их z_{12} и z_{21}:

$$z'_{12} = z_{12} + \frac{l_2 - l_1}{s}\rho; \quad z'_{21} = z_{21} + \frac{l_1 - i_2}{s}\rho, \tag{16.31}$$

где i_1 и l_1 — высоты теодолита и визирной цели над центром пункта *1* (A); i_2 и l_2 — то же, но над центром пункта *2* (B); s — расстояние между пунктами; $\rho = 206265''$.

Углы рефракции r_{12} и r_{21} согласно формуле (16.8) выразим через соответствующие коэффициенты земного преломления. Пренебрегая малой разницей между s_0 и s, с достаточной точностью напишем

$$r''_{12} = sk_{12}\rho/2R; \quad r''_{21} = sk_{21}\rho/2R. \tag{16.32}$$

Составляющие уклонений линий u_{12} и u_{21} на концах стороны AB определяются формулами (16.7) при известных значениях ξ и η.

С учетом выражений (16.28—16.32) найдем разность углов

$$A - B = (z_{21} - z_{12}) + \frac{k_{21} - k_{12}}{2R} s\rho + (u_{12} + u_{21}) + \left(\frac{l_1 + i_1}{s} - \right.$$
$$\left. - \frac{l_2 + i_2}{s}\right)\rho, \tag{16.33}$$

а затем и тангенс полуразности углов

$$\operatorname{tg}\frac{A - B}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{z_{21} - z_{12}}{2} + \frac{k_{21} - k_{12}}{4R} S + \frac{u_{12} + u_{21}}{2\rho} + \right.$$
$$\left. + \frac{l_1 + i_1}{2s} - \frac{l_2 + i_2}{2s}\right).$$

В скобках все слагаемые, кроме полуразности зенитных расстояний, малы. Ограничиваясь малыми первого порядка при разложении тангенса в ряд, что при $s \leqslant 20$ км достаточно для практических целей, и умножив результаты на s, получим следующую формулу для вычисления разности геодезических высот точек при двухстороннем тригонометрическом нивелировании:

$$H_2 - H_1 = s \operatorname{tg}\frac{z_{21} - z_{12}}{2} + \left(\frac{k_{21} - k_{12}}{4R} s^2 + \frac{u_{12} + u_{21}}{2\rho} s + \right.$$
$$\left. + \frac{l_1 + i_1}{2} - \frac{l_2 + i_2}{2}\right) \sec^2 \frac{z_{21} - z_{12}}{2}. \tag{16.34}$$

В геодезических сетях полуразность взаимно обратных зенитных расстояний сравнительно мала. При $z_{21}-z_{12}\leqslant 6°$ можно принять $\sec^2\frac{z_{21}-z_{12}}{2}=1$ и для данных условий написать

$$H_2-H_1=s\operatorname{tg}\frac{z_{21}-z_{12}}{2}+\frac{k_{21}-k_{12}}{4R}s^2+\frac{u_{12}+u_{21}}{2\rho}s+$$
$$+\frac{l_1+i_1}{2}-\frac{l_2+i_2}{2}. \qquad (16.35)$$

§ 120. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗНОСТЕЙ НОРМАЛЬНЫХ ВЫСОТ ПРИ ДВУХСТОРОННЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ НИВЕЛИРОВАНИИ

Подставив формулу (16.35) в (16.23), получим формулу для вычисления разности нормальных высот при двухстороннем нивелировании

$$H_2^\gamma-H_1^\gamma=s\operatorname{tg}\frac{z_{21}-z_{12}}{2}+\frac{k_{21}-k_{12}}{4R}s^2+\frac{u_{12}+u_{21}}{2\rho}s-(N_2-N_1)+$$
$$+\frac{l_1+i_1}{2}-\frac{l_2+i_2}{2}. \qquad (16.36)$$

Подставив вместо разности (N_2-N_1) ее значение из формулы (16.25), запишем эту формулу в несколько ином виде

$$H_2^\gamma-H_1^\gamma=s\operatorname{tg}\frac{z_{21}-z_{12}}{2}+\frac{k_{21}-k_{12}}{4R}s^2+\left(\frac{u_{12}+u_{21}}{2}-u_m\right)\frac{s}{\rho}+$$
$$+\Delta E+\frac{l_1+i_1}{2}-\frac{l_2+i_2}{2}. \qquad (16.37)$$

В формуле (16.37) поправка

$$[(u_{12}+u_{21})/2-u_m]\frac{s}{\rho}$$

учитывает нелинейность изменений астрономо-геодезических уклонений отвеса между пунктами и носит название гравиметрической поправки в астрономическое нивелирование при определении высот квазигеоида [21].

Сумма поправок 2 и 4 (см. табл. 44) за влияние неоднородностей гравитационного поля Земли на разности нормальных высот (16.37) при двухстороннем тригонометрическом нивелировании при расстояниях между пунктами $s=10$ км в равнинной местности равна примерно 0,03 м, а в горах 0,6 м, т. е. в среднем в 2—3 раза меньше чем сумма 3 и 4 поправок при одностороннем тригонометрическом нивелировании в аналогичных условиях (для равнины соответственно 0,03 и 0,09 м и для горных условий 0,58 и 1,28 м).

Влияние рефракции на превышения при двухстороннем тригонометрическом нивелировании, особенно в случае одновременного измерения взаимно обратных зенитных расстояний, также гораздо меньше, чем при одностороннем нивелировании, сравните формулы (16.37) и (16.27). Поэтому для получения превышений с возможно большей точностью в геодезическом производстве всегда следует применять двухстороннее тригонометрическое нивелирование.

§ 121. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ЗЕМНОГО ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Известны разные способы определения коэффициента земного преломления. В первом приближении его величина может быть вычислена по данным метеорологических измерений. Более точные значения коэффициента находят из обработки результатов тригонометрического нивелирования. В последнем случае в зависимости от того, какая, кроме измеренных зенитных расстояний, имеется дополнительная измерительная информация (известны уклонения отвесных линий на пунктах, разности высот пунктов, полученные из геометрического нивелирования, разности высот квазигеоида между пунктами и т. п.) можно определить различные значения коэффициента земного преломления, например, его величину для каждого отдельного направления на пункте, средний коэффициент для каждой отдельной стороны триангуляции, среднее значение для каждого конкретного пункта и т. п.

Определение коэффициента k по метеоданным

Данный метод основан на предположении, что в момент измерения зенитных расстояний на геодезическом пункте поле градиента показателя преломления в слое воздуха на пути визирного луча однородно. В этом случае углы вертикальной рефракции могут быть вычислены по формуле

$$r'' = 11{,}42\,\frac{p}{T^2}\left(0{,}0342 + \frac{\partial T}{\partial H}\right) s \sin z.$$

Выразим r через коэффициент земного преломления

$$r'' = \frac{C''}{2}\,k = \frac{s_0 \rho}{2R}\,k.$$

Приравняв между собой левые и правые части этих формул и приняв $R = 6371$ км, $\sin z = 1$, получим

$$k = 705\,\frac{p}{T^2}\left(0{,}0342 + \frac{\partial T}{\partial H}\right). \qquad (16.38)$$

Впервые эта формула, правда с менее точным коэффициентом (502,4 вместо 705), была получена еще Иорданом в прошлом веке.

Для средних значений давления $p=750$ мм рт. ст. и температуры $T=288$ °К в летнее время года будем иметь

$$k=0{,}22+6{,}37\frac{\partial T}{\partial H}. \qquad (16.39)$$

В формулах (16.38) и (16.39) вертикальные градиенты температуры на высоте визирного луча выражены в град/м.

Летом в полуденные часы на высоте 2 м над почвой средние многолетние значения $\partial T/\partial H\approx-0{,}0098$ град/м; в периоды утренней и вечерней изотермии воздуха $\partial T/\partial H=0$; около полуночи $\partial T/\partial H\approx0{,}0080$ град/м. С учетом этих данных получим следующие средние значения коэффициента: для полудня $k_{\text{п}}=0{,}16$, для периодов изотермии $k_{\text{о}}=0{,}22$, для полуночи $k_{\text{н}}=0{,}27$. Эти значения коэффициента довольно близки к их средним статистическим величинам, получаемым из обработки геодезических измерений, выполняемых в указанные периоды суток.

Формула (16.38) соответствует случаю однородного поля рефракции, в котором вертикальные градиенты температуры воздуха на всем протяжении визирного луча постоянны, т. е. $\partial T/\partial H=\text{const}$. В действительности же $\partial T/\partial H\neq\text{const}$. Поэтому формула (16.38) по своей сути не может дать правильного значения коэффициента k ни для отдельного направления, ни для группы направлений на пункте и, следовательно, не может быть рекомендована для использования при точных геодезических работах.

Определение коэффициента k при известных значениях разностей нормальных высот точек, уклонений отвесных линий и превышений квазигеоида

Углы r_{12} и r_{21} вертикальной рефракции на пунктах A и B согласно (см. рис. 105) равны соответственно

$$r_{12}=z^0_{12}-z'_{12}+u_{12};\quad r_{21}=z^0_{21}-z'_{21}-u_{21}. \qquad (16.40)$$

Учитывая, что по определению

$$r_{12}=(s_0\rho/2R)\,k_{12};\quad r_{21}=(s_0\rho/2R)\,k_{21},$$

получим

$$k_{12}=\frac{2R}{s_0\rho}(z^0_{12}-z'_{12}+u_{12});\quad k_{21}=\frac{2R}{s_0\rho}(z^0_{21}-z'_{21}-u_{21}). \qquad (16.41)$$

Вычислим теоретические зенитные расстояния $z_{12}{}^0$ и $z_{21}{}^0$. Согласно формулам (16.22) напишем

$$H_2-H_1=(H^\gamma_2-H^\gamma_1)+(N_2-N_1). \qquad (16.42)$$

Подставив в выражение (16.5) значения (16.9) и (16.42), найдем:

$$(H_2^\gamma - H_1^\gamma) + (N_2 - N_1) = s \operatorname{ctg}(z_{12}^0 - C/2).$$

Откуда с достаточной точностью будем иметь

$$z_{12}^0 = \operatorname{arcctg}\left(\frac{H_2^\gamma - H_1^\gamma}{s} + \frac{N_2 - N_1}{s} - \frac{s_0}{2R \sin^2 z_{12}^0}\right) \qquad (16.43)$$

или при $87° \leqslant z^0 \leqslant 93°$.

$$z_{12}^0 = 90° + \left(\frac{s_0}{2R} - \frac{H_2^\gamma - H_1^\gamma}{s} - \frac{N_2 - N_1}{s}\right)\rho, \qquad (16.44)$$

где s при $(H_1 + H_2)/2 \geqslant 2$ км вычисляется по формуле (16.6).

Из треугольника ABC (см. рис. 104) найдем

$$z_{21}^0 = 180° - z_{12}^0 + s_0\rho/2R. \qquad (16.45)$$

В формулах (16.41) и (16.45) при $m_s = 1$ м и $m_R = 1$ км, что всегда может быть обеспечено, расстояния s и средний для стороны радиус кривизны эллипсоида R можно считать практически безошибочными. В этом случае средняя квадратическая ошибка определения коэффициента k по этим формулам будет равна

$$m_k = \frac{2R}{s_0\rho}\sqrt{m_{z^0}^2 + m_{z'}^2 + m_u^2}, \qquad (16.46)$$

а средняя квадратическая ошибка определения теоретического зенитного расстояния (относительно нормали к эллипсоиду) —

$$m_{z^0} = \frac{\rho}{s}\sqrt{m_h^2 + m_{\Delta N}^2}, \qquad (16.47)$$

где m_h и $m_{\Delta N}$ — средние квадратические ошибки определения нивелирного превышения $h = H^\gamma - H_1^\gamma$ и превышения квазигеоида $\Delta N = N_2 - N_1$ соответственно между пунктами.

Среднюю квадратическую ошибку m_h нивелирного превышения с достаточной в этом случае точностью определим по формуле

$$m_h = \mu\sqrt{L}, \qquad (16.48)$$

где μ — средняя квадратическая ошибка на 1 км хода; L — длина хода, км. При нивелировании IV класса в равнинной и холмистой местности примем $\mu = 8$ мм/км, $L \approx 1{,}2s$, а для горной местности — $\mu = 12$ мм/км, $L \approx 1{,}5s$, где s — длина стороны между пунктами.

Уклонения отвесных линий u на пунктах и превышения квазигеоида ΔN между пунктами при тригонометрическом нивe-

Таблица 45

Район	$m_u \approx u''_{ср}$	m_h, м	$m_{\Delta N} \approx \Delta N_{ср}$, м	$m''_{z'}$	$m_к$	$m_{\Delta H(k)}$, м
Равнинный	3	0,03	0,1	2,1	0,02	0,16
Холмистый	6	0,03	0,3	6,2	0,05	0,39
Горный	15	0,05	1,3	26,8	0,19	1,49

лировании обычно неизвестны и поэтому не учитываются. В этом случае можно считать, что $m_u = u_{ср}$ и $m_{\Delta N} = \Delta N_{ср}$, где $u_{ср}$ и $\Delta N_{ср}$ — средние величины уклонений отвеса и превышений квазигеоида в районе расположения геодезической сети. С достаточным основанием средние значения уклонений отвеса можно принять равными: в равнинной местности $u_{ср} \approx 3''$, в холмистой $u_{ср} \approx 6''$, а в горной $u_{ср} \approx 15''$. Превышения квазигеоида при $s = 10$ км (см. табл. 43) равны в среднем: на равнинах $\Delta N_{ср} \approx 0{,}1$ м, а в горах $\Delta N_{ср} \approx 1{,}3$ м, в холмистой местности при $S = 10$ км их средние величины близки к $\Delta N_{ср} \approx 0{,}3$ м.

С учетом этих данных для расстояний $s = 10$ км, $R = 6378$ км $m_{z'} = 1''$ вычислим значения средних квадратических ошибок m_h, $m_{\Delta N} \approx \Delta N_{ср}$, $m_{z''}$ и m_k при условии, что уклонения отвеса и превышения квазигеоида не известны и не учитываются (табл. 45).

В последней графе табл. 45 по формуле

$$m_{\Delta H(k)} = \frac{s^2}{2R} m_k \qquad (16.49)$$

вычислены ошибки в превышениях, обусловленные погрешностями m_k коэффициента земного преломления.

Коэффициент земного преломления k, вычисленный по формулам (16.41) без учета уклонений отвеса и превышений квазигеоида между пунктами, определяется в равнинной и холмистой местности при $s = 10$ км и $u_{ср} = 3 \div 6''$ со средней квадратической ошибкой $m_k \approx 0{,}02 \div 0{,}05$, что приводит к ошибкам в превышениях порядка 0,16—0,39 м. В горной местности при $u_{ср} \approx 15''$ точность определения коэффициента k будет в данном случае совершенно недостаточной. В реальных условиях местности уклонения отвеса и превышения квазигеоида могут быть гораздо больше приведенных величин (см. табл. 45). Соответственно возрастают и ошибки m_k и $m_{\Delta H(k)}$. При тригонометрическом нивелировании повышенной точности необходимо обеспечить определение коэффициентов k для каждого направления на пункте с ошибкой $m_k \leqslant 0{,}005$, что является сложной и пока не решенной проблемой.

Определение среднего для стороны коэффициента $\bar{k}$ по взаимно обратным зенитным расстояниям

В том случае, когда на обоих концах стороны триангуляции измерены взаимно обратные зенитные расстояния z_{12} и z_{21}, можно вычислить средний для этой стороны коэффициент $\bar{k}=(k_{12}+k_{21})/2$, если принять, что $k_{12}=k_{21}$, чего в действительности практически не бывает.

Для частных углов рефракции (см. рис. 105) с учетом формулы (16.8) напишем

$$r_{12}=z_{12}^{0}-z_{12}'+u_{12}=k_{12}C/2;$$
$$r_{21}=z_{21}^{0}-z_{21}'-u_{21}=k_{21}C/2. \qquad (16.50)$$

Сложив почленно эти равенства и учитывая, что

$$z_{12}^{0}+z_{21}^{0}=180^{\circ}+C, \qquad (16.51)$$

найдем угол полной рефракции σ для стороны триангуляции

$$\sigma=r_{12}+r_{21}=180^{\circ}+C-(z_{12}'+z_{21}')+(u_{12}-u_{21}) \qquad (16.52)$$

или

$$\sigma=(k_{12}+k_{21})\,C/2. \qquad (16.53)$$

Так как $C=s_0\rho/R$, получим

$$\bar{k}=\frac{k_{12}+k_{21}}{2}=1-\frac{R}{s_0\rho}[(z_{12}'+z_{21}')+(u_{21}-u_{12})-180^{\circ}]. \qquad (16.54)$$

Заменив z_{12}' и z_{21}' непосредственно измеренными зенитными расстояниями z_{12} и z_{21} в соответствии с формулами (16.31), окончательно будем иметь

$$\bar{k}=1-\frac{R}{s_0\rho}[(z_{12}+z_{21})+(u_{21}-u_{12})-180^{\circ}]-$$
$$-\frac{R}{s^2}[(l_1+l_2)-(i_1+i_2)]. \qquad (16.55)$$

Рассчитаем возможные величины средних квадратических ошибок m_σ определения полных углов рефракции σ в разных условиях местности. Угол $C=s_0\rho/R$ в формуле (16.52) при определении длин сторон триангуляции и радиуса кривизны поверхности земного эллипсоида на широте пункта даже с ошибками порядка $m_s=1$ м и $m_R=1$ км соответственно находится практически безошибочно ($m_C=0$). Пусть m_z — средняя квадратическая ошибка измерения зенитных расстояний, $m_{\Delta u}$ — средняя квадратическая ошибка разности $\Delta u=u_{12}-u_{21}$ взаимно

обратных уклонений отвесных линий на концах стороны триангуляции s_{12}. Переходя от формулы (16.52) к средним квадратическим ошибкам ее элементов и принимая $m_C=0$, получим

$$m_\sigma = \sqrt{2m_z^2 + m_{\Delta u}^2}\,. \tag{16.56}$$

При определении частных углов рефракции r_{ik} на концах стороны триангуляции нередко полный угол рефракции σ принимают за исходный аргумент, но вычисляют его без учета разности $\Delta u = u_{12} - u_{21}$ взаимно обратных уклонений отвесных линий, которые остаются обычно неизвестными, так как не определяются при тригонометрическом нивелировании. В этом случае при расчетах по формуле (16.56) следует принять $m_{\Delta u} = \Delta u$. Величины $\Delta u = u_{12} - u_{21}$ в равнинной местности при расстояниях 10—20 км достигают нередко 3—5″, а в холмистой и особенно в горной местности доходят иногда до 15″ и более, особенно в тех случаях, когда взаимно обратные уклонения отвесных линий u_{12} и u_{21} на концах стороны триангуляции имеют противоположные знаки.

При $m_z = 1''$ и $\Delta u = 0 \div 15''$ найдем по формуле (16.56) следующие величины ошибок m_σ в случае незнания и неучета уклонений отвесных линий (угл. с):

$m_{\Delta u}$	0	1	3	5	10	15
m_σ	1,4	1,7	3,3	5,2	10,1	15,1

Отсюда видно, что при синхронных измерениях взаимно обратных зенитных расстояний с ошибками $m_z = 1''$ для определения полного угла рефракции σ по формуле (16.52) с ошибкой $m_\sigma \leqslant 2''$ необходимо знать разность Δu взаимно обратных уклонений отвесных линий с ошибкой $m_{\Delta u} \leqslant 1''$. Другими словами, даже в равнинных районах нельзя пренебрегать влиянием уклонений отвесных линий при определении σ.

При производстве тригонометрического нивелирования величины R, s, l и i могут быть получены с высокой точностью. Поэтому при вычислении по формуле (16.55) среднего для стороны коэффициента земного преломления $\bar{k}$ ошибки этих величин примем равными нулю. В этом случае при синхронных измерениях взаимно обратных зенитных расстояний средняя квадратическая ошибка среднего для стороны коэффициента $\bar{k}$ может быть вычислена по формуле

$$m_{\bar{k}} = \frac{R}{\rho s_0}\sqrt{2m_z^2 + m_{\Delta u}^2}\,. \tag{16.57}$$

Приняв $m_z = 1''$ и $m_{\Delta u} = 0 \div 15''$, получим для расстояний между пунктами 5 и 10 км следующие величины ошибок:

$m_{\Delta u}$	0	1	3	5	10	15
$m_{\bar{k}}$ при $s=5$ км	0,009	0,011	0,020	0,032	0,062	0,093
$m_{\bar{k}}$ при $s=10$ км	0,004	0,005	0,010	0,016	0,032	0,046

Таким образом, для определения среднего коэффициента $\bar{k}$ по формуле (16.55) со средней квадратической ошибкой $m_{\bar{k}} \leqslant \leqslant 0{,}01$ надо знать разности Δu взаимно обратных уклонений отвесных линий при $s=5 \div 10$ км с ошибками не более $1—3''$ соответственно, полагая при этом $m_z = 1''$.

О совместном определении рефракции и уклонений отвесных линий из уравнивания высотной сети

При тригонометрическом нивелировании непосредственно измеренными величинами являются зенитные расстояния z_{ij} наблюдаемых целей. Поэтому уравнивать высотную сеть следует, строго говоря, под условием $\Sigma pv^2 = \min$, где v — поправки в измеренные с весами p зенитные расстояния. В качестве исходной примем формулу (16.35) для вычисления разности геодезических высот пунктов и на ее основе составим уравнения поправок, в которых в качестве неизвестных величин, определяемых из уравнивания сети, примем поправки δH_i в приближенные высоты H_i определяемых пунктов; поправки $\Delta k_{ij} = k_{ji} — k_{ij}$ за разность частных углов рефракции $\Delta r_{ij} = r_{ji} — r_{ij}$ по каждой стороне; составляющие ξ_i, η_i полного уклонения отвесных линий на тех пунктах, где они не известны.

Пусть n — число всех пунктов в сети; t — число исходных пунктов с заданными высотами; p — число всех сторон в сети, на обоих концах которых измерены взаимно обратные зенитные расстояния; m — число пунктов с известными значениями ξ, η уклонений отвесных линий. Общее число q всех неизвестных величин, определяемых из уравнивания сети, найдем по формуле

$$q = (3n + p) — (2m + t).$$

Число N всех уравнений поправок при двухстороннем нивелировании равно числу измеренных зенитных расстояний, которое, в свою очередь, равно удвоенному числу сторон в сети, т. е. $N = 2p$. Число избыточных измерений в сети найдем как разность

$$S = N — q = 2m + t + p — 3n.$$

Расчеты по этим формулам показывают, что в реальных сетях триангуляции и трилатерации, состоящих из треугольников без дополнительных диагоналей или с малым их числом, общее число q неизвестных величин, определяемых из уравнивания сети, больше числа N измеренных величин. Это значит, что

в данной ситуации задача уравнивания сети под условием $\Sigma pv^2 = \min$ не имеет решения.

Однако если сеть невелика, содержит большое число избыточных сторон (диагоналей), имеет исходные ($t \geqslant 1$) и хотя бы один пункт с известным уклонением отвесной линии ($m \geqslant 1$), то в этом случае будем иметь небольшое число избыточных измерений и, следовательно, сеть может быть уравнена. Тем не менее и в этой ситуации поправки за рефракцию и уклонения отвесных линий в общем случае определяются ненадежно, с недопустимо большими ошибками.

Причина этого состоит в том, что рефракция и уклонения отвесных линий влияют на определяемые превышения совместно и разделить их на части в процессе уравнивания сети с требуемой точностью практически не удается. В целях повышения точности тригонометрического нивелирования известный чешский геодезист Л. Градилек рекомендует измерять зенитные расстояния на всех пунктах сети в одни и те же часы суток, причем при благоприятных условиях погоды и без резкой смены ее во время наблюдений на пункте.

§ 122. НОРМАЛЬНАЯ РЕФРАКЦИЯ. ВЫГОДНЕЙШЕЕ ВРЕМЯ ИЗМЕРЕНИЙ ЗЕНИТНЫХ РАССТОЯНИЙ

В геодезических сетях зенитные расстояния, как и горизонтальные углы, измеряют сначала на одном пункте, затем на другом, третьем и т. д. Другими словами, взаимно обратные зенитные расстояния по каждой стороне триангуляции измеряются не только в разные часы суток, но и в разные дни, т. е. неодновременно (не синхронно). В этом случае частные углы рефракции r_{12} и r_{21} на концах одной и той же стороны могут быть существенно разными по величине и к тому же остаются неизвестными.

Вычислив среднее из прямого и обратного превышений по формуле (16.35), получим результат, искаженный влиянием рефракции на величину

$$\delta h = \frac{k_{21} - k_{12}}{4R} s^2 = \frac{r_{21} - r_{12}}{2\rho} s, \qquad (16.58)$$

так как разность углов рефракции $\Delta r = r_{21} - r_{12}$ остается неизвестной и не учитывается. В общем случае $r_{12} \neq r_{21} \neq 0$. Поэтому чтобы заметно ослабить влияние рефракции на вычисляемые превышения, надо измерять взаимно обратные зенитные расстояния либо одновременно (синхронно), что практически не делается, либо в такие часы суток на всех пунктах, когда разности Δr углов рефракции по каждой стороне триангуляции наиболее стабильны и стремятся к минимуму.

В суточном ходе вертикальная рефракция достигает наименьшей величины (правда, еще далекой от нуля) около полу-

дня, а наибольшей — около полуночи. Среднее суточное значение ее, т. е. среднее за 24 ч, получается практически такое же, как в утренние и вечерние часы, когда на высоте визирного луча наблюдается состояние воздуха, наиболее близкое к изотермии.

Практика показывает, что при смене погоды, например, при переходе от безоблачной жаркой к холодной облачной, рефракция в околополуденные часы может существенно изменяться по величине. Это значит, что в это время суток разности Δr углов рефракции не отличаются стабильностью и могут изменяться в довольно большом диапазоне. Аналогичная картина имеет место и около полуночи.

Наибольшая стабильность углов рефракции и их разностей Δr при разной погоде в разные дни отмечается в периоды утренней и вечерней изотермии воздуха. Поэтому эти периоды и являются наиболее благоприятными для измерений зенитных расстояний в геодезических сетях.

Данный вывод относительно выгоднейшего времени измерений зенитных расстояний впервые был установлен экспериментально известным русским астрономом и геодезистом В. Я. Струве еще в 1837 г., когда руководимая им Каспийская экспедиция определяла методом тригонометрического нивелирования разность уровней Черного и Каспийского морей. В то время утренний и вечерний периоды, когда колебания изображений визирных целей становились наименьшими, а видимость — наилучшей, называли периодами «нормальной» рефракции.

При прохождении визирного луча над совершенно ровной местностью с одинаковой отражательной способностью (альбедо) и одновременном наступлении на всем его пути изотермии воздуха, когда $\partial T/\partial H = 0$, нормальная рефракция согласно формуле (8.16) будет равна

$$r_0 = 0{,}39 \frac{p}{T^2} s \sin z. \qquad (16.59)$$

Приняв для летних месяцев $p = 750$ мм рт. ст., $T = 288$ °K и выразив расстояние s в км, получим более простую формулу для приближенных вычислений нормальной рефракции

$$r_0 = 3{,}53 s \sin z. \qquad (16.60)$$

Необходимо обратить внимание на то, что формула (16.59) не может быть использована для точных расчетов вертикальной рефракции по той причине, что даже в равнинной местности, не говоря уже о холмистой и тем более горной, изотермия воздуха в разных точках визирного луча наступает несколько неодновременно, хотя бы потому что разные отрезки луча имеют разную высоту над подстилающей поверхностью с различными теплотехническими, отражательными и другими

характеристиками, определяющими температурный режим над разными участками местности. Кроме того, надо иметь в виду, что при малооблачной жаркой погоде летом вертикальная рефракция, а следовательно, и зенитные расстояния наблюдаемых целей в вечерние и утренние часы изменяются во времени с достаточно большой скоростью, достигающей иногда 50″ за один час. Следовательно, если разновременность наступления изотермии в разных точках визирного луча составляет всего лишь, например, 10 мин, то в этом случае нормальная рефракция, вычисленная по формуле (16.59), может отличаться от ее реальной величины в некоторый средний для луча момент наступления изотермии на 10″ и более, особенно при значительной длине визирного луча.

С течением времени рекомендации известных русских ученых В. Я. Струве, Н. Я. Цингера, И. И. Померанцева относительно измерений зенитных расстояний в геодезических сетях в периоды «нормальной» рефракции, когда на всем пути визирных лучей наблюдается состояние воздуха, наиболее близкое к изотермии, необоснованно были забыты и появились другие рекомендации. Так например, действовавшие примерно до 1955 г. инструкции рекомендовали измерять зенитные расстояния в период с 10 до 14 ч, когда в суточном ходе рефракция принимает при данных погодных условиях наименьшее значение, однако далеко не равное нулю. В эти часы, как показали исследования А. А. Изотова и Л. П. Пеллинена (1955 г.), величина рефракции существенно разная для различных направлений на пункте и, кроме того, заметно изменяется с изменением погодных условий.

Инструкция [8] разрешает измерять зенитные расстояния на достаточно четкие изображения визирных целей в течение всего дня, исключая периоды по 2 ч перед заходом и после восхода Солнца.

Используя результаты измерений зенитных расстояний на пунктах Становое и Петровское (табл. 46), покажем насколько правильны рекомендации В. Я. Струве, Н. Я. Цингера и И. И. Померанцева о необходимости измерения зенитных расстояний в периоды нормальной рефракции, т. е. при изотермии воздуха. Согласно указанной инструкции можно измерить зенитное расстояние z_{12} на пункте Становое, например, вечером в 17,35 ч, когда угол рефракции $r_{12}=44{,}4''$, а на пункте Петровское измерить зенитное расстояние z_{21}, например, в 11,27 ч, когда угол рефракции $r_{21}=16{,}4''$. В данном случае среднее из прямого и обратного превышений будет искажено влиянием рефракции на величину

$$\delta h = \frac{r_{21}-r_{12}}{2\rho}\, s = \frac{16{,}4-41{,}4}{2\rho}\cdot 11918 = -0{,}81 \text{ м}.$$

Таблица 46

$t_{восх} = 5{,}03$ ч $s = 11{,}918$ км $t_{зах} = 20{,}08$ ч 16 августа

Становое—Петровское $z^0_{12} = 90°21'25{,}8''$				Петровское—Становое $z^0_{21} = 89°44'59{,}3''$			
Время наблюдений, час	z_{12} $90°19' +$	r_{12}	k_{12}	z_{21} $89°43' +$	r_{21}	k_{21}	$\Delta k = k_{21} - k_{12}$
5,70	60,8″	85,0″	0,442	36,6″	82,7″	0,430	—0,012
7,30	114,6	31,2	0,162	84,7	34,6	0,180	+0,018
9,22	124,9	20,9	0,108	101,3	18,0	0,094	—0,010
11,27	126,2	19,6	0,102	102,9	16,4	0,085	—0,017
13,25	125,2	20,6	0,106	90,4	28,9	0,150	+0,044
15,22	120,3	25,5	0,132	87,6	31,7	0,165	+0,033
17,35	101,4	44,4	0,230				
19,30	87,6	58,2	0,302				

Теперь вычислим ошибку превышения между этими же пунктами для случая, когда зенитные расстояния измерены в момент изотермии воздуха или редуцированы к нему. Моменты утренней $t_0^у$ и вечерней $t_0^в$ изотермии воздуха для 16 августа определим по приближенным формулам $t_0^у = t_{восх} + x_0' = 5{,}03 + 1{,}50 = 6{,}53$ ч $t_0^в = t_{зах} - x_0' = 20{,}08 - 1{,}50 = 18{,}58$ ч, определив время восхода и захода Солнца по АЕ, а величины x_0' из приложения или по графику (рис. 80).

Используя результаты измерений (см. табл. 46), найдем путем линейной интерполяции углы нормальной рефракции r_{12}^0 и r_{21}^0. На пункте Становое утром при $t_0^у = 6{,}53$ ч получим $r^0_{12(у)} = 57{,}1''$, а вечером при $t_0^в = 18{,}58$ ч — $r^0_{12(в)} = 53{,}1''$. Утром на пункте Петровское при $t_0^у = 6{,}53$ ч имеем $r^0_{21(у)} = 57{,}7''$; вечером на пункте Петровское вследствие плохой видимости получить надежные значения зенитных расстояний не удалось. При изотермии воздуха среднее из прямого и обратного превышений было искажено влиянием рефракции на величину

$$\delta h_0 = \frac{r^0_{21} - r^0_{12}}{2\rho} s = \frac{57{,}7 - 53{,}1}{2\rho} \cdot 11918 = +0{,}12 \text{ м}.$$

Сопоставив полученные значения $\delta h = -0{,}81$ м и $\delta h_0 = +0{,}12$ м, нетрудно убедиться, что наблюдения в периоды нормальной (по Струве) рефракции дают несравненно более точные результаты определения превышений, чем при наблюдениях, выполняемых, например, на одном пункте около полудня, а на другом утром или вечером, как это допускает действующая инструкция [8].

Для того чтобы получить наиболее точные результаты тригонометрического нивелирования, зенитные расстояния следует

измерять в период изотермии воздуха на всех пунктах геодезической сети. Если по каким-либо причинам это сделать невозможно, например, при измерении горизонтальных углов в это время, можно поступить следующим образом. Одну часть приемов измерений зенитных расстояний (не менее четырех) выполнить, например, за 1—1,5 ч до наступления изотермии, а другую (не менее четырех) — спустя примерно такое же или меньшее время после нее, причем не обязательно в тот же день, хотя и желательно. При этом необходимо с точностью до одной минуты зафиксировать время измерений зенитных расстояний в каждом отдельном приеме. Далее следует вычислить время t_0 наступления изотермии воздуха для каждой даты измерений зенитных расстояний. Поскольку поправки ε_m за различие метеоусловий, как правило, малы, то в равнинной и слегка холмистой местности, где поправки ε_h за высоту луча также невелики, моменты времени t_0 можно вычислить по приближенным формулам: $t_0^{\text{в}} = t_{\text{зах}} - x_0'$ — в случае вечерних наблюдений и $t_0^{\text{у}} = t_{\text{восх}} + x_0'$ при утренних наблюдениях. При работе в горных районах необходимо учесть еще поправку ε_h за эквивалентную высоту визирного луча над местностью, которую в случае вечерних наблюдений можно вычислить по формуле (8.58). Время восхода $t_{\text{восх}}$ и захода $t_{\text{зах}}$ Солнца для каждой даты наблюдений можно определить по АЕ, а величину x_0' по приложению или по графику (см. рис. 80).

Определив время t_0 наступления изотермии воздуха ($t_1 < t_0 < t_2$), необходимо измеренные в моменты времени t_1 и t_2 зенитные расстояния z_1 и z_2 проинтерполировать линейно на момент времени t_0 и таким образом получить зенитное расстояние z_0, приведенное к моменту t_0 изотермии воздуха.

Для того чтобы зенитные расстояния, измеряемые по всем n направлениям на пункте, относились всякий раз к одному и тому же среднему из приемов моменту времени, зенитные расстояния при одном положении вертикального круга следует измерять в последовательности номеров направлений 1, 2, 3, ..., n, а при другом положении круга — в обратной последовательности: n, n—1, ..., 3, 2, 1.

§ 123. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ

Формулы для оценки точности измеренных превышений

Средняя квадратическая ошибка превышений $\Delta H = H_2^{\text{у}} - H_1^{\text{у}}$, вычисляемых по формуле (16.24) при одностороннем нивелировании, может быть найдена по формуле

$$m_{\Delta H}^2 = m_s^2 \operatorname{ctg}^2 z + m_z^2 s^2/\rho^2 + m_k^2 s^4/4R^2 + m_u^2 s^2/\rho^2 + m_{\Delta N}^2 + m_i^2 + m_l^2. \quad (16.61)$$

Средняя квадратическая ошибка среднего из прямого и обратного превышений ΔH, вычисляемого по формуле (16.36) при двухстороннем нивелировании в случае одновременного измерения взаимно обратных зенитных расстояний, равна

$$m_{\Delta H}^2 = m_s^2 \operatorname{tg}^2 \frac{z_{21} - z_{12}}{2} + m_z^2 s^2/2\rho^2 + m_k^2 s^4/8R^2 + \\ + m_u^2 s^2/2\rho^2 + m_{\Delta N}^2 + (m_i^2 + m_l^2)/2. \qquad (16.62)$$

В этих формулах: m_s — средняя квадратическая ошибка определения длины стороны s между пунктами; m_z — ошибка измерения зенитных расстояний z; m_k — ошибка определения коэффициента земного преломления k; m_u — ошибка определения уклонений отвесных линий u; $m_{\Delta N}$ — ошибка определения превышения квазигеоида между пунктами ($\Delta N = N_2 - N_1$); m_i и m_l — ошибки определения высоты i теодолита и высоты l визирной цели над центрами пунктов.

Задаваясь значениями ошибок, входящих в формулы (16.61) и (16.62), можно определить ожидаемую среднюю квадратическую ошибку превышения ΔH или наоборот, задав величину ошибки превышения $m_{\Delta H}$, можно рассчитать допустимые величины других ошибок.

Обработка результатов тригонометрического нивелирования

Обработку результатов тригонометрического нивелирования начинают с проверки журналов измерений и вычисления измеренных зенитных расстояний; правильности определения или вычисления высоты теодолита и визирных целей над центрами пунктов, а также правильности определения расстояний s между пунктами.

Затем, используя результаты взаимно обратных зенитных расстояний, вычисляют коэффициент земного преломления по 10—15 наиболее длинным сторонам на участке геодезической сети с более или менее одинаковой подстилающей поверхностью. Из всех значений выводят среднюю величину коэффициента.

С этим коэффициентом вычисляют односторонние превышения, учитывая, если известны, уклонения отвесных линий и превышения квазигеоида. Вес двухстороннего превышения вычисляют по формуле

$$p = \frac{100}{s_{\text{км}}^2}. \qquad (16.63)$$

Вес одностороннего превышения принимают равным поло-

вине веса соответствующего двухстороннего превышения. Для удобства уравнивания на каждом пункте определяют веса превышений p', приведенные к единице:

$$p' = p/[p], \tag{16.64}$$

где $[p]$ — сумма весов превышений (16.63) на пункте, при этом должен соблюдаться контроль: $[p'] = 1$.

Уравнивание высот пунктов выполняют методом последовательных приближений. Вычисление высот в первом приближении начинают с пунктов, имеющих наибольшее число связей с исходными пунктами, высоты которых заданы и не подлежат изменению.

Среднюю квадратическую ошибку определения высоты пункта относительно окружающих его пунктов определяют по формуле

$$m = \sqrt{\frac{[p'\delta^2]}{n-1}}, \tag{16.65}$$

где n — число пунктов, относительно которых вычислена высота данного пункта.

Среднюю квадратическую ошибку определения высоты пункта для всего района находят по формуле

$$M = \sqrt{\frac{\Sigma m^2}{k}}, \tag{16.66}$$

где k — число пунктов, высоты которых определяют из уравнивания сети.

РАЗДЕЛ V

Уравнивание геодезических сетей на плоскости

Глава 17

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЯХ

§ 124. ЗАДАЧИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ. ПРИВЕДЕНИЕ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН К ЦЕНТРАМ ПУНКТОВ

Задачи и состав предварительных вычислений

Конечной целью предварительных вычислений является составление сводных таблиц всех измеренных в геодезической сети измеренных величин, приведенных к центрам пунктов и редуцированных как на поверхность принятого референц-эллипсоида, так и на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера. Кроме того, одной из важнейших задач является всесторонний анализ результатов измерений и их контроль по свободным членам условных уравнений, включая независимые и зависимые. Обнаруженные при этом отклонения от предъявляемых к ним техническим требованиям должны быть устранены до начала уравнительных вычислений.

Предварительные вычисления на первом этапе предусматривают составление рабочей схемы геодезической сети, проверку вычислений в полевых журналах, составление сводок измеренных и уравненных на станциях величин, предварительное решение треугольников и вычисление их сферических избытков, вычисление поправок за центрировку прибора и редукцию визирных целей, составление сводных таблиц приведенных к центрам пунктов измеренных в сети величин. Составляют также таблицы координат и высот исходных пунктов, таблицы уклонений отвесных линий на пунктах Лапласа и других, таблицы азимутов Лапласа и длин базисных сторон, таблицы нормальных и геодезических высот пунктов.

Редуцирование измеренных направлений азимутов и длин сторон с поверхности Земли на поверхность эллипсоида выполняют по нормалям к нему. В измеренные направления и азимуты вводят поправки: за уклонения отвесных линий, за высоту наблюдаемых целей над референц-эллипсоидом (в триангу-

ляции 1—2 классов), за переход от нормального сечения эллипсоида к геодезической линии (только в триангуляции 1 класса). При проектировании измеренных сторон вычисляют поправки за их высоту над референц-эллипсоидом.

При редуцировании угловых и линейных элементов с поверхности референц-эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера вычисляют поправки в направления и азимуты за кривизну изображения геодезических линий на плоскости, поправки за искажение масштаба измеренных сторон.

Предварительное решение треугольников и вычисление сферических избытков

В триангуляции предварительное решение треугольников выполняют для получения длин сторон, необходимых для вычисления поправок за центрировку и редукцию, а также сферических избытков и приближенных координат пунктов триангуляции. Треугольники решают по теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=q,$$

откуда, приняв сторону a за исходную, находят

$$b=q\sin B, \qquad c=q\sin C.$$

За исходные принимают базисные или выходные стороны, а также стороны триангуляции высшего класса или ранее уравненной сети. Треугольники решают раздельно по каждому классу триангуляции по углам, округленным до $1''$.

Одновременно вычисляют сферические избытки треугольников по одной из следующих формул:

$$\varepsilon''=fab\sin C=fac\sin B=fbc\sin A,$$

где

$$f=\rho/2R_m^2;$$

R_m — средний радиус кривизны эллипсоида на широте геодезической сети. Для территории СССР величина коэффициента f для вычислений в триангуляции 2—4 классов при $s\leqslant\leqslant 30$ км может быть принята в среднем равной 0,00253, если длины сторон треугольников и R_m выражены в километрах.

В трилатерации необходимо вычислить углы в каждом треугольнике. В треугольнике ABC с измеренными сторонами a, b и c противолежащие углы могут быть найдены по формулам

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; \qquad \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

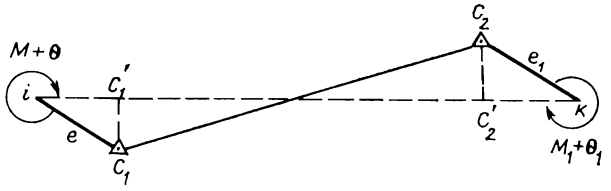


Рис. 106. Схема приведения измеренных расстояний к центрам пунктов

Вычисление поправок в направления за центрировку и редукцию

Поправки C_{ik}'' за центрировку теодолита в измеренные на пункте i направления M_{ik} и поправки r_{ki}'' за редукцию визирной цели данного пункта вычисляют по формулам (9.40) и (9.41), которые, с дополнительными индексами запишем в следующем виде:

$$c_{ik}'' = \frac{e \sin (M_{ik} + \theta)}{s} \rho''; \qquad r_{ki}'' = \frac{e_1 \sin (M_{ik}' + \theta_1)}{s} \rho'', \qquad (17.1)$$

где (e, θ) и (e_1, θ_1) — элементы центрировки и редукции на пункте i, $M_{ik} \cong M_{ik}'$ — измеренные на этом пункте направления, s — расстояние между пунктами i и k.

Во избежание ошибок при вычислениях следует еще раз обратить внимание на то, что поправки C_{ik}'' за центрировки вводят в измеренные на пункте i направления M_{ik}, а поправки r_{ki}'' за редукцию визирной цели этого пункта вводят со своими знаками в обратные направления M_{ki}, измеренные на других пунктах.

Приведение линий, измеренных свето- или радиодальномерами, к центрам пунктов

На обоих концах каждой измеренной стороны $D' = ik$ (рис. 106) определяют элементы центрировки (e, θ) приемопередатчика (ведущей станции) и элементы редукции (e_1, θ_1) отражателя светодальномера (ведомой станции радиодальномера) относительно центров пунктов в точках C_1 и C_2 соответственно.

Поправку $\delta C = iC_1'$ за центрировку и поправку $\delta r = C_2'k$ за редукцию при e, $e_1 > 1$ м вычисляют по формулам:

$$\delta c = -e \cos (M + \theta) + \frac{e^2 \sin^2 (M + \theta)}{2D_H' - e \cos (M + \theta)};$$

$$\delta r = -e_1 \cos (M_1 + \theta_1) + \frac{e_1^2 \sin^2 (M_1 + \theta_1)}{2D_H' - e_1 \cos (M_1 + \theta_1)}. \qquad (17.2)$$

При e и $e_1<1$ м поправки находят по более простым формулам

$$\delta c = -e\cos(M+\theta); \qquad \delta r = -e_1\cos(M_1+\theta_1). \tag{17.3}$$

Длины сторон, приведенные к центрам пунктов, определяют по формуле

$$D_H = D'_H + \delta c + \delta r. \tag{17.4}$$

§ 125. РЕДУЦИРОВАНИЕ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН С ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ НА ПОВЕРХНОСТЬ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДА

Редукция измеренных расстояний

Точки земной поверхности проектируют на поверхность референц-эллипсоида по нормалям к нему. Расстояние $s\leqslant 100$ км (рис. 107), измеренное свето- или радиодальномером между пунктами *1* и *2* на высоте не более 2 км над уровнем моря, после редукции его на поверхности референц-эллипсоида примет значение s_0, равное

$$S_0 = \sqrt{S^2-\Delta H^2}\left(1-\frac{H_1+H_2}{2R}\right)+\frac{S^3}{24R^2}, \tag{17.5}$$

где H_1 и H_2 — высоты концов измеренной стороны s над референц-эллипсоидом ($\Delta H = H_2 - H_1$); R — средний радиус кривизны поверхности эллипсоида на средней широте B_m данной линии:

$$R = a\left(1-\frac{1}{2}e^2\cos 2B_m\right); \tag{17.6}$$

a — большая полуось референц-эллипсоида, e — эксцентриситет меридианного сечения эллипсоида. Для эллипсоида Красовского $a=6378245$ м, $e^2=0{,}006693422$.

При редуцировании базисов, измеренных инварными проволоками, кроме средней высоты H_m базиса над референц-эллипсоидом, которую можно принять равной $H_m=(H_1+H_2)/2$, необходимо учитывать влияние уклонений отвесных линий. При линейном изменении уклонений отвеса вдоль линии базиса, его длина s_0, приведенная к поверхности референц-эллипсоида, может быть получена по формуле

$$S_0 = S - \frac{H_m}{R_m}S + \frac{H_m^2}{R_m^2}S + \frac{u_{12}+u_{21}}{2\rho}\Sigma\Delta h, \tag{17.7}$$

где s — измеренная длина базиса, приведенная к горизонту; R_m — средний радиус кривизны эллипсоида на средней широте

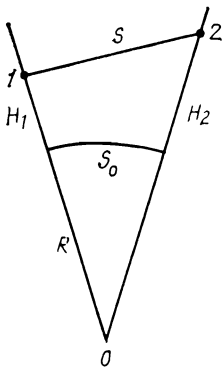


Рис. 107. Схема редуцирования измеренных расстояний на референц-эллипсоид

базиса; u_{12} и u_{21} — составляющие уклонений отвеса в направлении линии базиса на его концах; $\Sigma\Delta h$ — сумма измеренных превышений на отдельных пролетах базиса.

Для того чтобы редукционные поправки в (17.6) и (17.7) не превышали величины $\Delta s/s = 1/2 \cdot 10^6$, геодезические высоты H_1 и H_2 должны быть известны с ошибками не более $\delta H \leqslant 3$ м, а уклонения отвеса — с ошибками, не превышающими $\delta u_{ik}'' \leqslant 0{,}1 \operatorname{tg} Z_{ik}$, где Z_{ik} — зенитное расстояние конечной точки базисной линии.

Редукция горизонтальных направлений

Поправки за уклонения отвесных линий. В точке стояния теодолита отвесная линия, с которой совмещают его ось во время наблюдений на пункте, и нормаль к эллипсоиду в ней не совпадают между собой. Поэтому в измеренные направления и в азимуты Лапласа $A = \alpha - (\lambda - L)\sin\varphi$ вводят поправки δ_1 за уклонения отвесных линий:

$$\delta_1 = -(\xi_i \sin A_{ik} - \eta_i \cos A_{ik}) \operatorname{ctg} z_{ik}, \qquad (17.8)$$

где ξ_i и η_i — составляющие уклонения отвесной линии соответственно в плоскости меридиана и первого вертикала; A_{ik} — геодезический азимут направления, для которого вычисляют поправку; z_{ik} — зенитное расстояние наблюдаемой цели.

Поправки δ_1 вычисляют в том случае, если углы наклона измеряемых направлений равны или более 1°, а полное уклонение отвесной линии $u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ не менее 3″. В равнинной местности (при $z = 90° \pm 1°$) эти поправки практически равны нулю.

В рядах триангуляции 1 класса большой протяженности эти поправки необходимо учитывать даже при малых наклонах направлений, так как при наличии больших волн геоида (квазигеоида) на территории страны эти поправки имеют характер систематических ошибок и, накапливаясь, могут привести к заметным деформациям сети.

В горной местности уклонения отвесных линий нередко достигают 30—40″, а зенитные расстояния колеблются в интервале 84—96°. Приняв, например $u = 30''$, $A = 90°$, $z = 84°$ ($\operatorname{ctg} 84° = 0{,}105$), получим $\delta = 3{,}15''$, т. е. в горной местности поправки за уклонения отвесных линий могут быть значитель-

Таблица 47

Ошибка угла m	Ошибка m_u при зенитных расстояниях				
	90°30′ и 89°30′	91° и 89°	92° и 88°	93° и 87°	94° и 86
0,5″	4,0″	2,0″	1,0″	0,7″	0,5″
0,7	5,6	2,8	1,4	0,9	0,7″
1,0	8,0	4,0	2,0	1,3	1,0
1,5	12,0	6,0	3,0	2,0	1,5
2,0	16,0	8,0	4,0	2,7	2,0

ными. Их необходимо вводить в измеренные направления не только на пунктах 1—2 классов, но и на пунктах 3—4 классов.

Для того чтобы определять поправки δ_1 со средней квадратической ошибкой $m_{\delta_1} \leqslant 0{,}1\mu = 0{,}1m''/\sqrt{2} = 0{,}07m''$, где m — средняя квадратическая ошибка угла, принятая для данного класса триангуляции, полные уклонения отвеса должны быть известны с ошибкой m_u (табл. 47), не превышающей величины

$$m_u \leqslant 0{,}07m'' \operatorname{tg} z. \tag{17.9}$$

Поправки за высоту наблюдаемых пунктов. Эта поправка возникает из-за того, что визирная плоскость трубы теодолита, проходящая через наблюдаемую точку, находящуюся на высоте H_2 над эллипсоидом, не совпадает с проекцией данной точки на эллипсоид при проектировании ее по нормали к нему. Вычисляется данная поправка по формуле

$$\delta_2 = \rho \frac{H_2}{M_m} \frac{e^2}{2} \cos^2 B_2 \sin 2A_{12}, \tag{17.10}$$

где $\rho'' = 206265''$; $H_2 = N + H_u^\gamma$ — геодезическая высота наблюдаемой точки *2* над референц-эллипсоидом; M — радиус кривизны меридианного сечения эллипсоида на средней широте $B_m = {}^1/_2(B_1 + B_2)$ точек *1* и *2*; e — эксцентриситет меридианного эллипса, A_{12} — азимут направления на точку *2* с широтой B_2.

Для эллипсоида Красовского формула (17.10) принимает вид

$$\delta_2 = 0{,}108''H_2 \cos^2 B_2 \sin 2A_{12}. \tag{17.11}$$

Приняв $B_2 = 45°$, $\sin 2A_{12} = 1$ и для точек с высотами $H_2' = 200$ м и $H_2'' = 1000$ м, получим для измеренных направлений на эти точки поправки δ_2, равные соответственно $\delta_2' = 0{,}008''$ и $\delta_2'' = 0{,}05''$. Поправки δ_2 необходимо учитывать при создании геодезических сетей 1 и 2 классов в горных районах.

Поправки за переход от азимута нормального сечения эллипсоида к азимуту геодезической линии. Пусть на поверхности референц-эллипсоида имеются какие-либо точки *1* и *2*

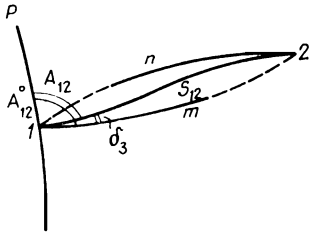


Рис. 108. Поправка за переход от азимута нормального сечения эллипсоида к азимуту геодезической линии

(рис. 108) и допустим, что через точку *1* проходит нормаль n_1 к его поверхности, а через точку 2 — нормаль n_2 (на рисунке они не показаны). Через точку *1* проведем плоскость, содержащую нормаль n_1, и повернем ее вокруг нормали по азимуту так, чтобы эта плоскость прошла через точку *2*. В результате этих построений на поверхности эллипсоида в точке *1* получим прямое нормальное сечение *1m2*. Теперь через точку *2* и нормаль n_2, проходящую через эту точку, проведем обратное нормальное сечение *2n1*. Прямое и обратное нормальные сечения в общем случае не совпадают между собой, так как нормали n_1 и n_2 не лежат в одной плоскости.

При решении геодезических задач на поверхности эллипсоида вместо прямых и обратных нормальных сечений используют геодезическую линию s_{12}, соединяющую точки *1* и *2* по наикратчайшему расстоянию. В этом случае возникает необходимость перехода от азимута A_{12}^0 нормального сечения *1m2* к азимуту геодезической линии $A_{12}=A_{12}^0+\delta_3$, где поправку δ_3 вычисляют по формуле

$$\delta_3 = -\rho \frac{e^2 s^2}{12 N_m^2} \cos^2 B_m \sin 2A_{12}, \qquad (17.12)$$

где e — эксцентриситет меридианного эллипса референц-эллипсоида, s — длина геодезической линии, км; N_m — радиус кривизны сечения первого вертикала (в км) на средней широте $B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$ точек *1* и *2*: A_{12} — азимут прямого нормального сечения.

Для эллипсоида Красовского формула (17.12) примет вид

$$\delta_3 = -2{,}82'' \cdot 10^{-6} s^2 \cos B_m \sin 2A_{12}. \qquad (17.13)$$

Эти поправки малы. Например, при $s=30$ км, $B_m=45°$ и $\sin 2A_{12}=1$ поправка $\delta_3=0{,}001''$, поэтому данные поправки учитывают только в геодезических сетях 1 класса.

В триангуляции 2—4 классов, создаваемой в равнинной местности (при $z=90°\pm1°$), с геодезическими высотами пунктов

$H \leqslant 1$ км поправки δ_1, δ_2 и δ_3 весьма малы по сравнению с ошибками измерения углов $m = 1 \div 2''$, поэтому этими поправками в данном случае можно пренебречь.

§ 126. РЕДУЦИРОВАНИЕ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН С ЭЛЛИПСОИДА НА ПЛОСКОСТЬ

Редукция расстояний. Пусть S — длина стороны на поверхности эллипсоида. Ее длина s на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера при $S \leqslant 30$ км с достаточной точностью может быть вычислена по формуле

$$s = S + \Delta S = S + f' s \left(y_m^2 + \frac{\Delta y^2}{12} \right), \qquad (17.14)$$

где

$$f' = \frac{1}{2R_m^2}; \qquad y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2); \qquad \Delta y = y_2 - y_1.$$

При $30 \leqslant S \leqslant 60$ км применяют более точную формулу [7]; при $S \leqslant 10$ км второй член в скобках в формуле (17.14) можно не учитывать.

Поправки в направления за кривизну изображения геодезических линий на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера. Стороны треугольников изображаются на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера, как и на эллипсоиде, кривыми линиями (рис. 109). Решать на плоскости криволинейные треугольники нерационально. Вершины треугольников принято соединять прямыми линиями и затем решать такие треугольники, применяя простые формулы аналитической геометрии на плоскости. Поэтому необходимо перейти от углов между кривыми линиями к углам между хордами, соединяющими их концы. Для этого в каждое измеренное направление N_{ik} вводят

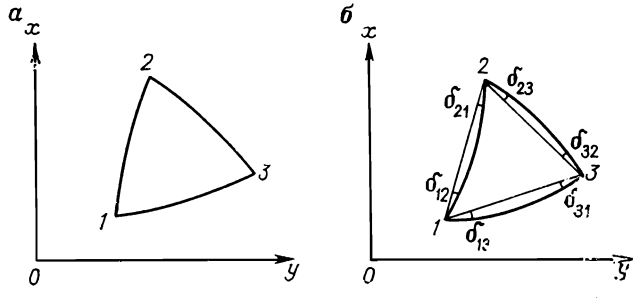


Рис. 109. Треугольник на эллипсоиде (*а*) и на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера (*б*)

поправку δ_{ik} за кривизну изображения геодезической линии на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера.

В триангуляции 2—4 классов поправки в прямое и обратное направления вычисляют по формулам

$$\delta_{12} = \frac{1}{3} f (x_1 - x_2)(2y_1 + y_2); \qquad \delta_{21} = -\frac{1}{3} f (x_1 - x_2)(2y_2 + y_1), \tag{17.15}$$

где $f = \rho/2R^2$; x, y — приближенные координаты пунктов, км. Ординаты y_1 и y_2 отсчитывают от осевого меридиана зоны проекции, причем с положительным знаком к востоку от осевого меридиана, с отрицательным — к западу от него. В триангуляции 1 класса применяют более точные формулы [7].

В каждом треугольнике с вершинами *1*, *2*, *3* (рис. 109, *б*) найдем поправки δ_i в углы как разности

$$\delta_1 = \delta_{13} - \delta_{12}; \qquad \delta_2 = \delta_{23} - \delta_{21}; \qquad \delta_3 = \delta_{32} - \delta_{31}. \tag{17.16}$$

Контролем правильности вычисления поправок δ_{ik} в направления служит равенство: $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -\varepsilon$, где ε — сферический избыток треугольника.

Переход от геодезических азимутов к дирекционным углам. Дирекционный угол α_{12} хорды s_{12}, соединяющей точки *1* и *2* на плоскости, при заданном азимуте A_{12} геодезической линии на поверхности эллипсоида между этими точками вычисляют по формуле

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}, \tag{17.17}$$

где γ_1 — гауссово сближение меридианов на плоскости в точке *1*; δ_{12} — поправка (17.15) за кривизну изображения геодезической линии на плоскости.

С точностью до 0,01″ значение γ можно получить по формуле

$$\gamma = l \sin B + \frac{l^3}{3\rho^2} \sin B \cos^2 B (1 + 3\eta^2), \tag{17.18}$$

где l — разность геодезических долгот данной точки *1* и осевого меридиана зоны проекции Гаусса — Крюгера; B — геодезическая широта точки *1*; $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$; e' — второй эксцентриситет эллипсоида (для эллипсоида Красовского $e'^2 = 0{,}006\,738\,525\,415$).

С точностью до 0,1″ значения γ находят по формуле

$$\gamma = l \sin B + \frac{l^3}{3\rho^2} \sin B \cos^2 B,$$

а с точностью до 0,1′ по формуле

$$\gamma = l \sin B.$$

Для получения γ с ошибкой порядка 0,001″ и менее применяют более точные формулы [7], чем (17.18).

Следует отметить, что знак при γ совпадает со знаком разности долгот $l = L - L_0$, где L — долгота точки; L_0 — долгота осевого меридиана зоны.

Заключительный этап предварительных вычислений. Конечной целью предварительных вычислений является, как отмечалось выше, подготовка исходной измерительной информации к уравниванию геодезической сети. Сначала вычерчивают в масштабе схему геодезической сети с указанием на ней исходных пунктов и всех измеренных направлений, азимутов, длин сторон и т. п. Затем составляют каталог координат исходных пунктов, а также сводные таблицы приведенных к центрам пунктов редуцированных как на поверхность референц-эллипсоида, так и на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера измеренных горизонтальных направлений, длин сторон, включая базисные, а также азимутов Лапласа.

На стадии предварительных вычислений должны быть определены: геодезические и нормальные высоты пунктов, составляющие уклонений отвесных линий ξ и η, необходимые для вычисления редукционных поправок.

Одной из важнейших задач предварительных вычислений является проверка соблюдения технических требований, которым должны удовлетворять результаты выполненных измерений в сети. Для этого вычисляют свободные члены всех возникающих в сети условных уравнений как независимых, так и зависимых, и сравнивают их с установленными допусками. Затем определяют средние квадратические ошибки измеренных величин с использованием свободных членов всех условных уравнений (зависимых и независимых) и сравнивают их с установленными допусками.

Если свободный член какого-либо условного уравнения не удовлетворяет установленным требованиям, необходимо выявить и устранить причины несоответствия допускам. В уравнивание должны включаться надежно проверенные, исправленные всеми необходимыми поправками и удовлетворяющие техническим требованиям результаты измерений.

Глава 18

УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

§ 127. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Для того чтобы при создании геодезической сети можно было вычислить на плоскости координаты всех вновь определяемых пунктов, должны быть известны координаты исходного пункта, длина и азимут исходной стороны, а также необходимое число измеренных углов или длин сторон треугольников (в каждом треугольнике по два угла или по две стороны). В этом случае координаты пунктов определяются однозначно, но бесконтрольно, подчас с большими ошибками. При этом не будет возможности ни выявить, ни устранить эти ошибки, а также оценить точность тех или иных элементов сети. Для устранения этих недостатков и повышения точности построения сети, в ней выполняют в достаточно большом объеме так называемые избыточные измерения горизонтальных углов, длин сторон, азимутов сторон и т. п.

При вставке сети более низкого класса в сеть более высокого класса кроме избыточно измеренных углов, длин сторон и т. п. появляются еще и избыточные исходные данные, не подлежащие изменениям при уравнивании вставляемой сети. К ним относятся координаты пунктов, длины и дирекционные углы сторон сети более высокого класса.

При наличии в геодезической сети как избыточно измеренных величин, так и избыточных исходных данных возникает необходимость уравнивания сети за возникающие в ней геометрические условия. Геодезические сети уравнивают обычно по методу наименьших квадратов, считая при этом, что 1) все измеренные в сети величины (направления, азимуты, длины сторон и т. п.) являются независимыми; 2) в результатах измерений отсутствуют систематические ошибки; 3) случайные ошибки измерений подчиняются закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным нулю.

На каждом пункте независимость результатов угловых измерений, а также азимутальных определений в приемах обеспечивается перестановками лимба между приемами по определенной программе. Два других требования выполняются не в полной мере. Поэтому чтобы уравнивание геодезических сетей было действительно строгим с математической точки зрения, необходимо еще на стадии полевых работ предпринять все возможные меры, направленные на выполнение второго и третьего требований. В противном случае принцип наименьших квадратов при уравнивании сети будет использован лишь формально. Это указывает на то, что строгое уравнивание геоде-

зической сети под условием $\Sigma pv^2 = \min$ является серьезной научно-исследовательской работой, направленной, прежде всего, на выполнение всех трех указанных выше требований, предъявляемых к результатам всех измеренных в геодезической сети величин.

Известны два классических способа уравнивания геодезических сетей по методу наименьших квадратов: коррелатный и параметрический. С математической точки зрения эти способы эквивалентны и приводят к одним и тем же значениям уравненных элементов сети. Однако с технико-экономической точки зрения эти способы в зависимости от конкретных условий могут оказаться далеко неравноценными друг другу даже при использовании одних и тех же вычислительных средств. Например, обширные по размерам сети или сети малые, но с большим числом исходных жестких пунктов и диагональных направлений (сторон), уравнивать на ЭВМ целесообразнее параметрическим способом, чем коррелатным, так как в первом случае алгоритм уравнивания проще чем во втором, а вычислительные операции однообразнее, что важно при работе на ЭВМ. Коррелатный способ содержит много логических операций (в виде условных уравнений), которые существенно осложняют составление программы для ЭВМ и требуют больше затрат труда и времени на уравнивание сети, чем при параметрическом способе. При уравнивании небольших и несложных сетей с использованием мини-ЭВМ нередко коррелатный способ оказывается эффективнее, чем параметрический. Поэтому к выбору способа уравнивания в каждом конкретном случае надо подходить творчески, с учетом размеров и сложности построения сети, а также имеющихся вычислительных средств.

§ 128. УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТРИАНГУЛЯЦИИ

Сети триангуляции уравнивают как по направлениям, так и по углам. В соответствии с принципом наименьших квадратов из уравнивания следует определять поправки во все непосредственно измеренные величины. В триангуляции, как отмечалось ранее, результаты наблюдений на пунктах представляют в виде ряда направлений. Поэтому триангуляционные и полигонометрические сети следует уравнивать по направлениям. Однако на практике иногда вместо направлений уравнивают углы, которые определяются как разности направлений и поэтому являются величинами зависимыми. В процессе уравнительных вычислений эта зависимость не учитывается, вследствие чего возникают некоторые искажения уравненных элементов сети, особенно оценки точности. Это обстоятельство надо иметь в виду при создании геодезических сетей повышенной точности.

При уравнивании геодезических сетей коррелатным спосо-

бом существенное значение имеет безошибочное определение числа и вида независимых условных уравнений. Не должно быть ни пропущенных независимых условных уравнений, ни избыточных. При включении избыточного, т. е. зависимого условного уравнения, являющегося линейной комбинацией независимых условных уравнений, будет получена неразрешимая система нормальных уравнений, определитель которой равен нулю. С другой стороны, если какое-либо условное уравнение будет не учтено, то цель уравнивания не будет достигнута, так как соответствующая данному условию невязка будет не устранена.

В общем случае число независимых условных уравнений в геодезической сети равно сумме числа избыточных измерений в ней и числа избыточных исходных (жестких) элементов, заданных в виде координат исходных пунктов или вычисленных по ним длин и дирекционных углов исходных (жестких) сторон (вычисленных, но не измеренных).

Будем полагать, что сеть триангуляции является сплошной по построению, в ней нет незаполненных пунктами участков (окон), образующих замкнутые полигоны; сеть имеет один исходный пункт с заданными координатами; на всех пунктах сети независимо измерены горизонтальные направления, в ней имеется достаточное число непосредственно измеренных базисных сторон и азимутов Лапласа, задающих соответственно масштаб и ориентировку сети триангуляции на местности.

Геодезическую сеть, в которой имеется только один исходный пункт, а также измеренные в необходимом количестве базисные стороны, азимуты, горизонтальные направления или длины всех сторон сети, принято называть нуль-свободной геодезической сетью.

В *свободной сети* триангуляции могут возникать следующие виды геометрических условий, которые в результате уравнивания сети под условием $\Sigma pv^2=\min$ должны быть полностью выполнены: условия фигур (треугольников или многоугольников), горизонта (при уравнивании углов), полюсных, проекций, базисные и азимутальные (дирекционных углов).

На практике часто вновь создаваемая сеть более низкого класса опирается на стороны или пункты геодезической сети более высокого класса. В этом случае координаты исходных пунктов, длины и дирекционные углы исходных сторон сети более высокого класса принимают за (жесткие) исходные данные, не подлежащие изменению при уравнивании вновь создаваемой сети.

В такой *несвободной сети* триангуляции при наличии в ней (жестких) исходных элементов (координат пунктов, длин и дирекционных углов сторон сети более высокого класса), принимаемых за неизменные, могут возникать те же виды условных

уравнений, что и в свободной сети, а также кроме того, еще и условия координат (абсцисс и ординат).

При уравнивании геодезических сетей под условием $\Sigma pv^2 = \min$ следует определять из уравнивания поправки во все непосредственно измеренные в сети величины: горизонтальные направления, длины и азимуты сторон и т. п., причем с учетом веса каждой измеренной величины. В несвободных сетях поправки к исходным (жестким) координатам, длинам и дирекционным углам принимают равным нулю, т. е. не определяют.

Перейдем к рассмотрению условных уравнений, возникающих в свободных и несвободных сетях триангуляции.

Условия фигур. В замкнутой фигуре, при всех вершинах которой измерены углы, сумма уравненных значений этих углов должна быть равна теоретической, т. е.

$$\Sigma\beta = (n-2)\,180^\circ, \tag{18.1}$$

где n — число сторон, образующих замкнутую фигуру.

Будем различать два случая уравнивания триангуляции: первый, когда сеть уравнивается *по углам*, считая их независимыми, и второй, когда сеть уравнивается *по направлениям*.

В треугольнике с вершинами *1*, *2* и *3* (рис. 110) уравненные углы обозначим римскими цифрами I, II, III, измеренные значения их арабскими цифрами 1, 2, 3, а поправки в углы из уравнивания арабскими цифрами, заключенными в круглые скобки, т. е. при уравнивании углов напишем

$$\begin{aligned} &\mathrm{I} = 1 + (1);\\ &\mathrm{II} = 2 + (2);\\ &\mathrm{III} = 3 + (3). \end{aligned} \tag{18.2}$$

В каждом треугольнике два угла являются необходимыми величинами, а третий избыточной. Так как $\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}=180^\circ$, то условное уравнение фигур при уравнивании сети по углам запишется для треугольника в виде

$$(1)+(2)+(3)+\omega = 0, \tag{18.3}$$

где свободный член

$$\omega = 1+2+3-180^\circ. \tag{18.4}$$

Если углы даны на поверхности эллипсоида,

$$\omega = 1+2+3-(180^\circ+\varepsilon), \tag{18.5}$$

где ε — сферический избыток треугольника.

При измерении и уравнивании направлений каждый угол следует представить как разность соответствующих направле-

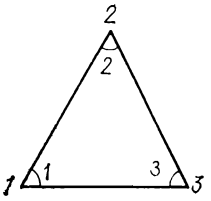


Рис. 110. Треугольник с измеренными углами

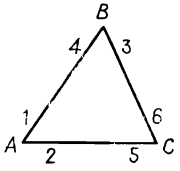


Рис. 111. Треугольник с измеренными направлениями

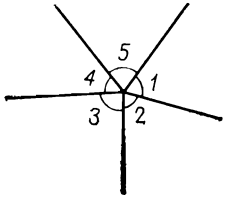


Рис. 112. Углы, образующие условие горизонта

ний. Отметим, что направления на каждом пункте принято нумеровать по ходу часовой стрелки.

В случае измерения и уравнивания направлений условное уравнение фигур для треугольника ABC (рис. 111) запишется в виде

$$-(1)+(2)-(3)+(4)-(5)+(6)+\omega=0, \tag{18.6}$$

где

$$\omega=[2-1]+[4-3]+[6-5]-180^\circ. \tag{18.7}$$

Условия горизонта. Если на пункте, например, при полюсе центральной системы измерены углы между всеми смежными направлениями (рис. 112), то сумма их уравненных значений должна быть равна 360°. Условия горизонта возникают только в том случае, если триангуляцию уравнивают по углам.

В этом случае условие горизонта имеет вид

$$(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+\omega=0, \tag{18.8}$$

где

$$\omega=1+2+3+4+5-360^\circ. \tag{18.9}$$

При уравнивании триангуляции по направлениям условия горизонта не возникают и в уравнивание не включаются, так как в этом случае свободные члены условий горизонта всегда равны нулю.

Однако если на пунктах измерены направления, а сеть уравнивается по углам, то условие горизонта необходимо составлять и учитывать, несмотря на то, что свободные члены уравнений равны нулю. В противном случае сумма уравненных углов на пункте не будет равна 360°.

Полюсные условия. В геодезических четырехугольниках и центральных системах одна из сторон является избыточной. Поэтому в таких фигурах возникают полюсные условия, суть которых сводится к следующему. Длина любой стороны OA

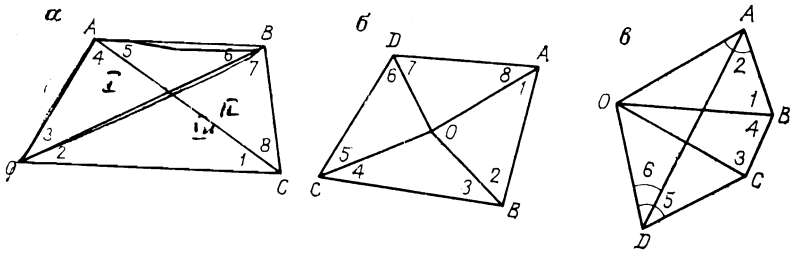


Рис. 113. Геодезический четырехугольник (*а*) и центральные системы с измеренными углами (*б*), (*в*)

при полюсе O центральной системы (геодезического четырехугольника), принятая условно в качестве исходной и вторично вычисленная по уравненным углам (направлениям) в результате последовательного решения треугольников должна иметь одно и то же значение.

Это требование может быть выражено через отношения сторон треугольников. В геодезическом четырехугольнике (рис. 113, *а*) примем за полюс, например, точку O. Тогда полюсное условие запишется в виде равенства

$$\frac{OA\,OB\,OC}{OB\,OC\,OA}=1. \tag{18.10}$$

Заменив отношения сторон отношениями синусов противолежащих углов в треугольниках, вместо равенства (18.10) получим

$$\frac{\sin \mathrm{VI}\sin(\mathrm{I}+\mathrm{VIII})\sin \mathrm{IV}}{\sin(\mathrm{IV}+\mathrm{V})\sin \mathrm{VII}\sin \mathrm{I}}=1. \tag{18.11}$$

Для центральной системы (рис. 113, *б*) примем за полюс точку O и запишем полюсное условие сначала в виде отношения сторон треугольников:

$$\frac{OA\,OB\,OC\,OD}{OB\,OC\,OD\,OA}=1,$$

а затем в виде отношения синусов противолежащих углов:

$$\frac{\sin \mathrm{II}\sin \mathrm{IV}\sin \mathrm{VI}\sin \mathrm{VIII}}{\sin \mathrm{I}\sin \mathrm{III}\sin \mathrm{V}\sin \mathrm{VI}}=1. \tag{18.12}$$

Как и ранее уравненные значения X_i будем находить как сумму измеренной величины x_i и поправки v_i, т. е.

$$X_i=x_i+v_i, \tag{18.13}$$

Условное уравнение, связывающее величины X_1, X_2, ..., X_n запишем в общем виде

$$F(X_1, X_2, \cdot\ \cdot\ \cdot, X_n) = 0, \tag{18.14}$$

Заменим величины X_i на суммы x_i' и v_i. Тогда

$$F(x_1, x_2, \cdot\ \cdot\ \cdot\ x_n) + \omega = 0, \tag{18.15}$$

где ω — невязка (свободный член) условного уравнения.

Выражение (18.14), с учетом (18.13), разложим в ряд Тейлора и ограничимся малыми первого порядка. Получим

$$F(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \cdot\ \cdot\ \cdot, x_n + v_n) =$$

$$= F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{\partial F}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} v_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial x_n} v_n = 0$$

или

$$\sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) v_i + \omega = 0, \tag{18.16}$$

где

$$\omega = F(x_1, x_2, \cdot\ \cdot\ \cdot, x_n), \tag{18.17}$$

Выражение (18.16) представляет собой в общем виде условное уравнение, приведенное к линейному виду, как это принято при уравнивании геодезических сетей.

Для приведения к линейному виду полюсного условного уравнения (18.11) геодезического четырехугольника (см. рис. 113, *а*) обозначим

$$F = \frac{\sin \text{VI} \sin (\text{I} + \text{VIII}) \sin \text{IV}}{\sin (\text{IV} + \text{V}) \sin \text{VII} \sin \text{I}}.$$

В соответствии с выражением (18.16) возьмем частные производные от F по каждому измеренному углу β, а затем каждую производную умножим и разделим на $\sin \beta$. В итоге для случая уравнивания сети по углам получим

$$\operatorname{ctg} 6\,(6) + \operatorname{ctg} (1+8)\,(1) + \operatorname{ctg} (1+8)\,(8) +$$
$$+ \operatorname{ctg} 4\,(4) - \operatorname{ctg} (4+5)\,(4) - \operatorname{ctg} (4+5)\,(5) -$$
$$- \operatorname{ctg} 7\,(7) - \operatorname{ctg} 1\,(1) + \omega = 0, \tag{18.18}$$

где свободный член уравнения равен

$$\omega = \left(\frac{\sin 6 \sin (1+8) \sin 4}{\sin (4+5) \sin 7 \sin 1} - 1\right) \rho'' =$$

$$= \left(\frac{\Pi_1}{\Pi_2} - 1\right) \rho = \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\Pi_2} \rho''. \tag{18.19}$$

В данном случае Π_1 и Π_2 — произведения синусов углов числителя и знаменателя соответственно.

Выполнив в выражении (18.18) приведение подобных членов при одноименных поправках, запишем полюсное условное уравнение геодезического четырехугольника в окончательном виде

$$[\operatorname{ctg}(1+8)-\operatorname{ctg}1](1)+[\operatorname{ctg}4-\operatorname{ctg}(4+5)](4)-$$
$$-\operatorname{ctg}(4+5)(5)+\operatorname{ctg}6(6)-\operatorname{ctg}7(7)+\operatorname{ctg}(1+8)(8)+\omega=0. \tag{18.20}$$

Для центральной системы (см. рис. 113, *б*) полюсное условное уравнение (18.12) при уравнивании ее по углам запишется в виде

$$-\operatorname{ctg}1(1)+\operatorname{ctg}2(2)-\operatorname{ctg}3(3)+$$
$$+\operatorname{ctg}4(4)-\operatorname{ctg}5(5)+\operatorname{ctg}6(6)-\operatorname{ctg}7(7)+\operatorname{ctg}8(8)+\omega=0, \tag{18.21}$$

где

$$\omega=\left(\frac{\sin 2\sin 4\sin 6\sin 8}{\sin 1\sin 3\sin 5\sin 7}-1\right)\rho=\frac{\Pi_1-\Pi_2}{\Pi_2}\rho''. \tag{18.22}$$

Полюсные условные уравнения (18.18) и (18.21) соответствуют случаю уравнивания триангуляции по углам. При уравнивании сети по направлениям поправки в углы следует выражать через поправки в измеренные направления. Например, если угол β равен разности измеренных направлений 2 и 1, т. е. если $\beta=2-1$, то при уравнивании сети по углам запишем: $\operatorname{ctg}\beta(\beta)$, а при уравнивании сети по направлениям — $\operatorname{ctg}(2-1)(1)+\operatorname{ctg}(2-1)(2)$.

При уравнивании центральной системы (рис. 114) по направлениям полюсное условное уравнение после приведения подобных членов при одноименных поправках запишется в виде

$$\operatorname{ctg}(6-5)(5)-[\operatorname{ctg}(6-5)+\operatorname{ctg}(7-6)](6)+$$
$$+\operatorname{ctg}(7-6)(7)+\operatorname{ctg}(9-8)8+[\operatorname{ctg}(10-9)-\operatorname{ctg}(9-8)](9)-$$
$$-\operatorname{ctg}(10-9)(10)+\operatorname{ctg}(12-11)(11)-[\operatorname{ctg}(13-12)+$$
$$+\operatorname{ctg}(12-11)](12)+\operatorname{ctg}(13-12)(13)+\operatorname{ctg}(15-14)(14)-$$
$$-[\operatorname{ctg}(15-14)+\operatorname{ctg}(16-15)](15)+\operatorname{ctg}(16-15)(16)+\omega=0, \tag{18.23}$$

где

$$\omega=\left(\frac{\sin(10-9)\sin(13-12)\sin(16-15)\sin(7-6)}{\sin(6-5)\sin(9-8)\sin(12-11)\sin(15-14)}-1\right)\rho''=$$
$$=\frac{\Pi_1-\Pi_2}{\Pi_2}\rho''. \tag{18.24}$$

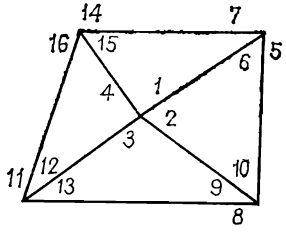


Рис. 114. Центральная система с измеренными направлениями

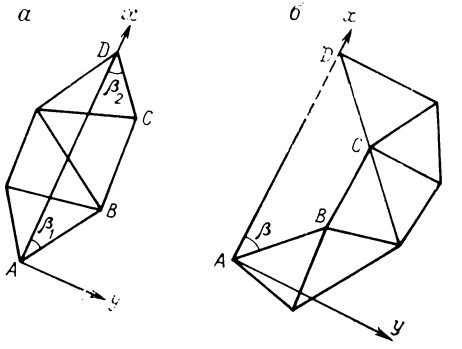


Рис. 115. Сети триангуляции, в которых возникают условия проекций

Следует отметить, что при уравнивании сети по направлениям сумма коэффициентов при поправках в любом условном уравнении должна быть равна нулю, так как после замены поправок в углы поправками в направления коэффициенты при них будут иметь один раз положительный, а второй раз отрицательный знаки. Это требование используется в качестве промежуточного контроля вычислений при уравнивании направлений.

Условия проекций. Они возникают в том случае, когда в сети имеется длинная диагональ, соединяющая вершины несмежных треугольников и при ней измерены один или два избыточных угла (рис. 115).

Введем вспомогательную систему координат с началом в точке A; ось абсцисс направим вдоль диагонали AD, а ось ординат по перпендикуляру к ней. Суть условия проекций сводится к тому, что в замкнутом контуре $ABCDA$ сумма проекций длин его сторон на любое направление должна быть равна нулю. Так как длина диагонали AD не известна, то направление y, на которое проектируют длины сторон, совмещают с перпендикуляром к стороне AD в точке A. Условие проекций запишем сначала в общем виде

$$\Sigma(\Delta y) + \omega = 0, \tag{18.25}$$

где

$$\omega = \Delta y'_{AB} + \Delta y'_{BC} + \Delta y'_{CD} + \Delta y'_{DA} = \Sigma \Delta y'. \tag{18.26}$$

В выражении (18.25) (Δy) — поправки в приращения $\Delta y'$, вычисленные в условной системе координат xy с началом в точке A. Поправки (Δy) следует выразить через поправки в измеренные направления (углы) и затем получить условное уравнение в окончательном виде.

Условия проекций не ведут к повышению точности сети; они только усложняют процесс уравнительных вычислений, по-

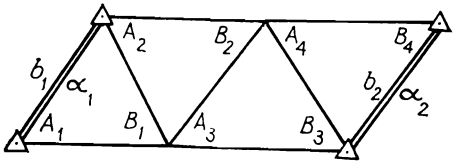


Рис. 116. Цепочка треугольников между пунктами с заданными координатами

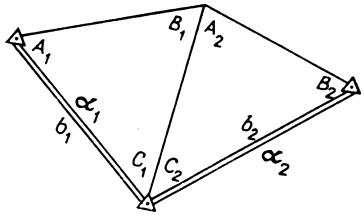


Рис. 117. Вставка пункта в жесткий угол, заданный координатами трех исходных пунктов

скольку имеют достаточно громоздкий вид. Поэтому проектировать геодезические сети следует таким образом, чтобы условия проекций не возникали.

В фигуре *ABCDA* (см. рис. 115) измерено два дополнительных угла β. Поэтому в ней возникнет два дополнительных условия: условие проекций и условие фигуры. В аналогичной фигуре (см. рис. 115, *б*), где измерен один дополнительный угол β, возникнет дополнительно только условие проекций.

Базисные условия возникают при наличии в сети избыточных исходных сторон (непосредственно измеренных или вычисленных по координатам исходных пунктов). При составлении базисного условия выделяют в сети цепочку треугольников, соединяющую ближайшие исходные стороны b_1 и b_2 по наикратчайшему пути.

Длина исходной стороны b_2, вычисленная по уравненным углам треугольников от другой исходной стороны b_1, должна быть равна заданному значению ее. Например, в цепи треугольников (рис. 116) между двумя исходными (жесткими) сторонами b_1 и b_2, вычисленными по координатам исходных пунктов, возникает базисное условие, имеющее вид

$$b_1 \frac{\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \sin A_4}{\sin B_1 \sin B_2 \sin B_3 \sin B_4} - b_2 = 0. \qquad (18.27)$$

Пусть $A = A' + (A)$ и $B = B' + (B)$, где (A) и (B) — поправки из уравнивания в измеренные углы A' и B'. Приведя уравнение (18.27) к линейному виду, получим

$$\frac{b_2'}{\rho} \operatorname{ctg} A_1' (A_1) + \frac{b_2'}{\rho} \operatorname{ctg} A_2' (A_2) +$$
$$+ \frac{b_2'}{\rho} \operatorname{ctg} A_3' (A_3) + \frac{b_2'}{\rho} \operatorname{ctg} A_4' (A_4) -$$
$$- \frac{b_2'}{\rho} \operatorname{ctg} B_1' (B_1) - \frac{b_2'}{\rho} \operatorname{ctg} B_2' (B_2) -$$

$$-\frac{b_2'}{\rho}\operatorname{ctg} B_3'(B_3)-\frac{b_2'}{\rho}\operatorname{ctg} B_4'(B_4)+\omega=0, \tag{18.28}$$

где

$$\omega = b_2' - b_2,$$

$$b_2' = b_1\frac{\sin A_1'\sin A_2'\sin A_3'\sin A_4'}{\sin B_1'\sin B_2'\sin B_3'\sin B_4'} = b_1\frac{\Pi_1}{\Pi_2}. \tag{18.29}$$

Для того чтобы коэффициенты при поправках были близки к единице, длины сторон b_1 и b_2 и свободный член ω выражают в дециметрах, а затем обе части (18.28) умножают на ρ/b_2'. Тогда базисное условное уравнение примет вид

$$\begin{aligned}&\operatorname{ctg} A_1'(A_1)+\operatorname{ctg} A_2'(A_2)+\operatorname{ctg} A_3'(A_3)+\\&+\operatorname{ctg} A_4'(A_4)-\operatorname{ctg} B_1'(B_1)-\operatorname{ctg} B_2'(B_2)-\\&-\operatorname{ctg} B_3'(B_3)-\operatorname{ctg} B_4'(B_4)+\frac{\rho}{b_2'}\omega=0.\end{aligned} \tag{18.30}$$

При вставке пункта в жесткий угол, заданный координатами трех исходных пунктов (рис. 117) получим следующее базисное условие (условие сторон):

$$b_1\frac{\sin A_1\sin A_2}{\sin B_1\sin B_2}-b_2=0, \tag{18.31}$$

которое по аналогии с уравнением (18.30) запишем в виде

$$\begin{aligned}&\operatorname{ctg} A_1'(A_1)+\operatorname{ctg} A_2'(A_2)-\operatorname{ctg} B_1'(B_1)-\\&-\operatorname{ctg} B_2'(B_2)+\frac{\rho}{b_2'}\omega=0,\end{aligned} \tag{18.32}$$

где

$$\omega = b_2' - b_2;$$

$$b_2' = b_1\frac{\sin A_1'\sin A_2'}{\sin B_1'\sin B_2'} = b_1\frac{\Pi_1}{\Pi_2}. \tag{18.33}$$

В том случае, когда одна или обе исходные стороны b_1 и b_2 измерены непосредственно и из уравнивания определяют поправки (b_1) и (b_2) в их длины, базисное условное уравнение (18.30) следует дополнить этими поправками с соответствующими коэффициентами при них. Тогда для сети с двумя измеренными базисными сторонами b_1 и b_2 (рис. 118) вместо

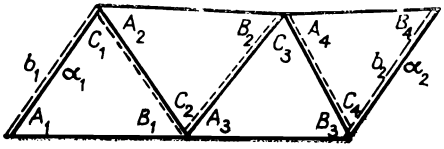


Рис. 118. Цепочка треугольников между измеренными базисами и азимутами

(18.30) получим базисное условное уравнение в следующем виде:

$$\operatorname{ctg} A_1'(A_1)+\operatorname{ctg} A_2'(A_2)+\operatorname{ctg} A_3'(A_3)+$$
$$+\operatorname{ctg} A_4'(A_4)-\operatorname{ctg} B_1'(B_1)-\operatorname{ctg} B_2'(B_2)-$$
$$-\operatorname{ctg} B_3'(B_3)-\operatorname{ctg} B_4'(B_4)+\frac{\rho''}{b_1'}(b_1)-\frac{\rho''}{b_2'}(b_2)+\frac{\rho''}{b_2'}\omega=0, \tag{18.34}$$

где свободный член ω вычисляется по формуле (18.29).

При уравнивании триангуляции по направлениям поправки в углы выражают через поправки в направления.

Условия дирекционных углов возникают при наличии в сети избыточного числа исходных дирекционных углов (непосредственно измеренных или вычисленных по координатам исходных пунктов). При составлении условия дирекционных углов выделяют в сети цепочку треугольников, соединяющих исходные дирекционные углы α_1 и α_2 по наикратчайшему пути (см. рис. 116, 118).

Дирекционный угол α_2, вычисленный по уравненным углам треугольников относительно дирекционного угла α_1, должен быть равен заданному значению его. В том случае, когда дирекционные углы α_1 и α_2 заданы координатами исходных пунктов (см. рис. 116) и, следовательно, их поправки (α_1) и (α_2) равны нулю, должно соблюдаться равенство

$$\alpha_2=\alpha_1-C_1+C_2-C_3+C_4\pm(n-1)\,180^\circ, \tag{18.35}$$

где n — число промежуточных углов C, участвующих в передаче дирекционного угла по ходовой линии, проходящей через вершины промежуточных углов (пунктир на рис. 118).

Пусть $C=C'+(C)$, где (C) — поправки в измеренные углы C'. Подставив эти выражения в равенство (18.35), получим для рассматриваемой сети (см. рис. 116) следующее условное уравнение дирекционных углов

$$-(C_1)+(C_2)-(C_3)+(C_4)+\omega=0, \tag{18.36}$$

где

$$\omega=\alpha_2'-\alpha_2$$

и

$$\alpha_2' = \alpha_1 - C_1' + C_2' - C_3' + C_4' \pm (n-1)\,180°. \qquad (18.37)$$

При вставке пункта в жесткий угол (см. рис. 117) условие дирекционных углов (суммы углов) имеет вид

$$(C_1) + (C_2) + \omega = 0, \qquad (18.38)$$

где

$$\omega = C_1' + C_2' - (\alpha_2 - \alpha_1). \qquad (18.39)$$

Если дирекционные углы α_1 и α_2 на концах цепи треугольников получены из непосредственных измерений (см. рис. 118) и поправки (α_1) и (α_2) в их значения определяют из уравнивания сети, то условное уравнение дирекционных углов в данном случае будет следующим:

$$-(C_1) + (C_2) - (C_3) + (C_4) + (\alpha_1) - (\alpha_2) + \omega = 0, \qquad (18.40)$$

где свободный член ω вычисляется по формуле (18.37).

При уравнивании триангуляции по направлениям поправки в углы следует выразить через поправки в направления.

Условные уравнения абсцисс и ординат. Условные уравнения координат (абсцисс и ординат) возникают только в том случае, если в сети триангуляции имеются раздельные группы исходных (жестких) пунктов, удаленные одна от другой не менее чем на две определяемые стороны. Отдельная группа исходных пунктов может состоять либо из одного такого пункта, либо из нескольких смежных пунктов. Например в одну группу исходных пунктов входят два смежных пункта A и B, а в другую, удаленную от первой на две определяемые стороны BC и CD — один исходный пункт D (рис. 119).

При составлении условий координат в сети выделяют цепочку треугольников, соединяющую ближайшие пункты разных групп исходных пунктов, и в ней намечают ходовую линию,

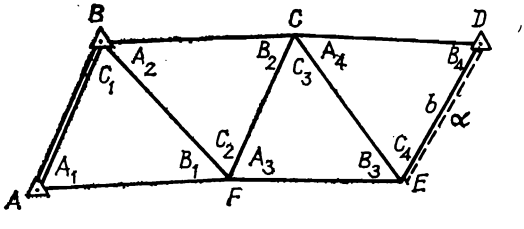


Рис. 119. Цепочка треугольников между тремя исходными пунктами и измеренной стороной и азимутом.

проходящую через вершины промежуточных углов треугольников.

В уравненной сети должны соблюдаться равенства

$$x_D = x_B + \sum_B^D \Delta x; \qquad y_D = y_B + \sum_B^D \Delta y. \tag{18.41}$$

Значения уравненных приращений координат Δx и Δy, передаваемых по ходовой линии $BFCED$, представим как суммы

$$\Delta x = \Delta x' + (\Delta x); \qquad \Delta y = \Delta y' + (\Delta y), \tag{18.42}$$

где $\Delta x'$ и $\Delta y'$ — приращения координат, вычисленные с использованием измеренных углов A', B', C' в треугольниках; (Δx), (Δy) — поправки в их значения из уравнивания сети.

Для получения условий координат в окончательном виде поправки (Δx) и (Δy) в приращения координат следует выразить через поправки (A), (B), (C) в измеренные углы в треугольниках. Выполнив эти преобразования, получим для случая уравнивания триангуляции по углам:

условное уравнение абсцисс

$$\Sigma (x_n - x) \operatorname{ctg} A' (A) - \Sigma (x_n - x) \operatorname{ctg} B' (B) - \\ - \Sigma (y_n - y) (\pm C) + 206{,}265 \omega_x = 0; \tag{18.43}$$

условное уравнение ординат

$$\Sigma (y_n - y) \operatorname{ctg} A' (A) - \Sigma (y_n - y) \operatorname{ctg} B' (B) + \\ + \Sigma (x_n - x) (\pm C) + 206{,}265 \omega_y = 0. \tag{18.44}$$

где

$$\omega_x = x_n' - x_n; \qquad \omega_y = y_n' - y_n. \tag{18.45}$$

В этих уравнениях: $(x_n - x)$ и $(y_n - y)$ — разности координат (в км) последнего пункта D ходовой линии и координат текущих пунктов ходовой линии, включая исходный пункт B в начале этой линии; (A) и (B) — поправки в связующие углы A и B в треугольниках, при этом измеренный угол B лежит против исходной, а угол A — против определяемой в треугольнике стороны; (C) — поправки в промежуточные углы C, при этом поправка (C) имеет знак плюс $(+C)$, если угол C расположен слева от ходовой линии, и знаком минус $(-C)$, если справа от нее, идя от начального пункта B этой линии к конечному пункту D.

Свободные члены ω_x и ω_y (в м) находят по формулам (18.45) как разности вычисленных по измеренным углам

координат x_n', y_n' и заданных координат x, y конечного пункта D ходовой линии.

При уравнивании триангуляции по направлениям поправки в углы выражают через поправки в измеренные направления.

§ 129. ЧИСЛО НЕЗАВИСИМЫХ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТРИАНГУЛЯЦИИ

При уравнивании триангуляции по углам для определения k вновь определяемых пунктов необходимо измерить $2k$ необходимых углов. При уравнивании триангуляции по направлениям следует измерить $(2k+t)$ необходимых направлений, где t — число пунктов, на которых выполнены угловые измерения. При этом $t \leqslant n$, где n — число всех пунктов в сети (исходных и определяемых).

Общее число S независимых условных уравнений в геодезической сети равно числу избыточных измерений в ней, т. е. равно разности числа всех измерений в сети и минимального числа измерений, необходимых для вычисления координат всех определяемых пунктов. Число S независимых условных уравнений находится по формулам:

при уравнивании триангуляции по направлениям

$$S_н = D + k_s + k_\alpha - (2k+t), \tag{18.46}$$

при уравнивании триангуляции по углам

$$S_y = N + k_s + k_\alpha - 2k, \tag{18.47}$$

где D — число измеренных направлений, k_s и k_α — число измеренных непосредственно (не вычисленных по координатам) базисных сторон и азимутов сторон соответственно; k — число определяемых пунктов; t — число пунктов, на которых выполнены угловые измерения; N — число измеренных углов в сети. В том случае, когда в сети непосредственно не измерялись ни базисные стороны, ни азимуты сторон (см. рис. 116) принимают $k_s = k_\alpha = 0$.

Число независимых условных уравнений по видам определяют следующим образом.

Число условий горизонта при уравнивании триангуляции по углам равно числу q полюсов центральных систем, на которых выполнены угловые измерения, т. е.

$$q = N + t - D. \tag{18.48}$$

При уравнивании триангуляции по направлениям условия горизонта не возникают.

Число f независимых условий фигур при уравнивании сети по направлениям найдем по формуле

$$f = D - t - p + 1, \tag{18.49}$$

а при уравнивании сети по углам

$$f = N - p - q + 1, \tag{18.50}$$

где p — число всех сторон в сети (исходных и определяемых).

Число условий фигур не зависит от того, как уравнивается сеть — по углам или по направлениям. Поэтому формулы (18.49) и (18.50) дают тождественные результаты, что может служить контролем вычислений.

Число с полюсных условных уравнений равно числу избыточных сторон в сети. Определяется оно по формуле

$$c = p - 2n + 3, \tag{18.51}$$

где p — число всех сторон в сети; n — число всех пунктов в ней (исходных и определяемых). В число p входят и условия проекций, если они возникают в сети.

Число r_δ *базисных условий* на единицу меньше общего числа k_δ^* исходных сторон, которое равно сумме числа k_s непосредственно измеренных базисных сторон и числа k_b исходных (жестких) сторон, вычисленных по координатам исходных пунктов, т. е. при $k_\delta^* = k_s + k_b$, будем иметь

$$r_\delta = k_\delta^* - 1. \tag{18.52}$$

Число условий дирекционных углов на единицу меньше общего числа k_g^* исходных дирекционных углов, которое равно сумме числа k_α непосредственно измеренных азимутов и числа k_g дирекционных углов сторон, вычисленных по координатам исходных пунктов, т. е. при $k_g^* = k_\alpha + k_g$ получим

$$r_g = k_g^* - 1. \tag{18.53}$$

Число $r_{x,\,y}$ *условий абсцисс и ординат* вычисляется по формуле

$$r_{x,\,y} = 2(k_{x,\,y} - 1), \tag{18.54}$$

где $k_{x,\,y}$ — число раздельных групп исходных пунктов, отстоящих одна от другой не менее чем на две определяемые из уравнивания стороны триангуляции.

Формулы (18.51)—(18.54) применяются при уравнивании триангуляции как по углам, так и по направлениям.

В качестве примера определим число независимых условных уравнений, возникающих в несвободной сети триангуляции (рис. 120). В этой сети число всех пунктов $n=9$; число определяемых пунктов $k=6$; число всех сторон $p=17$; число пунктов, на которых выполнены угловые измерения, $t=9$; измерено: направлений $D=34$, базисных сторон $k_s = 1\,(b_2)$, азимутов $k_\alpha = 1\,(\alpha_2)$; число исходных сторон, вычисленных по координатам $k_b = 1\,(b_1)$; число исходных дирекционных углов, вычисленных по

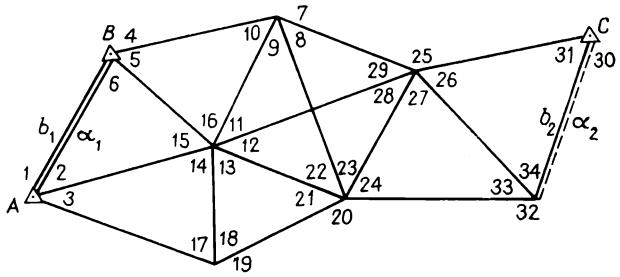


Рис. 120. Схема сети триангуляции

координатам $k_g=1(\alpha_1)$; число раздельных групп исходных пунктов $k_{x,y}=2$ (в первую группу входят смежные пункты A и B, связанные между собой исходной (жесткой) стороной, а во вторую группу — пункт C). В данной сети триангуляции возникают следующие независимые условные уравнения, число которых при уравнивании сети по направлениям равно:

всего

$$S_н = D + k_s + k_\alpha - (2k + t) = 34 + 1 + 1 - (2 \times 6 + 9) = 15;$$

фигур

$$f = D - t - p + 1 = 34 - 9 - 17 + 1 = 9;$$

полюсных

$$c = p - 2n + 3 = 17 - 2 \times 9 + 3 = 2;$$

базисных

$$r_\delta = k_\delta^* - 1 = 1 + 1 - 1 = 1;$$

дирекционных углов

$$r_g = k_g^* - 1 = 1 + 1 - 1 = 1;$$

абсцисс и ординат

$$r_{x,y} = 2(k_{x,y} - 1) = 2(2 - 1) = 2.$$

В каждом геодезическом четырехугольнике с измеренными на всех его вершинах углами или направлениями возникает по четыре независимых условия: три условия фигур и одно полюсное. В центральной системе возникает условие полюсное, условие горизонта (при уравнивании углов) и условия фигур.

В данной сети (см. рис. 120) независимые условия фигур возникают: три в геодезическом четырехугольнике и по одному в остальных шести неперекрывающихся треугольниках. Полюсные условия возникают по одному в центральной системе и в геодезическом четырехугольнике. Базисные условия возни-

кают между исходной стороной b_1, вычисляемой по координатам исходных пунктов A и B, и измеренной базисной стороной b_2. Условие дирекционных углов возникает между заданным дирекционным углом α_1 исходной стороны b_1 и измеренным дирекционным углом α_2 базисной стороны b_2. Условия координат возникают между исходными пунктами B и C.

В свободной сети триангуляции исходный пункт, координаты которого принимают за неизменные, в число определяемых пунктов не входит, это необходимо иметь в виду при определении общего числа независимых условных уравнений. В несвободной сети триангуляции всегда имеется больше одного исходного пункта с заданными (неизменными) геодезическими координатами.

При уравнивании данной сети триангуляции (см. рис. 120) по углам общее число условных уравнений найдем по формуле (18.47). В этой сети имеем: $N=26$, $k_s=1$, $k_\alpha=1$, $k=6$. Подставив эти данные в формулу (18.47), получим $S_y=26+1+1-12=16$. При уравнивании триангуляции по углам общее число независимых условных уравнений больше чем при уравнивании ее по направлениям, причем на число условий горизонта. В данной сети число условий горизонта $q=N+t-D=26+9-34=1$. Возникает оно при полюсе центральной системы. Остальные условия те же, что и при уравнивании сети по направлениям.

§ 130. УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТРИЛАТЕРАЦИИ

Общее число независимых условных уравнений в свободных и несвободных сетях трилатерации с измеренными в них длинами сторон и азимутами ряда сторон может быть вычислено по формуле

$$S=N+k_\alpha-2k, \tag{18.55}$$

где N — число измеренных сторон, k_α — число измеренных азимутов (измеренных, но не вычисленных по координатам исходных пунктов); k — число вновь определяемых пунктов. Следует подчеркнуть, что в свободной сети трилатерации исходный пункт с заданными координатами к числу определяемых пунктов не относится.

Простейшими геометрическими фигурами в сети трилатерации, в которых возникает только по одному условному уравнению, является геодезический четырехугольник и центральная система. В треугольнике с измеренными сторонами условные уравнения не возникают, так как даже в случае грубых ошибок измерения длин сторон, например, на четверть длины, треугольник все равно образуется и сумма вычисленных в нем углов всегда равна точно 180°.

Число независимых условных уравнений в сети трилатерации несравненно меньше, чем в аналогичной по схеме построения сети триангуляции, так как в трилатерации число избыточно измеренных величин гораздо меньше чем в триангуляции. Например, в геодезическом четырехугольнике с измеренными углами возникает четыре независимых условных уравнения, а с измеренными сторонами всего лишь одно.

Виды независимых условных уравнений. *В свободной сети* трилатерации, имеющей один исходный пункт, измеренные длины сторон треугольников и азимуты некоторых из них могут возникать условные уравнения трех видов: условия геодезических четырехугольников, условия центральных систем и условия азимутов (дирекционных углов).

В несвободной сети трилатерации могут возникать те же условия, что и в свободной сети; кроме того, при наличии избыточных исходных пунктов с заданными координатами могут возникнуть условия координат (абсцисс и ординат).

Условные уравнения в сети трилатерации записывают сначала в угловой форме (как в триангуляции), а затем поправки в углы выражают через поправки в стороны, используя дифференциальные формулы (18.59); наконец выполняют приведение подобных членов при одноименных поправках сторон и получают условные уравнения в окончательном виде. При этом поправки в длины исходных (жестких) сторон, которые не подлежат изменению, принимают равными нулю.

Условное уравнение геодезического четырехугольника с измеренными длинами сторон. Суть этого условия состоит в том, что в геодезическом четырехугольнике с вершинами *1*, *2*, *3*, *4* (рис. 121) сумма углов α_1 и α_2, вычисленных при вершине *1* с использованием уравненных сторон треугольников *123* и *134*, должна быть равна углу α_3, вычисленному по уравненным сторонам третьего треугольника *124*, т. е. должно соблюдаться условие

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \tag{18.56}$$

Пусть α' — углы, вычисленные с использованием измеренных длин сторон, а (α) — поправки в их значения из уравнивания сети. Тогда условие (18.56) запишется в следующем виде

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) - (\alpha_3) + \omega = 0, \tag{18.57}$$

где

$$\omega = \alpha'_1 + \alpha'_2 - \alpha'_3. \tag{18.58}$$

В треугольнике ABC с измеренными сторонами a, b, c

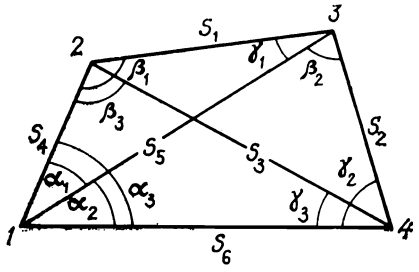


Рис. 121. Геодезический четырехугольник с измеренными сторонами

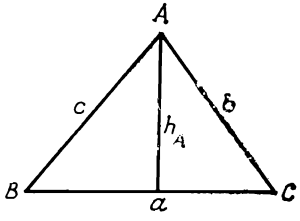


Рис. 122. Треугольник с измеренными длинами сторон

(рис. 122) углы A, B, C можно вычислить используя теорему косинусов, согласно которой, например, для стороны a имеем

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

откуда

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

На основе данной теоремы можно получить формулы, устанавливающие связь между поправками (A), (B), (C) в углы и поправками (a), (b), (c) в длины противолежащих сторон в треугольнике:

$$(A'') = \frac{\rho''}{h_A}[(a) - (b)\cos C - (c)\cos B];$$

$$(B'') = \frac{\rho''}{h_B}[(b) - (a)\cos C - (c)\cos A]; \qquad (18.59)$$

$$(C'') = \frac{\rho''}{h_C}[(c) - (a)\cos B - (b)\cos A],$$

где $\rho'' = 206\,265$; h_j — высота треугольника, опущенная на противолежащую сторону из вершины угла j ($j = A, B, C$), поправка которого определяется.

Высоты треугольника ABC (см. рис. 122) при его вершинах вычисляют по формулам:

$$h_A = c\sin A = b\sin C; \qquad h_B = a\sin C = c\sin A;$$
$$h_C = a\sin B = b\sin A. \qquad (18.60)$$

При использовании обозначений углов и сторон (см. рис. 121) условное уравнение (18.57) геодезического четырех-

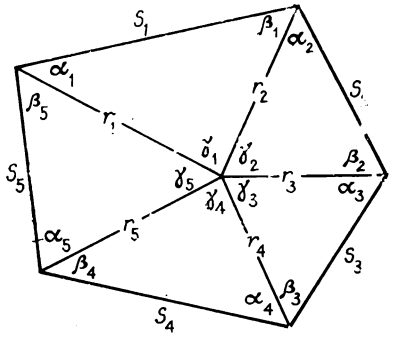


Рис. 123. Центральная система с измеренными сторонами

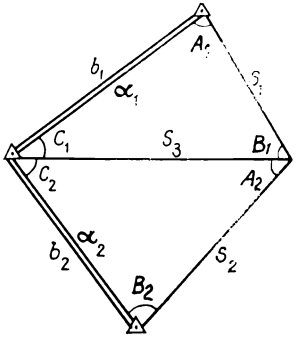


Рис. 124. Схема линейной засечки

угольника после замены по формулам (18.59) поправок в углы поправками в длины сторон и приведения подобных членов примет окончательный вид

$$\lambda_1(s_1)+\lambda_2(s_2)+\lambda_3(s_3)+\lambda_4(s_4)+\lambda_5(s_5)+\lambda_6(s_6)+\omega=0, \qquad (18.61)$$

где

$$\lambda_1=\frac{\rho''}{h_{\alpha_1}}; \qquad \lambda_2=\frac{\rho''}{h_{\alpha_2}}; \qquad \lambda_3=\frac{\rho''}{h_{\alpha_3}};$$

$$\lambda_4=+\left(\frac{\rho''}{h_{\alpha_3}}\cos\beta_3'-\frac{\rho''}{h_{\alpha_1}}\cos\beta_1'\right);$$

$$\lambda_5=-\left(\frac{\rho''}{h_{\alpha_1}}\cos\gamma_1'+\frac{\rho''}{h_{\alpha_2}}\cos\beta_2'\right);$$

$$\lambda_6=\left(\frac{\rho''}{h_{\alpha_3}}\cos\gamma_3'-\frac{\rho''}{h_{\alpha_2}}\cos\gamma_2'\right).$$

Условное уравнение центральной системы с измеренными сторонами. Суть этого условия заключается в том, что сумма углов при полюсе центральной системы, вычисленных с использованием уравненных длин сторон треугольников, должна быть равна 360°. Для центральной системы (рис. 123) это условное уравнение запишем сначала в угловой форме

$$(\gamma_1)+(\gamma_2)+(\gamma_3)+(\gamma_4)+(\gamma_5)+\omega=0, \qquad (18.62)$$

где

$$\omega=\Sigma\gamma_i'-360°.$$

Углы γ' вычисляют с использованием измеренных сторон треугольников.

С учетом обозначений, принятых на рис. 122, условие центральной системы (18.62) после замены по формулам (18.59) поправок в углы поправками в стороны примет окончательный вид

$$\lambda_1^0(s_1)+\lambda_2^0(s_2)+\lambda_3^0(s_3)+\lambda_4^0(s_4)+\lambda_5^0(s_5)+$$
$$+\lambda_1(r_1)+\lambda_2(r_2)+\lambda_3(r_3)+\lambda_4(r_4)+\lambda_5(r_5)+\omega=0, \qquad (18.63)$$

где

$$\lambda_i^0=\frac{\rho''}{h_{\gamma_i}}; \qquad \lambda_i=-\left(\frac{\cos\alpha_i}{h_{\gamma_i}}+\frac{\cos\beta_{i-1}}{h_{\gamma_{i-1}}}\right).$$

При $i=1$

$$\lambda_1=-\left(\frac{\cos\alpha_1}{h_{\gamma_1}}+\frac{\cos\beta_n}{h_{\gamma_n}}\right),$$

где n — порядковый номер последнего треугольника в центральной системе (в данном случае $n=5$).

Условия дирекционных углов. Они возникают при наличии в сети избыточного числа исходных дирекционных углов, в том числе непосредственно измеренных и вычисленных по координатам исходных пунктов. Условное уравнение дирекционных углов записывают сначала в угловой форме, т. е. как в триангуляции. Затем по формулам (18.59) поправки в углы заменяют поправками в стороны, выполняют приведение подобных членов при одноименных поправках и получают условное уравнение в окончательном виде.

В качестве примера составим условное уравнение дирекционных углов в сети (рис. 124) с заданными дирекционными углами α_1 и α_2.

В угловой форме это условие имеет вид

$$(C_1)+(C_2)+\omega=0, \qquad (18.64)$$

где

$$\omega=C_1'+C_2'-(\alpha_2-\alpha_1),$$

(C_1) и (C_2) — поправки в углы C_1' и C_2', которые вычисляются с использованием измеренных сторон треугольников.

Заменив в (18.64) по формулам (18.59) поправки (C) в углы поправками (s) в стороны и приняв во внимание, что поправки (b_1) и (b_2) в исходные стороны b_1 и b_2 равны нулю, получим условное уравнение дирекционных углов в окончательном виде:

$$\frac{\rho''}{h_{C_1}}(s_1)+\frac{\rho''}{h_{C_2}}(s_2)-\left(\frac{\rho''}{h_{C_3}}\cos B_1+\frac{\rho''}{h_{C_2}}\cos A_2\right)(s_3)+\omega=0. \qquad (18.65)$$

Базисные условия в сетях трилатерации не возникают, так как ко всем непосредственно измеренным сторонам треугольников определяются поправки из уравнивания, в результате чего данные условия автоматически выполняются.

Условия координат (абсцисс и ординат) возникают в тех же случаях, как в триангуляции, когда имеются раздельные группы исходных пунктов, удаленные одна от другой не менее чем на две измеренные стороны. Координатные условия записывают сначала в угловой форме (как в триангуляции при уравнивании ее по углам), а затем поправки углов треугольников выражают через поправки к длинам сторон и получают в окончательном виде эти уравнения.

Число независимых условных уравнений

Общее число S независимых условных уравнений в сети трилатерации находят по формуле (18.55):

$$S = N + k_\alpha - 2k.$$

Число c условных уравнений геодезических четырехугольников и уравнений центральных систем вместе взятых равно числу избыточных сторон в сети, т. е.

$$c = p - 2n + 3,$$

где p — число всех сторон (исходных и измеренных), n — число всех пунктов в сети (исходных и определяемых).

Число r_g условий дирекционных углов определяется по формуле

$$r_g = k_g^* - 1,$$

где $k_g^* = k_\alpha + k_g$ равно сумме числа k_α непосредственно измеренных азимутов и числа k_g дирекционных углов сторон, вычисленных по координатам исходных пунктов.

Число $r_{x,y}$ условий абсцисс и ординат равно

$$r_{x,y} = 2(k_{x,y} - 1),$$

где $k_{x,y}$ — число раздельных групп исходных пунктов, удаленных одна от другой не менее чем на две измеренные (не вычисленные по координатам) стороны.

§ 131. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Прежде чем приступить к уравниванию геодезической сети (триангуляции, трилатерации, линейно-угловой и т. п.) необходимо убедиться, что измерения в ней выполнены качественно и по точности удовлетворяют предъявляемым к ним тре-

бованиям. Для этого вычисляют свободные члены всех без исключения условных уравнений (зависимых и независимых) и сравнивают их значения с установленными допусками.

Получим сначала общую формулу для расчета допустимой величины свободных членов условных уравнений.

Условное уравнение любого вида запишем в общем виде

$$a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n+\omega=0. \qquad (18.66)$$

Составим нормальное уравнение коррелат

$$[aa]\,k+\omega=0,$$

отсюда найдем

$$k=-\frac{\omega}{[aa]}.$$

Поправки v_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ равны

$$v_i=a_ik=-\frac{\omega}{[aa]}a_i.$$

Среднюю квадратическую ошибку единицы веса найдем по формуле

$$\mu=\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{r}},$$

где r — число условных уравнений.

Приняв веса измеренных величин $p=1$ и учитывая, что в данном случае $r=1$, напишем

$$\mu^2=\Sigma v_i^2=\frac{\omega^2}{[aa]^2}(a_1a_1+a_2a_2+\ldots+a_na_n)=\frac{\omega^2}{[aa]},$$

откуда найдем среднюю квадратическую величину

$$\omega=\mu\sqrt{[aa]}.$$

Перейдя к предельному значению, получим искомую формулу

$$\omega_{\text{пред}}=t\mu\sqrt{[aa]}, \qquad (18.67)$$

где параметр t зависит от доверительной вероятности, а следовательно, и от числа n измерений (числа невязок ω однородных условных уравнений в сети); ошибка μ устанавливается действующими инструкциями для каждого вида измерений и в зависимости от класса геодезической сети.

Ряды измерений, по которым оценивают параметр t, могут быть разными по величине. Так, например, число треугольников, для которых устанавливается предельная величина невязки, в одной сети может быть порядка 10—15, а в другой гораздо больше — порядка 200 и более.

Таблица 48

n	t	n	t	n	t	n	t
11	2,00	17	2,17	30	2,39	75	2,71
13	2,07	20	2,24	40	2,49	100	2,81
15	2,13	25	2,33	50	2,58	200	3,02

Параметр t при таких значениях n согласно приближенному критерию Шовенэ находится в интервале 2,0—3,0 (табл. 48).

В современных инструкциях по построению государственных геодезических сетей принято в среднем $t=2{,}5$.

Ниже даны формулы для вычисления предельных значений свободных членов конкретных условных уравнений.

Сети триангуляции

1. Условия фигур и горизонта

$$\omega_{доп} = 2{,}5m'' \sqrt{n}. \tag{18.68}$$

2. Полюсные условия

$$\omega_{доп} = 2{,}5m'' \sqrt{\Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta}. \tag{18.69}$$

3. Базисные условия (в м)

$$\omega_{доп} = 2{,}5 \sqrt{\left(\frac{m''}{\rho''} b_2\right)^2 \Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta + m_{b_1}^2 + m_{b_2}^2}. \tag{18.70}$$

4. Условия дирекционных углов

$$\omega_{доп} = 2{,}5 \sqrt{nm''^2 + m_{\alpha_1}^2 + m_{\alpha_2}^2}. \tag{18.71}$$

5. Условия абсцисс и ординат (в м)

$$\omega_{x(доп)} = 2{,}5 \sqrt{(m''/\rho'')^2 \cdot 10^6 [a_x a_x] + m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2}. \tag{18.72}$$

$$\omega_{y(доп)} = 2{,}5 \sqrt{(m''/\rho'')^2 \cdot 10^6 [a_y a_y] + m_{y_1}^2 + m_{y_2}^2}. \tag{18.73}$$

В формулах (18.68—18.73) приняты следующие обозначения: m'' — средняя квадратическая ошибка измерения углов; n — число углов в условном уравнении; $\Sigma \operatorname{ctg}^2 \beta$ — сумма квадратов котангенсов связующих углов в условном уравнении; b_1 и b_2 — длины начальной и конечной базисных (исходных) сторон в условном уравнении, а m_{b_1} и m_{b_2} — их средние квадратические ошибки; m_{α_1} и m_{α_2} — средние квадратические ошибки

дирекционных углов α_1 и α_2 в условном уравнении; $\rho''=206\,265$; $[a_x a_x]$ и $[a_y a_y]$ — суммы квадратов коэффициентов при поправках (A), (B), (C) в углы в условных уравнениях абсцисс и ординат соответственно; m_{x_i} и m_{y_i} — средние квадратические ошибки абсцисс и ординат исходных пунктов.

Сети трилатерации

1. Условия геодезических четырехугольников и центральных систем

$$\omega_{\text{доп}} = 2{,}5 m_{\bar{s}} \sqrt{\Sigma\lambda^2}, \tag{18.74}$$

где $m_{\bar{s}}$ — средняя квадратическая ошибка измерения длин сторон; $\Sigma\lambda^2$ — сумма квадратов коэффициентов в условном уравнении при поправках (s) в измеренные длины сторон.

Средняя величина $m_{\bar{s}}$ средней квадратической ошибки измерения сторон в сети трилатерации может быть вычислена по формуле

$$m_{\bar{s}} = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{\omega_i^2}{(\Sigma\lambda^2)_i}},$$

где k — число условных уравнений центральных систем и условных уравнений геодезических четырехугольников вместе взятых; ω_i — свободные члены условных уравнений; $(\Sigma\lambda^2)$ — суммы квадратов коэффициентов при поправках (s) в измеренные длины сторон в этих уравнениях; следует отметить, что ошибка $m_{\bar{s}}$ относится к сторонам средней длины, т. е. к $\bar{s}=\Sigma s/n$.

2. Условия дирекционных углов

$$\omega_{\text{доп}} = 2{,}5 \sqrt{[\lambda\lambda] m_{\bar{s}}^2 + m_{\alpha_1}^2 + m_{\alpha_2}^2}, \tag{18.75}$$

где $[\lambda\lambda]$ — сумма квадратов коэффициентов в условном уравнении (18.65) при поправках (s) в измеренные длины сторон; $m_{\bar{s}}$ — средняя величина средней квадратической ошибки измерения сторон в сети трилатерации; m_{α_1} и m_{α_2} — средние квадратические ошибки исходных дирекционных углов α_1 и α_2.

3. Условия абсцисс и ординат

$$\omega_{x(\text{доп})} = 2{,}5 \sqrt{[a_x a_x] m_{\bar{s}}^2 + m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2} \tag{18.76}$$

$$\omega_{y(\text{доп})} = 2{,}5 \sqrt{[a_y a_y] m_{\bar{s}}^2 + m_{y_1}^2 + m_{y_2}^2}, \tag{18.77}$$

где $[a_x a_x]$ и $[a_y a_y]$ — суммы квадратов коэффициентов при поправках (s) в длины сторон треугольников в условных урав-

нениях абсцисс и ординат соответственно: $m_{x_{1,2}}$ и $m_{y_{1,2}}$ — средние квадратические ошибки координат исходных пунктов.

Если свободные члены каких-либо условных уравнений превышают установленные допуски, необходимо выявить причины этих отклонений и устранить их.

§ 132. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

Составив все независимые условные уравнения, возникающие в геодезической сети, запишем их в матричной форме

$$AV + W = 0, \tag{18.78}$$

где

$$A\,(r \times n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix};$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix}; \qquad W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ W_d \end{bmatrix}.$$

A — прямоугольная матрица коэффициентов условных уравнений, число которых равно r; V — вектор-столбец поправок в измеренные с весами p величины, число которых равно n; W — вектор-столбец свободных членов условных уравнений.

От условных уравнений (18.78) перейдем к системе нормальных уравнений коррелат

$$ACA^{\mathrm{T}}K + W = 0, \tag{18.79}$$

где C — диагональная матрица обратных весов $q = 1/p$ измеренных величин; A^{T} — транспонированная матрица A коэффициентов условных уравнений; K — вектор-столбец коррелат нормальных уравнений; остальные обозначения указаны ниже.

Нормальные уравнения (18.79) перепишем в виде

$$NK + W = 0, \tag{18.80}$$

где матрица коэффициентов нормальных уравнений равна

$$N = ACA^{\mathrm{T}}.$$

Умножив уравнение (18.80) слева на обратную матрицу $N^{-1}=Q$, получим вектор K искомых коррелат

$$K=-QW, \tag{18.81}$$

где Q — матрица весовых коэффициентов:

$$Q=N^{-1}=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{2r} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Q_{r1} & Q_{r2} & Q_{rr} \end{pmatrix}. \tag{18.82}$$

Вектор поправок измеренных величин найдем по формуле

$$V=CA^{\mathrm{T}}K. \tag{18.83}$$

Введя в измеренные величины поправки v, найденные по формуле (18.83), получим их уравненные значения, используя которые выполним окончательное решение треугольников, вычислим уравненные приращения координат и окончательные координаты определяемых пунктов по формулам

$$x_3=x_1+s_{13}\cos\alpha_{13}=x_2+s_{23}\cos\alpha_{23},$$
$$y_3=y_1+s_{13}\sin\alpha_{13}=y_2+s_{23}\sin\alpha_{23}.$$

Оценка точности функций уравненных элементов. В том случае, когда требуется вычислить среднюю квадратическую ошибку какого-либо уравненного элемента F геодезической сети, например, ошибку дирекционного угла α или длины s какой-либо стороны, сначала следует представить этот элемент F как функцию уравненных величин. Затем надо получить приращение ΔF, т. е. составить весовую функцию для оцениваемого элемента ($\Delta F=f_\alpha$; $\Delta F=f_s$). Весовую функцию $f_\alpha(f_s)$ затем присоединяют к системе условных уравнений и с учетом ее составляют нормальные уравнения. При решении их по схеме Гаусса обратный вес оцениваемого элемента вычисляют по формуле

$$\frac{1}{P_F}=\left[\frac{ff}{p}\right]-\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{bf\cdot 1}{p}\right]^2}{\left[\frac{bb\cdot 1}{p}\right]}-\cdots-\frac{\left[\frac{\nu f\cdot r-1}{p}\right]^2}{\left[\frac{\nu\nu\cdot r-1}{p}\right]},$$

где f — частные производные от функции F по каждому независимо измеренному аргументу; p — веса измеренных величин; a, b, ..., ν — коэффициенты условных уравнений; r — число условных уравнений в сети.

Обратный вес может быть вычислен и с использованием обратной матрицы (18.82) весовых коэффициентов.

Средняя квадратическая ошибка любого уравненного элемента равна

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{rP_F}},$$

где средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{r}};$$

v — поправки из уравнения в измеренные с весами p величины; r — число условных уравнений, равное числу избыточных измерений в сети.

Примеры уравнивания сетей триангуляции и трилатерации коррелатным способом, включая оценку точности уравненных элементов, даны в Практикуме по высшей геодезии [23].

Глава 19

УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

§ 133. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ УРАВНИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ. СООТНОШЕНИЕ ВЕСОВ ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН

В связи с широким внедрением ЭВМ в геодезическое производство параметрический способ уравнивания геодезических сетей стал преобладающим, поскольку линейные уравнения поправок, составляемые на пунктах сети, имеют одинаковую структуру. Это дает возможность составлять универсальные программы уравнивания на ЭВМ геодезических сетей, в том числе триангуляции, трилатерации, линейно-угловых, комбинированных и т. п. При параметрическом способе задача уравнивания решается под тем же условием $\Sigma pv^2 = \min$, что и при использовании коррелатного способа.

Для параметрического способа уравнивания характерна следующая последовательность уравнительных вычислений. Сначала с возможно большей точностью решают треугольники, определяя в сети триангуляции длины сторон, а в сети трилатерации углы треугольников. Затем, также с возможно большей точностью, вычисляют координаты всех определяемых пунктов. Далее, используя полученные координаты, по всем сторонам сети решают обратные геодезические задачи и с высокой точностью находят длины и дирекционные углы сторон, соответствующие этим координатам, включая и координаты исходных пунктов. На следующем этапе вычислений составляют уравне-

ния поправок для *всех непосредственно измеренных величин:* горизонтальных направлений, измеренных азимутов (дирекционных углов), измеренных расстояний между пунктами. Вес каждого измеренного элемента принимают равным в общем случае $p=c/m^2$. От уравнений поправок с учетом весов переходят к системе нормальных уравнений, из решения которых находят поправки в приближенные координаты определяемых пунктов. Затем вычисляют уравненные координаты пунктов и выполняют контрольные вычисления, исправив предварительно измеренные величины поправками, полученными из уравнивания. Наконец, выполняют оценку точности уравненных элементов сети.

При уравнивании геодезических сетей с разнородным составом измерений (углов, азимутов, длин сторон и т. п.) одним из наиболее ответственных и сложных вопросов является установление точного соотношения весов всех измеренных в сети величин. В общем случае вес измеренной величины вычисляется по формуле

$$p=\frac{c}{m_j^2}=\frac{\mu^2}{m_j^2},$$

где μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса; m_j — средняя квадратическая ошибка измерения j-ой величины. Выбор постоянной $c=\mu^2$ до некоторой степени произволен и определяется удобствами вычислений. Приняв

$$\mu^2=m_N^2=\text{const},$$

где m_N — средняя квадратическая ошибка измеренного направления, получим следующие формулы для вычисления весов измеренных направлений N, азимутов α и длин сторон s:

$$p_N=1; \qquad p_\alpha=\frac{m_N^2}{m_\alpha^2}; \qquad p_s=\frac{m_N^2}{m_s^2}.$$

От того, насколько достоверно будет установлено соотношение эмпирических дисперсий m_N^2, m_α^2 и m_s^2, зависит достоверность результатов уравнивания геодезической сети. При этом следует иметь в виду то, что средние квадратические ошибки m должны быть определены не по внутренней сходимости результатов измерений в приемах, а с учетом совместного влияния как случайных так и систематических ошибок. Наиболее надежные оценки ошибок получают по свободным членам соответствующих условных уравнений.

В сетях триангуляции среднюю квадратическую ошибку

измеренного направления можно вычислить по невязкам ω достаточно большого числа n треугольников:

$$m_N = \frac{m}{\sqrt{2}}, \quad \text{где } m = \sqrt{\frac{\Sigma \omega^2}{3n}}.$$

В сетях трилатерации среднюю величину средней квадратической ошибки измерения сторон можно определить по свободным членам большого числа условных уравнений геодезических четырехугольников и центральных систем

$$m_{\bar{s}} = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_i^2}{(\Sigma\lambda^2)_i}},$$

где ω_i и $(\Sigma\lambda^2)_i$ — соответственно свободный член и сумма квадратов коэффициентов условного уравнения i-й центральной системы или геодезического четырехугольника; k — число свободных членов ω_i.

Практика астрономо-геодезических работ показывает, что средняя квадратическая ошибка определения азимутов на пунктах Лапласа, вычисленная по расхождениям большого числа взаимно обратных азимутов, достаточно близка к реальной величине. Чаще оценку их точности выполняют по расхождениям результатов измерений в приемах и получают значительно преуменьшенную (в 2—3 раза) ошибку по сравнению с ее реальной величиной ($\sim 1{,}1$—$1{,}2''$).

Следует еще раз подчеркнуть, что при уравнивании геодезических сетей поправки необходимо определять во все непосредственно измеренные величины: направления, азимуты и длины сторон, причем с учетом их действительных весов, определению которых надлежит уделять самое серьезное внимание.

§ 134. УРАВНЕНИЯ ПОПРАВОК ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Уравнения поправок направлений

Будем полагать, что в геодезической сети в соответствии с приведенными выше рекомендациями (см. § 133) вычислены приближенные координаты x°, y° всех определяемых пунктов и из решения обратных геодезических задач найдены дирекционные углы α°_{ik} и длины s°_{ik} всех сторон:

$$\operatorname{tg} \alpha^\circ_{ik} = \frac{y^\circ_k - y^\circ_i}{x^\circ_k - x^\circ_i}; \quad s^\circ_{ik} = \frac{x^\circ_k - x^\circ_i}{\cos \alpha^\circ_{ik}} = \frac{y^\circ_k - y^\circ_i}{\sin \alpha^\circ_{ik}}. \tag{19.1}$$

Допустим, что на пункте с номером i измерены направления на пункты $1, 2, 3, \ldots, n$ (рис. 125). Через точку i проведем направление ix, параллельное осевому меридиану зоны проекции

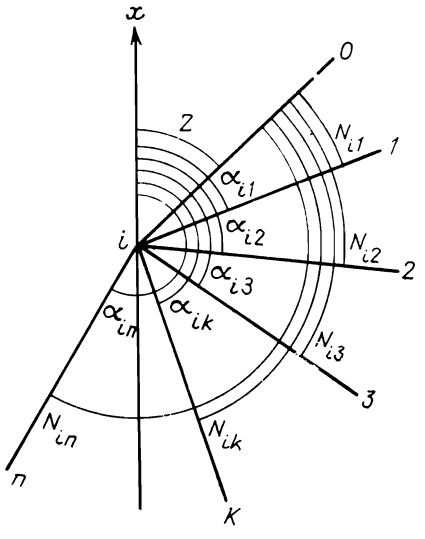


Рис. 125. Схема ориентирования измеренных на пункте направлений относительно осевого меридиана зоны проекции Гаусса — Крюгера

Гаусса-Крюгера, относительно которого отсчитываются дирекционные углы α_{ik}. Проведем направление iO, совпадающее с нулевым диаметром лимба, относительно которого отсчитываются значения измеренных направлений на пункте. Обозначим z угол между направлением ix и направлением iO нулевого диаметра лимба. Угол z принято называть ориентирующим углом, поскольку он ориентирует измеренные на пункте направления относительно осевого меридиана зоны проекции Гаусса — Крюгера.

Для любого измеренного на пункте направления ik примем следующие обозначения:

α_{ik}° — приближенное значение дирекционного угла, вычисленное по координатам пунктов;

$\Delta\alpha_{ik}$ — поправка в дирекционный угол из уравнивания;

$\alpha_{ik}=\alpha_{ik}^{\circ}+\alpha_{ik}$ — уравненный дирекционный угол;

N'_{ik} — измеренное направление, отсчитываемое от нулевого диаметра лимба;

v_{ik} — поправка в направление из уравнивания;

$N_{ik}=N'_{ik}+v_{ik}$ — уравненное направление.

z_0 — приближенное значение ориентирующего угла на пункте;

δz_0 — поправка в ориентирующий угол из уравнивания;

$z=z_0+\delta z_0$ — уравненный ориентирующий угол.

Используя вычисленные дирекционные углы α_{ik}° и измеренные направления N'_{ik}, получим n приближенных значений (по числу направлений) ориентирующего угла:

$$\begin{aligned} z_{i1}&=\alpha_{i1}^{\circ}-N'_{i1};\\ z_{i2}&=\alpha_{i2}^{\circ}-N'_{i2};\\ &\cdots\cdots\\ z_{in}&=\alpha_{in}^{\circ}-N'_{in}. \end{aligned} \qquad (19.2)$$

Найдем среднее на пункте значение ориентирующего угла:

$$z_0=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_{ik}. \qquad (19.3)$$

Используя принятые обозначения (см. рис. 125) напишем для любого направления ik очевидное равенство

$$\alpha_{ik} = \overset{\circ}{\alpha}_{ik} + \Delta\alpha_{ik} = z_0 + \delta z_0 + N'_{ik} + v_{ik}, \tag{19.4}$$

откуда найдем

$$v_{ik} = -\delta z_0 + \Delta\alpha_{ik} + \overset{\circ}{\alpha}_{ik} - N'_{ik} - z_0. \tag{19.5}$$

Нетрудно заметить, что

$$\overset{\circ}{\alpha}_{ik} - N'_{ik} - z_0 = z_{ik} - z_0.$$

Обозначив

$$l_{ik} = z_{ik} - z_0, \tag{19.6}$$

напишем

$$v_{ik} = -\delta z_0 + \Delta\alpha_{ik} + l_{ik}. \tag{19.7}$$

На пункте должно соблюдаться равенство $\Sigma l_{ik} = 0$ для суммы отклонений от среднего арифметического, а также равенство $\Sigma v_{ik} = 0$, что служит контролем вычислений.

Выразим поправку $\Delta\alpha_{ik}$ через δx и δy в приближенные координаты x°, y° пунктов i и k.

Продифференцировав выражение

$$\operatorname{tg}\alpha_{ik} = \frac{y_k - y_i}{x_k - x_i}.$$

по всем переменным и затем перейдя от дифференциалов к конечным приращениям, получим

$$\frac{\Delta\alpha_{ik}}{\rho\cos^2\alpha_{ik}} = \frac{(x_k - x_i)(\delta y_k - \delta y_i) - (y_k - y_i)(\delta x_k - \delta x_i)}{(x_k - x_i)^2}.$$

Учитывая, что

$$(x_k - x_i) = s\cos\alpha_{ik}; \quad (y_k - y_i) = s\sin\alpha_{ik},$$

напишем

$$\Delta\alpha_{ik} = -\rho\frac{\sin\alpha_{ik}}{s}\delta x_k + \rho\frac{\cos\alpha_{ik}}{s}\delta y_k + \rho\frac{\sin\alpha_{ik}}{s}\delta x_i - \rho\frac{\cos\alpha_{ik}}{s}\delta y_i.$$

Подставив $\Delta\alpha_{ik}$ в выражение (19.7), получим уравнение поправок для направления i—k:

$$v_{ik} = -\delta z_0 + \rho\frac{\sin\overset{\circ}{\alpha}_{ik}}{s}\delta x_i - \rho\frac{\cos\overset{\circ}{\alpha}_{ik}}{s}\delta y_i - \rho\frac{\sin\overset{\circ}{\alpha}_{ik}}{s}\delta x_k + \\ + \rho\frac{\cos\overset{\circ}{\alpha}_{ik}}{s}\delta y_k + l_{ik}. \tag{19.8}$$

Уравнение поправок (19.8) запишем, в кратком виде:

$$v_{ik} = -\delta z_0 - a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k + l_{ik}, \tag{19.9}$$

где δz_0 — поправка в ориентирующий угол z_0 на i-ом пункте; ξ_i, η_i, ξ_k, η_k — поправки (в дециметрах) в приближенные координаты x_i°, y_i°, x_k°, y_k° пунктов i и k, т. е.

$$\xi = 10\delta x; \quad \eta = 10\delta y; \tag{19.10}$$

δx и δy — поправки в метрах; a_{ik} и b_{ik} — коэффициенты; l_{ik} — свободный член уравнения поправок.

Коэффициенты a_{ik}, b_{ik} вычисляют по формулам

$$a_{ik} = -20{,}6265\frac{\sin\alpha_{ik}^\circ}{s_{ik}}; \quad b_{ik} = 20{,}6265\frac{\cos\alpha_{ik}^\circ}{s_{ik}}, \tag{19.11}$$

где α_{ik}° — дирекционный угол, s_{ik} — длина стороны ik, км.

При выполнении вычислений на ЭВМ уравнения поправок направлений представляют в следующем виде:

$$v_{ik} = -\delta z_0 - 20626{,}5\frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2}\xi_i - 20626{,}5\frac{\Delta x_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2}\eta_i + \\ + 20626{,}5\frac{\Delta y_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2}\xi_k + 20626{,}5\frac{\Delta x_{ik}}{\Delta x_{ik}^2 + \Delta y_{ik}^2}\eta_k + l_{ik}, \tag{19.12}$$

где $\Delta x_{ik} = x_k^\circ - x_i^\circ$ и $\Delta y = y_k^\circ - y_i^\circ$ — приращения координат, м; ξ и η — поправки, дм.

Свободные члены l_{ik} уравнений поправок вычисляют по формуле

$$l_{ik} = z_{ik} - z_0 \text{ или } l_{ik} = \alpha_{ik}^\circ - R_{ik}^\circ, \tag{19.13}$$

где α_{ik}° — дирекционный угол, вычисленный по приближенным координатам; R_{ik}° — приближенно ориентированное направление:

$$R_{ik}^\circ = N_{ik}' + z_0, \tag{19.14}$$

N_{ik}' — значение измеренного направления; z_0 — средний на i-м пункте ориентирующий угол.

Уравнение поправок v_{ki} для обратного направления k—i, т. е. с определяемого пункта k на определяемый пункт i имеет вид

$$v_{ki} = -\delta z_0 - a_{ki}\xi_k - b_{ki}\eta_k + a_{ki}\xi_i + b_{ki}\eta_i + l_{ki}, \tag{19.15}$$

В уравнениях поправок (19.9) и (19.15), составленных для взаимно обратных направлений, коэффициенты при одноименных неизвестных ξ и η одинаковы попарно по величине и знаку, т. е. $a_{ik} = a_{ki}$ и $b_{ik} = b_{ki}$, что служит контролем вычислений.

В частном случае, когда один или оба пункта на концах стороны являются исходными (поправки ξ и η равны нулю), полное уравнение поправок (19.9) примет более простой вид. Если направление измерено:

с исходного пункта i на определяемый k

$$v_{ik} = -\delta z_0 + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k + l_{ik}; \tag{19.16}$$

с определяемого пункта i на исходный k

$$v_{ik} = -\delta z_0 - a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + l_{ik}; \tag{19.17}$$

с исходного пункта i на исходный пункт k

$$v_{ik} = -\delta z_0 + l_{ik}. \tag{19.18}$$

Уравнения поправок составляют для всех измеренных направлений в сети. Составление уравнений поправок — это ответственная часть уравнительных вычислений. Ошибки, допущенные при составлении уравнений, обнаруживаются только при окончательном вычислении триангуляции. Поэтому определение коэффициентов a_{ik} и b_{ik} и свободных членов l_{ik} должно сопровождаться контрольными вычислениями.

Уравнения поправок дирекционных углов

При уравнивании геодезической сети на плоскости в проекции Гаусса—Крюгера от азимутов Лапласа переходят к дирекционным углам направлений и принимают их за независимо измеренные величины, в которые как и в измеренные направления определяют поправки из уравнения сети.

Уравнение поправок дирекционного угла отличается от уравнения поправок направлений тем, что в нем нет поправки в ориентирующий угол. Записывается оно в следующем виде

$$v_{ik} = -a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k + l_{ik}. \tag{19.19}$$

Коэффициенты a_{ik} и b_{ik} вычисляют по формулам (19.11), а свободный член находят как разность:

$$l_{ik} = \alpha^{\circ}_{ik} - \alpha'_{ik}, \tag{19.20}$$

где α_{ik}° — вычисленное по приближенным координатам, а α_{ik}' — измеренное значение дирекционного угла.

Уравнения поправок измеренных сторон

В геодезической сети могут быть измерены как базисные (с повышенной точностью), так и другие стороны, как например, в сети трилатерации и полигонометрии. Во все стороны, редуцированные на плоскость, определяют поправки из уравнивания, причем с учетом весов измерений.

Используя измеренные стороны, углы и т. п. решают треугольники и затем вычисляют приближенные координаты пунктов с возможно большей точностью. Из решения обратных

задач находят длины s_{ik}° всех измеренных сторон, строго соответствующие этим координатам:

$$s_{ik}^{\circ}=\sqrt{\Delta x_{ik}^2+\Delta y_{ik}^2}=\frac{\Delta x_{ik}}{\cos\alpha_{ik}^{\circ}}=\frac{\Delta y_{ik}}{\sin\alpha_{ik}^{\circ}}.$$

Пусть s_{ik}' — длина стороны, полученная из измерений и редуцированная на плоскость в проекции Гаусса—Крюгера, v_{ik} — поправка из уравнивания; s_{ik}° — длина этой же стороны, вычисленная по приближенным координатам пунктов, δs_{ik} — поправка из уравнивания в ее значение. В этом случае длину стороны s_{ik}, полученную из уравнивания сети, можно определить дважды:

$$s_{ik}=s_{ik}'+v_{ik}=s_{ik}^{\circ}+\delta s_{ik}. \tag{19.21}$$

Из равенств (19.21) вытекает исходное уравнение поправок измеренных сторон

$$v_{ik}=\delta s_{ik}+s_{ik}^{\circ}-s_{ik}' \tag{19.22}$$

или

$$v_{ik}=\delta s_{ik}+l_{ik}, \tag{19.23}$$

где свободный член уравнения поправок равен

$$l_{ik}=s_{ik}^{\circ}-s_{ik}'. \tag{19.24}$$

Выразим поправку δs_{ik} через поправки δx, δy в приближенные координаты x°, y° пунктов, между которыми измерена сторона. Напишем

$$s_{ik}^{\circ 2}=(x_k^{\circ}-x_i^{\circ})^2+(y_k^{\circ}-y_i^{\circ})^2.$$

Продифференцировав левую и правую части этого выражения по всем переменным, получим

$$2s_{ik}^{\circ}ds_{ik}=2(x_k^{\circ}-x_i^{\circ})(dx_k-dx_i)+2(y_k^{\circ}-y_i^{\circ})(dy_2-dy_1).$$

Разделив обе части равенства на $2s_{ik}^{\circ}$ и перейдя к конечным приращениям, будем иметь

$$\delta s_{ik}=-\frac{x_k^{\circ}-x_i^{\circ}}{s_{ik}^{\circ}}\delta x_i-\frac{y_k^{\circ}-y_i^{\circ}}{s_{ik}^{\circ}}\delta y_i+\frac{x_k^{\circ}-x_i^{\circ}}{s_{ik}^{\circ}}\delta x_k+\frac{y_k^{\circ}-y_i^{\circ}}{s_{ik}^{\circ}}\delta y_k. \tag{19.25}$$

Обозначим

$$c_{ik}=\frac{x_k^{\circ}-x_i^{\circ}}{s_{ik}^{\circ}}=\cos\alpha_{ik}^{\circ};\quad d_{ik}=\frac{y_k^{\circ}-y_i^{\circ}}{s_{ik}^{\circ}}=\sin\alpha_{ik}^{\circ}. \tag{19.26}$$

Подставив выражение (19.25) в уравнение (19.23) и сделав замены в соответствии с принятыми обозначениями (19.26), запишем уравнение поправок сторон в следующем виде:

$$v_{ik} = -c_{ik}\delta x_i - d_{ik}\delta y_i + c_{ik}\delta x_k + d_{ik}\delta y_k + l_{ik}. \qquad (19.27)$$

Для удобства вычислений поправки в координаты выражают в дециметрах, т. е. принимают равными

$$\xi = 10\delta x; \quad \eta = 10\delta y, \qquad (19.28)$$

где δx, δy — поправки в координаты x, y, м. Свободный член l_{ik} также выражают в дециметрах.

С учетом равенств (19.28) уравнение поправок (19.27) примет окончательный вид

$$v_{ik} = -c_{ik}\xi_i - d_{ik}\eta_i + c_{ik}\xi_k + d_{ik}\eta_k + l_{ik}, \qquad (19.29)$$

Уравнение поправок (19.29) соответствует общему случаю, когда сторона s измерена между определяемыми пунктами. В частных случаях уравнение (19.29) принимает более простой вид, например, если

сторона измерена между исходным пунктом i ($\xi_i = \eta_i = 0$) и определяемым пунктом k

$$v_{ik} = c_{ik}\xi_k + d_{ik}\eta_k + l_{ik}; \qquad (19.30)$$

между определяемым пунктом i и исходным пунктом k

$$v_{ik} = -c_{ik}\xi_i - d_{ik}\eta_i + l_{ik}; \qquad (19.31)$$

между исходными пунктами i и k

$$v_{ik} = l_{ik}. \qquad (19.32)$$

§ 135. СОСТАВЛЕНИЕ РЕДУЦИРОВАННЫХ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПУНКТАХ ТРИАНГУЛЯЦИИ И ПОЛИГОНОМЕТРИИ

Поскольку при уравнивании сети по направлениям на каждом пункте триангуляции и полигонометрии сумма поправок v_{ik} в измеренные направления равна нулю ($[v] = 0$), то можно составить так называемые редуцированные нормальные уравнения, в которых поправки δz_0 в ориентирующие углы z_0 исключены. В этом случае общее число нормальных уравнений в сети уменьшается на число пунктов, на которых измерены направления, благодаря чему существенно уменьшатся затраты времени на решение нормальных уравнений.

Рассмотрим методику составления редуцированных нормальных уравнений. Пусть на i-й станции измерено n направлений. Напишем соответствующие им уравнения поправок

$$v_{i1} = -\delta z_0 - a_{i1}\xi_i - b_{i1}\eta_i + a_{i1}\xi_1 + b_{i1}\eta_1 + l_{i1};$$
$$v_{i2} = -\delta z_0 - a_{i2}\xi_i - b_{i2}\eta_i + a_{i2}\xi_2 + b_{i2}\eta_2 + l_{i2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_{in} = -\delta z_0 - a_{in}\xi_i - b_{in}\eta_i + a_{in}\xi_n + b_{in}\eta_n + l_{in}. \qquad (19.33)$$

Для наглядности конечных формул обозначим:

$$a_1 = -a_{i1}, \quad b_1 = -b_{i1}, \quad \ldots, \quad a_k = -a_{ik}, \quad b_k = -b_{ik};$$
$$c_1 = a_{i1}, \quad d_1 = b_{i1}, \quad c_2 = a_{i2}, \quad d_2 = b_{i2} \text{ и т. д.}$$

Теперь вместо уравнений (19.33) напишем

$$v_{i1} = -\delta z_0 + a_1\xi_i + b_1\eta_i + c_1\xi_1 + d_1\eta_1 + l_{i1};$$
$$v_{i2} = -\delta z_0 + a_2\xi_i + b_2\eta_i + c_2\xi_2 + d_2\eta_2 + l_{i2}; \qquad (19.34)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_{in} = -\delta z_0 + a_n\xi_i + b_n\eta_i + c_n\xi_n + d_n\eta_n + l_{in}.$$

Этой системе уравнений поправок соответствует следующая система нормальных уравнений, точнее, их частей, составленных на данном пункте:

$$n\delta z_0 - [a]\,\xi_i - [b]\,\eta_i - \ldots - [l] = [v] = 0;$$
$$-[a]\,\delta z_0 + [aa]\,\xi_i + [ab]\,\eta_i + \ldots + [al] = [av] \neq 0; \qquad (19.35)$$
$$-[b]\,\delta z_0 + [ab]\,\xi_i + [bb]\,\eta_i + \ldots + [bl] = [bv] \neq 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Первое из этих нормальных уравнений представляет собой сумму уравнений поправок (19.34), в которой $[v] = [l] = 0$. Из этого суммарного уравнения найдем поправку δz_0 в ориентирующий угол:

$$\delta z_0 = \frac{1}{n}\left([a]\,\xi_i + [b]\,\eta_i + c_1\xi_1 + d_1\eta_1 + \ldots + c_n\xi_n + d_n\eta_n\right). \qquad (19.36)$$

и подставим ее в систему уравнений (19.35). В результате получим следующие части редуцированных нормальных уравнений на данном пункте:

$$\left([aa] - \frac{[a]\,[a]}{n}\right)\xi_i + \left([ab] - \frac{[a]\,[b]}{n}\right)\eta_i + \ldots + [al] \neq 0;$$
$$\left([ab] - \frac{[a]\,[b]}{n}\right)\xi_i + \left([bb] - \frac{[b]\,[b]}{n}\right)\eta_i + \ldots + [bl] \neq 0, \qquad (19.37)$$

в которых поправки δz_0 исключены.

Уравнения (19.37) можно получить и другим, более коротким способом. Для этого необходимо: 1) начальным уравнениям (19.33) придать вес $p=1$; 2) составить на пункте суммарное уравнение

$$n\delta z_0 - [a]\,\xi_i - [b]\,\eta_i + [a]\,\xi_1 + [b]\,\eta_1 + \ldots + [l] = [v] = 0; \tag{19.38}$$

равное сумме уравнений (19.33); 3) присоединить это уравнение к системе начальных уравнений (19.33) с фиктивным весом $p=-1/n$, где n — число направлений на пункте; 4) считать условно, что в уравнениях (19.33) и (19.38) поправка δz_0 отсутствует, и перейти затем от таких редуцированных уравнений поправок (без δz_0) с учетом их весов $p=1$ и $p=-1/n$ к нормальным уравнениям. В итоге будут получены редуцированные нормальные уравнения (19.37).

Для того чтобы убедиться в этом, вычислим, например, квадратичный коэффициент при первом неизвестном ξ_i:

$$a_{i1}a_{i1} + a_{i2}a_{i2} + \ldots + a_{in}a_{in} - \frac{1}{n}\,[a]\,[a] = [aa] - \frac{[a]\,[a]}{n}.$$

Как видим, получен результат тот же, что и в уравнениях (19.37). Таким образом на практике и составляют на каждом пункте соответствующие части редуцированных нормальных уравнений. Затем, приведя подобные члены при одноименных неизвестных поправках ξ_i и η_i, составляют общую для сети в целом систему редуцированных нормальных уравнений.

Число редуцированных нормальных уравнений в сети равно удвоенному числу вновь определяемых пунктов. Оно меньше числа нередуцированных нормальных уравнений на число поправок δz_0 в ориентирующие углы z_0, т. е. на число пунктов, на которых выполнены угловые измерения.

§ 136. ВЫЧИСЛЕНИЕ УРАВНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СЕТИ. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

Будем полагать, что на предыдущей стадии вычислений составлены уравнения поправок для всех измеренных в сети величин: горизонтальных направлений, дирекционных углов, длин сторон и что вес p_i каждого i-го уравнения (измеренной величины) известен. Пусть A — прямоугольная матрица коэффициентов уравнений поправок, включая суммарные уравнения на пунктах с измеренными углами; X — вектор-столбец поправок ξ_i и η_i в приближенные координаты определяемых пунктов; l — вектор-столбец свободных членов l_i уравнений поправок; P — диагональная матрица весов p_i уравнений поправок.

Используя эти обозначения, запишем все уравнения поправок в матричной форме

$$AX + l = V. \tag{19.39}$$

От уравнений поправок (19.39) перейдем с учетом их весов к системе нормальных уравнений

$$NX + L = 0, \tag{19.40}$$

где

$$N = A^{\mathrm{T}}PA, \tag{19.41}$$

$$L = A^{\mathrm{T}}Pl.^{1} \tag{19.42}$$

N — симметричная матрица коэффициентов нормальных уравнений; A^{T} — транспортированная матрица A; P — диагональная матрица весов уравнений поправок; L — вектор-столбец свободных членов нормальных уравнений.

Умножив каждое слагаемое уравнения (19.40) слева на матрицу N^{-1}, обратную матрице N коэффициентов нормальных уравнений, найдем вектор X искомых поправок координат

$$X = -N^{-1}L = -QL, \tag{19.43}$$

где Q — матрица весовых коэффициентов:

$$N^{-1} = Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1m} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{m1} & Q_{m2} & & Q_{mm} \end{pmatrix}, \tag{19.44}$$

в которой m — число поправок ξ_i, η_i в координаты, равное удвоенному числу определяемых пунктов.

Найдя из решения системы нормальных уравнений поправки ξ_i и η_i (в дм) вычислим значения уравненных координат определяемых пунктов (в м):

$$\begin{aligned} x_i &= x_i' + \delta x_i = x_i' + 0{,}10\xi_i; \\ y_i &= y_i' + \delta y_i = y_i' + 0{,}10\eta_i. \end{aligned} \tag{19.45}$$

Координаты пунктов, вычисленные по формулам (19.45), определены бесконтрольно. Для контроля и получения уравненных значений измеренных величин поступают следующим образом. Найденные из решения системы нормальных уравнений поправки ξ_i и η_i подставляют в соответствующие уравнения поправок (19.38), (19.9), (19.19), (19.29) и находят значения са-

мих поправок δz_0, $v_{N\,(ik)}$, $v_{\alpha\,(ik)}$, $v_{s\,(ik)}$. Введя поправки в измеренные величины, получают их уравненные значения:

$$N_{ik} = N'_{ik} + v_{N\,(ik)};$$
$$\alpha_{ik} = \alpha'_{ik} + v_{\alpha\,(ik)}; \qquad (19.46)$$
$$s_{ik} = s'_{ik} + v_{s\,(ik)}.$$

Используя уравненные значения направлений, дирекционных углов и длин сторон, выполняют окончательное решение треугольников, вычисляют приращения координат и вторично находят уравненные координаты пунктов, вычисляя их дважды в каждом треугольнике *1 2 3* по двум сторонам:

$$x_3 = x_1 + s_{13}\cos\alpha_{13} = x_2 + s_{23}\cos\alpha_{23};$$
$$y_3 = y_1 + s_{13}\sin\alpha_{13} = y_2 + s_{23}\sin\alpha_{23}. \qquad (19.47)$$

В полигонометрии координаты по формулам (19.47) вычисляют без двойного контроля, т. е. по одной из этих формул.

Заключительным контролем правильности уравнительных вычислений является совпадение координат, вычисленных для каждого пункта дважды, т. е. по формулам (19.45) и (19.47). Расхождения не должны выходить за пределы ошибок округлений.

Оценка точности уравненных элементов сети

Среднюю квадратическую ошибку единицы веса находят по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}}, \qquad (19.48)$$

где v — поправки из уравнивания в измеренные с весами p величины; r — число избыточных измерений в сети, определяемое как разность числа всех k измерений в сети и числа k_0 неизвестных величин, определяемых из уравнивания, т. е.

$$r = k - k_0. \qquad (19.49)$$

Число k равно сумме измеренных направлений на всех пунктах, измеренных азимутов земных предметов и измеренных сторон, в которые находят поправки из уравнивания.

В число k_0 входят поправки δz_0 в ориентирующие углы на пунктах триангуляции и полигонометрии, а также поправки δx и δy в приближенные координаты определяемых пунктов. Число поправок δz_0 равно числу пунктов, на которых выполнены угловые измерения (исходные и определяемые); число попра-

вок δx и δy равно удвоенному числу определяемых пунктов.

Среднюю квадратическую ошибку любой функции F уравненных элементов (дирекционных углов, длин сторон, абсцисс и ординат) вычисляют по формуле

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}} . \tag{19.50}$$

Обратный вес $1/P_F$ оцениваемой функции F может быть вычислен по-разному: в процессе решения системы нормальных уравнений по схеме Гаусса или по элементам матрицы, обратной матрице коэффициентов нормальных уравнений. Рассмотрим сначала первый способ вычисления обратного веса функции.

При параметрическом способе уравнивания наиболее просто вычисляется вес последнего и предпоследнего неизвестных в системе нормальных уравнений. Поэтому чтобы определить вес P_{x_k} и P_{y_k} координат какого-либо пункта k, неизвестные поправки координат этого пункта ξ_k и η_k помещают соответственно на предпоследнее и последнее место в системе нормальных уравнений. Вес P_{y_k} последнего неизвестного η_k при решении системы нормальных уравнений по схеме Гаусса равен коэффициенту при η_k в последнем преобразованном нормальном уравнении. Вес P_{x_k} предпоследнего неизвестного ξ_k находят по формуле:

$$P_{x_k} = P_{y_k} \frac{A}{C + \frac{B^2}{A}}, \tag{19.51}$$

где C и A — квадратичные коэффициенты соответственно последнего и предпоследнего преобразованных нормальных уравнений; B — коэффициент при η_k в предпоследнем преобразованном уравнении.

Для того чтобы найти среднюю квадратическую ошибку любого элемента уравненной сети, являющегося функцией координат пунктов, например, длины и дирекционного угла стороны между любыми пунктами (смежными или несмежными), этот элемент следует выразить через координаты этих пунктов, а затем составить весовую функцию.

Получим весовую функцию для оценки произвольной стороны s_{ik}, длину которой представим как

$$s_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} .$$

Продифференцировав это выражение по координатам опре-

деляемых пунктов и перейдя от дифференциалов к конечным величинам, найдем приращение данной функции

$$f_s = \Delta s_{ik} = -\frac{x_k - x_i}{s_{ik}}\delta x_i - \frac{y_k - y_i}{s_{ik}}\delta y_i + \\ + \frac{x_k - x_i}{s_{ik}}\delta x_k + \frac{y_k - y_i}{s_{ik}}\delta y_k,$$

которое запишем в виде уравнения поправок (19.29) для этой стороны, но без свободного члена в нем, т. е. составим весовую функцию

$$f_s = \Delta s_{ik} = -c_{ik}\xi_i - d_{ik}\eta_i + c_{ik}\xi_k + d_{ik}\eta_k, \qquad (19.52)$$

где ξ и η — поправки в координаты, дм; коэффициенты c и d вычисляют по приближенным координатам, используя формулы (19.26).

Весовая функция f_α для дирекционного угла α этой стороны имеет вид уравнения поправок (19.19), но без свободного члена, т. е.

$$f_\alpha = \Delta\alpha_{ik} = -a_{ik}\xi_i - b_{ik}\eta_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}\eta_k, \qquad (19.53)$$

где коэффициенты a_{ik}, b_{ik} вычисляются по формулам (19.11).

В общей системе нормальных уравнений после графы L свободных членов вводят дополнительные графы коэффициентов функций f_s и f_α в уравнениях с квадратичными коэффициентами при поправках ξ_i, η_i и ξ_k, η_k. Обратные веса $1/P_s$ и $1/P_\alpha$ вычисляют одновременно с решением нормальных уравнений. Их величины находят как суммы произведений чисел, записанных в элиминационных сторонах столбца (графы) на соответствующие числа этого же столбца преобразованных нормальных уравнений.

Во втором случае, когда система нормальных уравнений решается с вычислением обратной матрицы $Q = N^{-1}$, обратный вес уравненных абсцисс x и ординат y равен диагональным элементам обратной матрицы Q, т. е.

$$\frac{1}{P_{x\,(i)}} = Q_{ii}; \qquad \frac{1}{P_{y\,(i)}} = Q_{i+1,\ i+1}. \qquad (19.54)$$

Подставив выражение (19.54) в формулу (19.50), получим

$$m_{x\,(i)} = \mu\sqrt{Q_{ii}}; \qquad m_{y\,(i)} = \mu\sqrt{Q_{i+1,\,i+1}}. \qquad (19.55)$$

Обратный вес дирекционного угла α_{ik} или длины s_{ik} любой стороны, соединяющей смежные или несмежные пункты i и k, вычисляют по формуле

$$\frac{1}{P_F} = f^{\mathrm{T}} Q_{i-k} f, \qquad (19.56)$$

где f^{τ} — транспортированные векторы-строки коэффициентов весовых функций дирекционного угла α_{ik} и длины стороны s_{ik} имеющие вид

$$f^{\tau}_{\alpha\,(ik)} = (-a_{ik} \quad -b_{ik} \quad a_{ik} \quad b_{ik});$$
$$f^{\tau}_{s\,(ik)} = (-c_{ik} \quad -d_{ik} \quad c_{ik} \quad d_{ik}). \tag{19.57}$$

Коэффициенты a_{ik}, b_{ik} вычисляют по формулам (19.11), а коэффициенты c_{ik}, d_{ik} — по формулам (19.26), используя в обоих случаях приближенные координаты пунктов.

Матрица Q_{i-k} формируется из тех элементов общей для сети матрицы Q весовых коэффициентов, которые соответствуют координатам x_i, y_i, x_k, y_k начала и конца оцениваемой стороны (диагонали) s_{ik} и имеет вид

$$Q_{i-k} = \begin{Vmatrix} Q_{x_i x_i} & Q_{x_i y_i} & Q_{x_i x_k} & Q_{x_i y_k} \\ Q_{y_i x_i} & Q_{y_i y_i} & Q_{y_i x_k} & Q_{y_i y_k} \\ Q_{x_k x_i} & Q_{x_k y_i} & Q_{x_k x_k} & Q_{x_k y_k} \\ Q_{y_k x_i} & Q_{y_k y_i} & Q_{y_k x_k} & Q_{y_k y_k} \end{Vmatrix}. \tag{19.58}$$

Вычислив по формуле (19.56) обратный вес $1/P_F$ и подставив в формулу (19.50), найдем среднюю квадратическую ошибку оцениваемого элемента:

$$m_{s,\alpha} = \mu \sqrt{f^{\tau}_{s,\alpha} Q_{i-k} f_{s,\alpha}}, \tag{19.59}$$

где $f_{s,\alpha}$ — вектор-столбец коэффициентов весовой функции (19.52) и (19.53) соответственно.

Заключительным этапом уравнительных вычислений является составление каталога координат пунктов, в котором длины сторон и дирекционные углы вычисляют путем решения обратных задач с использованием координат, записанных в каталог.

Примеры уравнивания геодезических сетей, в том числе триангуляции, трилатерации и линейно-угловых параметрическим способом даны в Практикуме по высшей геодезии [23].

Приложение

Многолетние значения величины $x_0' = t_{зах} - t_0'$ на широтах 40—64°

Дата		φ=40°	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64
Апрель	6	1,09	1,15	1,21	1,28									
	10	1,09	1,14	1,19	1,25	1,30	1,36	1,42						
	14	1,09	1,13	1,18	1,22	1,25	1,31	1,36	1,39	1,43	1,47	1,52	1,58	1,65
	22	1,09	1,12	1,16	1,19	1,22	1,26	1,30	1,34	1,39	1,43	1,48	1,54	1,60
	30	1,09	1,12	1,16	1,20	1,23	1,27	1,32	1,37	1,42	1,47	1,53	1,58	1,65
Май	8	1,10	1,14	1,18	1,22	1,26	1,31	1,36	1,42	1,48	1,54	1,60	1,67	1,75
	16	1,12	1,16	1,21	1,25	1,29	1,35	1,40	1,46	1,53	1,60	1,69	1,77	1,87
	24	1,17	1,20	1,24	1,29	1,33	1,39	1,44	1,51	1,58	1,67	1,77	1,88	2,02
Июнь	1	1,22	1,26	1,29	1,33	1,37	1,43	1,49	1,56	1,64	1,73	1,85	1,98	2,16
	9	1,27	1,30	1,33	1,37	1,42	1,47	1,53	1,61	1,70	1,80	1,94	2,10	2,30
	17	1,32	1,34	1,37	1,40	1,45	1,50	1,57	1,65	1,74	1,86	2,01	2,18	2,42
	25	1,34	1,37	1,39	1,43	1,46	1,52	1,59	1,67	1,76	1,88	2,04	2,22	2,46
Июль	3	1,35	1,37	1,39	1,43	1,46	1,52	1,58	1,66	1,76	1,88	2,03	2,22	2,46
	11	1,34	1,36	1,38	1,41	1,45	1,50	1,55	1,63	1,71	1,83	1,98	2,16	2,40
	19	1,32	1,34	1,36	1,39	1,42	1,46	1,51	1,57	1,65	1,75	1,89	2,05	2,25
	27	1,30	1,32	1,33	1,36	1,38	1,41	1,46	1,52	1,59	1,68	1,79	1,93	2,12
Август	4	1,26	1,28	1,30	1,32	1,34	1,37	1,41	1,46	1,52	1,60	1,70	1,82	1,98
	12	1,23	1,24	1,26	1,28	1,30	1,33	1,37	1,41	1,47	1,54	1,63	1,73	1,87
	20	1,18	1,20	1,22	1,24	1,25	1,29	1,32	1,37	1,42	1,49	1,57	1,65	1,78
	28	1,12	1,15	1,17	1,19	1,21	1,25	1,29	1,33	1,39	1,45	1,52	1,60	1,70
Сентябрь	5	1,04	1,07	1,10	1,13	1,16	1,20	1,24	1,28	1,34	1,40	1,46	1,53	1,62
	13	0,97	1,00	1,04	1,08	1,11	1,16	1,20	1,25	1,30	1,36	1,42	1,49	1,57
	21	0,92	0,95	0,99	1,03	1,07	1,11	1,16	1,21	1,26	1,32	1,38	1,45	1,53
	29	0,89	0,92	0,96	0,99	1,02	1,07	1,12	1,17	1,23	1,29	1,35	1,42	1,51
Октябрь	3	0,88	0,91	0,94	0,98	1,01	1,05	1,10	1,16	1,21	1,27	1,33	1,41	1,50
	7	0,88	0,91	0,94	0,97	1,00	1,04	1,08	1,14	1,19	1,25	1,32	1,41	1,51
	11	0,88	0,91	0,94	0,96	0,99	1,02	1,07	1,12	1,18	1,25	1,32	1,42	1,53
	15	0,90	0,92	0,94	0,97	0,99	1,02	1,07	1,12	1,18	1,25	1,34	1,47	
	19	0,91	0,93	0,95	0,98	1,00	1,04	1,08	1,13	1,20	1,28	1,43		
	23	0,94	0,96	0,98	1,01	1,03	1,07	1,13	1,19	1,28	1,40			
	27	0,98	1,01	1,03	1,06	1,09	1,14	1,20	1,28					
	31	1,06	1,09	1,12	1,14	1,16								

Список литературы

1. *Баранов В. Н., Бойко Е. Г., Краснорылов И. И.* и др. Космическая геодезия.— М.: Недра, 1986.
2. *Большаков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезических измерений.— М.: Недра, 1977.
3. *Большаков В. Д., Деймлих Ф., Голубев А. Н., Васильев В. П.* Радиогеодезические и электрооптические измерения.— М.: Недра, 1985.
4. *Вировец А. М.* Высшая геодезия.— М.: Недра, 1970.
5. Гайдаев П. А. Математическая обработка геодезических сетей.— М.: Недра, 1977.
6. *Дурнев А. И.* Высшая геодезия.— М.: Недра, 1967.
7. *Закатов П. С.* Курс высшей геодезии.— М.: Недра, 1976.
8. *Инструкция* о построении государственной геодезической сети СССР.— М.: Недра, 1966.
9. *Инструкция* по полигонометрии и трилатерации.— М.: Недра, 1976.
10. *Инструкция* по нивелированию I, II, III и IV классов.— М.: Недра, 1974.
11. *Инструкция* по вычислению нивелировок.— М.: Недра, 1971.
12. *Конопальцев И. М.* Высокоточные угловые измерения при изучении движений земной коры.— М.: Недра, 1978.
13. *Кочетов Ф. Г.* Нивелиры с компенсаторами.— М.: Недра, 1985.
14. *Красовский Ф. Н.* Избранные сочинения, т. III.— М.: Геодезиздат, 1955.
15. *Кузнецов П. Н., Васютинский И. Ю., Ямбаев Х. К.* Геодезическое инструментоведение.— М.: Недра, 1984.
16. *Машимов М. М.* Уравнивание геодезических сетей.— М.: Недра, 1989.
17. *Нивелирование* I и II классов: Практическое руководство,— М.: Недра, 1982.
18. *Огородова Л. В., Шимбирев Б. П., Юзефович А. П.* Гравиметрия.— М.: Недра, 1978.
19. *О нивелирной* сети СССР/Под общей редакцией Л. А. Кашина и Л. С. Хренова.— М.: Недра, 1979.
20. *Павлив П. В.* Проблемы высокоточного нивелирования.— Львов: Издательство ЛГУ, 1980.
21. *Пеллинен Л. П.* Высшая геодезия.— М.: Недра, 1978.
22. *Плотников В. С.* Геодезические приборы.— М.: Недра, 1987.
23. Практикум по высшей геодезии/Под редакцией Н. В. Яковлева — М.: Недра, 1982.
24. *Руководящий технический материал.* Определение азимутов на пунктах Лапласа с учетом влияния рефракции. ГУГК при СМ СССР.— М.: ЦНИИГАиК, 1982.
25. *Спиридонов А. И.* Теодолиты.— М.: Недра, 1985.
26. *Справочник геодезиста*/Под редакцией В. Д. Большакова и Г. П. Левчука.— М.: Недра, 1985.

Предметный указатель

Астрономическая широта 27
— долгота 27
— азимут 27
Азимут Лапласа 31

Базис 59
Базисная сеть 59

Визирный цилиндр 88
— — малофазный 89
Высота геодезическая 27
— нормальная 344
— ортометрическая 343
— динамическая 344

Геодезический знак 84
Геодезическая опорная сеть 36
— плановая 36
— высотная 36
— гравиметрическая 36

Звено триангуляции 58

Координаты астрономические 27
— геодезические 26
Коэффициент земного преломления 362

Нивелир высокоточный
— с уровнем 279, 281
— с компенсатором 282, 284

Окулярный микрометр 134
Оптический микрометр 138
— с плоскопараллельными пластинками 139
— с оптическими клиньями 140

Поверхность относимости 23
Пункт Лапласа 59
Приземный слой воздуха 180

Рефракция света 171
— боковая 172
— вертикальная 172
— нивелирная 319
— нормальная 377

Сигнал геодезический 85, 86
Сдвиг звена триангуляции 104
— продольный 104
— поперечный 104
Способы угловых измерений 217, 224, 230, 231, 234, 237, 238
Сторона триангуляции 57
— базисная 58
— выходная 58
— промежуточная 104
— связующая 104

Теодолит высокоточный оптический 120, 121, 123, 125
— электронный 126
Тригонометрическое нивелирование 359
— одностороннее 361, 362, 365
— двухстороннее 361, 367, 369

Уклонение отвесной линии 27
Условные уравнения в геодезических сетях 395, 411
— число независимых условий 408
— допустимые свободные члены 416
Уравнения поправок направлений
— дирекционных углов 428
— измеренных сторон 428
Уравнивание геодезических сетей 384
— коррелатным способом 394
— параметрическим способом 422

Центр геодезического пункта 89—92

Эллипсоид общий земной 15
— уровенный 18
— референц-эллипсоид 23
Эксцентриситет алидады 146
— лимба 149
Элементы приведения 170, 239

Оглавление

Предисловие 3
Введение 5

Раздел I. ФИГУРА ЗЕМЛИ И ПОВЕРХНОСТИ ОТНОСИМОСТИ . . 10

Глава 1. **Основные сведения о фигуре и гравитационном поле Земли** 10

§ 1. Сила тяжести и уровенные поверхности Земли 10
§ 2. Геоид и квазигеоид 13
§ 3. Общий земной эллипсоид 15
§ 4. Нормальная Земля и фигура реальной Земли 17

Глава 2. **Поверхности относимости. Редукционная задача** 23

§ 5. Поверхности относимости. Референц-эллипсоид Красовского . . . 23
§ 6. Геодезические и астрономические координаты и азимуты 26
§ 7. Уклонения отвесных линий 27
§ 8. Азимуты Лапласа 31
§ 9. Понятие о редукционной задаче 32

Раздел II. ОПОРНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СЕТИ 35

Глава 3. **Государственная геодезическая сеть СССР** 35

§ 10. Геодезические сети. Их назначение 35
§ 11 Основной принцип построения государственной геодезической сети 39
§ 12. Плотность пунктов государственной геодезической сети 40
§ 13. Необходимая точность построения государственной геодезической сети 43
§ 14. Основные методы создания государственной геодезической сети . 45
§ 15. Краткие сведения о других методах создания опорных геодезических сетей 49
§ 16. Краткие сведения о создании опорных геодезических сетей в дореволюционной России 53
§ 17. Схема и программа Ф. Н. Красовского построения государственной триангуляции 57
§ 18. Построение государственной геодезической сети СССР в соответствии с Основными положениями 1954—1961 гг.. 62
§ 19. Последовательность выполнения основных геодезических работ . 69
§ 20. Пути дальнейшего совершенствования государственной геодезической сети 70

Глава 4. **Проектирование и рекогносцировка геодезических сетей. Геодезические знаки и центры** 73

§ 21. Общие сведения о проектировании геодезических сетей 73
§ 22. Рекогносцировка геодезических пунктов 78
§ 23. Расчет высоты геодезических знаков 82
§ 24. Геодезические знаки 84
§ 25. Центры геодезических пунктов 89

Глава 5. **Априорная оценка точности геодезических сетей** 93

§ 26. Общие положения 93
§ 27. Определение веса измеряемых величин 96
§ 28. Вычисление обратного веса и средних квадратических ошибок уравненных элементов геодезической сети 99
§ 29. Априорная оценка точности геодезических сетей с моделированием результатов измерений на ЭВМ 102
§ 30. Оценка точности триангуляции по приближенным формулам . . 104
§ 31. Частота размещения азимутов и базисных сторон. Выгоднейшая форма треугольников 108
§ 32. Оценка точности рядов и сетей трилатерации по приближенным формулам 110
§ 33. Оценки точности звеньев полигонометрии 113
§ 34. Согласование точности измерения горизонтальных направлений, азимутов и длин сторон в геодезических сетях 114

Раздел III. ВЫСОКОТОЧНЫЕ УГЛОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ 115

Глава 6. **Высокоточные оптические теодолиты. Исследования теодолитов** 115

§ 35. Условия эксплуатации высокоточных теодолитов. Основные требования к ним 115
§ 36. Общие сведения о высокоточных теодолитах 119
§ 37. Геометрическая схема высокоточного оптического теодолита . . 127
§ 38. Осевые системы и уровни высокоточного теодолита 129
§ 39. Лимб высокоточного оптического теодолита 132
§ 40. Зрительные трубы высокоточных теодолитов 133
§ 41. Отсчетное устройство оптического теодолита 136
§ 42. Принцип совмещенного отсчета. Оптические микрометры 138
§ 43. Поверки и исследования высокоточных теодолитов 146
§ 44. Определение рена оптического микрометра 143
§ 45. Погрешности шкалы оптического микрометра. Мертвый ход микрометра 144
§ 46. Определение эксцентриситета алидады и лимба 146
§ 47. Определение неперпендикулярности горизонтальной и вертикальной осей теодолита 150
§ 48. Определение полных ошибок диаметров лимба 151

Глава 7. **Источники ошибок при высокоточных угловых измерениях и методы ослабления их влияний** 154

§ 49. Виды ошибок при высокоточных угловых измерениях 154
§ 50. Систематические ошибки визирования 156
§ 51. Приборные ошибки при высокоточных угловых измерениях . . 158
§ 52. Ослабление влияний ошибок диаметров лимба на результаты угловых измерений 159
§ 53. Влияние коллимационной ошибки зрительной трубы 160
§ 54. Влияние наклона горизонтальной оси вращения трубы 161
§ 55. Влияние наклона вертикальной оси теодолита и лимба 162
§ 56. Азимутальный сдвиг оси трубы в лагерах, люфт подъемных винтов, температурные деформации теодолита 165
§ 57. Влияние внешней среды на результаты измерений 168
§ 58. Ошибки определения элементов приведения 170

Глава 8. **Рефракция света при угловых измерениях и азимутальных определениях** 171

§ 59. Рефракция света 171
§ 60. Связь углов рефракции с метеорологическими элементами и их градиентами 175

§ 61. Квазипериодические изменения градиентов температуры, рефракции и измеряемых величин 179
§ 62. Компенсация ошибок из-за боковой рефракции при угловых измерениях и азимутальных определениях 181
§ 63. Определение поправок за влияние боковой рефракции 186
§ 64. Расчет необходимой точности определения коэффициентов аппроксимирующей функции и времени наступления изотермии воздуха . . . 192
§ 65. Определение времени перехода боковой рефракции через нуль в суточном ходе 193
§ 66. Некоторые результаты определения и учета боковой рефракции в геодезических сетях 200
§ 67. Выгоднейшее время наблюдений при высокоточных угловых измерениях и азимутальных определениях 207

Глава 9. **Теория и методы высокоточных угловых измерений** . . . 209

§ 68. Постановка задачи. Уравнивание станции при произвольном порядке наблюдений 209
§ 69. Условия получения равноточных направлений на пункте 213
§ 70. Способ круговых приемов 217
§ 71. Способ измерения углов во всех комбинациях 224
§ 72. Видоизмененный способ измерения углов в комбинациях 230
§ 73. Способ неполных приемов 231
§ 74. Способ симметричных комбинаций направлений 234
§ 75. Видоизмененный способ круговых приемов 237
§ 76. Способ привязки отдельных направлений к марке 238
§ 77. Определение элементов приведения. Вычисление поправок за центровку и редукцию 239

Раздел IV. ВЫСОКОТОЧНОЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ 242

Глава 10. **Государственная нивелирная сеть СССР** 242

§ 78. Нивелирные сети. Их назначение 242
§ 79. Краткие сведения о развитии нивелирных работ в дореволюционной России 244
§ 80. Развитие основной нивелирной сети СССР в период 1917—1950 гг. 249
§ 81. Современная нивелирная сеть СССР 254
§ 82. Перспективы дальнейшего развития высокоточного нивелирования 259

Глава 11. **Проектирование. Рекогносцировка и закрепление нивелирных линий** 261

§ 83. Проектирование нивелирных линий I и II классов 261
§ 84. Рекогносцировка нивелирных линий I и II классов 263
§ 85. Закрепление нивелирных линий на местности 266
§ 86. Гравиметрическое обеспечение линий нивелирования 269

Глава 12. **Высокоточные нивелиры и инварные рейки** 271

§ 87. Основные требования к высокоточным нивелирам и инварным рейкам 271
§ 88. Геометрическая схема и основные части высокоточного нивелира 275
§ 89. Высокоточные нивелиры с уровнем 277
§ 90. Высокоточные нивелиры с компенсаторами 282
§ 91. Инварные нивелирные рейки 287

Глава 13. **Исследования высокоточных нивелиров** 290

§ 92. Программа исследований нивелиров с уровнем 290
§ 93. Исследования контактного уровня высокоточного нивелира . . . 291
§ 94. Исследование работы оптического микрометра 295

§ 95. Исследование работы элевационного винта нивелира и правильности хода фокусирующей линзы трубы 298
§ 96. Исследования нивелиров с компенсаторами 300
§ 97. Определение ошибок самоустановки визирного луча нивелира . . 303
§ 98. Определение систематической ошибки работы компенсатора . . . 305
§ 99. Определение нестабильности положения визирной оси трубы при изменении температуры нивелира 308

Глава 14. **Источники ошибок при высокоточном геометрическом нивелировании и методы ослабления их влияний** 309

§ 100. Личные ошибки при геометрическом нивелировании 309
§ 101. Приборные ошибки при геометрическом нивелировании 311
§ 102. Влияние ошибок инварных реек 315
§ 103. Влияние внешней среды. Нивелирная рефракция 319
§ 104. Вертикальные перемещения костылей и штатива 326
§ 105. Гидротермические движения земной поверхности 328
§ 106. Изменение превышений из-за влияния Луны и Солнца 329
§ 107. Влияние тектонических и других явлений на результаты высокоточного нивелирования 330

Глава 15. **Методы высокоточного нивелирования. Обработка результатов измерений** 332

§ 108. Метод и программа нивелирования I класса 332
§ 109. Метод и программа нивелирования II класса 336
§ 110. Моторизованное нивелирование 337
§ 111. Особенности высокоточного нивелирования в горных районах, северных широтах и крупных городах 338
§ 112. Понятие о системах нивелирных высот 342
§ 113. Предварительные вычисления при обработке результатов высокоточного нивелирования 345
§ 114. Оценка точности результатов высокоточного нивелирования . . 349
§ 115. Уравнивание нивелирных сетей I—II классов в системе нормальных высот 353

Глава 16. **Тригонометрическое нивелирование** 359

§ 116. Общие положения 359
§ 117. Вычисление разностей геодезических высот при одностороннем тригонометрическом нивелировании 362
§ 118. Вычисление разностей нормальных высот при одностороннем тригонометрическом нивелировании 365
§ 119. Вычисление разностей геодезических высот при двухстороннем тригонометрическом нивелировании 367
§ 120. Вычисление разностей нормальных высот при двухстороннем тригонометрическом нивелировании 369
§ 121. Способы определения коэффициента земного преломления . . . 370
§ 122. Нормальная рефракция. Выгоднейшее время измерений зенитных расстояний 377
§ 123. Обработка результатов тригонометрического нивелирования . . 381

Раздел V. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ 384

Глава 17. **Предварительные вычисления в геодезических сетях** . . . 384

§ 124. Задачи предварительных вычислений. Приведение измеренных величин к центрам пунктов 384
§ 125. Редуцирование измеренных величин с поверхности Земли на поверхность референц-эллипсоида 387
§ 126. Редуцирование измеренных величин с эллипсоида на плоскость . 391

Глава 18. **Уравнивание геодезических сетей коррелатным способом** . 394

§ 127. Общие положения 394
§ 128. Условные уравнения в триангуляции 395
§ 129. Число независимых условных уравнений в триангуляции . . . 408
§ 130. Условные уравнения в трилатерации 411
§ 131. Определение допустимых значений свободных членов условных уравнений 416
§ 132. Последовательность уравнительных вычислений. Оценка точности 420

Глава 19. **Уравнивание геодезических сетей параметрическим способом** 422

§ 133. Последовательность уравнительных вычислений. Соотношение весов измеренных величин 422
§ 134. Уравнения поправок измеренных величин 424
§ 135. Составление редуцированных нормальных уравнений на пунктах триангуляции и полигонометрии 430
§ 136. Вычисление уравненных элементов сети. Оценка точности . . . 432
Приложение. Многолетние значения величины $x'_0 = t_{зах} - t'_0$ на широтах 40—64° 438

Список литературы 439

Предметный указатель 440

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Яковлев Николай Васильевич

ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Заведующий редакцией *Л. Г. Иванова*
Редактор издательства *Ю. В. Пронько*
Технический редактор *Е. С. Сычева*
Корректор *Л. В. Зайцева*

ИБ № 6773

Сдано в набор 04.05.89. Подписано в печать 12.09.89. Т-06776. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага книж.-журн. имп. Гарнитура Литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 28,0. Усл. кр.-отт. 28,0. Уч.-изд. л. 30,0. Тираж 8600 экз. Заказ 955/1047—8. Цена 1 р. 30 к.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра», 125047 Москва, пл. Белорусского вокзала, 3.

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.

ВНИМАНИЮ НАУЧНЫХ И ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ РАБОТНИКОВ, АСПИРАНТОВ И СТУДЕНТОВ!

В издательстве «Недра» готовятся к выпуску СПРАВОЧНЫЕ ПОСОБИЯ,

содержащие полную информацию по геодезии и картографии, другим смежным отраслям науки и производства.

В авторский коллектив входят руководители ГУГК СССР, ученые, представляющие различные научные школы, а также опытные производственники.

Серия справочных пособий по теории и практике геодезии впервые выпускалась в 1939 г. под общей редакцией **М. Д. Бонч-Бруевича** издательством **Наркомзема РСФСР**.

Настоящее издание отражает современное состояние геодезии и картографии, новейшие достижения в этих областях.

ГЕОДЕЗИЯ. КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ И НАВИГАЦИЯ

Справочное пособие посвящено наиболее быстро развивающемуся разделу геодезии — **космической геодезии** и тесно связанной с ней — **космической навигации.**

Книга написана коллективом известных ученых, занимающихся проблемами космической геодезии и навигации.

И. К. БАЖИНОВ — проф., д-р техн. наук, лауреат Ленинской премии, ближайший сотрудник С. П. Королева, **В. В. Бойков** — д-р техн. наук, специалист в области космической геодезии, **Е. П. Алексашин** — доц., канд. техн. наук, занимается теорией космической навигации, **С. Н. ЯШКИН** — проф., д-р техн. наук, занимается проблемами небесной механики, **М. С. Урмаев** — проф., д-р техн. наук, специалист в области космической геодезии и космической фотограмметрии.

В справочном пособии отражены современные методы космической геодезии и навигации, принципы получения измерительной информации.

Особое внимание уделено системам отсчета и новым методам математической обработки, проектированию и функционированию спутниковых систем навигации, а также определению орбит, ориентации и координат объектов по данным наблюдений за навигационными спутниками.

ГЕОДЕЗИЯ.
МОРСКАЯ
ГЕОДЕЗИЯ

Теоретические основы морской геодезии, методы и технические средства, применяемые для создания геодезического обоснования морских исследовательских и съемочных работ, способы уравнивания и оценки точности измерений, выполняемых с целью определения координат надводных и подводных пунктов — все эти сведения читатель найдет в данном справочном пособии.

Книга написана канд. техн. наук **В. П. Глумовым**, д-ром техн. наук **В. А. Коугия**, канд. техн. наук **В. А. Монаховым** — специалистами, ведущими научные исследования и имеющими богатый практический опыт создания и обработки морских геодезических сетей.

Большой интерес представляют разделы, посвященные основам построения и функционирования радиотехнических наземных и спутниковых систем, основам изучения топографии морской поверхности методом спутниковой альтиметрии.

Если Вас заинтересовали книги издательства «Недра», рекомендуем Вам оформить предварительный заказ в магазинах, распространяющих научно-техническую литературу.

СВОЕВРЕМЕННО ОФОРМЛЕННЫЙ ЗАКАЗ ГАРАНТИРУЕТ ПРИОБРЕТЕНИЕ НУЖНОЙ ВАМ КНИГИ.

АДРЕСА ОПОРНЫХ МАГАЗИНОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВА «НЕДРА»

117334 МОСКВА, ЛЕНИНСКИЙ ПРОСПЕКТ, 40,
МАГАЗИН № 115
«ДОМ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ КНИГИ»

199178 ЛЕНИНГРАД, В. О.,
СРЕДНИЙ ПРОСПЕКТ, 61, МАГАЗИН № 17
«НЕДРА»

Грязи

НЕДРА

Н.В.ЯКОВЛЕВ ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ