Данный файл представлен исключительно в ознакомительных целях.

Уважаемый читатель!
Если вы скопируете данный файл,
Вы должны незамедлительно удалить его сразу после ознакомления с содержанием.
Копируя и сохраняя его Вы принимаете на себя всю ответственность, согласно действующему международному законодательству .
Все авторские права на данный файл сохраняются за правообладателем.
Любое коммерческое и иное использование кроме предварительного ознакомления запрещено.

Публикация данного документа не преследует никакой коммерческой выгоды. Но такие документы способствуют быстрейшему профессиональному и духовному росту читателей и являются рекламой бумажных изданий таких документов.

СПРАВОЧНИК ГЕОДЕЗИСТА

СПРАВОЧНИК ГЕОДЕЗИСТА

СПРАВОЧНИК ГЕОДЕЗИСТА

(В ДВУХ КНИГАХ)

КНИГА 1

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Под редакцией

В. Д. БОЛЬШАКОВА И Г. П. ЛЕВЧУКА

МОСКВА
«НЕДРА»
1975

УДК 528 (038)

Справочник геодезиста (в двух книгах). Изд. 2, перераб. и доп. М, «Недра», 1975. 1056 с.

Авт.: В. Д. Большаков, Г. П. Левчук, Г. В. Багратуни, К. В. Бажанов, П. А. Гайдаев, И. И. Краснорылов, А. Н. Кузнецов, А. В. Кондрашков, Е. Г. Ларченко, Н. И. Модринский, М. Е. Пискунов, В. Г. Селиханович, В. Ю. Торочков, М. С. Урмаев, З. С. Хаимов, Б. П. Шимбирев, В. И. Шиллингер, Н. В. Яковлев.

В Справочнике в двух книгах изложены теория и практика геодезических работ, описаны инструменты, способы обработки результатов измерений, техника вычислений. Второе издание Справочника переработано и дополнено новыми разделами: космическая геодезия, радиогеодезические системы, гироскопические приборы, экономика и организация геодезических работ.

Справочник состоит из шести разделов. В книге 1 в первом разделе рассмотрены элементы теории вероятностей и математической статистики применительно к теории ошибок геодезических измерений, теория ошибок и метод наименьших квадратов, вычислительная техника в геодезии. Во втором разделе изложены основные вопросы теории фигуры Земли и гравиметрии, космической геодезии, геодезической астрономии, сфероидической геодезии. В третьем разделе детально освещены основные геодезические работы: триангуляция и трилатерация, радиодальномерные и светодальномерные измерения. В книге 2 даны уравнительные вычисления в триангуляции и трилатерации, полигонометрия, гироскопические определения, нивелирование. Четвертый раздел посвящен методам топографических съемок: теодолитной, тахеометрической, мензульной, и методам фототопографических съемок: комбинированной, стереотопографической, наземной стереофотограмметрии. В пятом разделе приведены основные сведения по инженерно-геодезическим изысканиям, разбивочным работам, методам установки и выверки строительных конструкций и технологического оборудования, наблюдениям за деформациями сооружений. В шестом разделе даны общие понятия об экономике производства, планировании и организации геодезических работ.

Справочник предназначен для инженеров и техников, выполняющих основные геодезические работы и топографические съемки, а также изыскания и разбивки инженерных сооружений. Он будет полезен для преподавателей, аспирантов и студентов геодезических специальностей высших учебных заведений.

Таблиц 140, иллюстраций 431, список литературы — 162 назв.

С $\frac{20701-213}{043\ (01)-75}$ 114—74

© Издательство «Недра», 1975

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое издание «Справочника геодезиста» вышло в свет в 1966 году. За восемь лет, прошедших со дня выхода первого издания настоящей книги, произошли существенные изменения в теории и практике геодезии.

Естественно, что эти изменения нашли отражение во втором издании «Справочника геодезиста». К числу упомянутых изменений прежде всего следует отнести новые главы: космическая геодезия; гироскопические приборы; радиогеодезические системы; экономика, планирование и организация геодезических работ.

Заново написаны главы: уравнительные вычисления в триангуляции, трилатерации и комбинированных сетях; метод наименьших квадратов.

Существенной переработке подверглись главы: теория ошибок измерений; вычислительная техника в геодезии; теория фигуры Земли и гравиметрия; радио- и светодальномерные измерения; раздел — геодезические работы при изысканиях и строительстве инженерных сооружений. Внесены изменения и в другие главы.

Ограниченный объем книги не позволил включить раздел «Сведения из математики, физики, радиотехники».

Авторы получили от читателей «Справочника геодезиста» много замечаний и пожеланий об

улучшении его содержания и постарались по возможности учесть их. Однако авторы отдают себе отчет в том, что и второе издание Справочника не лишено недостатков, и будут благодарны читателям, если они вновь укажут на допущенные в изложении промахи и сообщат свои пожелания и замечания.

Настоящее издание Справочника по техническим причинам выпускается в двух книгах, которые имеют единую нумерацию страниц и общий предметный указатель.

Раздел I

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

I.1. ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

В. Д. Большаков

А. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

I.1.1. Общие понятия

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая количественные закономерности случайных явлений.

Случайное явление — это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта, наблюдения протекает каждый раз несколько по-иному. Однако в массовом проявлении случайные явления обнаруживают вполне определенную закономерность (примерно одинаковое число выпадений гербов и цифр при бросании монеты, более частое попадание в центральную часть мишени, чем на ее края, и т. д.).

Осуществление каждого отдельного наблюдения, опыта будем называть испытанием. Результат испытания назовем событием (например, при подбрасывании монеты могут происходить два события: появление герба, появление цифры). События условно можно разделить на элементарные, которые нельзя разложить на более простые, и сложные, состоящие из двух или более элементарных событий (например, появление положительной ошибки при одном измерении — элементарное событие, появление пяти положительных ошибок при 10 измерениях — сложное событие). При выполнении определенного комплекса условий различают события следующих видов.

1. Достоверные, т. е. такие, которые обязательно происходят (например, появление герба или цифры при одном бросании монеты).

2. Невозможные, которые никогда не происходят (например, появление белого шара при взятии из урны, где только черные шары).

3. Несовместные, которые не могут произойти вместе (например, появление герба и цифры при одном бросании монеты).

4. Совместные, которые могут происходить одновременно (например, попадание снаряда в цель и срабатывание взрывателя).

5. Полную группу событий, которую образуют такие события, одно из которых при испытании обязательно происходит. Полная

группа — достоверное событие (например, выпадение одной из граней при бросании игральной кости).

6. Противоположные события — два несовместных события, образующих полную группу.

7. Равновозможные события — события, имеющие одинаковую объективную возможность появления.

8. Независимые события — события, имеющие возможность появления, не зависящую от того, появились или не появились другие события. Например, выпадение герба в i-ом бросании монеты не зависит от того, какая ее сторона выпала в предыдущих $i-1$ бросаниях.

9. Зависимые события — такие, у которых возможность появления зависит от того, произошли или не произошли другие события (например, возможность вынуть один шар из урны, содержащей n шаров, если уже вынули k шаров и шары обратно не возвращали).

События обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$ или $A_1, A_2, \ldots A_n$.

Достоверное событие обозначают буквой U; невозможное — буквой V; противоположное по отношению к событию A — через $\overline{A}$.

Если вероятность события сколь угодно близка к единице или нулю, событие называется практически достоверным или соответственно практически невозможным. Степень приближения к единице или нулю оценивается, исходя из практических соображений.

Пример 1. При артиллерийской стрельбе из 1000 снарядов, выпущенных из орудий, 999 разрываются, один снаряд не разрывается. Вероятность неразрыва снаряда равна 0,001, разрыва — 0,999. Событие «неразрыв снаряда» при одном выстреле можно считать практически невозможным, событие «разрыв снаряда» — практически достоверным.

I.1.2. Схема случаев. Непосредственный подсчет вероятностей

С каждым событием связывают понятие вероятности — числовой характеристики объективной возможности появления события. Существуют события, вероятность которых можно определить из условий самого опыта, не производя его. Для этого необходимо, чтобы элементарные события, составляющие полную группу, были несовместными и обладали симметричным исходом и в силу этого были бы равновозможными. Говорят, что в этом случае опыт сводится к «схеме случаев». Случай называется благоприятствующим некоторому событию A, если появление этого случая влечет за собой появление данного события A. Если опыт сводится к схеме случаев, то вероятность события A можно оценить по формуле

$$p(A)=\frac{M}{N}, \qquad (I.1.1)$$

где N — общее число случаев, M — число случаев, благоприятствующих событию A. При этом $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$, причем вероятность достоверного события $p(U)=1$, невозможного — $p(V)=0$.

Формулу (I.1.1) называют классическим определением вероятности, а вычисления по (I.1.1) — непосредственным подсчетом веро-

ятностей. Применяя (I.1.1), найдем, что вероятность появления герба при одном бросании монеты

$$p_{\text{герба}} = \frac{1}{2}.$$

Этому же числу равна вероятность появления положительной (отрицательной) ошибки при одном измерении.

Вероятность выпадения грани с цифрой 6 при одном бросании игральной кости

$$p_6 = \frac{1}{6}.$$

Пример 2. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белые.

Так как число благоприятствующих случаев $M = C_a^2$, где C_a^2 — число сочетаний из a белых шаров по 2, а число всевозможных случаев составляет

$$n = C_{a+b}^2,$$

где C_{a+b}^2 — число сочетаний из $a + b$ всех шаров по 2, то

$$p = \frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}.$$

I.1.3. Относительная частота и вероятность

Очевидно, не всякий опыт может быть сведен к схеме случаев, и поэтому существуют события, вероятности которых невозможно вычислить по формуле (I.1.1). Для таких событий применяют другие способы определения вероятностей. Все эти способы связаны с опытом (экспериментом) и понятием относительной частоты (частости) события.

Относительной частотой события называют отношение числа появлений этого события m к числу всех произведенных опытов n, т. е.

$$Q = \frac{m}{n}. \qquad \text{(I.1.2)}$$

При неограниченном числе опытов с вероятностью сколь угодно близкой к единице можно ожидать, что относительная частота (частость) события приближается к его вероятности (теорема Бернулли — закон больших чисел). Это утверждение пишут так:

$$\text{вер. } \lim_{n\to\infty} Q = p.$$

Вероятностный предел (вер. lim) отличается от математического предела и понимается как тенденция стремления к пределу.

I.1.4. Теоремы теории вероятностей

Теоремы теории вероятностей позволяют определить вероятности сложных событий — суммы и произведения элементарных событий, если известны вероятности последних. Суммой событий A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) называется сложное событие B, заключающееся в появлении хотя бы одного из них. Для несовместных событий условно пишут

$$B = \text{или } A_1, \text{ или } A_2, \ldots, \text{ или } A_n,$$

а также

$$B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Теорема. Вероятность суммы двух или нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i). \qquad (I.1.3)$$

Пример 3. Бросают игральную кость. Какова вероятность того, что вскроется грань с четной цифрой.

Решение. Искомое событие наступает, когда вскроются грани с цифрами: или 2, или 4, или 6. Вероятность вскрытия любой грани $p(A_i) = 1/6$.

Искомая вероятность $p(B) = p$ (четн. цифра) $= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$.

Пример 4. В лотерее 1000 билетов, из них падает выигрышей: на один билет — 500 руб.; на 10 билетов — по 100 руб.; на 50 билетов — по 20 руб.; на 100 билетов — по 5 руб. Остальные билеты невыигрышные.

Найти вероятность выигрыша не менее 20 руб. и какой-либо суммы, имея один билет.

Решение. Обозначим события: A — выигрыш не менее 20 руб.; A_1 — выигрыш 20 руб.; A_2 — выигрыш 100 руб.; A_3 — выигрыш 500 руб.; A_4 — выигрыш 5 руб.

Согласно условию

$$A = A_1 + A_2 + A_3, \quad p(A) = p(A_1 + A_2 + A_3).$$

По теореме сложения имеем

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3),$$

но

$$p(A_1) = 50 : 1000 = 0{,}050; \quad p(A_2) = 10 : 1000 = 0{,}010;$$

$$p(A_3) = 1 : 1000 = 0{,}001.$$

Следовательно, получим

$$p(A) = 0{,}050 + 0{,}010 + 0{,}001 = 0{,}061.$$

Вероятность выиграть какую-либо сумму, имея один билет, равна

$$p(A') = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + p(A_4);$$

так как

$$p(A_4) = 100 : 1000 = 0{,}100,$$

то

$$p(A') = 0{,}161.$$

Следствия из теоремы сложения

Следствие 1. Если события A_i образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = p(U) = 1. \qquad (I.1.4)$$

Следствие 2. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1, т. е.

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1 \quad \text{и} \quad p(\overline{A}) = 1 - p(A). \qquad (I.1.5)$$

Произведением событий называется сложное событие C, заключающееся в совместном появлении всех событий A_i. Условно это пишут так:

$$C = \text{и } A_1, \text{ и } A_2, \text{ и, } \ldots, \text{ и } A_n,$$

или

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n.$$

Теорема. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей, т. е.

$$p(C) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i). \qquad (I.1.6)$$

Вероятности независимых событий называются безусловными. Зависимые события имеют так называемые условные вероятности, которые записываются в виде $p(A_1/A_2)$ — условная вероятность события A_1, вычисленная в предположении, что произошло событие A_2, $p(A_i/A_1, A_2, \ldots, A_{i-1})$, условная вероятность события A_i, вычисленная в предположении, что произошли события $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$.

Теорема. Вероятность произведения двух или нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условные вероятности других, т. е. $p(C) = p(A_1) \times$ $\times\, p(A_2/A_1)$; $p\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) \cdot \ldots \cdot p\left(A_n \Big/ \prod_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Пример 5. Найти вероятность того, что при 5 измерениях появятся только положительные ошибки.

Р е ш е н и е. Так как события независимые, то применяем (I.1.6), имеем

$$p(C)=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot\ldots\cdot p(A_4)\cdot p(A_5),$$

где событие A_i — появление положительной ошибки в i-ом измерении. В силу того, что $p(A_i)=\frac{1}{2}$, имеем $p(C)=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$.

П р и м е р 6. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна $p_1=0{,}20$. Какова вероятность поразить цель при одном выстреле, если 2% взрывателей снарядов дают отказы?

Р е ш е н и е. Считая события «попадание в цель» и «действие взрывателя» независимыми, по теореме умножения имеем

$$p=p_1\cdot p_2,$$

где p — вероятность поразить цель; p_2 — вероятность разрыва снаряда при выстреле.

Так как вероятность «неразрыва» равна 2%, т. е. 0,02, то вероятность $p_2=1-0{,}02=0{,}98$ (разрыв и неразрыв — события, составляющие полную группу событий).

Следовательно, $p=p_1\cdot p_2=0{,}20\cdot 0{,}98=0{,}196$.

Теорема. Если события A_i совместны, то вероятность суммы событий

$$p(B)=1-p(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n).$$

Если события A_i независимы, то

$$p(B)=1-\prod_{i=1}^{n}p(\overline{A}_i). \qquad (I.1.7)$$

Для двух таких событий

$$p(B)=p(A_1)+p(A_2)-p(A_1)\cdot p(A_2).$$

Когда все $p(A_i)$ равны между собой и независимы, то

$$p(B)=1-\{p(\overline{A})\}^n. \qquad (I.1.8)$$

П р и м е р 7. На испытательном стенде размещено 50 приборов. Вероятность отказа в работе одного прибора за время t равна $p(A)=0{,}1$. Найти вероятность того, что за время t откажет хотя бы один прибор, если приборы работают независимо друг от друга.

Р е ш е н и е. На основании (I.1.8) имеем

$$p(B)=1-p(\overline{A})^{50}=1-0{,}9^{50}.$$

Логарифмируя $p(\overline{A})^{0,50}=0{,}9^{50}$, получим

$$\lg p(\overline{A})^{0,50}=50\lg 0{,}9=50\cdot(\bar{1}{,}954)=-50\cdot 0{,}046=-2{,}30$$

и

$$\lg p(\overline{A})^{0,50}=-3{,}70,$$

откуда

$$p(\overline{A}) = 0{,}0051 \quad \text{и} \quad p(B) = 0{,}995.$$

Пример 8. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень с вероятностью попадания, соответственно равной $p_1 = 0{,}7$ и $p_2 = 0{,}9$.

Найти вероятность хотя бы одного попадания.

Решение. Так как попадание в мишень обоими стрелками — события независимые, но совместные, то, применяя (I.1.7), имеем

$$p(B) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}97.$$

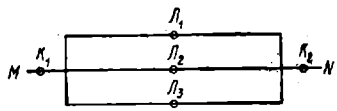


Рис. I.1.1

Пример 9. Электрическая цепь составлена по схеме рис. I.1.1.

Выход из строя за время t различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности:

Элемент	K_1	K_2	$Л_1$	$Л_2$	$Л_3$
Вероятность	0,10	0,20	0,15	0,20	0,10

Определить вероятность разрыва цепи за указанный промежуток времени.

Решение. Цепь выйдет из строя (событие B), когда откажут в работе следующие элементы: или K_1 (событие A_1), или все $Л_j$ (событие A_3), или K_2 (событие A_2), или все K_i и $Л_j$ вместе.

Так как эти события совместны, то имеем на основании (I.1.7)

$$p(B) = 1 - p(\overline{A}_1) \cdot p(\overline{A}_2) \cdot p(\overline{A}_3).$$

Вероятности:

$$p(\overline{A}_1) = 0{,}90; \quad p(\overline{A}_2) = 0{,}80.$$

Событие $\overline{A}_3$ заключается в том, что хотя бы один из элементов $Л_j$ не откажет, поэтому $p(\overline{A}_3)$ находим также по теореме сложения для совместных событий

$$p(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}15 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}10 = 0{,}997,$$

отсюда

$$p(B) = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}997 = 0{,}282.$$

I.1.5. Многократные (повторные) испытания. Вероятнейшее число появлений события

Если необходимо определить вероятность того, что при n независимых испытаниях интересующее нас событие A появится k раз, то применяют формулу Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{I.1.9}$$

где $P_n(k)$ — вероятность появления события k раз при n испытаниях, C_n^k — число сочетаний из n по k, p — вероятность появления события в отдельном опыте, $q = 1 - p$ — вероятность непоявления события в отдельном опыте. Напомним, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \tag{I.1.10}$$

причем

$$C_n^0 = C_n^n = 1. \tag{I.1.11}$$

При больших значениях k и n для упрощения вычисления факториалов применяется формула Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}. \tag{I.1.12}$$

При многократных испытаниях вероятность $P_n(k)$ по форме представляет собой члены разложения бинома $(q+p)^n$, т. е.

$$(q+p)^n = C_n^0 q^n p^0 + C_n^1 q^{n-1} p^1 + \ldots + C_n^k q^{n-k} p^k + \ldots + C_n^n q^0 p^n. \tag{I.1.13}$$

Контролем вычислений по формуле (I.1.13) является

$$(q+p)^n = 1.$$

Пример 10. По одной и той же мишени в одинаковых условиях производятся четыре независимых выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле $p = 0{,}33$ ($q = 0{,}67$). Определить вероятность поражения мишени $k = 0, 1, 2, 3, 4$ раза.

Решение. Так как общее число испытаний (выстрелов) $n = 4$, то имеем:

$$P_{4(0)} = C_4^0 q^4 p^0 = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} \cdot 0{,}67^4 \cdot 0{,}33^0; \quad P_{4(0)} = 0{,}20;$$

$$P_{4(1)} = C_4^1 q^3 p^1 = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} \cdot 0{,}67^3 \cdot 0{,}33^1; \quad P_{4(1)} = 0{,}40;$$

$$P_{4(2)} = C_4^2 q^2 p^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} \cdot 0{,}67^2 \cdot 0{,}33^2; \quad P_{4(2)} = 0{,}29;$$

$$P_{4(3)} = C_4^3 q^1 p^3 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} \cdot 0{,}67^1 \cdot 0{,}33^3; \quad P_{4(3)} = 0{,}10;$$

$$P_{4(4)} = C_4^4 q^0 p^4 = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} \cdot 0{,}67^0 \cdot 0{,}33^4; \quad P_{4(4)} = 0{,}01.$$

Контроль. $0{,}20 + 0{,}40 + 0{,}29 + 0{,}10 + 0{,}01 = 1{,}00$.

Приведем следующие полезные формулы:

1. Вероятность того, что событие A появится не менее l раз, т. е. $k \geqslant l$,

$$P_n(k \geqslant l) = \sum_{k=l}^{n} P(k).$$

2. Вероятность того, что событие A появится не более l раз, т. е. $k \leqslant l$:

$$P_n(k \leqslant l) = \sum_{k=0}^{l} P_n(k).$$

При этом легко получить соотношение

$$P_n(k \leqslant l) = 1 + P_n(l) - P_n(k \geqslant l). \qquad (I.1.14)$$

Обозначим через A_1 событие, заключающееся в том, что интересующее нас событие появится большее число раз, чем противоположное событие, через A_2 — меньшее число раз и через A_3 — одинаковое число раз (при нечетном n $p(A_3) = 0$) (например, событие A_1 — гербов больше, A_2 — гербов меньше, A_3 — одинаковое число появления гербов и цифр при n бросаний монеты).

Очевидно, имеет место зависимость

$$p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = 1, \qquad (I.1.15)$$

причем, если $p = {}^1/_2$, то $p(A_1) = p(A_2)$.

В условиях последнего примера вероятность попадания не менее двух раз

$$P_4(k \geqslant 2) = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 0{,}40,$$

не более двух раз

$$P_4(k \leqslant 2) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = 0{,}89,$$

или по формуле (I.1.14)

$$P_4(k \leqslant 2) = 1 + P_4(2) - P_4(k \geqslant 2) = 1 + 0{,}29 - 0{,}40 = 0{,}89.$$

Вероятность того, что попаданий больше, чем промахов,

$$p(A_1) = P_4(3) + P_4(4) = 0{,}11;$$

одинаковое число промахов и попаданий $p(A_3) = P_4(2) = 0{,}29$.

Очевидно, что $p(A_2) = P_4(0) + P_4(1) = 0{,}60$ — вероятность того, что попаданий меньше, чем промахов. Контроль (I.1.15) дает

$$p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = 0{,}11 + 0{,}60 + 0{,}29 = 1{,}00.$$

Вероятнейшим числом появлений события при многократных испытаниях (k_0) называется число, соответствующее наибольшей при данных условиях вероятности. В обычном смысле — это наиболее возможное число.

В математическом смысле число k_0 отвечает условиям:

$$P_n(k_0) \geqslant P_n(k_0+1),$$

$$P_n(k_0) \geqslant P_n(k_0-1).$$

В теории вероятностей доказывается, что эти условия будут соблюдены, если

$$np-q \leqslant k_0 \leqslant pn+p. \qquad (I.1.16)$$

В условии примера 10 имеем:

$$4\cdot 0{,}33-0{,}67 \leqslant k_0 \leqslant 4\cdot 0{,}33+0{,}33$$

или $0{,}65 \leqslant k_0 \leqslant 1{,}65$, откуда $k_0 \approx 1$.

Пример 11. Из многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 июля равна 0,227. Найти вероятнейшее число дней k_0, когда в ближайшие 50 лет 1 июля выпадает дождь.

Решение. По условию задачи $n = 50$, $p = 0{,}227$. На основании (I.1.16)

$$50\cdot 0{,}227-0{,}773 \leqslant k_0 \leqslant 50\cdot 0{,}227+0{,}227,$$

$$10{,}5 \leqslant k_0 \leqslant 11{,}5.$$

Следовательно, за ближайшие 50 лет 1 июля наиболее возможное число дождливых дней $k_0 \approx 11$.

Если значение p выражается числом, не близким к нулю, то при большом n $k_0 \approx np$.

I.1.6. Понятие о случайной величине и законе распределения вероятностей

Одним из важнейших основных понятий теории вероятностей является понятие о случайной величине.

Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно. Примером случайных величин являются: 1) число попаданий при n выстрелах, 2) результат измерения какой-либо величины, 3) координаты точек попадания при стрельбе и т. д.

Случайные величины могут быть прерывными (дискретными) и непрерывными. Прерывной называют такую случайную величину, возможные значения которой можно заранее указать (см. пример 1). Непрерывной называют случайную величину, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый промежуток на числовой оси и не могут быть перечислены заранее (см. примеры 2 и 3).

От событий всегда можно перейти к случайным величинам. Пусть производится опыт, в котором может появиться или не появиться событие A.

Вместо события A можно рассматривать случайную величину, равную 1, если событие A происходит, и равную 0, если событие A не происходит.

В отличие от величины неслучайной случайную величину недостаточно характеризовать числом, но необходимо каждому из ее

возможных числовых значений приписывать вероятность появления этих значений.

Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможным значением случайной величины и вероятностью его появления, называют законом распределения случайной величины. Закон распределения — фундаментальное понятие теории вероятностей.

Для характеристики закона распределения прерывной случайной величины часто применяют ряд (таблицу) и многоугольник распределения. Если X — случайная величина, которая может принять значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то ряд распределения имеет вид таблицы,

x_i	x_1	x_2	. . . . .	x_n
p_i	p_1	p_2	. . . . .	p_n

в которой перечислены возможные значения случайной величины x и соответствующие им вероятности. Так как в таблице перечислены все возможные значения x_i, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Например, для случайной величины k — числа появлений положительной ошибки при 8 измерениях ряд распределения имеет вид (биномиальное распределение):

Число появления k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Контроль
p_i	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{71}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{256}{256}$

Здесь

$$P_8^{(k)} = C_8^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{8-k} = \frac{1}{256} C_8^k.$$

Чтобы придать ряду распределения более наглядный вид, прибегают к его графическому изображению, откладывая по оси абсцисс значения x_i, а по оси ординат — вероятности. Концы ординат соединяют ломаной линией. Полученная фигура называется многоугольником распределения. Так, для приведенного выше ряда распределения многоугольник имеет вид, показанный на рис. I.1.2.

Из этого графика, в частности, следует, что $k_0 = 4$.

Функция распределения. Для задания закона распределения как прерывной, так и непрерывной случайной величины служит так называемая функция распределения. Функцией распределения называется вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее некоторого ее заданного значения x, т. е.

$$F(x) = P(X < x). \qquad \text{(I.1.17)}$$

Функцию $F(x)$ называют еще интегральной функцией распределения. Приведем ее некоторые свойства:

$$1.\ F(-\infty)=0,\quad 2.\ F(+\infty)=1,$$

$$3.\ F(x_2)\geqslant F(x_1),\quad \text{если}\quad x_2\geqslant x_1.$$

Эти свойства легко иллюстрировать с помощью геометрической интерпретации как вероятность попадания на отрезок левее точки x, расположенной на числовой оси OX (рис. I.1.3).

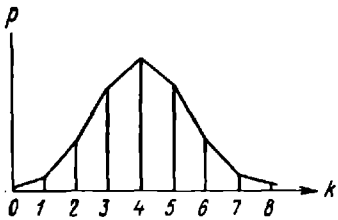


Рис. I.1.2

Часто оказывается необходимым знать вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в некоторых пределах, например, от α до β.

При этом условимся левый конец α включать в участок (α, β), а правый не включать. Можно показать, что тогда искомая вероятность

$$P\{\alpha\leqslant x<\beta\}=F(\beta)-F(\alpha). \qquad (I.1.18)$$

Заметим, что

$$P(x=\alpha)=\lim_{\beta\to\alpha}[F(\beta)-F(\alpha)].$$

При этом для непрерывной величины $P(x=\alpha)=0$. Однако такое значение случайной величины нельзя считать невозможным событием (оно происходит, но крайне редко).

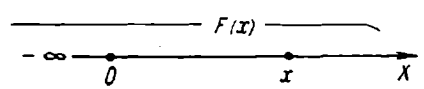


Рис. I.1.3

Пример 12. В условиях примера 10 найти вероятность того, что число попаданий в мишень будет находиться в пределах $1\leqslant k\leqslant 3$ (т. е. будет равно 1 или 2).

Решение. На основании (I.1.18) имеем

$$P\{1\leqslant k<3\}=F(k=3)-F(k=1)=0{,}89-0{,}20=0{,}69.$$

Действительно,

$$P\{1\leqslant k\leqslant 3\}=P_4(1)+P_4(2)=0{,}40+0{,}29=0{,}69.$$

Пример 13. Функция распределения случайной величины имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<-\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{1}{2}(\sin x+1) & \text{при } -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания величины x на участок $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Р е ш е н и е. Так как случайная величина непрерывна, то $P(x = \alpha) = 0$.

Поэтому

$$P\left\{0 < x < \frac{\pi}{4}\right\} = P\left\{0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}\right\} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + 1\right) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Плотность распределения. Закон распределения для непрерывной случайной величины удобно задавать в виде плотности распределения (кривой распределения), которая определяется как производная от функции распределения, т. е.

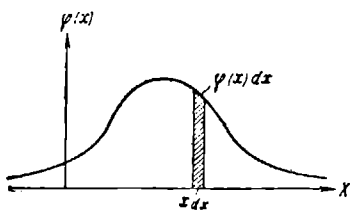


Рис. I.1.4

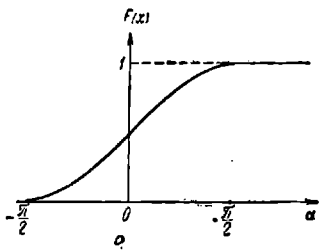


Рис. I.1.5

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \varphi(x). \qquad (I.1.19)$$

Плотность $\varphi(x)$ называется еще дифференциальным законом распределения, а функция $F(x)$ — интегральным законом.

Плотность $\varphi(x)$ обладает свойствами:

$$1)\ \varphi(x) \geqslant 0,$$

$$2)\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1, \qquad (I.1.20)$$

т. е. площадь, заключенная «под кривой распределения», всегда равна 1. Если все возможные значения x заключены в пределах от α до β,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx = 1.$$

Величину $\varphi(x)\,dx$, выражающую с точностью до бесконечно малой вероятность попадания на участок dx, примыкающий в точке x, называют элементом вероятности (рис. I.1.4).

Очевидно, что $F(x)$ и $\varphi(x)$ связаны соотношением

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx. \qquad (1.1.21)$$

Вероятность попадания на участок выражается через плотность так:

$$P\{\alpha \leqslant x \leqslant \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx. \qquad (1.1.22)$$

График $F(x)$ в примере 13 изображен на рис. 1.1.5.

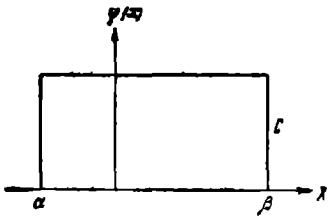


Рис. 1.1.6

Пример 14. Случайная величина x подчинена закону распределения с плотностью $\varphi(x) = C$ при $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ (равномерный закон распределения).

а) Выразить C через α и β, б) найти вероятности попадания в интервал $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_1$, в) найти $F(x)$.

Решение. а) Так как график функции $\varphi(x) = C$ имеет вид Рис. I.1.6, то на основании свойства (I.1.20) площадь прямоугольника (или $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx$) равна единице, т. е.

$$(\beta - \alpha) \cdot C = 1.$$

Откуда

$$C = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\beta - \alpha};$$

б) имеем

$$P\{\alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_1\} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \varphi(x)\,dx = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta - \alpha};$$

в)

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} \varphi(x)\,dx = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

I.1.7. Числовые характеристики законов распределения

Математическое ожидание. Во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать случайную величину полностью (законом распределения), часто достаточно знать только отдельные числовые параметры, характеризующие закон распределения, например, какое-то среднее значение (центр распределения), около которого группируются возможные значения случайной

величины, какое-то число, характеризующее степень разброса этих значений относительно среднего, и т. д.

Характеристикой центра распределения является так называемое математическое ожидание случайной величины, определяемое в виде

$$M[x]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (1.1.23)$$

для прерывных величин и

$$M[x]=\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,dx \qquad (1.1.24)$$

для непрерывных.

Доказывается, что при неограниченном числе испытаний среднее арифметическое $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i Q_i$, где Q_i — относительная частота, стремится по вероятности к $M[x]$, т. е.

$$\text{вер. } \lim_{n\to\infty} \bar{x}=M[x].$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} M[c]&=c\\ M[cx]&=cM[x]\\ M\left[\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right]&=\sum_{i=1}^{n} c_i M[x_i]\\ M[x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n]&=\prod_{i=1}^{n} M[x_i] \end{aligned}\right\}, \qquad (1.1.25)$$

где c — постоянная (неслучайная) величина.

Последнее свойство справедливо только для независимых величин. Математическое ожидание (М. О.) числа появления события при k испытаниях

$$M[k]=np.$$

Так, в условиях примера 10 М. О. числа попаданий в мишень при 4-х выстрелах

$$M[k]=4\cdot 0{,}33=1{,}32.$$

Это же значение можно непосредственно получить по формуле

$$M[k]=\sum_{i=1}^{n} k_i P_n(k_i)=0\cdot 0{,}20+1\cdot 0{,}40+2\cdot 0{,}29+$$

$$+3\cdot 0{,}10+4\cdot 0{,}01=1{,}32.$$

Пример 15. Найти математическое ожидание случайной величины x, подчиненной равномерному закону $\varphi(x) = 1/(\beta - \alpha)$.

Решение. На основании (I.1.24)

$$M[x] = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\beta - \alpha)} = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

Пример 16. Найти математическое ожидание случайной величины

$$t = \frac{x - M[x]}{\sigma}.$$

Решение. На основании первого из свойств I.1.25 имеем

$$M[t] = \frac{1}{\sigma}(M[x] - M[x]) = 0.$$

Несложно показать, что М. О. случайной величины x, подчиненной нормальному закону распределения с плотностью

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (I.1.26)$$

равно параметру a этого закона.

Моменты. Кроме математического ожидания, в теории вероятностей употребляется еще ряд характеристик — так называемые моменты.

Начальным моментом s-го порядка случайной величины называется математическое ожидание s-ой степени этой случайной величины:

$$\alpha_s = M[x^s]. \qquad (I.1.27)$$

При $s = 1$ имеем $\alpha_1 = M[x]$.

Для прерывных величин

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i,$$

для непрерывных

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \varphi(x)\, dx. \qquad (I.1.28)$$

Центральным моментом порядка s случайной величины X называют математическое ожидание s-ой степени отклонения X от ее математического ожидания:

$$\mu_s = M[(x - M[x])^s]. \qquad (I.1.29)$$

Случайная величина $x - M[x]$ называется центрированной случайной величиной. Для прерывной случайной величины

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[x])^s p_i, \tag{I.1.30}$$

для непрерывной

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[x])^s \varphi(x)\, dx. \tag{I.1.31}$$

Центральные моменты всегда можно выразить через начальные. Так,

$$\mu_1 = 0,$$
$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$
$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$$
. . . . . и т. д.

Имеют употребление еще так называемые центральные абсолютные моменты

$$\nu_s = M[|x - M[x]|^s],$$

причем среди них наиболее важное значение имеет среднее отклонение

$$\vartheta = M[|x - M[x]|] = \nu_1. \tag{I.1.32}$$

Дисперсия. Особое значение имеет центральный момент второго порядка

$$\mu_2 = D = M[(x - M[x])^2], \tag{I.1.33}$$

называемый дисперсией. Дисперсия характеризует степень разброса случайной величины относительно центра распределения. Дисперсия обладает следующими основными свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ D[c] = 0 \\ &2)\ D[cx] = c^2 D[x] \\ &3)\ D\left[\sum c_i x_i\right] = \sum c_i^2 D[x_i], \text{ где } c = \text{const} \end{aligned}\right\}. \tag{I.1.34}$$

Последнее свойство справедливо лишь для независимых величин. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Для наглядной характеристики разброса удобно пользоваться так называемым стандартом

$$\sigma = +\sqrt{D}.$$

Дисперсия случайной величины, подчиненной биномиальному закону (дисперсия числа появлений события при n испытаниях), выражается формулой

$$D[k] = npq.$$

Пример 17. Ряд распределения случайной величины имеет вид

x_i	0	1
p_i	q	p

где $q = 1 - p$.

Найти дисперсию $D[x]$.

Решение. На основании (I.1.23) имеем математическое ожидание, равное

$$M[x] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$

а согласно (I.1.30) дисперсия равна

$$D[x] = (0-p)^2 \cdot q + (1-p)^2 \cdot p = pq\,(p+q) = pq.$$

Пример 18. Найти дисперсию случайной величины x, подчиненной равномерному закону распределения.

Решение. Имеем (см. пример 14)

$$D = \int_{\alpha}^{\beta} (x - M[x])^2 \frac{1}{\beta - \alpha}\, dx.$$

С учетом того, что $M[x] = (\beta + \alpha)/2$ (см. пример 15), выполнив интегрирование, найдем

$$D = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$

В частности, для ошибок округления, подчиняющихся равномерному закону распределения ($\beta = -\alpha = 0{,}5$ ед. посл. знака), получим

$$D = \frac{0{,}5^2}{3}; \quad \sigma = \frac{0{,}5}{\sqrt{3}} \text{ ед. посл. знака.}$$

Пример 19. Найти дисперсию суммы $u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ одинаково округленных слагаемых.

Решение. На основании свойства 3 из (I.1.34) имеем

$$D[u] = \sum D[x_i] = nD[x_i],$$

но

$$D[x_i] = \frac{0{,}5^2}{3},$$

Поэтому

$$D[x_i] = \frac{n}{3}\,0{,}25, \quad \sigma_u = 0{,}5\sqrt{\frac{n}{3}}.$$

Пример 20. Найти дисперсию случайной величины

$$t=\frac{x-M[x]}{\sigma}, \quad \text{где} \quad \sigma=\sqrt{D[x]}.$$

Решение. На основании свойств (I.1.34) дисперсии

$$D_t=\frac{1}{\sigma_x^2}[D_{[x]}-D_{M[x]}]=\frac{1}{\sigma_x^2}D[x]=1.$$

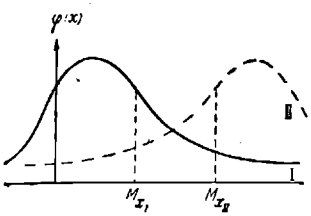


Рис. I.1.7

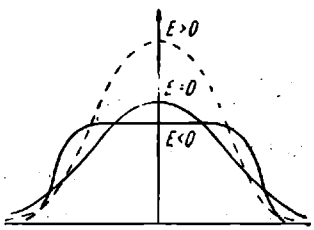


Рис. I.1.8

Можно показать, что дисперсия случайной величины x, подчиненной нормальному закону распределения с плотностью (I.1.26),

$$D[x_l]=\sigma^2.$$

Асимметрия и эксцесс. Кроме дисперсии, для характеристики распределения часто используются еще третий и четвертый центральные моменты.

Величина

$$S_k=\frac{\mu_3}{\sigma^3}, \qquad \text{(I.1.35)}$$

носит название «асимметрии». Для симметричного распределения $S_k=0$.

На рис. I.1.7 показано два асимметричных распределения. Кривая I имеет положительную асимметрию ($S_k>0$), кривая II — отрицательную ($S_k<0$).

Величина

$$E=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3 \qquad \text{(I.1.36)}$$

носит название «эксцесса» и является мерой крутости (островершинности или плосковершинности распределения). Для нормального распределения $E=0$. На рис. I.1.8 представлены три кривые распределения с положительным, равным нулю и отрицательным эксцессами.

Для оценки допустимости отклонения значений эксцесса от нуля, а следовательно, действительного распределения от нормального, служит формула

$$\sigma_E=\sqrt{\frac{24}{n}},$$

где σ_E — стандарт эксцесса, n — число испытаний (измерений).

I.1.8. Нормальный закон распределения. Интеграл вероятностей

Понятие о центральной предельной теореме Ляпунова. Теорема Ляпунова устанавливает условия, при которых возникает наиболее важный и наиболее часто встречающийся в природе нормальный закон распределения, имеющий плотность

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $a=M[x]$ и $\sigma=\sqrt{D[x]}$.

Теорему Ляпунова упрощенно можно сформулировать так. Если некоторая случайная величина есть сумма достаточно бо́льшого числа других случайных независимых величин, отклоняющихся от своих математических ожиданий на весьма малые величины по сравнению с отклонениями суммарной величины, то закон распределения этой суммарной случайной величины будет близок к нормальному.

На основании этой теоремы можно полагать, что ошибки измерений подчиняются нормальному закону, так как они складываются из суммы большего числа элементарных ошибок. По этой же причине координаты попадания в цель при стрельбе подчиняются этому закону распределения. Таких примеров можно привести много.

Приближенная формула Лапласа для вычисления $P_n(k)$. Число появлений события при достаточно большом числе испытаний можно представить в виде суммы случайных величин, отвечающих условиям теоремы Ляпунова. Поэтому можно доказать, что при большом n вероятность

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma_k}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (I.1.37)$$

(приближенная формула Лапласа), где $\sigma_k=\sqrt{npq}$.

$$t=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Учитывая, что с изменением k на единицу величина t получит приращение

$$\Delta t=\frac{k+1-np}{\sqrt{npq}}-\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{1}{\sqrt{npq}},$$

(I.1.37) переписываем в виде

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\Delta t.$$

Для функции

$$y'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

составлена таблица (см. прил. 1). Тогда

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot y'. \qquad (I.1.38)$$

Пример 21. Найти вероятность выпадения герба 4 раза при 10 бросаниях монеты.

Решение. Имеем

$$t = \frac{4-5}{\sqrt{2{,}5}} = -0{,}632,$$

$$y' = 0{,}460, \quad \Delta t = \frac{1}{\sqrt{2{,}5}} = 0{,}632.$$

На основании (I.1.38)

$$P_{10}(4) = \frac{1}{\sqrt{2}} 0{,}460 \cdot 0{,}632 = 0{,}207.$$

Биномиальное распределение дает

$$P_{10}(4) = 0{,}205.$$

Теорема Лапласа. На практике важнее определить вероятность того, что число появлений события k будет заключено в некоторых пределах, т. е. найти вероятность $P\{a \leqslant k < b\}$. На основании (I.1.19) имеем

$$P\{a \leqslant k < b\} = F(b) - F(a),$$

где

$$F(k) = \sum_{k=0}^{k-1} P_n(k) = \sum_{k=0}^{k=1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}.$$

Учитывая, что при $n \to \infty$, $P_n(k) \to 0$, величина $\Delta t \to 0$ и функция $e^{-\frac{t^2}{2}}$ непрерывна, можно написать

$$P\{a < k < b\} = P\{t_1 < t < t_2\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F(t_2) - F(t_1), \qquad (I.1.39)$$

где

$$t_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}; \quad t_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}.$$

Формула (I.1.39) дает хорошие результаты уже при $n \geqslant 20$.

Выражение (I.1.39) носит название теоремы Лапласа. Его можно записать также в виде

$$P\left\{t_1<\frac{k-np}{\sqrt{npq}}<t_2\right\}=P\left\{t_1\sqrt{\frac{pq}{n}}<\frac{k}{n}-p<t_2\sqrt{\frac{pq}{n}}\right\}.$$

Но величина $Q=\frac{k}{n}$ есть относительная частота появления события, а величина $\sqrt{p\,q/n}=\sigma_Q$ есть стандарт частоты.

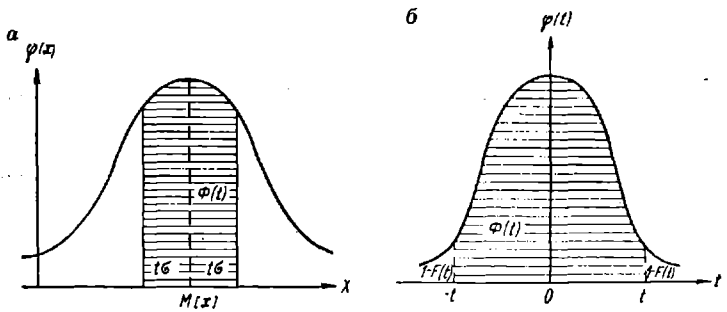


Рис. I.1.9

Поэтому вероятность отклонения относительной частоты от вероятности по абсолютной величине на заданное число $\varepsilon=t\sigma_Q$ определим по формуле

$$P\left(|Q-p|<\varepsilon\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (I.1.40)$$

Выражение (I.1.39) будет справедливо для любой случайной величины X, подчиненной нормальному распределению. В общем случае

$$t_2=\frac{b-M[x]}{\sigma[x]},\quad t_1=\frac{a-M[x]}{\sigma[x]},$$

где a и b — нижний и верхний пределы изменения случайной величины X.

Интеграл вероятностей (функция Лапласа). Для вычисления вероятности $P\{a<x<b\}$ удобно ввести функцию $\Phi(t)$, которая представляет собой вероятность попадания в интервал, симметричный относительно математического ожидания, т. е.

$$\Phi(t)=P\{|x-M[x]|<t\sigma\}.$$

Функция $\Phi(t)$ численно равна заштрихованной площади рис. I.1.9:

а) в осях X и $\varphi(x)$; *б*) в осях t и $\varphi(t)$.

Как видно из рис. I.1.9, имеет место связь

$$F(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(t). \qquad \text{(I.1.41)}$$

$F(t)$ есть площадь под кривой $\varphi(t)$, ограниченная справа абсциссой t. Подставив (I.1.41) в выражение

$$P\{a<x<b\}=P\{t_1<t<t_2\}=F(t_2)-F(t_1),$$

получим

$$P\{a<x<b\}=\frac{1}{2}\{\Phi(t_2)-\Phi(t_1)\}. \qquad \text{(I.1.42)}$$

Функция $\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ нечетная, т. е. обладает свойством

$$\Phi(-t)=-\Phi(t).$$

Функция $\Phi(t)$ называется интегралом вероятностей и является одной из важных в теории вероятностей.

Аналитически она выражается в виде

$$\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx. \qquad \text{(I.1.43)}$$

Для вычислений интегралу придают вид

$$\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{40}-\frac{t^7}{336}+\frac{t^9}{3456}-\frac{t^{11}}{42\,240}+\ldots\right). \qquad \text{(I.1.44)}$$

Так как

$$\sqrt{\pi}=1{,}77245,\quad \sqrt{2}=1{,}41421,$$

то

$$\Phi(t)=0{,}797888\left(t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{40}-\frac{t^7}{336}+\frac{t^9}{3456}-\ldots\right). \qquad \text{(I.1.45)}$$

При вычислениях $\Phi(t)$ пользуются обычно таблицами (см. прил. 2).

Пример 22. Вычислить интеграл вероятностей для $t=0{,}30;\ 0{,}40;\ 0{,}50;\ 0{,}60$.

Р е ш е н и е. Применяя формулу (I.1.45), получаем

$$\Phi(t_1)=0{,}798\left(0{,}30-\frac{0{,}30^3}{6}+\frac{0{,}30^5}{40}-\ldots\right);\quad \Phi(t_1)=0{,}236;$$

$$\Phi(t_2)=0{,}798\left(0{,}40-\frac{0{,}40^3}{6}+\frac{0{,}40^5}{40}-\ldots\right);\quad \Phi(t_2)=0{,}311;$$

$$\Phi(t_3)=0{,}798\left(0{,}50-\frac{0{,}50^3}{6}+\frac{0{,}50^5}{40}-\ldots\right);\quad \Phi(t_3)=0{,}383;$$

$$\Phi(t_4)=0{,}798\left(0{,}60-\frac{0{,}60^3}{6}+\frac{0{,}60^5}{40}+\ldots\right);\quad \Phi(t_4)=0{,}452.$$

Проверка вычислений $\Phi(t)$ по таблицам (прил. 2) показывает сходимость результатов в пределах ошибок округлений.

П р и м е р 23. Вычислить наиболее возможное число ошибок Δ из общего их числа $n = 100$, превышающих по абсолютной величине:

а) одинарный стандарт измерений, т. е. σ;

б) удвоенный стандарт, т. е. 2σ;

в) $2{,}5\sigma$;

г) утроенный стандарт, т. е. 3σ при $n = 1000$.

Р е ш е н и е. По условию задачи имеем при $n = 100$:

а) $|\Delta| > \sigma$; б) $|\Delta| > 2\sigma$; в) $|\Delta| > 2{,}5\sigma$; г) $|\Delta| > 3\sigma$.

Необходимо определить:

а) $\{P\,|\,\Delta| > \sigma\}$; б) $P\,\{|\Delta| > 2\sigma\}$; в) $P\,\{|\Delta\,| > 2{,}5\sigma\}$; г) $P\{|\Delta\,| > 3\sigma\}$.

Определим $\Phi(t)$ по таблице (прил. 2) и сведем результаты вычислений в табл. I.1.1.

Таблица I.1.1

Число ошибок n	Заданное предельное значение $\lvert\Delta\rvert$	t	$\Phi(t)$	$P(\Delta > t\sigma) = 1-\Phi(t)$	Число ошибок, превышающих заданное, $k = n\{1-\Phi(t)\}$	Число ошибок, укладывающихся в предел от 0 до $\pm t\sigma$	Контроль
100	1,0	1	0,6827	0,3173	32	68	100
100	2,0	2	0,9545	0,0455	5	95	100
100	2,5	2,5	0,9876	0,0124	1	99	100
1000	3,0	3,0	0,9973	0,0027	3	997	1000

П р и м е р 24. Найти вероятность того, что ошибка измерений Δ по абсолютной величине не превзойдет предел $4'' < |\Delta| < 6''$, если $\sigma = 10''$.

Р е ш е н и е. На основании теоремы сложения имеем

$$P\{4<|\Delta|<6\}=P\{-6<\Delta<-4\}+P\{4<\Delta<6\}.$$

Можно написать по (I.1.42)

$$P\{4<|\Delta|<6\}=2P\{4<\Delta<6\}=$$

$$=\Phi\left(\frac{6}{10}\right)-\Phi\left(\frac{4}{10}\right)=0{,}452-0{,}311=0{,}141.$$

I.1.9. Среднее и вероятное отклонение. Их связь со стандартом при нормальном законе распределения

Кроме стандарта σ, иногда применяются другие критерии разброса случайной величины или, если случайная величина — ошибка измерения, критерии точности измерений.

Среднее отклонение ϑ определяется как

$$\vartheta=M[|x-M[x]|] \qquad (I.1.46)$$

(центральный абсолютный момент первого порядка см. (I.1.32).

Справедлива формула

$$\sigma=1{,}25\vartheta. \qquad (I.1.47)$$

Вероятным отклонением r называется величина, больше и меньше которой (по абсолютной величине) ошибки в ряде наблюдений равновозможны, т. е.

$$P\{|\Delta|<r\}=\frac{1}{2}.$$

Имеет место формула

$$r=0{,}67\sigma. \qquad (I.1.48)$$

П р и м е р 25. Найти вероятность того, что ошибка Δ не превзойдет предел, равный: а) 2ϑ, б) $2r$.

Р е ш е н и е.

а) $P\{|\Delta|<2\vartheta\}=\Phi(t)$; $t=\frac{2\vartheta}{\sigma}=\frac{2\vartheta}{1{,}25\vartheta}=1{,}6$,

поэтому

$$P\{|\Delta|<2\vartheta\}=\Phi(1{,}6)=0{,}890;$$

б) $P\{|\Delta|<2r\}=\Phi(t)$; $t=\frac{2r}{\sigma}=\frac{1{,}34\sigma}{\sigma}=1{,}34$,

поэтому

$$P\{|\Delta|<2r\}=\Phi(1.34)=0{,}820.$$

I.1.10. Понятие о статистических связях. Коэффициент корреляции. Уравнение регрессии

Рассматривая понятие события, мы говорили о независимых и зависимых событиях. Независимые события A и B определялись как такие, условные вероятности которых равны безусловным, т. е. $P(B/A) = P(B)$ или $P(A/B) = P(A)$. Теорема умножения для независимых событий имела вид $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Случайная величина Y называется независимой от случайной величины X, если закон распределения величины Y не зависит от того, какое значение приняла величина X. Для непрерывных случайных величин условие независимости Y от X может быть записано в виде

$$\varphi(y/x) = \varphi_2(y),$$

где $\varphi(y/x)$ — плотность распределения Y при условии, что X приняла значение x (условная плотность), $\varphi_2(y)$ — плотность распределения Y. Аналогично можно написать условие независимости

$$\varphi(x/y) = \varphi_1(x).$$

Для двух независимых непрерывных случайных величин теорема умножения принимает вид

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y),$$

где

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y} —$$

плотность совместного распределения, а

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} —$$

функция совместного распределения.

Могут встретиться две формы зависимостей: функциональная и статистическая (вероятностная).

Функциональной зависимостью между двумя величинами X и Y называют такую зависимость, при которой каждому значению X соответствуют значения Y, которые можно точно указать (например, $Y = \sqrt{x}$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ и т. д.).

Статистической (вероятностной) зависимостью между двумя величинами X и Y называют такую зависимость, при которой каждому значению X соответствует распределение Y, изменяющееся с изменением X (условное распределение).

Частным случаем статистической зависимости является такая, при которой с изменением X изменяется математическое ожидание Y по линейному закону. Эта зависимость называется прямолинейной корреляционной (корреляцией); например, зависимость между ростом и весом человека ($Y_{кг} \approx X_{см} - 100$).

Если зависимость между измеряемыми величинами будет установлена и выражена формулой, то ее можно использовать для надлежащей организации измерений и обработки их результатов.

Коэффициент корреляции. Теснота корреляционной зависимости между двумя случайными величинами X и Y измеряется так называемым коэффициентом корреляции, определяемым следующим образом:

$$r = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \tag{I.1.49}$$

где корреляционный момент

$$k_{xy} = \mu_{1.1} = M[(x - M[x])(y - M[y])] = M[x \cdot y] - M[x] \cdot M[y] - \tag{I.1.50}$$

центральный смешанный момент второго порядка, наиболее важная числовая характеристика системы двух случайных величин. Вообще центральный смешанный момент порядка $p + s$ определяется как

$$\mu_{p.s} = M[(x - M[x])^p (y - M[y])^s].$$

В частном случае, очевидно, имеем

$$\mu_{2.0} = D[x], \quad \mu_{0.2} = D[y].$$

Коэффициент корреляции изменяется в пределах

$$-1 \leqslant r \leqslant 1.$$

Когда коэффициент корреляции равен $+1$ или -1, между X и Y существуют точные прямолинейные функциональные связи, т. е.

$$y = ax + c,$$

$$x = by + d.$$

В случае, когда $r < 0$, имеет место отрицательная корреляция: с уменьшением (увеличением) x имеет тенденцию увеличиваться (уменьшаться) y; при $r > 0$ говорят о положительной корреляции: с уменьшением (увеличением) x имеет тенденцию уменьшаться (увеличиваться) y.

Форма прямолинейной связи между X и Y выражается в виде так называемого уравнения регрессии Y на X

$$Y - M[y] = \rho_{y/x}(x - M[x])$$

или

$$Y = M[y] + \rho_{y/x}(x - M[x]), \tag{I.1.51}$$

где

$$\rho_{y/x} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \tag{I.1.52}$$

— коэффициент регрессии y на x.

Существует уравнение регрессии x на y, имеющее вид

$$X = M[x] + \rho_{x/y}(y - M[y]),$$

где

$$\rho_{x/y} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

I.1.11. Общие понятия математической статистики

Законы распределения случайных величин и их числовые характеристики устанавливаются на основе опыта, эксперимента. Разработкой методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данных занимается специальная наука — математическая статистика. Математическая статистика решает следующие типичные для нее задачи.

1. На практике всегда приходится иметь дело с ограниченным числом наблюдений. Возникает вопрос о том, какие черты наблюдаемого явления относятся к устойчивым, присущим ему, а какие являются случайными и проявляются в данной серии наблюдений только из-за ограниченного объема экспериментальных данных. В связи с этим возникает задача определения закона распределения случайной величины, по возможности свободного от всего несущественного, связанного с недостаточным объемом опытного материала.

2. Могут возникнуть, например, вопросы: согласуются ли результаты эксперимента с гипотезой о том, что данная случайная величина подчинена закону распределения $\varphi(x)$, указывают ли найденные характеристики зависимости между двумя случайными величинами на наличие действительной зависимости. Указанные задачи носят название «задач проверки правдоподобия гипотез».

3. Часто на практике не возникает вопрос определения закона распределения, а требуется по экспериментальным данным найти «наилучшие» оценки для неизвестных параметров. С этой задачей связана задача оценки точности этих «наилучших» значений.

Результаты наблюдений $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ над случайной величиной X называются выборкой из генеральной совокупности (из всевозможных значений случайной величины X). При большом n выборка оформляется в виде статистического ряда (подобно ряду распределения). При этом весь диапазон наблюденных значений x делится на интервалы («разряды») и подсчитывается количество значений m_i, приходящихся на каждый разряд. Для каждого разряда вычисляется частость $Q_i = \frac{m_i}{n}$. Статистический ряд имеет вид таблицы

Разряды I	x_1, x_2	$x_2, x_3 \ldots$	$x_i, x_{i+1} \ldots$	x_k, x_{k+1}
m_i	m_1	m_2	$m_i \ldots\ldots$	m_k
Q_i	Q_1	$Q_2 \ldots\ldots$	$Q_i \ldots\ldots$	Q_k

Число разрядов k выбирается порядка 10—20, а их длины, как правило, одинаковыми.

Статистический ряд часто оформляется в виде так называемой гистограммы: по оси абсцисс откладываются разряды и на каждом

из разрядов как на основании строится прямоугольник, площадь которого равна Q_i, высота прямоугольника h равна $Q_l/(x_{i+1} - x_l)$.

При равных длинах разрядов h пропорциональна Q_l. Следует заметить, что $\sum_{l=1}^{k} Q_l = 1$.

Аналогом функции распределения $F(x)$ (I.1.8) в математической статистике служит статистическая функция распределения

$$F^*(x) = Q(X < x).$$

I.1.12. Числовые характеристики статистического распределения

В разделе (I.1.7) мы познакомились с основными числовыми характеристиками законов распределения; математическим ожиданием, дисперсией, начальными и центральными моментами. Аналогичные числовые характеристики существуют и для статистических распределений. Для математического ожидания, как мы уже знаем, статистическим аналогом является среднее арифметическое

$$M^*[x] = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_l}{n}.$$

Для дисперсии — величина

$$D^*[x] = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - M^*[x])^2}{n}.$$

Для статистических начальных и центральных моментов — соответственно

$$\alpha_s^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^s}{n},$$

$$\mu_s^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - M^*[x])^s}{n}.$$

Как видим, в этих формулах везде вместо математического ожидания фигурирует среднее арифметическое. Для статистических начальных и центральных моментов (в том числе для $M^*[x]$ и $D^*[x]$) справедливы те же свойства, что и для теоретических моментов.

Пример 26. При исследовании геодиметра Бергстранда типа NASM-2A одна и та же линия была измерена 16 раз. Пользуясь данными, помещенными в табл. I.1.2, вычислить μ_1^*, μ_2^*, μ_3^*, μ_4^*, $D^*[x]$, E^*.

Таблица I.1.2

№ по пор.	Результаты измерений S_i, м	$\delta S_i = S_i - S_{ср}$, мм	$(\delta S_i)^2$	$(\delta S_i)^3$	$(\delta S_i)^4$	Вычисления
1	6994,911	+17,8				$\mu_1^* = \frac{-0,2}{16} = 0,0$
2	,890	−3.2				$\mu_2^* = \frac{1186}{16} = 74,2$
3	,879	−14,2				
4	,895	+1,8				
5	,882	−11,2				$\mu_3^* = \frac{+653}{16} = +40.8$
6	,898	+4,8				$\mu_4^* = \frac{199\,313}{16} = 12\,457$
7	,885	−8,2				
8	,883	−10,2				
9	,902	+8,8				$D^*[x] = \mu_2 = 74,2$
10	,901	+7,8				
11	,895	+1,8				$E^* = \frac{\mu_4^*}{\mu_2^{2*}} - 3;$
12	,894	+0,8				
13	,896	+2,8				$E^* = -0,74$
14	,883	−10,2				$m_E = 1,22$
15	,895	+1,8				
16	,902	+8,8				$\lvert E^* \rvert < m_E$
$\alpha_1^* = S_{ср} =$ $= 6994,8932$		$\sum -0,2$	1186	+653	199 313	

Для оценки допустимости отклонения значений эксцесса от нуля используется формула

$$m_E = \sqrt{\frac{24}{n}},$$

где m_E — среднее квадратическое отклонение эксцесса, n — число испытаний.

I.1.13. Определение законов распределения на основе опытных данных (выравнивание статистических рядов)

Задача выравнивания заключается в том, чтобы подобрать теоретическую кривую распределения $\varphi(x)$, наилучшим образом описывающую данное статистическое распределение. Как правило, вид теоретической кривой выбирается заранее из существа задачи,

а в некоторых случаях по внешнему виду гистограммы. Поэтому задача переходит в задачу выбора параметров распределения. Например, если взгляд на гистограмму заставляет предполагать нормальное распределение

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

то задача сводится к рациональному выбору параметров a и σ. Один из методов (метод моментов) заключается в подборе параметров таким образом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик были равны соответствующим статистическим характеристикам. Для нашего примера

$$a=M^*[x];\quad \sigma=\sqrt{D^*[x]}.$$

Рассмотрим вопрос, связанный с проверкой правдоподобия гипотез, а именно вопрос о согласованности теоретического и статистического распределения. К. Пирсон в качестве меры расхождения между P_i и Q_i принял величину χ^2

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}. \qquad (I.1.53)$$

Распределение χ^2 зависит от параметра r, называемого «числом степеней свободы», который равен числу разрядов k без числа связей, накладываемых на частоты. Например, для нормального закона этих связей три:

$$1)\ \sum_{i=1}^{k}Q_i=1;\quad 2)\ \sum_{i=1}^{k}\bar{x}_iQ_i=a;$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{k}(x_i-M^*[x])^2\,Q_i=D[x]=\sigma^2;\quad r=k-3.$$

Для распределения χ^2 составлена таблица (см. прил. 4). Пользуясь этой таблицей, можно для каждого значения χ^2 и числа степеней свободы r найти вероятность P того, что величина, распределенная по закону χ^2, превзойдет это значение (или P есть вероятность того, что за счет чисто случайных причин мера расхождения будет не меньше, чем фактически вычисленная χ^2). Если эта вероятность мала, то результат опыта следует считать противоречащим гипотезе о том, что закон распределения X есть $\varphi(x)$; если велика, то гипотезу следует считать правдоподобной. На практике считают критическим значением вероятности $P=0{,}1$.

Пример на выравнивание статистического ряда и на применение критерия Пирсона приведен в разделе I.1.17 применительно к ошибкам измерений.

I.1.14. Общие понятия

В теории ошибок на основе положений теории вероятностей и математической статистики изучают причины возникновения и законы распределения ошибок наблюдений, а также свойства различных видов ошибок и разрабатывают методику наблюдений, позволяющую удержать эти ошибки в заданных пределах.

Основные задачи теории ошибок следующие.

1. Изучение законов распределения ошибок наблюдений.

2. Оценка точности непосредственно выполненных результатов наблюдений и их функций.

3. Отыскание наиболее надежного значения определяемой величины и характеристики точности.

4. Установление допусков, ограничивающих использование результатов наблюдений в заданных пределах точности.

Ошибки подразделяются на грубые, систематические и случайные.

Грубые ошибки. К такого рода ошибкам относят промахи в измерениях, вызванные невнимательностью наблюдателя, неисправностью инструмента или неучетом влияния внешней среды, которое не является пренебрегаемо малым.

Задача наблюдателя состоит в надлежащей организации контроля работ с целью своевременного устранения грубых ошибок из результатов измерений.

Систематические ошибки. Ошибки, происходящие от определенного источника и имеющие определенные знак и величину, называются систематическими.

Влияние такого рода ошибок может быть выражено функцией, связывающей результат измерения с каким-либо фактором (например с температурой).

Задача наблюдателя состоит в том, чтобы исключить основную часть систематических ошибок из результатов измерений, а остаточное их влияние свести к пренебрегаемо малым величинам.

Случайные ошибки. Ошибки измерений, закономерности которых проявляются в массе и которые обусловлены точностью инструмента, квалификацией наблюдателя, неучтенными колебаниями внешних условий называются случайными.

Если систематическая ошибка может быть исключена из единичного измерения, то случайные ошибки, поскольку они являются одним из наиболее ярких примеров случайной величины и их закономерности обнаруживаются только в массовом проявлении, не могут быть устранены из единичного измерения.

Их влияние можно лишь ослабить, повышая качество и количество измерений, а также надлежащей математической обработкой результатов измерений. Под случайной ошибкой будем иметь в виду разность между наблюденным значением случайной величины x_i и истинным (точным) значением X при условии исключения систематических ошибок, т. е.

$$\Delta_i = x_i - X \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

В теории ошибок принимают два постулата:

1) ошибки Δ_i подчинены нормальному закону распределения;

2) математическое ожидание $M[\Delta_i] = 0$, что означает отсутствие систематических ошибок.

В этом случае математическое ожидание $M[x_i]$ совпадает с истинным значением X.

Плотность распределения случайных ошибок

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \qquad (I.1.54)$$

или, если перейти к нормированной величине $t = \Delta/\sigma$,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad (I.1.55)$$

причем

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sigma}\varphi(t).$$

Выражение (I.1.54) часто записывается в виде

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2},$$

где $h = 1/\sigma\sqrt{2}$ — так называемая мера точности.

Свойства случайных ошибок, вытекающие из указанных двух постулатов и проявляющиеся при массовых испытаниях, могут быть охарактеризованы следующим образом.

Свойство 1. Случайные ошибки по абсолютной величине с заданной вероятностью P не превосходят определенного предела, равного $t\sigma$, где t — коэффициент, при котором $P = \Phi(t)$. Так, например, из 100 ошибок с вероятностью $P = 0{,}68$ не превосходят предел, равный σ, 68 ошибок, 95 ошибок с вероятностью 0,95 не превосходят 2σ и т. д. (см. пример 23).

Свойство 2. Положительные и отрицательные случайные ошибки равновозможны, т. е.

$$P(\Delta > 0) = P(\Delta < 0) = \frac{1}{2},$$

Свойство 3. Среднее арифметическое из значений случайной ошибки при неограниченном возрастании числа наблюдений имеет пределом нуль, т. е.

$$M[\Delta] = \text{вер.}\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n} = 0$$

(свойство компенсации). Систематические ошибки этим свойством не обладают.

Свойство 4. Малые по абсолютной величине случайные ошибки встречаются чаще, чем большие.

I.1.15. Кривая ошибок (кривая Гаусса) и ее свойства

Плотность нормального распределения ошибки

$$\varphi(\Delta_l) = y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \qquad (I.1.56)$$

называют уравнением кривой ошибок, или — кривой Гаусса. Как указывалось выше, мера точности

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}.$$

Если плотность (I.1.56) подобрана по экспериментальным данным, то $h = 1/m\sqrt{2}$, где m — средняя квадратическая ошибка.

Пример 27. Вычислить ординаты кривой нормального распределения для значений $\Delta = 0, m, 2m, 3m$, если $m = 0{,}47''$. По полученным данным построить кривую распределения. Вычисления проконтролировать по таблице (прил. 1).

Решение. Прежде всего имеем

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} = 0{,}851; \quad y = 0{,}851e^{-h^2\Delta^2} = 0{,}851e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \left(t = \frac{\Delta}{m}\right);$$

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} = 1{,}505.$$

Вычисления располагаем в табл. I.1.3.

Таблица I.1.3

t	$-h^2\Delta^2 = -\frac{t^2}{2}$	$e^{-\frac{t^2}{2}}$	y	Контроль	
				$y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$	$y = y'h$
0	0	1	0,851	0,564	0,850
1	−0,50	0,607	0,516	0,342	0,516
2	−2,0	0,136	0,115	0,076	0,115
3	−4,5	0,010	0,0095	0,0063	0,0095

Примечания: 1) $\lg e^{-0{,}50} = \bar{1},783$; 2) $\lg e^{-2{,}0} = -0{,}868 = \bar{1},132$; 3) $\lg e^{-4{,}5} = -1{,}954 = \bar{2},046$.

Построим кривую ошибок (рис. I.1.10).

Кривая ошибок, уравнение которой $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\Delta^2}$, обладает следующими основными свойствами:

1) кривая лежит над осью абсцисс, так как ордината y ни при

каких Δ не принимает отрицательных значений и не обращается в нуль;

2) кривая распределения симметрична относительно оси OY, так как функция $e^{-h^2\Delta^2}$ четная и значения ординат для положительных и отрицательных Δ, равных по абсолютной величине, одинаковы;

3) для любых значений Δ, бо́льших или меньших нуля, ординаты будут меньше, чем при $\Delta = 0$, т. е. при $\Delta = 0$ ордината y принимает максимальное значение;

4) поскольку кривая имеет максимум и в то же время своими концами асимптотически приближается к оси $O\Delta$, у нее есть две точки перегиба, одна справа, другая слева от оси OY, причем для точек перегиба $\Delta = m$;

5) касательные к кривой в точках перегиба отсекают от оси абсцисс отрезки, равные $|\Delta| = 2m$.

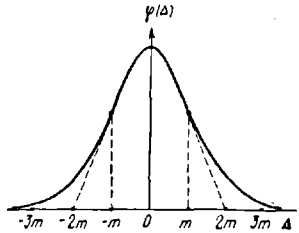


Рис. I.1.10

I.1.16. Критерии, применяемые при оценке точности измерений

Средняя ошибка (ϑ). Среднее арифметическое из абсолютных значений случайных ошибок называется средней ошибкой, т. е.

$$\vartheta = \frac{[|\Delta|]}{n},$$

где

$$[|\Delta|] = |\Delta_1| + |\Delta_2| + \ldots + |\Delta_n|.$$

Ошибка ϑ есть эмпирический центральный абсолютный момент первого порядка (см. I.1.32).

Вероятная ошибка (r). Вероятной ошибкой называется такое значение случайной ошибки, больше или меньше которого по абсолютной величине ошибки равновозможны.

Из определения вероятной ошибки вытекает способ ее отыскания: если все ошибки расположить в ряд по убывающим или возрастающим значениям абсолютных величин, то вероятная ошибка будет расположена в середине этого ряда. Поэтому вероятную ошибку часто называют срединной (см. раздел I.1.9).

Средняя квадратическая ошибка (m). Средней квадратической ошибкой называется величина, вычисляемая по формуле Гаусса

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}; \qquad (I.1.57)$$

$$[\Delta^2] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots + \Delta_n^2,$$

где

$$\Delta_i = x_i - X \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

здесь Δ_i — истинные ошибки, X — истинное (точное) значение измеряемой величины; x_i — результаты измерений одной и той же величины.

Обычно средней квадратической ошибке оказывается предпочтение перед средней и вероятной по следующим причинам:

1. На величину средней квадратической ошибки в большей степени оказывают влияние крупные по абсолютным значениям ошибки.

2. Средняя квадратическая ошибка устойчива, т. е. она достаточно надежно определяется при небольшом числе n.

Надежность средней квадратической ошибки характеризуется средней квадратической ошибкой самой средней квадратической ошибки, полученной из эксперимента, которая определяется по формуле

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2n}}.$$

При $n = 8$

$$m_m = \frac{1}{4} m.$$

Исходя из этого, для достаточно надежного определения в практических целях принято считать, что $n \geqslant 8$.

Для теоретических расчетов допусков служит формула

$$\Delta_{\text{пред}} \leqslant 3m. \qquad (I.1.58)$$

На практике, учитывая ограниченное число измерений, принимают

$$\Delta_{\text{пред}} \leqslant 2m. \qquad (I.1.59)$$

При нормальном распределении ошибок измерений существуют связи (см. I.1.47—I.1.48)

$$m \approx 1{,}25\vartheta; \quad m \approx 1{,}48r. \qquad (I.1.60)$$

Абсолютные и относительные ошибки. Среднюю квадратическую, среднюю, вероятную, предельную ошибки называют а б с о л ю т н ы м и.

Отношение абсолютной ошибки к среднему значению измеренной величины, выраженное дробью с числителем, равным единице, называют о т н о с и т е л ь н о й ошибкой.

В зависимости от того, какая ошибка при этом используется, относительная ошибка называется средней квадратической относительной, средней относительной, вероятной относительной, предельной относительной.

Знаменатель относительной ошибки целесообразно округлять до целых десятков, если он выражается в сотнях, до сотен, если он выражается в тысячах, и т. д.

П р и м е р ы

1) $m_s = 0{,}3$ м; $s = 152$ м; $\frac{m_s}{s} = \frac{1}{510}$.

2) $m_s = 0{,}25$ м; $s = 643{,}00$ м; $\frac{m_s}{s} = \frac{1}{2600}$.

I.1.17. Исследование ряда ошибок на нормальное распределение

В разделе I.1.13 приведены теоретические основы решения этого вопроса.

Приведем пример применительно к ошибкам измерений.

Пример 28. В табл. I.1.4 даны угловые невязки 32 треугольников сети триангуляции, причем для нахождения вероятной ошибки r они уже расположены в порядке возрастания абсолютных величин. Требуется установить, подчиняется ли данный ряд невязок, которые являются истинными ошибками суммы углов в каждом треугольнике, нормальному распределению.

Таблица I.1.4

№ по пор.	Невязки Δ в сек	№ по пор.	Невязки Δ	№ по пор.	Невязки Δ	№ по пор.	Невязки Δ
1	0,00	9	+0,38	17	−0,76	25	+1,29
2	+0,01	10	−0,38	18	−0,95	26	+1,31
3	+0,06	11	−0,41	19	−1,03	27	−1,38
4	+0,07	12	+0,43	20	+1,04	28	+1,52
5	−0,19	13	−0,62	21	+1,16	29	−1,88
6	+0,22	14	−0,69	22	−1,23	30	+1,92
7	−0,24	15	+0,71	23	−1,27	31	+2,28
8	−0,25	16	−0,73	24	−1,28	32	−2,50

$$\sum(\Delta_i>0)=+12{,}40$$

$$\sum(\Delta_i<0)=-15{,}79$$

$$\sum(\Delta_i)=-3{,}39$$

Решение. Для определения кривой распределения вычислим эмпирические моменты:

$$1)\quad a=M[\Delta]=\frac{[\Delta]}{n}=-\frac{3{,}39}{32}=-0{,}105'';$$

$$2)\quad m=\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}=\sqrt{\frac{38{,}75}{32}}=1{,}10''.$$

Напишем уравнение теоретической кривой распределения

$$\varphi(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1{,}1}\,e^{-\frac{\Delta^2}{2\cdot 1{,}21}}.$$

Строго говоря, следует написать

$$\varphi(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1{,}1}\,e^{-\frac{(\Delta+0{,}10)^2}{2\cdot 1{,}21}}.$$

Однако мы для простоты будем полагать, что $a = 0$. Далее находим

3) вероятную ошибку

$$r = \frac{|\Delta_{16}| + |\Delta_{17}|}{2} = \frac{0{,}73'' + 0{,}76''}{2} = 0{,}74''$$

и вычисляем коэффициент

$$k_1 = \frac{m}{r} = \frac{1{,}10}{0{,}74} = 1{,}49;$$

4) среднюю ошибку

$$\vartheta = \frac{\sum_1^{32} |\Delta_i|}{32} = \frac{28{,}19}{32} = 0{,}88''$$

и коэффициент

$$k_2 = \frac{m}{\vartheta} = \frac{1{,}10}{0{,}88} = 1{,}25.$$

Затем строим статистический ряд распределения в виде табл. I.1.5, разделив невязки на 12 интервалов (длина интервала равна $0{,}5m$).

Таблица I.1.5

№ интервалов	Длины интервалов: в сек		Длины интервалов: $l = \frac{\Delta}{m}$		Число ошибок m_l	$Q = \frac{m_l}{n}$	$\frac{1}{2}\Phi(t)$	P_l	np_l	$m_l - np_l$	$\frac{m_l - np_l}{np_l}$
1	2		3		4	5	6	7	8	9	10
1	0	0,55	0	0,5	7	0,219	0,192	0,192	6	1	0,167
2	0,56	1,10	0,5	1,0	2	0,062	0,341	0,149	5	−3	−0,600
3	1,11	1,65	1,0	1,5	4	0,125	0,433	0,092	3	1	0,333
4	1,66	2,20	1,5	2,0	1	0,031	0,477	0,044	1	0	0
5	2,21	2,75	2,0	2,5	1	0,031	0,494	0,017	1	0	0
6	2,76	3,30	2,5	3,0	0	0	0,4986	0,0045	0	0	0
7	0	−0,55	0	−0,5	5	0,156			6	−1	−0,167
8	−0,56	−1,10	−0,5	−1,0	6	0,188			5	+1	+0,200
9	−1,11	−1,65	−1,0	−1,5	4	0,125			3	+1	+0,333
10	−1,66	−2,20	−1,5	−2,0	1	0,031			1	0	0
11	−2,21	−2,75	−2,0	−2,5	1	0,031			1	0	0
12	−2,76	−3,30	−2,5	−3,0	0	0			0	0	0
					$\sum$ 32	1,000		0,9972	32	0	

В столбце 6 таблицы вычислены вероятности попадания ошибки в интервал от 0 до t (значения t приведены в правой стороне

столбца 3), а в столбце 7 — вероятности попадания в i-ые интервалы. Так как распределение симметричное, то эти вероятности выписаны только для интервалов, расположенных справа от 0. В столбце 8 вычислено теоретическое число ошибок, попавших в i-ый интервал (также одинаковое для «положительных» и «отрицательных» интервалов). В столбце 9 вычислены разности между фактическими и теоретическими числами ошибок i-го интервала, а в столбце 10 — частные $(m_i - np_i)/np_i$.

Методом накопления на арифмометре вычислена величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 2{,}80.$$

По таблицам прил. 4 при числе степеней свободы

$$r = 12 - 2 = 10$$

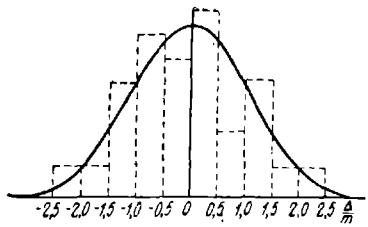


Рис. I.1.11

(здесь число связей, см. раздел I.1.13, взято не 3, а 2, так как $a = M^*[\Delta]$ нами принято равным 0), находим вероятность: для $\chi^2 = 2$ $P = 0{,}996$, для $\chi^2 = 3$ $P = 0{,}981$. Интерполируя для $\chi^2 = 2{,}80$, получим $P = 0{,}984 > 0{,}10$.

В результате исследования приходим к выводу о том, что рассматриваемый ряд ошибок подчиняется нормальному распределению и $M[\Delta] = 0$, так как: а) среднее арифметическое $[\Delta]/n$ практически равно 0; б) ни одна из ошибок не превышает $3m$; в) коэффициенты k_1 и k_2 совпадают с их теоретическим значением; г) на основании критерия Пирсона вероятность $P = 0{,}984$ достаточно велика.

Построим гистограмму и выравнивающую кривую (рис. I.1.11). Вычисление ординат $y = \varphi(\Delta)$ выполняем, используя прил. 1. Вычисления записываем в табл. I.1.6.

Таблица I.1.6

Границы интервалов	$t = \frac{\Delta}{m}$	$y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$	$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$	y
1	0	0,564	0,645	0,364
2	0,5	0,498	0,645	0,321
3	1,0	0,342	0,645	0,220
4	1,5	0,183	0,645	0,118
5	2,0	0,076	0,645	0,049
6	2,5	0,025	0,645	0,016
7	3,0	0,006	0,645	0,004

Высоты прямоугольников гистограммы $h_i = \frac{Q_i}{x_{i-1} - x_i} = \frac{Q_i}{0{,}55}$ приведены в табл. I.1.7.

Таблица I.1.7

№ интервалов	1	2	3	4	5	6
h_i	0,398	0,113	0,227	0,056	0,056	0

№ интервалов	7	8	9	10	11	12
h_i	0,284	0,342	0,227	0,056	0,056	0

На выбор масштаба наложено лишь условие наглядности.

I.1.18. Определение коэффициента корреляции и уравнения регрессии на основе опытных данных

Приведенные в разделе I.1.10 формулы для r редко применимы на практике, так как нужно знать математические ожидания и дисперсии X и Y.

На практике имеем пары наблюдений

x_i	x_1	x_2	. . .	x_n
y_i	y_1	y_2	. . .	y_n

Математическое ожидание в (I.1.50) заменяют средним арифметическим (напомним, что вероятностный предел среднего арифметического при $n \to \infty$ совпадает с математическим ожиданием). При этом для коэффициента корреляции получают формулу

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n m_x m_y}, \qquad (I.1.61)$$

дающую его эмпирическое значение. Здесь

$$\bar{x} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{1}^{n} y_i}{n}; \quad m_x = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}},$$

$$m_y = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n}}.$$

Возникает вопрос, с какой надежностью вычисляется само значение коэффициента корреляции и при каком минимальном абсолютном его значении можно считать связь существующей. Возникает, таким образом, необходимость оценки надежности коэффициента корреляции.

Известный ученый, статистик В. И. Романовский рекомендует при числе измерений $n \geqslant 50$ применять формулу для среднего квадратического отклонения коэффициента корреляции

$$\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}. \qquad (I.1.62)$$

Связь считается установленной, если выполняется условие

$$|r| \geqslant 3\sigma_r. \qquad (I.1.63)$$

Наименьшая величина коэффициента корреляции r_{min}, удовлетворяющего условию (I.1.63), в зависимости от числа измерений вычисляется по формуле

$$r_{min} = \frac{\sqrt{n+36}-\sqrt{n}}{6}. \qquad (I.1.64)$$

Для оценки надежности коэффициента корреляции при $n < 50$ пользуются специальной функцией, так называемым критерием Фишера,

$$z = \frac{1}{2}\{\ln(1+r) - \ln(1-r)\}, \qquad (I.1.65)$$

которая подчиняется закону нормального распределения. Стандарт величины z вычисляется по формуле

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \qquad (I.1.66)$$

Значения величины z по полученным из опыта значениям коэффициента корреляции r могут быть вычислены непосредственно по формуле (I.1.65) или по таблицам, приведенным в прил. 5. Уравнение регрессии получает вид

$$y = \bar{y} + r\frac{m_y}{m_x}(x-\bar{x}) \qquad (I.1.67)$$

или

$$x = \bar{x} + r\frac{m_x}{m_y}(y-\bar{y}).$$

Среднее квадратическое отклонение коэффициентов регрессии при большом n вычисляется по формуле

$$\sigma_{\rho_{y/x}} = \frac{m_y}{m_x}\sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}}, \quad \sigma_{\rho_{x/y}} = \frac{m_x}{m_y}\sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}}. \qquad (I.1.68)$$

Пример 29. В табл. I.1.8 приведены расстояния D, измеренные светодальномером СВВ-1, и ошибки $|\Delta|$ этих измерений. По данным таблицы вычислить коэффициент корреляции, коэффициент регрессии, оценить их точность и составить уравнение регрессии.

Таблица I.1.8

№ по пор.	Результаты наблюдений		Вычисления				
	x D (км)	y $\|\Delta\|$ (см)	$\delta D = D_i - \overline{D}$	$\delta\Delta = \Delta_i - \overline{\Delta}$	δD^2	$\delta\Delta^2$	$\delta D \cdot \delta\Delta$
1	8,7	7,0	+3,8	+3,2	14,44	10,24	+12,16
2	3,7	3,0	−1,2	−0,8	1,44	0,64	+0,96
3	6,0	4,0	+1,1	+0,2	1,21	0,04	+0.22
4	3,3	3,0	−1,6	−0,8	2,56	0,64	+1,28
5	5,1	4,0	+0,2	+0,2	0,04	0,04	+0,04
6	6,1	4,0	+1,2	+0,2	1,44	0,04	+0,24
7	2,7	3,0	−2,2	−0,8	4,84	0,64	+1,76
8	4,9	4,0	0,0	+0,2	0,0	0,04	0,00
9	3,1	4,0	−1,8	+0,2	3,24	0,04	−0,36
10	3,7	2,0	−1,2	−1,8	1,44	3,24	+2,16
11	5,7	6,0	+0,8	+2,2	0,64	4,84	+1,76
12	4,9	5,0	0,0	+1,2	0,0	1,44	0,00
13	5,6	3,0	+0,7	−0,8	0,49	0,64	0,56
14	7,6	4,0	+2,7	+0,2	7,29	0,04	+0.54
15	4,2	3,0	−0,7	−0,8	0,49	0,64	+0,56
16	2,0	2,0	−2,9	−1,8	8,41	3,24	+5,22
17	4,0	2,0	−0,9	−1,8	0,81	3,24	+1,62
18	6,5	5,0	+1,6	+1,2	2,56	1,44	+1,92
19	7,2	6,0	+2,3	+2,2	5,29	4,84	+5,06
20	2,7	2,0	−2,2	−1,8	4,84	3,24	+3,96
Ср.	4,9	3,80	+14,4	+11,2	$\sum =$	39,20	+38,24
			−14,7	−11,2	$= 61,47$		
			$\sum = -0,3$	0,0			

Решение. Прежде чем решать задачу, обычно прибегают к графическому изображению точек (x_i, y_i) (рис. I.1.12). Как видно, график указывает на наличие корреляции между D и $|\Delta|$.

В результате вычислений (см. табл. I.1.7) имеем

$$m_D = \sqrt{\frac{61,5}{20}} = 1,75; \qquad m_{|\Delta|} = \sqrt{\frac{39,2}{20}} = 1,40,$$

коэффициент корреляции по (I.1.61) равен

$$r = \frac{38,66}{20 \cdot 1,75 \cdot 1,40} = +0,79.$$

Оценим надежность коэффициента корреляции. Так как число измерений сравнительно небольшое, для оценки надежности применим критерий Фишера z.

По таблице, помещенной в прил. 5, пользуясь коэффициентом корреляции $r = +0{,}79$ как аргументом, находим

$$z = 1{,}0714.$$

Оценим надежность z по формуле (I.1.66)

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{20-3}} = 0{,}243.$$

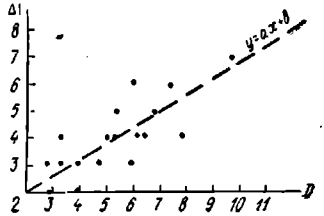


Рис. I.1.12

С вероятностью 0,90 ($t = 1{,}645$) величина z может принять значения

$$1{,}0714 - t\sigma_z \leqslant z \leqslant 1{,}0714 + t\sigma_z;$$

$$0{,}67 \leqslant z \leqslant 1{,}47. \qquad (I.1.69)$$

Из таблицы (прил. 5) находим соответствующие крайним значениям z (0,67 и 1,47) значения коэффициента корреляции

$$+0{,}59 \leqslant r \leqslant 0{,}90.$$

Следовательно, с вероятностью не менее 0,90 действительный коэффициент корреляции может быть заключен между $+0{,}59$ и $+0{,}90$. Минимальное значение (при данном числе измерений $n = 20$)

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{20+36} - \sqrt{20}}{6} = 0{,}50.$$

Так как $0{,}50 < 0{,}59$, прямолинейную корреляционную связь можно считать установленной.

Определим σ_r по формуле (I.1.62), хотя, как было отмечено выше, она не совсем подходит в данном случае ($n < 50$),

$$\sigma_r = \frac{1 - 0{,}79^2}{\sqrt{20}} = 0{,}085.$$

Как следует из неравенства (I.1.69), учитывая, что $t = 1{,}65$, определенная с помощью критерия Фишера величина σ_r' равна

$$\sigma_r' \approx \frac{0{,}90 - 0{,}59}{2 \cdot 1{,}65} = 0{,}094.$$

Из сравнения σ_r' и σ_r следует, что формула (I.1.62) дает хорошие результаты при $n = 20$, хотя принято считать необходимым условием для ее применения $n \geqslant 50$.

Составим теперь уравнение регрессии $|\Delta|$ на D вида (I.1.67)

$$|\Delta_l| = \rho_{|\Delta|/D} D_l + (\overline{|\Delta|} - \rho_{|\Delta|/D} \overline{D}).$$

Подставляя численные значения r, σ_Δ, σ_D, получим

$$|\Delta_l| = +0{,}79 \cdot \frac{1{,}40}{1{,}75} \cdot D_l + 3{,}8 - 0{,}79 \cdot \frac{1{,}40}{1{,}75} \cdot 4{,}9;$$

$$|\Delta_l| = (0{,}63 D_l + 0{,}70) \text{ см},$$

где D_l — расстояние в километрах.

Оценим приближенно надежность коэффициента регрессии $\rho_{|\Delta|/D} = +0{,}63$ по (I.1.67)

$$\sigma_{\rho|\Delta|/D} = \frac{1{,}40}{1{,}75} \sqrt{\frac{1 - 0{,}79^2}{20 - 3}} = 0{,}12,$$

следовательно,

$$\rho_{|\Delta|/D} \approx 0{,}63 \pm 0{,}12.$$

В связи с этой задачей заметим, что уравнение регрессии x на y не имеет смысла, так как никто по ошибкам $|\Delta|$ не станет определять расстояние D.

Если случайные величины x и y подчинены нормальному закону распределения, то корреляция между ними считается установленной (критерий Фишера), когда величина

$$V = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \cdot \sqrt{n - 2}, \qquad \text{(I.1.70)}$$

соответствующая значению r (I.1.61), не попадает в интервал

$$-V_\beta < V < V_\beta,$$

где V_β выбирается из таблиц так называемого распределения Стьюдента (прил. 3) по числу степеней свободы $n - 2$ и вероятности $\beta \approx 1$.

Пример 30. Коэффициент корреляции между двумя случайными величинами x и y, подчиненными нормальному закону распределения, при $n = 20$ получен равным $r = +0{,}7$. Сделать заключение о наличии корреляции между x и y с вероятностью $\beta = 0{,}95$.

Решение. По таблицам прил. 3 при 18 степенях свободы и $\beta = 0{,}95$ находим $V_\beta = 2{,}10$. Так что

$$-2{,}10 < V < 2{,}10. \qquad \text{(I.1.71)}$$

По (I.1.70) имеем значение

$$V = \frac{0{,}7}{\sqrt{1 - 0{,}49}} \cdot \sqrt{18} = 4{,}2,$$

не содержащееся в интервале (I.1.71). Поэтому следует признать, что x и y коррелированы.

I.1.19. Оценка точности функций величин, полученных в результате коррелированных и некоррелированных измерений

В инженерной практике часто возникают задачи, когда интересующую наблюдателя величину непосредственно измерить нельзя. В таких случаях приходится измерять некоторые величины (в последующем будем называть эти величины аргументами), связанные с искомой величиной функционально, а искомую величину — вычислять.

Пусть дана функция

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{I.1.72}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — попарно коррелированные аргументы, полученные из измерений со средними квадратическими ошибками m_i (или стандартами σ_i).

Тогда ее средняя квадратическая ошибка m_u (или стандарт) вычисляется по формуле

$$m_u^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_{x_i}^2 + 2 \sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 \times$$

$$\times r_{x_i x_j} \cdot m_{x_i} \cdot m_{x_j}. \tag{I.1.73}$$

Значения производных вычислены по приближенным значениям аргументов (на это указывает индекс 0 у производной), но близким к истинным значениям; от степени этой близости зависит точность формулы (I.1.73). Строго говоря, она является точной лишь для линейных функций.

Заметим, что при вычислениях согласно (I.1.73) в результате следует получать не более двух значащих цифр. Поэтому значения производных нужно вычислять не более чем с тремя значащими цифрами. По этой причине знание точных значений аргументов x_i обычно не требуется.

Пример 31. Найти ср. кв. ошибки функции $u = 2x_1 + x_2$, если $m_{x_1} = m_{x_2} = m$, а $r_{x_1 x_2} = -0{,}5$.

Решение. На основании (I.1.73) получаем $m_u^2 = 4m^2 + m^2 - 2 \cdot 0{,}5m^2 = 4m^2$ и $m_u = 2m$.

Когда аргументы функции некоррелированы ($r_{ij} = 0$), то имеем формулу

$$m_u^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_{x_i}^2. \tag{I.1.74}$$

Это наиболее часто встречающийся случай оценки точности. Решим несколько задач.

Пример 32. В треугольнике измерены два угла со средними квадратическими ошибками $m_{\beta_1} = 5''$, $m_{\beta_2} = 3''$. Найти m_{β_3}.

Решение. Составляем функцию

$$u = \beta_3 = 180^\circ - \beta_1 - \beta_2.$$

Далее имеем:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \beta_i}\right)=1 \text{ и } m_{\beta_3}^2=m_{\beta_1}^2+m_{\beta_2}^2=25+9=34,$$

$$m_{\beta_3}=\sqrt{34}=5{,}8''.$$

Вообще для линейной функции вида $u=\pm x_1\pm x_2\pm \ldots\pm x_n$

$$m_u^2=m_{x_1}+m_{x_2}^2+\ldots+m_{x_n}^2=\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}^2, \qquad (I.1.75)$$

а для функции $u=\pm k_1x_1\pm k_2x_2\pm \ldots\pm k_nx_n$,

$$m_u^2=\sum_{i=1}^{n} k_i^2m_{x_i}^2.$$

Пример 33. Найти ср. кв. ошибку функции

$$u={}^1/_2x-{}^1/_5y+{}^1/_4z,$$

если известны ср. кв. ошибки аргументов. На основании (I.1.75) получаем

$$m_u=\sqrt{\frac{1}{4}m_x^2+\frac{1}{25}m_y^2+\frac{1}{16}m_z^2}.$$

Пример 34. Определить превышение и среднюю квадратическую ошибку превышения

$$h=s\cdot \operatorname{tg}\nu,$$

где $s=143{,}5$ м (горизонтальное проложение), $\nu=+2^\circ 30'$ (угол наклона),
если $m_s=0{,}5$ м; $m_\nu=1{,}0'$.

Решение.

$$u=h=s\cdot \operatorname{tg}\nu;$$

$$m_h=\sqrt{m_s^2\cdot \operatorname{tg}^2\nu+\frac{s^2}{\cos^4\nu}\cdot\frac{m_\nu^2}{\rho^2}};$$

$$m_h=\sqrt{(0{,}5\cdot 0{,}044)^2+\left(\frac{144}{0{,}99}\cdot\frac{1{,}0'}{3438'}\right)^2};$$

$$m_h=4{,}8\cdot 10^{-2}\text{ м};\quad m_h=0{,}048\text{ м}.$$

Пример 35. Коэффициент k нитяного дальномера теодолита k определяется на базисе, длина которого $s=250{,}00$ м измерена со средней квадратической ошибкой $m_s=0{,}052$ м.

Из многократных измерений был получен средний дальномерный отсчет $l=249{,}0$ см со средней квадратической ошибкой $m_l=0{,}30$ см.

Определить $k = \frac{s}{l}$ (постоянное слагаемое дальномера равно 0) и m_k.

Р е ш е н и е. Имеем функцию $k = f(s, l)$, т. е. $k = \frac{s}{l}$. Согласно (I.1.74) получим

$$m_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)_0^2 m_s^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial l}\right)_0^2 m_l^2},$$

но

$$\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right) = \frac{1}{l}; \quad \left(\frac{\partial k}{\partial l}\right) = -\frac{s}{l^2};$$

тогда

$$m_k = \sqrt{\left(\frac{5{,}2}{249}\right)^2 + \left(\frac{25\,000}{249^2} \cdot 0{,}30\right)^2},$$

$$m_k = 0{,}12; \quad k = 100{,}4 \pm 0{,}12.$$

Если функция имеет вид

$$u = x_1 \cdot x_2$$

или

$$u = \frac{x_1}{x_2},$$

то можно написать

$$\ln u = \ln x_1 \pm \ln x_2.$$

Применяя теперь (I.1.74), получим

$$m_{\ln u}^2 = \frac{m_{x_1}^2}{x_1^2} + \frac{m_{x_2}^2}{x_2^2},$$

но

$$m_{\ln u}^2 = \frac{m_u^2}{u^2},$$

поэтому имеем формулу

$$\frac{m_u^2}{u^2} = \frac{m_{x_1}^2}{x_1^2} + \frac{m_{x_2}^2}{x_2^2}. \qquad \text{(I.1.76)}$$

В общем случае для функции

$$u = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k}{x_{k+1} x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_n}$$

справедлива формула

$$\frac{m_u^2}{u^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{x_i}^2}{x_i^2}, \qquad (I.1.77)$$

откуда легко найти m_u^2. Отношение $\frac{m_u}{u}$ называют относительной ср. кв. ошибкой.

Пример 36. Найти ошибку определения увеличения V зрительной трубы, если фокусное расстояние объектива $f_{об} = 40{,}0$ см определено с точностью $m_{f\,об} = 2$ мм, а фокусное расстояние окуляра $f_{ок} = 1{,}5$ см определено с ошибкой $m_{f\,ок} = 0{,}1$ мм.

Решение. Применяя (I.1.76), имеем

$$\frac{m_v^2}{v^2} = \frac{m_{f\,об}^2}{f_{об}^2} + \frac{m_{f\,ок}^2}{f_{ок}^2}$$

или

$$m_v^2 = \frac{m_{f\,об}^2}{f_{ок}^2} + \frac{f_{об}^2}{f_{ок}^2} \cdot m_{ок}^2.$$

Вычисляя, получим

$$m_v = \frac{4}{2{,}25} \cdot 10^{-2} + \frac{16 \cdot 10^2}{3{,}38} \cdot 10^{-4} = 1{,}77 \cdot 10^{-2} + 4{,}73 \cdot 10^{-2} = 6{,}50 \cdot 10^{-2}.$$

I.1.20. Обработка ряда равноточных измерений одной величины

Пусть выполнен ряд равноточных независимых измерений одной и той же величины, истинное значение которой равно X, и получены результаты (выборка) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, свободные от систематических ошибок ($M[x_i] = X$). По результатам этих наблюдений требуется подобрать наиболее надежное, «наилучшее» значение или оценку для X, а также для неизвестной дисперсии σ^2. По сути дела, эта задача 3 математической статистики (см. I.1.11).

Всякая оценка a_i^* для неизвестных параметров распределения a_i есть функция измеренных величин, т. е. $a_i^* = a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. «Наилучшими» из всех возможных a_i называются такие оценки a_i^*, которые обладают свойствами:

1) состоятельности, т. е.

$$\text{вер.} \lim_{n \to \infty} a_i^* = a_i,$$

2) несмещенности, т. е.

$$M[a_i^*] = a_i,$$

3) эффективности, т. е,

$$D[a_i^*] = \min.$$

В теории ошибок доказывается, что наилучшей оценкой для математического ожидания будет так называемая простая арифметическая средина

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}, \qquad (I.1.78)$$

а для дисперсии — квадрат ср. кв. ошибки (формула Бесселя)

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1}, \qquad (I.1.79)$$

где $v_i = x_i - \bar{x}$ — отклонения от простой арифметической средины, обладающие свойствами

$$[v] = 0 \quad \text{и} \quad [v^2] = \min.$$

Величина $\bar{x}$ имеет ср. кв. ошибку

$$m_{\bar{x}} = M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (I.1.80)$$

Совместное влияние случайных ошибок и постоянной систематической ошибки может быть выражено формулой

$$M' = \sqrt{\frac{m^2}{n} + \delta^2},$$

где δ — систематическая ошибка. Число измерений поэтому не может беспредельно повышать точность $\bar{x}$. Полагают, что должно иметь место неравенство $\delta \leqslant {}^1/_5 \frac{m}{\sqrt{n}}$.

Ср. кв. ошибка

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$$

характеризуется ср. кв. ошибкой

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

Порядок вычислений при обработке ряда равноточных измерений следующий.

1. Вместо (I.1.78) применяют более удобную формулу

$$\bar{x} = x' + \frac{[\varepsilon]}{n},$$

где x' — приближенное значение для $\bar{x}$, обычно это минимальное значение x_i, а величины

$$\varepsilon_i = x_i - x',$$

2. Вычисляют отклонения $v_l = x_l - \bar{x}_{\text{окр}}$ и выполняют контроль

$$[v] = -n\beta,$$

где β — ошибка округления при вычислении $\bar{x}$, т. е. $\beta = \bar{x}_{\text{окр}} - \bar{x}$.

Обычно $\bar{x}_{\text{окр}}$ вычисляют с числом десятичных знаков на один больше, чем их имеется в x_l ($\bar{x}_{\text{окр}}$ получают округлением $\bar{x}$, т. е. $\bar{x}$ содержит на один знак больше, чем $\bar{x}_{\text{окр}}$).

3. Далее вычисляют $[v^2]$ с контролем

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$$

и ошибки

$$m,\ M,\ m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} \text{ и } m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}}.$$

Таблица I.1.9

№ по пор.	Результаты измерений	v_l	v_i^2	ε_l	ε_i^2	Контроль
1	57° 23′ 44″	−0,7	0,49	+4	16	1. $\beta = \bar{x}_{\text{окр}} - \bar{x} =$ $= 57°\,23'\,44,7'' - 57°\,23'\,44,67'' =$ $= +0,03''$ $-n\beta = 0,03'' \cdot 12 =$ $= -0,4''$ $[v] = 0,4''$ 2. $[v^2] = [\varepsilon^2] -$ $-\frac{[\varepsilon]^2}{n} = 334 - \frac{56^2}{12} =$ $= 72.$ Ошибки: $m = \sqrt{\frac{72,9}{11}} = 2,7''$ $M = \frac{2,7}{\sqrt{12}} = 0,75''$ $m_M = 0,15''$
2	40	−4,7	22,1	0	0	
3	43	−1,7	2,89	+3	9	
4	45	+0,3	0,09	+5	25	
5	46	+1,3	1,69	+6	36	
6	43	−1,7	2,89	+3	9	
7	48	+3,3	10,9	+8	64	
8	45	+0,3	0,09	+5	25	
9	48	+3,3	10,9	+8	64	
10	46	+1,3	1,69	+6	36	
11	47	+2,3	5,29	+7	49	
12	41	−3,7	13,7	+1	1	
$x' = 57°\,23'\,40''$ $\bar{x}_{\text{окр}} =$ $= 57°\,23'\,44,7''$ $\bar{x} =$ $= 57°\,23'\,44,67''$		−12,5 +12,1 $\sum =$ $= -0,4$ $\sum \varepsilon/n =$ $= 4,67''$	$\sum =$ $= 72,9$	$\sum =$ $= +56$	$\sum =$ $= 334$	Ответ: $\bar{x} = 57°\,23'\,44,7'' \pm 0,75''$

Результат вычислений записывают в виде $\bar{x} \pm M$ или в виде доверительного интервала (см. следующий раздел).

Пример 37. Даны результаты равноточных измерений одного и того же угла. Определить $\bar{x}$, m, M, m_m.

Решение выполнено в табл. I.1.9.

I.1.21. Понятие о доверительных интервалах

Рассмотренный выше способ оценки параметров закона распределения называется точечным. Более совершенным является так называемый способ доверительных интервалов.

Доверительным называется такой интервал, относительно которого с вероятностью β, сколь угодно близкой к единице, называемой доверительной, можно утверждать, что он содержит математическое ожидание параметра или его истинное значение при отсутствии систематических ошибок.

Доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины имеет вид

$$\bar{x} - t_\beta M < X < \bar{x} + t_\beta M, \qquad (I.1.81)$$

где t_β — коэффициент, выбираемый из таблиц так называемого распределения Стьюдента (прил. 3) по вероятности β и числу степеней свободы $r = n - 1$. Так, в условиях предыдущего примера при $\beta = 0{,}90$ имеем $t_\beta = 2{,}20$ и доверительный интервал

$$57^\circ\ 23'\ 43{,}1'' < X < 57^\circ\ 23'\ 46{,}3''.$$

Важно отметить, что распределение измерений при этом должно быть нормальным.

Доверительный интервал для стандарта σ в случае нормального распределения измерений строится в виде

$$\gamma_1 m \leqslant \sigma \leqslant \gamma_2 m, \qquad (I.1.82)$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi_1^2}}; \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi_2^2}},$$

а величины χ_1^2 и χ_2^2 выбирают из таблиц распределения χ^2 (прил. 4) по числу степеней свободы $n - 1$ и вероятности $p_1 = \dfrac{1-\beta}{2}$ и $p_2 = 1 - p_1$. Так, в примере 37 для $\beta = 0{,}90$ и $n - 1 = 11$ имеем $p_1 = 0{,}05$, $p_2 = 0{,}95$ и $\chi_1^2 \approx 19{,}7$, $\chi_2^2 = 4{,}6$.

Доверительный интервал будет

$$\sqrt{\frac{11}{19{,}7}} \cdot 2{,}7 < \sigma < \sqrt{\frac{11}{4{,}4}} \cdot 2{,}7,$$

$$2{,}0'' < \sigma < 4{,}2''.$$

Доверительный интервал для $\sigma_{\bar{x}}$ имеет вид

$$\frac{\gamma_1 m}{\sqrt{n}} \leqslant \sigma_{\bar{x}} \leqslant \frac{\gamma_2 m}{\sqrt{n}}.$$

В нашем примере

$$0{,}61'' < \sigma_{\bar{x}} < 1{,}3''.$$

Другой пример применения доверительных интервалов был приведен в разделе I.1.18 (для истинного значения коэффициента корреляции).

Заметим, что иногда результат обработки измерений записывают в виде $\bar{x} \pm m_{\bar{x}}$, что соответствует вероятности $\beta \approx 0{,}7$.

I.1.22. Оценка точности по разностям двойных равноточных измерений

Если имеем двойные равноточные измерения n величин x_1, x_2, . . ., x_n и получены результаты

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$

$$x_1',\ x_2',\ \ldots,\ x_n',$$

то составляем разности

$$d_i = x_i - x_i'.$$

При отсутствии систематических ошибок эти разности можно рассматривать как ошибки величин, истинное значение которых равно 0. Поэтому, применяя формулу Гаусса (I.1.57), имеем

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \quad \text{и} \quad m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}}. \tag{I.1.83}$$

Для среднего значения

$$x_{i\,\text{ср}} = \frac{x_i + x_i'}{2}$$

получаем

$$m_{x_{i\,\text{ср}}} = \frac{m_d}{2} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}}. \tag{I.1.84}$$

На наличие постоянной систематической ошибки укажет значительное отклонение от нуля величины

$$\theta = \frac{[d]^*}{n}.$$

* Критерием является неравенство $|\,[d]\,| \leqslant 0{,}25\ [\,|\,d\,|\,]$.

В этом случае, рассматривая разности

$$d_i' = d_i - \theta \qquad (I.1.85)$$

как уклонения от арифметической средины и применяя формулу Бесселя (I.1.79), получим

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}.$$

Формулы (I.1.83—I.1.84) остаются в силе и в этом случае. Контролем вычислений служит формула $[d'] = -n\beta$, где величина $\beta = \theta_{окр} - \theta$.

Пример 38. В табл. I.1.10 даны результаты нивелирования (превышения в м) между точками при двух положениях инструмента. Вычислить средние квадратические ошибки одного измерения и среднего из двойных измерений.

Таблица I.1.10

№ превышений	1-е положение x_i	2-е положение x_i'	d (мм)	$d' = d - \theta$	d'^2
1	+1,273	+1,270	+3	+1	1
2	+0,987	+0,988	−1	−3	9
3	+1,069	+1,065	+4	+2	4
4	+0,542	+0,542	0	−2	4
5	+0,768	+0,766	+2	0	0
6	+0,895	+0,891	+4	+2	4
7	+1,166	+1,167	−1	−3	9
8	+1,304	+1,302	+2	0	0
9	+1,198	+1,194	+4	+2	4
10	+0,484	+0,481	+3	+1	1
			+22	+8	
			−2	−8	
			$\sum d = +20$	$\sum d' = 0$	+36

Вычисляем $\theta = \frac{[d]}{n} = +\frac{20}{10} = +2{,}0$ мм и величины d_i' по формуле (I.1.85).

Средняя квадратическая ошибка превышения при одном положении инструмента согласно (I.1.83)

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{36}{18}} = 1{,}41 \text{ мм}.$$

Средняя квадратическая ошибка превышения, полученная как среднее из результатов нивелирования при двух положениях инструмента по (I,1.84),

$$m_{x_i\,ср} = \frac{1{,}41}{\sqrt{2}} = 1{,}00 \text{ мм}.$$

I.1.23. Неравноточные измерения. Веса измерений

Неравноточными называются измерения, дисперсии которых не равны между собой. В этом случае дисперсия определяется формулой

$$\sigma_l^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_l}, \qquad (I.1.86)$$

где $\sigma_0^2 = C = \text{const}$ — постоянная для всех измерений произвольно выбираемая величина, а p_l — так называемые веса измерений. Из (I.1.86) следует определение веса

$$p_l = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_l^2}, \qquad (I.1.87)$$

т. е. вес — величина, обратно пропорциональная дисперсии. Веса — величины относительные. О весе имеет смысл говорить, когда число измерений $n \geqslant 1$. Приняв $p_l = 1$, устанавливаем смысл σ_0^2.

Так как при этом $\sigma_0^2 = \sigma_i^2$, то σ_0^2 есть дисперсия измерения, вес которого принят за единицу (сокращенно — дисперсия единицы веса).

Измерение с весом $p = 1$ может быть как реально существующим, так и фиктивным.

В случае, когда дисперсии σ_l^2 неизвестны, вес вычисляют по приближенной формуле

$$p_l = \frac{\mu^2}{m_l^2}, \qquad (I.1.88)$$

где m_l — средняя квадратическая ошибка l-го измерения, а величина μ, введенная вместо σ_0, — средняя квадратическая ошибка единицы веса. Для применения (I.1.88) ошибка m_l должна быть определена надежно (получена из результатов измерений, число которых $n \geqslant 8$), а также свободна от систематического влияния.

Часто, пользуясь свободой выбора σ_0 (или μ), веса измерений можно установить, не зная σ_l (или m_l).

Так:

1) при измерении линий различной длины, но одним и тем же мерным прибором

$$p_l = \frac{1}{s_l};$$

2) при измерении величин одним и тем же прибором, но различным числом приемов n_l, вес средних значений $p_l = n_l$;

3) при измерении углов в ходе, имеющем n вершин, вес суммы углов хода

$$p_l = \frac{1}{n_l}.$$

I.1.24. Вес функции коррелированных и некоррелированных аргументов

Учитывая формулу (I.1.73) и выражение дисперсии (I.1.86), легко получить формулу для вычисления обратного веса функции

$$u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

коррелированных аргументов в виде

$$\frac{1}{p_u} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_x} + 2 \sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 \cdot r_{x_i x_j} \frac{1}{\sqrt{p_{x_i} \cdot p_{x_j}}}, \tag{I.1.89}$$

а для некоррелированных аргументов в виде

$$\frac{1}{p_u} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_{x_i}}. \tag{I.1.90}$$

Пример 39. Используя условия примера 31, найти вес функции

$$u = 2x_1 + x_2.$$

Решение. На основании (I.1.89) имеем $1/p_u = 4 \cdot 1/p_{x_1} + 1/p_{x_2} + 2r_{x_1x_2} 1/\sqrt{p_{x_1} p_{x_2}}$, при этом $r_{x_1x_2} = -0{,}5$, $m_{x_1} = m_{x_2} = m$.

Приняв за ошибку единицы веса μ стандарт m, получаем $p_{x_1} = p_{x_2} = 1$,

поэтому

$$\frac{1}{p_u} = 4 + 1 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 1 = 4 \quad \text{и} \quad p_u = \frac{1}{4}.$$

В следующих задачах будем рассматривать лишь некоррелированные измерения.

Пример 40. Найти веса следующих функций:

1) $u = x - y + z$,

2) $u = 2x + \frac{1}{3} y - \frac{1}{2} z$,

3) $u = 3x^2$,

если $p_x = 3$, $p_y = \frac{1}{3}$ и $p_z = \frac{1}{4}$.

Решение.

1) $\frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y} + \frac{1}{p_z} = \frac{1}{3} + 3 + 4 = 7\frac{1}{3}$, $p_u = \frac{3}{22}$;

2) $\frac{1}{p_u} = 4 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{8}{3}$, $p_u = \frac{3}{8}$;

3) $\frac{1}{p_u} = (6x)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{36x^2}{3}$.

Пример 41. Найти вес площади треугольника, если основание его $b = 8$ м получено с весом $p_b = 1$, высота $h = 16$ м с весом $p_h = \frac{1}{2}$.

Решение. Составляем функцию измеренных величин

$$s = \frac{1}{2} b \cdot h,$$

затем находим

$$\frac{1}{p_s} = \left(\frac{\partial s}{\partial b}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_b} + \left(\frac{\partial s}{\partial h}\right)^2 \frac{1}{p_h} = \left(\frac{1}{2} h\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} b\right)^2 \cdot 2 =$$

$$= 64 + 32 = 96.$$

Пример 42. Дана функция $u = x\sqrt{p}$. Найти вес p_u, если x — результат измерения, а p — его вес.

Решение.

$$\frac{1}{p_u} = (\sqrt{p})^2 \frac{1}{p} = 1.$$

Вывод. Если результат измерения умножить на корень квадратный из его веса, то полученный результат будет иметь вес, равный 1.

На этом основано приведение неравноточных измерений к равноточным.

I.1.25. Обработка ряда неравноточных измерений одной величины

Если имеем ряд независимых (некоррелированных) результатов измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с заданными весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то при отсутствии систематических ошибок величина

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \frac{[xp]}{[p]} \qquad (I.1.91)$$

является наиболее надежной оценкой для истинного значения измеряемой величины и называется общей арифметической срединой. Ее точность определяется формулой

$$m_{\bar{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}},$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}, \qquad (I.1.92)$$

а $v_i = x_i - \bar{x}$. Уклонения v_i обладают свойствами:

$$1.\ [pv]=0;\quad 2)\ [pv^2]=\min.$$

Для истинного значения X можно построить доверительный интервал аналогично тому, как было рассмотрено в разделе I.1.21 для равноточных измерений.

Если известны истинные ошибки измерений, то

$$\mu=\sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}} \qquad (I.1.93)$$

(формула Гаусса для неравноточных измерений).

Порядок вычислений при обработке ряда неравноточных измерений следующий.

1. Вместо (I.1.91) применяют формулу

$$\bar{x}=x'+\frac{[\varepsilon p]}{[p]}.$$

2. Вычисляют уклонения v_i и выполняют контроль

$$[pv]=-\beta\,[p],$$

где

$$\beta=\bar{x}_{\text{окр}}-\bar{x}.$$

3. Вычисляют $[p\,v^2]$ с контролем

$$[pv^2]=[p\varepsilon^2]-\frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}$$

и ошибки оценок μ, M

$$m_\mu=\frac{\mu}{\sqrt{2\,(n-1)}}\quad\text{и}\quad m_M=\frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}.$$

При достаточно большом n оба значения μ (принятое для вычисления весов $\mu^2=c$ и полученное по формуле (I.1.93)) должны совпадать в пределах ошибки m_μ. Их расхождение на величину, бо́льшую чем m_μ, указывает на наличие систематических ошибок.

Результат записывают в виде $\bar{x}\pm M$ или в виде доверительного интервала вида (I.1.81). Доверительный интервал для σ_0 строится точно так же, как и для σ (I.1.82).

Пример 43. Произвести математическую обработку по данным, приведенным в табл. I.1.11, в которой даны средние значения одного и того же угла, измеренного разным числом приемов n. Для удобства вычислений целесообразно применять формулу $p_i=\frac{n}{3}$. Вычисления располагаем в этой же таблице,

Таблица I.1. 11

№ по пор.	x_l	Число приемов n	$p=\frac{n}{3}$	ε	$p\varepsilon$	$p\varepsilon^2$	v	pv	pv^2
1	89° 47′ 16″	6	2	+10	+20	200	+6	+12	72
2	9	18	6	+3	+18	54	−1	−6	6
3	6	3	1	0	0	0	−4	−4	16
4	10	15	5	+4	+20	80	0	0	0
5	23	6	2	+7	+14	98	+3	+6	18
6	8	12	4	+2	+8	16	−2	−8	16
$x'=89°\ 47'\ 06''$ $\frac{[p\varepsilon]}{[p]}=+4{,}0$ $\bar{x}=89\ 47\ 10{,}0$			$\sum=20$		$\sum=+80$	$\sum=448$		-18 $+18$ $\sum=0$	$\sum=128$

$$\frac{[p\varepsilon]}{[p]}=\frac{80}{20}=+4{,}0;\quad \beta=0;$$

$$[pv^2]=[p\varepsilon]-\frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}=448-\frac{6400}{20}=128;$$

$$\mu=\sqrt{\frac{128}{5}}=5{,}1'';\quad M=\frac{5{,}1''}{\sqrt{20}}=1{,}1'';\quad m_\mu=\frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}=$$

$$=\frac{5{,}1''}{\sqrt{10}}=1{,}6'';\quad m_M=\frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}=0{,}36''.$$

Ответ. 89° 47′ 10,0″ ± 1,1″.

Пример 44. Отметка H точки местности получена по шести нивелирным линиям. Произвести полную математическую обработку результатов измерений по данным, приведенным в табл. I.1.12.

Средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu=\sqrt{\frac{41{,}4}{6-1}}=2{,}9\text{ мм},\ \text{а}\ m_\mu=\frac{2{,}9}{\sqrt{2(6-1)}}=0{,}92\text{ мм},$$

$$\sqrt{c}=\sqrt{10}=3{,}1,\ \text{так что}\ |\mu-\sqrt{c}|<m_\mu,$$

$$M=\frac{2{,}9}{\sqrt{1{,}6}}=2{,}3\text{ мм},\quad m_M=\frac{0{,}92}{\sqrt{1{,}6}}=0{,}73\text{ мм}.$$

Ответ: $\bar{x}=196{,}5277$ м ± 2,3 мм.

Таблица I.1.12

№ линий	$H_м$	$m_{н\,мм}$	$p=\frac{10}{m_н^2}$	$\varepsilon_{мм}$	$p\varepsilon$	$p\varepsilon^2$	v	pv	pv^2
1	196,529	6,3	0,25	+12	3,00	36,0	+1,3	+0,33	0,4
2	522	8,4	0,14	+5	0,70	3,5	−5,7	−0,80	4,6
3	517	9,1	0,12	0	0	0	−10,7	−1,28	13,7
4	532	4,3	0,54	+15	8,10	121,5	+4,3	+2,32	10,0
5	530	5,2	0,37	+13	4,81	62,5	+2,3	+0,85	2,0
6	520	7,5	0,18	+3	0,54	1,6	−7,7	−1,39	10,7
	$x'=196,517$		$[p]=1,60$		$\sum=17,15$		−3,47		$\sum=41,4$

$\frac{[p\varepsilon]}{[p]}=+10,7$

$\overline{x}=196,5277$

$\frac{[p\varepsilon]}{[p]}=\frac{+17,15}{1,60}=+10,72$ мм $-0,01072$ м,

$\beta=-0,02,\ -[p]\beta=+0,03,$

$[pv^2]=225,1-\frac{294,1}{1,6}=41,3.$

I.1.26. Оценка точности по разностям двойных неравноточных измерений

Если разности двойных измерений $d=x_i-x_i'$ получены по неравноточным измерениям (но попарно равноточным, т. е. $p_{x_i}=p_{x_i'}$), то имеем обратный вес разности

$$\frac{1}{p_{d_i}}=\frac{1}{p_{x_i}}+\frac{1}{p_{x_i'}}=\frac{2}{p_{x_i}} \text{ и } p_{d_i}=\frac{p_{x_i}}{2}=\frac{p_i}{2}.$$

Поэтому при отсутствии систематических ошибок получаем ошибку единицы веса

$$\mu=\sqrt{\frac{[p_d d^2]}{n}}=\sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}.$$

Средние квадратические ошибки средних значений $x_{i\,ср}=\frac{x_i+x_i'}{2}$ будут равны

$$m_{(x_i)_{ср}}=\frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}.$$

В случае, когда разности d_i содержат систематические ошибки, величина

$$\theta = \frac{[pd]}{[p]}$$

будет заметно отличаться от нуля *. Тогда будем иметь

$$\mu = \sqrt{\frac{[d'^2 p]}{2(n-1)}},$$

где $d_i' = d_i - \theta$.

Пример 45. Даны разности d двойных измерений некоторых величин и веса измерений. Выполнить оценку точности. Составим табл. I.1.13.

Таблица I.1.13

№ измерений	Разности d_i	Веса измерений $p_{x_i} = p_i$	d_i^2	pd_i^2
1	+2,4	1,11	5,8	6,4
2	−6,2	0,28	38,4	10,7
3	−2,2	0,62	4,8	3,0
4	+1,3	0,32	1,7	0,5
5	−0,6	0,27	0,4	0,1
6	+2,1	0,71	4,4	3,1
7	−4,0	0,43	16,0	6,9
8	+1,4	0,45	2,0	0,9
9	+7,5	0,48	56,2	26,9
10	−1,3	0,53	1,7	0,9
	+14,7	$\sum = 5{,}20$		59,4
	−14,3			
	$\sum = +0{,}4$			

Так как $\frac{[pd]}{[p]} \approx 0$, то средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{59{,}4}{20}} = 1{,}7.$$

Средняя квадратическая ошибка среднего весового равна

$$m_{(x_1)_{ср}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_1}} = \frac{1{,}7}{\sqrt{2{,}22}} = 1{,}1.$$

* Критерием является неравенство $|\,[d\sqrt{p}]\,| < 0{,}25\,[\,|\,d\sqrt{p}\,|\,]$.

Таблица для вычисления величин $y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ по аргументу $t = \frac{x - M[x]}{\sigma}$ или $t = \frac{\Delta}{m}$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5641	0,5641	0,5641	0,5640	0,5637	0,5634	0,5731	5,5629	0,5624	0,5619
0,1	5614	5607	5602	5595	5588	5579	5571	5561	5551	5541
0,2	5530	5518	5507	5494	5481	5469	5455	5440	5425	5409
0,3	5394	5377	5360	5343	5325	5306	5288	5268	5250	5228
0,4	6209	5187	5166	5143	5121	5098	5076	5052	5028	5003
0,5	4979	4954	4929	4903	4876	4849	4822	4796	4769	4740
0,6	4712	4684	4656	4626	4598	4568	4538	3507	4477	4446
0,7	4417	4385	4354	4322	4291	4258	4227	4195	4162	4129
0,8	4097	4064	4030	3998	3964	8932	3898	3864	3831	3797
0,9	3763	3729	3695	3661	3627	3594	3558	3524	3490	3456
1,0	0,342	0,339	0,336	0,332	0,329	0,326	0,322	0,318	0,315	0,312
1,1	308	304	302	298	295	292	288	284	282	278
1,2	275	272	268	265	262	258	256	252	248	246
1,3	242	240	236	233	230	227	224	221	218	214
1,4	212	209	206	203	200	197	194	192	189	186
1,5	183	180	178	175	172	170	167	165	162	159
1,6	156	154	152	149	147	145	142	140	138	135
1,7	133	131	129	126	124	122	120	118	116	114
1,8	112	110	108	106	104	102	100	098	096	094
1,9	093	091	090	088	086	084	083	081	080	078
2,0	0,076	0,076	0,075	0,073	0,072	0,069	0,068	0,066	0,065	0,063
2,1	062	061	060	058	057	056	055	053	052	051
2,2	050	049	048	047	046	045	044	043	042	041
2,3	040	039	038	038	037	036	036	034	033	032
2,4	0,032	031	030	030	029	028	027	027	026	025
2,5	025	024	024	023	022	022	021	021	020	020
2,6	019	019	018	018	017	017	016	016	016	015
2,7	015	014	014	014	013	017	012	012	012	011
2,8	011	011	011	010	010	010	009	009	009	009
2,9	008	008	008	008	008	007	007	007	007	007
3,0	006									

Таблицы значений интеграла вероятностей

$$\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{40}-\frac{t^7}{336}+\frac{t^9}{3456}-\ldots\right)$$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,00000	1,25	0,78870	2,50	0,98758
0,05	0,03988	1,30	0,80640	2,55	0,98922
0,10	0,07966	1,35	0,82298	2,60	0,99068
0,15	0,11924	1,40	0,83849	2,65	0,99195
0,20	0,15852	1,45	0,85294	2,70	0,99307
0,25	0,19741	1,50	0,86639	2,75	0,99404
0,30	0,23582	1,55	0,87886	2,80	0,99489
0,35	0,27366	1,60	0,89040	2,85	0,99563
0,40	0,31084	1,65	0,90106	2,90	0,99627
0,45	0,34729	1,70	0,91087	2,95	0,99682
0,50	0,38292	1,75	0,91988	3,00	0,99730
0,55	0,41768	1,80	0,92814	3,10	0,99806
0,60	0,45149	1,85	0,93569	3,20	0,99863
0,65	0,48431	1,90	0,94257	3,30	0,99903
0,70	0,51607	1,95	0,94882	3,40	0,99933
0,75	0,54675	2,00	0,95450	3,50	0,99953
0,80	0,57629	2,05	0,95964	3,60	0,99968
0,85	0,60468	2,10	0,96427	3,70	0,99978
0,90	0,63188	2,15	0,96844	3,80	0,99986
0,95	0,65789	2,20	0,97219	3,90	0,99990
1,00	0,68269	2,25	0,97555	4,00	0,99994
1,05	0,70628	2,30	0,97855	4,10	0,99996
1,10	0,72867	2,35	0,98123	4,20	0,99997
1,15	0,74986	2,40	0,98360	4,30	0,99998
1,20	0,76986	2,45	0,98571	4,40	0,99999

Коэффициенты Стьюдента t_β (r — число степеней свободы, β — доверительная вероятность)

r \ β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,14	0,28	0,42	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,13	0,27	0,40	0,55	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,13	0,26	0,40	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,13	0,26	0,40	0,54	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
16	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	2,9	4,0
17	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
18	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
19	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	3,9
20	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
21	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
22	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
23	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
24	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
25	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
26	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
27	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
28	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
29	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
30	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
120	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4
∞	0,13	0,25	0,39	0,52	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

Значения χ^2 в зависимости от r и p

r \ p	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

Таблица значений функции

$$z=\frac{1}{2}\{\ln(1+r)-\ln(1-r)\}$$

r	0	1	2	3	4
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400
0,1	0,1003	0,1104	0,1206	0,1307	0,1409
0,2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448
0,3	0,3095	0,3205	0,3316	0,3428	0,3541
0,4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722
0,5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042
0,6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582
0,7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505
0,8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212
0,9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380
0,99	2,6466	2,6996	2,7587	2,8257	2,9031

Продолжение приложения 5

r	5	6	7	8	9
0,0	0,0500	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
0,1	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
0,2	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
0,3	0,3654	0,3769	0,3884	0,4001	0,4118
0,4	0,4847	0,4973	0,5101	0,5230	0,5361
0,5	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
0,6	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
0,7	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
0,8	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
0,9	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6466
0,99	2,9945	3,1063	3,2504	3,4534	3,8002

I.2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В. Д. Большаков

А. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ

I.2.1. Общие понятия о методе наименьших квадратов

В теории ошибок измерений рассматривался вопрос математической обработки многократных измерений одной и той же величины. В практике геодезических вычислений возникает и более общая задача совместной обработки измерений, выполненных для определения многих неизвестных величин (например, при уравнивании нивелирных и плановых геодезических сетей). Получение наиболее надежных значений этих величин и их оценка точности составляют задачу так называемых уравнительных вычислений (уравнивания). Уравнивание выполняют по методу наименьших квадратов (м. н. к.), согласно которому измеренные величины получают поправки v_i, удовлетворяющие условию $[p\,v^2] = \min$, где p_i — вес измерений. К. Гауссом и русским математиком А. Марковым доказано, что этот принцип приводит к наилучшим оценкам для искомых неизвестных: они при условии отсутствия систематических ошибок в измерениях являются несмещенными и обладают минимальной дисперсией (теория Гаусса — Маркова). Это утверждение справедливо и для любых функций уравненных неизвестных. При этом не требуется, чтобы результаты измерений подчинялись нормальному закону распределения. Однако в последнем случае, который наиболее часто имеет место в геодезической практике, уравнивая по м. н. к., мы уменьшаем риск того, что найденные оценки в своей совокупности будут существенно отклоняться от истинных значений. Только при нормальном законе становится возможным построение доверительных интервалов.

Задача уравнивания возникает потому, что число измерений n в геодезических построениях всегда больше числа необходимых неизвестных k, для определения которых и выполняют работы. Наличие избыточных измерений, число которых $r = n - k$, позволяет выполнить контроль измерений, оценить их точность и повысить точность уравненных неизвестных и их функций.

Доказывается, что отношение весов уравненных P и неуравненных p результатов измерений в среднем определяется формулой

$$\frac{P}{p}=\frac{n}{n-r}=\frac{n}{k}>1.$$

Существуют два основных способа уравнивания: параметрический и коррелатный. В первом случае решение приводит к непосредственному получению уравненных неизвестных (параметров), во втором сначала вычисляют уравненные коррелаты, а затем, как функции, — неизвестные. Оба способа уравнивания приводят к одним и тем же результатам, но они обладают различной трудоемкостью при решении одной и той же задачи.

Так, например, в полигонометрическом ходе число параметров равно удвоенному числу определяемых пунктов ($2s$) (по числу координат X и Y этих пунктов), а число всех измерений (углов и длин сторон), очевидно, равно $2s+3$. При уравнивании этого хода параметрическим способом пришлось бы совместно решать $2s$ уравнений, а при коррелатном всего $r=2s+3-2s=3$ уравнения. Поэтому полигонометрический ход уравнивают коррелатным способом. Если же величины k и r примерно одинаковы, то существенное влияние на выбор способа уравнивания оказывает простота составления исходных уравнений.

Кроме указанных двух основных способов уравнивания существуют и так называемые комбинированные способы, сочетающие достоинства одного и другого.

Классическая теория м. н. к. предполагает некоррелированность результатов измерений. Однако современный м. н. к. обобщен и на коррелированные измерения.

Рассмотрим основные положения параметрического способа уравнивания.

I.2.2. Уравнения поправок и нормальные уравнения

Пусть в качестве необходимых неизвестных (параметров) выбраны k величин, точные значения которых обозначим через X_j ($j=1, 2, \ldots, k$). Заметим, что эти неизвестные не должны быть связаны между собой функциональными зависимостями. В качестве X_j могут быть выбраны также k измеренных величин. Измеренными являются n функций этих параметров. Если истинные значения измеренных величин обозначить через Y_i, то можно написать n уравнений вида

$$Y_i=\varphi_i(X_1, X_2, \ldots, X_k) \qquad (I.2.1)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n) \quad n>k.$$

Систему уравнений (I.2.1) называют исходной системой связи. Так как истинные значения Y_i нам неизвестны, то нельзя определить и точные значения X_j. Однако в силу переопределенности исходной системы вместо Y_i и X_j можно подобрать так называемые уравненные значения y_i и x_j, такие, что

$$y_i=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k), \qquad (I.2.2)$$

причем $y_i = y_i' + v_i$, где y_i' — измеренное значение функции, а v_i — поправка.

Систему уравнений (I.2.2) необходимо привести к линейному виду.

Разложив для этого функции $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь линейными членами разложения, получим

$$y_i' + v_i = a_i\delta x_1 + b_i\delta x_2 + \ldots + g_i\delta x_k + \varphi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)$$

или

$$v_i = a_i\delta x_1 + b_i\delta x_2 + \ldots + g_i\delta x_k + l_i, \qquad (I.2.3)$$

где свободный член

$$l_i = \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0) - y_i'. \qquad (I.2.4)$$

Здесь $x_j^{(0)}$ — приближенные, однако близкие к точным значения параметров. Их обычно вычисляют по измеренным значениям y'. Первое слагаемое в (I.2.4) представляет приближенное значение функции. Коэффициенты $a_i, b_i, \ldots, g_i$ в (I.2.3) суть частные производные

$$a_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)_{x_1=x_1^0}, \quad b_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_2}\right)_{x_2=x_2^0},$$

$$g_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)_{x_k=x_k^0},$$

взятые по истинным значениям параметров, но вычисленные при их приближенных значениях.

Уравнения вида (I.2.3) называют системой уравнений поправок.

Если исходная система (I.2.2) имеет линейный вид, то уравнения поправок также имеют вид (I.2.3), при этом коэффициенты $a_i, b_i, \ldots, g_i$ равны коэффициентам при неизвестных x_j в этих уравнениях.

Решение уравнений (I.2.3) при условии $[p v^2] = \min$ приводит к системе k линейных уравнений с k неизвестными.

Система

$$\left.\begin{aligned}
&[paa]\,\delta x_1 + [pab]\,\delta x_2 + [pac]\,\delta x_3 + \ldots + [pag]\,\delta x_k + [pal] = 0\\
&[pab]\,\delta x_1 + [pbb]\,\delta x_2 + [pbc]\,\delta x_3 + \ldots + [pbg]\,\delta x_k + [pbl] = 0\\
&[pac]\,\delta x_1 + [pbc]\,\delta x_2 + [pcc]\,\delta x_3 + \ldots + [pcg]\,\delta x_k + [pcl] = 0\\
&\qquad\qquad\qquad

В (I.2.5) коэффициенты при δx (гауссовы суммы) раскрываются так:

$$[paa]=\sum_{l=1}^{n} p_l a_l a_l, \quad [pab]=\sum_{l=1}^{n} p_l a_l b_l \text{ и т. д.}$$

По главной диагонали QQ_1 этой системы расположены квадратичные коэффициенты, являющиеся всегда положительными числами; коэффициенты, расположенные симметрично относительно главной диагонали, попарно равны между собой

$$[pab]=[pba], \quad [pac]=[pca] \text{ и т. д.}$$

В случае равноточных измерений система (I.2.5) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]\,\delta x_1+[ab]\,\delta x_2+[ac]\,\delta x_3+\ldots+[ag]\,\delta x_k+[al]=0\\
&[ab]\,\delta x_l+[bb]\,\delta x_2+[bc]\,\delta x_3+\ldots+[bg]\,\delta x_k+[bl]=0\\
&[ac]\,\delta x_1+[cb]\,\delta x_2+[cc]\,\delta x_3+\ldots+[cg]\,\delta x_k+[cl]=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[ag]\,\delta x_1+[bg]\,\delta x_2+[cg]\,\delta x_3+\ldots+[gg]\,\delta x_k+[gl]=0
\end{aligned}\right\}. \quad \text{(I.2.6)}$$

(все $p_l=1$).

Дальнейшая задача заключается в решении системы нормальных уравнений.

I.2.3. Решение системы нормальных уравнений по схеме Гаусса

Разработанный Гауссом способ решения нормальных уравнений сводится к последовательному исключению из нее всех неизвестных. При этом исходная система заменится так называемой эквивалентной системой уравнений, которая для равноточных измерений имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]\,\delta x_1+[ab]\,\delta x_2+[ac]\,\delta x_3+\ldots+[ag]\,\delta x_k+[al]=0\\
&[bb\cdot 1]\,\delta x_2+[bc\cdot 1]\,\delta x_3+\ldots+[bg\cdot 1]\,\delta x_k+[bl\cdot 1]=0\\
&[cc\cdot 2]\,\delta x_3+\ldots+[cg\cdot 2]\,\delta x_k+[cl\cdot 2]=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[gg\,(k-1)]\,\delta x_k+[gl\,(k-1)]=0
\end{aligned}\right\}. \quad \text{(I.2.7)}$$

Ее получение называется прямым ходом решения. Неизвестные, начиная с последнего, вычисляют из так называемых элиминационных уравнений, получаемых из (I.2.7) и имеющих вид

$$\left.\begin{aligned}
&\delta x_1=-\frac{[ab]}{[aa]}\,\delta x_2-\frac{[ac]}{[aa]}\,\delta x_3-\ldots-\frac{[ag]}{[aa]}\,\delta x_k-\frac{[al]}{[aa]}\\
&\delta x_2=-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,\delta x_3-\ldots-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,\delta x_k-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta x_k=\frac{[gl\,(k-1)]}{[gg\,(k-1)]}
\end{aligned}\right\}. \quad \text{(I.2.8)}$$

Этот процесс называют обратным ходом решения.

Коэффициенты при неизвестных в эквивалентной системе (I.2.7) называются алгоритмами Гаусса.

Правило раскрытия алгоритма Гаусса. Будем называть алгоритм с цифрой j преобразованным, а без цифры — непреобразованным. Тогда любой преобразованный алгоритм Гаусса равен этому же непреобразованному алгоритму минус число дробей, совпадающих с цифрой j раскрываемого алгоритма. Знаменатели этих дробей равны первым коэффициентам ($j-1$) эквивалентных уравнений, а их числители — произведению двух алгоритмов с той же цифрой, что и в алгоритме знаменателя, причем первый сомножитель условно получается как произведение первой буквы знаменателя на первую букву раскрываемого алгоритма, а второй — как произведение второй буквы знаменателя на его вторую букву. Например,

$$[bb\cdot 1]=[bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]};$$

$$[bl\cdot 1]=[bl]-\frac{[ab]\cdot[al]}{[aa]};$$

$$[cl\cdot 2]=[cl]-\frac{[ac]\,[al]}{[aa]}-\frac{[bc\cdot 1]\cdot[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\quad\text{и т. д.}$$

Возможна и неполная форма раскрытия алгоритма, когда раскрываемый алгоритм с цифрой j равен тому же алгоритму с цифрой $j-1$ минус последняя дробь из полной формы раскрытия. Например,

$$[cl\cdot 2]=[cl\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bl\cdot 1]}.$$

При неравноточных измерениях во всех алгоритмах Гаусса приписывается буква p.

1.2.4. Контроль составления и решения нормальных уравнений

Контроль составления уравнений ошибок производится вычислением в две руки.

Контроль составления и решения нормальных уравнений производится методом сумм:

$$a_l+b_l+c_l+\ldots+g_l+l_l=s_l\quad(l=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\qquad\text{(I.2.9)}$$

причем

$$[a]+[b]+[c]+\ldots+[g]+[l]=[s],\qquad\text{(I.2.10)}$$

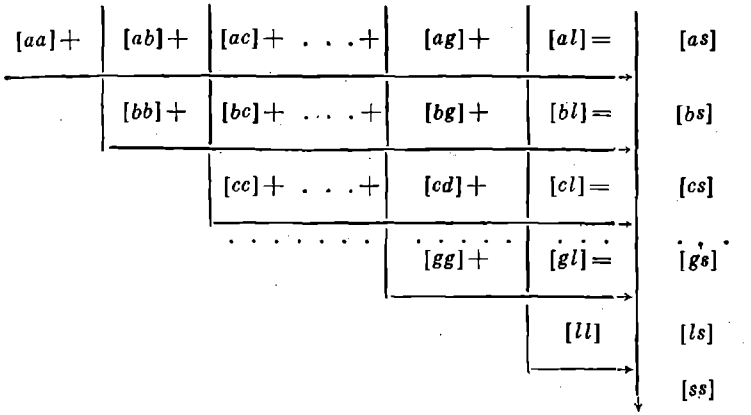
или

$$[pa]+[pb]+[pc]+\ldots+[pg]+[pl]=[ps].\qquad\text{(I.2.10′)}$$

Коэффициенты нормальных уравнений контролируют так:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]+[ab]+\ldots+[ag]+[al]=[as]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [ag]+[bg]+\ldots+[gg]+[gl]=[gs]\\ [al]+[bl]+\ldots+[gl]+[ll]=[ls]\\ [as]+[bs]+\ldots+[gs]+[ls]=[ss]\end{array}\right\}. \qquad (I.2.11)$$

В схеме Гаусса суммирование выполняется углом:



Далее:

$$\left.\begin{array}{l}[aa]+[ab]+[ac]+\ldots+[ag]+[al]=[as]\\ [bb\cdot 1]+[bc\cdot 1]+\ldots+[bg\cdot 1]+[bl\cdot 1]=[bs\cdot 1]\\ [cc\cdot 2]+\ldots+[cg\cdot 2]+[cl\cdot 2]=[cs\cdot 2]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [gg\,(k-1)]+[gl\,(k-1)]=[gs\,(k-1)]\end{array}\right\}. \qquad (I.2.12)$$

Заключительным контролем прямого хода решения в схеме Гаусса является выполнение равенств

$$[ll\cdot k]=[ls\cdot k]=[ss\cdot k] \qquad (I.2.13)$$

или

$$[pll\cdot k]=[pls\cdot k]=[pss\cdot k]. \qquad (I.2.13')$$

Закончив прямой ход решения, переходят к вычислению неизвестных δx_j. По мере их вычисления контроль осуществляют подстановкой найденных неизвестных в эквивалентные уравнения (I.2.7).

Получив все неизвестные δx_j, согласно (I.2.8) вычисляют по (I.2.3) поправки v_i и осуществляют контроль их вычисления на основе выражений

$$\left.\begin{array}{ll} [av]=0 & [pav]=0 \\ [bv]=0 \text{ или } & [pbv]=0 \\ [gv]=0 & [pgv]=0 \end{array}\right\}, \qquad \text{(I.2.14)}$$

которые представляют собой сокращенную запись нормальных уравнений (I.2.5), (I.2.6) (совокупность этих равенств известна как лемма Гаусса).

Проверяют также выполнение контрольных равенств

$$[v^2]=[ll\cdot k]=[ls\cdot k] \qquad \text{(I.2.15)}$$

или

$$[pv^2]=[pll\cdot k]=[pls\cdot k]. \qquad \text{(I.2.15')}$$

Справедливы равенства

$$[v^2]=[lv]=[sv] \text{ и } [pv^2]=[plv]=[psv]. \qquad \text{(I.2.16)}$$

Окончательным контролем решения задачи уравнивания является соблюдение равенств

$$y_i^{\circ}+v_i=\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_k),$$

которые следует проверить при нелинейных функциях (контролируется правильность разложения в ряд).

В линейных задачах достаточно ограничиться проверкой равенств (I.2.14) и (I.2.16).

Составление нормальных уравнений при равноточных измерениях и их решение выполняют с помощью трех схем, приведенных для трех неизвестных.

Схема 1

№ уравнения	a_i	b_i	c_i	l_i	s_i	v_i
1	a_1	b_1	c_1	l_1	s_1	v_1
2	a_2	b_2	c_2	l_2	s_2	v_2
•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•
n	a_n	b_n	c_n	l_n	s_n	v_n
Суммы	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[l]$	$[S]$	$[v]$
Неизвестные	δx_1	δx_2	δx_3			
Контроль	$[av]$	$[bv]$	$[cv]$			$[v^2]$

Схема 2

	$a]$	$b]$	$c]$	$l]$	$s]$	Контроль
$[a$	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$	Расхождение до 0,01
$[b$		$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	$[bs]$	
$[c$			$[cc]$	$[cl]$	$[cs]$	
$[l$				$[ll]$	$[ls]$	
$[s$					$[ss]$	

Схема 3

	δx_1	δx_2	δx_3	l	s	Контроль
$1/[aa]$	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$	
	(-1)	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	$-\frac{[as]}{[aa]}$	
$1/[bb\cdot 1]$		$[bb\cdot 1]$	$[bc\cdot 1]$	$[bl\cdot 1]$	$[bs\cdot 1]$	
		(-1)	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	
$1/[cc\cdot 2]$			$[cc\cdot 2]$	$[cl\cdot 2]$	$[cs\cdot 2]$	
			(-1)	$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$-\frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	
	δx_1	δx_2	δx_3	$[ll\cdot 3]$	$[ls\cdot 3]$	
					$[ss\cdot 3]$	

При небольшом числе неизвестных ($k \leqslant 10$) коэффициенты нормальных уравнений следует вычислять до 0,01. С такой же точностью вычисляют и коэффициенты эквивалентных уравнений. Коэффициенты же элиминационных уравнений и неизвестные вычисляют до 0,001. Величины $1/[aa]$, $1/[bb\cdot 1]$ и т. д. в схеме 3 введены для замены действия деления умножением. Их вычисляют до 0,0001.

Расхождение контрольных сумм эквивалентных строк в схеме Гаусса допускают до 0,01—0,02 (допуск увеличивается по мере спуска вниз по схеме). Заметим, что в столбец s выписаны числа из столбца «контроль» схемы 2.

Схема 3 представляет собой сокращенную схему Гаусса, в которой опущены промежуточные записи, связанные с раскрытием алгоритмов. Все алгоритмы Гаусса в этой схеме получаются методом накопления на счетчиках механических или электрических вычислительных машин. Если выполнить порядковую нумерацию

строк в схеме 3, опустив элиминационные строки, то можно сформулировать следующее правило вычисления коэффициентов этих строк: любой коэффициент, расположенный в i-ой строке и j-ом столбце схемы, равен соответствующему коэффициенту из схемы 2 плюс сумма произведений уже полученных чисел элиминационных строк из столбца i на числа из столбца j, расположенные над ними (в эквивалентных строках). Например, алгоритм $[cs\cdot 2]$ ($i=3$, $j=5$) равен $[cs]$ плюс сумма произведений чисел элиминационных строк из столбца 3 ($-[ac]/[aa]$ и $-[bc\cdot 1]/[bb\cdot 1]$) соответственно на числа $[as]$ и $[bs\cdot 1]$ (числа эквивалентных строк из столбца 5). Неизвестные δx_j вычисляются по следующему правилу: неизвестное δx с номером j равно числу j-ой элиминационной строки из столбца l плюс сумма произведений уже вычисленных неизвестных δx на расположенные над ними числа из этой же элиминационной строки.

При уравнивании неравноточных измерений описанный нами порядок вычислений остается без изменений. Однако схема 1 приобретает такой вид:

	a_l	b_l	c_l	l_l	s_l	p_la_l	p_lb_l	p_lc_l	p_ll_l	p_ls_l	v_l	P_iv_l
1												
2												
.												
.												
.												
.												
.												
n												
	δx_1	δx_2	δx_3			$[pa]$	$[pb]$	$[pc]$	$[pl]$	$[ps]$		

а в алгоритмах схемы 2 добавляется буква p, при этом любой алгоритм Гаусса получается как сумма произведений всех чисел из соответствующих этому алгоритму столбцов схемы 2. Например,

$$[paa]=\sum_{l=1}^{n} a_lp_la_l, \qquad [pab]=\sum_{l=1}^{n} a_lp_lb_l \text{ и т. д.}$$

При неравноточных измерениях возможна также схема вычислений, соответствующая равноточным измерениям. В самом деле, как было показано в (I.1.24), неравноточные измерения можно свести к равноточным умножением каждого результата на корень квадратный из его веса. При этом уравнения поправок приобретают вид

$$v_i'=a_i'\delta x_1+b_i'\delta x_2+\ldots+g_i'\delta x_3+l_i',$$

аналогичный (I.2.3), где

$$a_i'=a_i\sqrt{p_i},\quad b_i'=b_i\sqrt{p_i},\ \ldots,\ g_i'=g_i\sqrt{p_i},$$
$$v_i'=v_i\sqrt{p_i} \text{ и } l_i'=l_i\sqrt{p_i},$$

и все формулы и схемы, полученные для равноточных измерений, остаются в силе, если коэффициенты a_i, b_i, . . ., g_i и свободные члены l_i заменить на a_i', b_i', . . ., g_i'. В конце вычислений необходимо вычислить поправки $v_i = v_i' : \sqrt{p_i}$.

I.2.5. Пример уравнивания равноточных измерений параметрическим способом

В табл. I.2.1 даны результаты измерения углов во всех комбинациях (рис. I.2.1). Уравнять эти результаты параметрическим способом.

Таблица I.2.1

№ углов	Углы	Измеренные значения	Неизвестные	Уравненные значения
1	*AOB*	38° 31′ 15,5″	x_1	38° 31′ 15,62″
2	*BOC*	46 07 30,0	x_2	46 07 29,88
3	*COD*	17 43 46,5	x_3	17 43 46,87
4	*AOC*	84 38 45,0	x_1+x_2	84 38 45,50
5	*BOD*	63 51 16,5	x_2+x_3	63 51 16,75
6	*AOD*	102 22 33,0	$x_1+x_2+x_3$	102 22 32,37

Р е ш е н и е. I. Выберем в качестве независимых неизвестных (параметров) x_1, x_2, x_3 соответственно первый, второй и третий углы. Тогда остальные три угла, зависящие от первых трех, будут представлять собою суммы независимых неизвестных.

II. Записываем уравнения поправок в общем виде

$$\left.\begin{aligned} \delta x_1 + l_1 &= v_1 \\ \delta x_1 + l_2 &= v_2 \\ \delta x_1 + l_3 &= v_3 \\ \delta x_1 + \delta x_2 + l_4 &= v_4 \\ \delta x_1 + \delta x_3 + l_5 &= v_5 \\ \delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + l_6 &= v_6 \end{aligned}\right\}. \qquad (I.2.17)$$

III. Введем приближенные значения неизвестных, приняв их равными измеренным значениям углов x_1, x_2, x_3,

$$x_1^{(0)} = 38° 31′ 15{,}5″;$$
$$x_2^{(0)} = 46\ 07\ 30{,}0;$$
$$x_3^{(0)} = 17\ 43\ 46{,}5.$$

Рис. I.2.1

IV. На основании (I.2.4) вычислим свободные члены l_i как разности приближенных значений углов и измеренных. Получаем

$$l_1 = 0;$$

$$l_2 = 0;$$

$$l_3 = 0;$$

$$l_4 = +0{,}8'';$$

$$l_5 = 0;$$

$$l_6 = -1{,}0''.$$

V. По уравнениям (I.2.17) составим таблицу коэффициентов уравнений поправок и нормальных уравнений (табл. I.2.2—I.2.3).

Таблица I.2.2

	a	b	c	l	s	v
1	+1				+1	+0,12
2		+1			+1	−0,12
3			+1		+1	+0,37
4	+1	+1		+0,5	+2,5	+0,50
5		+1	+1			+0,25
6	+1	+1	+1	−1,0	+2,0	−0,63
	+3	+4	+3	−0,5	+9,5	

$[v^2] = 0{,}874$

Таблица I.2.3

$a]$	$b]$	$c]$	$l]$	$s]$	Контроль
+3,00	+2,00	+1,00	−0,50	+5,50	+5,50
	4,00	+2,00	−0,50	+7,50	+7,5
		3,00	−1,00	+5,00	+5,00
			−1,25	−0,75	−0,75
				+17,25	+17,25

Выполним решение нормальных уравнений (табл. I.2.4).

Как видим, все предусмотренные контроли выполняются. Уравненные значения углов приведены в табл. I.2.1 в последнем столбце.

Таблица I.2.4

	δx_1	δx_2	δx_3	l	s	Контроль
−0,3333	3,00 (−1)	2,00 −2,667	+1,00 −0,333	−0,50 +0,167	+5,50 −1,833	+5,50 −1,833
−0,3745		+2,67 (−1)	+1,33 (−0,498)	−0,17 +0,064	+3,83 −1,434	+3,83 −1,434
−0,5000			+2,00 (−1)	−0,75 +0,373	+1,26 −0,627	+1,25 −0,627
	δx_1 +0,124	δx_2 −0,122	δx_3 +0,373	0,88	+0,89 +0,89	

I.2.6. Оценка точности уравненных неизвестных

Для оценки точности уравненных неизвестных последние необходимо выразить в виде линейных функций непосредственно измеренных величин или свободных членов уравнений поправок. Можно доказать, что

$$\left.\begin{aligned}
\delta x_1 &= -[pal]\,Q_{11} - [pbl]\,Q_{12} - [pcl]\,Q_{13} - \ldots - [pgl]\,Q_{1k}\\
\delta x_2 &= -[pal]\,Q_{21} - [pbl]\,Q_{22} - [pcl]\,Q_{23} - \ldots - [pgl]\,Q_{2k}\\
\delta x_3 &= -[pal]\,Q_{31} - [pbl]\,Q_{32} - [pcl]\,Q_{33} - \ldots - [pgl]\,Q_{3k}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\delta x_k &= -[pal]\,Q_{k1} - [pbl]\,Q_{k2} - [pcl]\,Q_{k3} - \ldots - [pgl]\,Q_{kk}
\end{aligned}\right\}, \qquad (I.2.18)$$

где Q_{ij} — так называемые весовые коэффициенты, определяемые из решения k систем нормальных уравнений с теми же коэффициентами, что и в системе (I.2.5), но с разными свободными членами, равными k столбцам вида

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\-1\end{pmatrix}. \qquad (I.2.19)$$

Из каждой системы весовых уравнений можно определить k весовых коэффициентов. Всех весовых коэффициентов при k неизвестных будет k^2.

Весовые уравнения решаются одновременно с нормальными уравнениями и в той же последовательности, используя одни и те же значения коэффициентов первого — k-го столбца схемы 3. Значения свободных членов каждой системы весовых уравнений вносятся в дополнительный столбец.

В схеме 3 для единообразия обозначения свободные члены (I.2.19) весовых уравнений, равные —1 или 0, имеют вид

$$\begin{pmatrix}[pal]_1\\ [pbl]_1\\ \vdots\\ [pgl]_1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}[pal]_2\\ [pbl]_2\\ \vdots\\ [pgl]_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}[pal]_k\\ [pbl]_k\\ \vdots\\ [pgl]_k\end{pmatrix}.$$

С этими обозначениями весовые коэффициенты вычисляются по тем же формулам, что и неизвестные δx_j. Контролем вычислений служит свойство весовых коэффициентов $Q_{ij} = Q_{ji}$. Так, в примере (I.2.6) по схеме 3 получим следующие весовые коэффициенты (таблица I.2.5).

Таблица I.2.5

Q_{1j}	Q_{2j}	Q_{3j}	l_1	l_2	l_3
+3,00	+2,00	+2,00	—1	0	0
—1,00	—0,667	—0,333	+0,333	0	0
	+2,67	+1,33	+0,67	—1,00	0
	—1,000	—0,498	—0,251	+0,374	0
		2,00	0	+0,498	—1,00
		—1,000	0	—0,249	+0,500

$$\begin{pmatrix}+0{,}500 & -0{,}250 & 0\\ -0{,}250 & +0{,}499 & -0{,}249\\ 0 & -0{,}249 & +0{,}500\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Q_{11}Q_{12}Q_{13}\\ Q_{21}Q_{22}Q_{23}\\ Q_{31}Q_{32}Q_{33}\end{pmatrix}$$

(столбцы l и s здесь опущены).

Преобразовав в схеме Гаусса все дополнительные столбцы, сначала, как и неизвестные, вычисляют весовые коэффициенты Q_{33}, Q_{32}, Q_{31} по третьему преобразованному столбцу, затем Q_{23}, Q_{22}, Q_{21} — по второму и, наконец, Q_{13}, Q_{12}, Q_{11} — по первому.

Исходя из (I.2.18), можно доказать, что обратные веса неизвестных

$$\frac{1}{px_l} = Q_{jj}.$$

Поэтому средние квадратические ошибки

$$m_{x_j} = \mu\sqrt{Q_{jj}}, \tag{I.2.20}$$

где μ — ошибка единицы веса, определяемая формулой

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}} \tag{I.2.21}$$

(обобщение формулы Бесселя, получаемой при $k = 1$).

В случае равноточных измерений

$$m_{x_j} = m\sqrt{Q_{jj}}, \tag{I.2.22}$$

где

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}. \qquad (I.2.23)$$

Так, в примере I.2.5

$$m = \sqrt{\frac{0.88}{6-3}} = 0{,}54''$$

и

$$m_{x_1} = m_{x_2} = m_{x_3} = 0{,}54\sqrt{0{,}50} = 0{,}38''.$$

Заметим, что $r_{ij} = Q_{ij}/\sqrt{Q_{ii}\cdot Q_{jj}}$ — есть коэффициенты корреляции между уравненными i-ым и j-ым неизвестными. Так, коэффициент корреляции между первым и вторым

$$r_{1.2} = \frac{-0{,}250}{\sqrt{0{,}500\cdot 0{,}500}} = -\frac{0{,}250}{0{,}500} = -0{,}5.$$

I.2.7. Оценка точности функций уравненных неизвестных

Для функции

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где x_j — уравненные неизвестные, обратный вес можно найти по формуле

$$\frac{1}{p_F} = \sum f_j^2 Q_{jj} + 2\sum_{i<j} f_i f_j Q_{ij}, \qquad (I.2.24)$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

где коэффициенты

$$f_j = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right).$$

Так, в примере I.2.5 обратный вес суммы уравненных углов

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \qquad (I.2.25)$$

(шестой угол) найдем, учитывая, что все $f_j = 1$ по формуле (I.2.24),

$$\frac{1}{p_F} = 0{,}50 + 0{,}50 + 0{,}50 + 2\,(Q_{12} + Q_{13} + Q_{23}) =$$

$$= 1{,}50 + 2\,(-0{,}250 - 0{,}250) = 0{,}50.$$

Если же весовые коэффициенты неизвестны, то справедлива формула

$$\frac{1}{p_F} = -\frac{f_1^2}{[aa]} - \frac{[f_2\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - \frac{[f_3\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]} - \ldots - \frac{[f_k\cdot(k-1)]^2}{[gg\cdot(k-1)]}, \qquad (I.2.26)$$

в которой алгоритмы

$$[f_2\cdot 1] = f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1, \qquad (I.2.27)$$

$$[f_3\cdot 2] = f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1 - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,[f_2\cdot 1] \qquad (I.2.28)$$

и т. д. Ясно, что отдельные слагаемые формулы (I.2.26) могут быть получены в схеме решения Гаусса путем введения дополнительного столбца l, если условно считать, что

$$f_1=[al],\quad f_2=[bl],\ \ldots,\ f_k=[ql],\ f_{k+1}=0.$$

При этом указанные алгоритмы Гаусса, имеющие одну букву, раскрываются так же, как и алгоритмы $[bl\cdot 1]$, $[cl\cdot 2]$ и т. д.

Для контроля вычислений служит формула

$$-\frac{1}{p_F}=[f]-\frac{\Sigma_1 f_1}{[aa]}-\frac{[\Sigma_2\cdot 1]\,[f_2\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\ldots-\frac{[\Sigma_k(k-1)]\,[f_k(k-1)]}{[qq(k-1)]}, \tag{I.2.29}$$

в которой вновь введены суммы

$$\left.\begin{aligned}\Sigma_1&=[as]-[al]+f_1\\ \Sigma_2&=[bs]-[bl]+f_2\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \Sigma_k&=[qs]-[ql]+f_k\end{aligned}\right\}. \tag{I.2.30}$$

Для раскрытия алгоритмов с символом Σ следует условно считать, что

$$\Sigma_1=[al],\quad \Sigma_2=[bl],\ \ldots,\ \Sigma_k=[ql].$$

Найдем обратный вес функции (I.2.25). Добавив в схему Гаусса два дополнительных столбца

Таблица I.2.6

f	Σ
1,00	7,00
1,00	9,00
1,00	7,00
+1,00	+7,00
−0,333	−2,333
+0,33	+4,33
−0,124	−1,622
+0,51	+2,51
−0,254	−1,249
$\frac{1}{p_F}=-0{,}50$	−0,51

и выполнив преобразование их, получим (табл. I.2.6)

По формулам (I.2.24) и (I.2.26) можно определять также обратные веса уравненных значений неизвестных. Например, если требуется определить обратный вес неизвестного x_3, то необходимо принять $f_1=f_2=f_4=\ldots=f_k=0$; $f_3=1$. Тогда последняя примет вид

$$F=x_3.$$

Средняя квадратическая ошибка функции определяется формулой

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{p_F}}.$$

I.2.8. Матричные формулы уравнивания параметрическим способом

Уравнения поправок (I.2.3) можно записать в виде

$$v = A\,\Delta x + L,$$

где векторы (матрицы-столбцы)

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ l_n \end{pmatrix}, \quad \Delta x = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta x_k \end{pmatrix},$$

а матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdot & \cdot & \cdot & g_1 \\ a_2 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & g_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & \cdot & \cdot & \cdot & g_n \end{pmatrix}.$$

Введя диагональную матрицу весов

$$p = \begin{pmatrix} p_1 & & & & \\ & p_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & p_n \end{pmatrix},$$

нормальные уравнения запишем в виде

$$R\,\Delta x + b = 0, \tag{I.2.31}$$

где матрица

$$R = A^T P A = \begin{bmatrix} [paa] & [pab] & \cdots & [pag] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [pag] & [pbg] & \cdots & [pgg] \end{bmatrix}, \tag{I.2.31'}$$

а вектор свободных членов

$$b = \begin{bmatrix} [pab] \\ [pbl] \\ \cdots \\ [pgl] \end{bmatrix}.$$

В случае равноточных измерений матрица $P = E$, где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица.

Выражению (I.2.18) соответствует матричная форма

$$\Delta x = -R^{-1}b = -Qb, \qquad (I.2.32)$$

где Q — обратная по отношению R матрица

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \dots Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} \dots Q_{2k} \\ \cdots & \cdots \\ Q_{k1} & Q_{k2} \dots Q_{kk} \end{pmatrix}.$$

Так как по свойству обратных матриц $RQ = E$, то сразу следует описанный ранее способ вычисления весовых коэффициентов — решение k систем вида $RQ_j - E_j = 0$, где $Q_j = j$-ый столбец матрицы Q, а F_j — j-ый столбец матрицы F.

При оценке точности сразу нескольких функций получаем матрицу $Q_F = fQf^T$, диагональные элементы которой соответствуют обратным весам (I.2.24) (f — матрица, содержащая строки из коэффициентов f_j функций).

I.2.9. Пример уравнивания нивелирной сети параметрическим способом

Схема сети представлена на рис. I.2.2, исходные данные — в табл. I.2.7, результаты измерений — в табл. I.2.8.

Таблица I.2.7

№ марок	Отметки исходных марок, м
*M*30	183,506
*M*31	192,353
*M*32	191,880

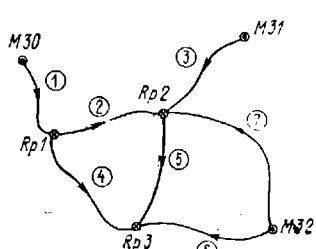


Рис. I.2.2

Приближенные значения отметок реперов

$$x_1^{(0)} = 189{,}641 \text{ м},$$

$$x_2^{(0)} = 197{,}967 \text{ м},$$

$$x_3^{(0)} = 190{,}950 \text{ м}.$$

Таблица I.2.8

№ ходов	Превышение, м	Длина хода, км	Вес $p_i = \frac{c}{L_i}$
1	+6,135	33,0	1,21
2	+8,343	33,9	1,17
3	+5,614	30,4	1,31
4	+1,394	32,7	1,22
5	−6,969	31,8	1,25
6	−0,930	29,9	1,34
7	+6,078	34,5	1,15

Уравнения поправок

$$
\begin{aligned}
&+\delta x_1 && && && = v_1,\\
&-\delta x_1 && +\delta x_2 && -1{,}7 && = v_2,\\
&&& +\delta x_2 && && = v_3,\\
&-\delta x_1 && && +\delta x_3 && -8{,}5 && = v_4,\\
&&& -\delta x_2 && +\delta x_3 && -4{,}8 && = v_5,\\
&&& && +\delta x_3 && && = v_6,\\
&&& +\delta x_2 && && +0{,}9 && = v_7.
\end{aligned}
$$

Свободные члены выражены в сантиметрах.

Веса измерений вычисляем по формуле $p_i = 40/L_i$.

В табл. (I.2.9) и (I.2.10) приведены коэффициенты уравнений поправок и нормальных уравнений *.

Таблица I.2.9

№ уравнений	a	b	c	l, см	s	p	v, см
1	+1	0	0	0,0	+1,0	1,21	−2,64
2	−1	+1	0	−1,7	−1,7	1,17	+0,08
3	0	+1	0	0,0	+1,0	1,31	−0,85
4	−1	0	+1	−8,5	−8,5	1,22	−2,69
5	0	−1	+1	−4,8	−4,8	1,25	−0,77
6	0	0	+1	0,0	+1,0	1,34	+3,17
7	0	+1	0	+0,9	+1,9	1,15	+0,05
	−1	+2	+3	−14,1	−10,1		
δx_j	−2,64	−0,85	+3,17				
	0,00	0,01	−0,01				

* Если коэффициенты уравнений поправок равны ± 1 или 0, столбцы pa, pb, pc можно не добавлять.

Таблица I.2.10

	$a]$	$b]$	$c]$	$l]$	$s]$	Контроль	F_1	F_2	$\sum$	S_Q
$[pa]$	+3,60									
$[pb]$		−1,17 +4,88								
$[pc]$			−1,22 −1,25 +3,81							
$[pl]$				+12,36 +5,05 −16,37 +121,26						
$[ps]$					+13,57 +7,51 −15,03 +122,30 +128,35	+13,57 +7,51 −15,03 +122,30 +128,35	+1,00 0 0	00 +1,00 −1,00	+2,21 +3,46 +0,34	12,57 6,51 −16,03

Решение системы нормальных уравнений приведено в табл. I.2.11.

В результате проведенного решения получены следующие значения неизвестных:

$$x_1 = 189{,}641 \text{ м} - 2{,}64 \text{ мм} = 189{,}614 \text{ м},$$

$$x_2 = 197{,}967 \text{ м} - 0{,}85 \text{ мм} = 197{,}958 \text{ м},$$

$$x_3 = 190{,}950 \text{ м} + 3{,}17 \text{ мм} = 190{,}981 \text{ м}.$$

Средние квадратические ошибки единицы веса и километровая ошибка равны

$$\mu = \sqrt{\frac{32{,}42}{7-3}} = 2{,}85 \text{ см},$$

$$m_{\text{км}} = \frac{\mu}{\sqrt{40}} = 0{,}45 \text{ см}.$$

Вес последнего неизвестного найден дважды

$$p_{x_3} = [cc \cdot 2] = 2{,}80, \quad p_{x_3} = \frac{1}{Q_{33}} = 2{,}80.$$

Вес первого неизвестного также получен дважды

$$p_{x_1} = \frac{1}{p_{F_1}} = 2{,}65, \quad p_{x_1} = \frac{1}{Q_{11}} = 2{,}65.$$

Вес предпоследнего неизвестного

$$p_{x_2} = \frac{1}{Q_{22}} = 3{,}70, \quad p_{x_2} = \frac{[bb \cdot 1]}{[cc \cdot 1]} p_{x_1} = 3{,}70.$$

Ошибки:

$$m_{x_1} = \mu \sqrt{Q_{11}} = 2{,}85 \sqrt{0{,}3763} = 1{,}75 \text{ см},$$

$$m_{x_2} = \mu \sqrt{Q_{22}} = 2{,}85 \sqrt{0{,}2700} = 1{,}48 \text{ см},$$

$$m_{x_3} = \mu \sqrt{Q_{33}} = 2{,}85 \sqrt{0{,}3578} = 1{,}70 \text{ см},$$

$$m_{F_2} = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{F_2}}} = 2{,}85 \sqrt{0{,}3660} = 1{,}72 \text{ см}.$$

После введения поправок в измеренные величины получим

$$h_1 = +6{,}108_6 \text{ м}, \quad h_2 = +8{,}343_8 \text{ м},$$

$$h_3 = +5{,}605_5 \text{ м}, \quad h_4 = +1{,}367_2 \text{ м},$$

$$h_5 = -6{,}976_7 \text{ м}, \quad h_6 = -0{,}898_2 \text{ м},$$

$$h_7 = +6{,}078_0 \text{ м}.$$

Дополнительным контролем вычислений является равенство нулю сумм уравненных превышений в каждом замкнутом полигоне.

Таблица I.2.11

δx_1	δx_2	δx_3	l	s	Контроль 1	Q_1	Q_2	Q_3	S_Q	Контроль 2	F_1	F_2	Σ	Контроль 3
+3,60	−1,17	−1,22	+12,36	+13,57	+13,57	−1,00	0	0	+12,57		+1,00	0	+2,21	+2,21
(−1)	+0,325	+0,339	−3,433	−3,769	−3,769	+0,278	0	0	−3,492	−3,491	−0,278	0	−0,614	−0,614
	4,50	−1,65	+9,07	+11,92	+11,92	−0,32	−1,00	0	+10,60	+10,60	+0,32	+1,00	+4,18	+4,17
	(−1)	+0,366	−2,015	−2,649	−2,649	+0,072	+0,222	0	−2,355	−2,355	−0,072	−0,222	−0,929	−0,928
		+2,80	−8,86	−6,07	−6,06	−0,46	−0,37	−1,06	−7,89	−7,90	+0,46	−0,63	+2,62	+2,63
			+3,171	+2,172	+2,171	+0,164	+0,131	+0,357	+2,818	+2,823	−0,164	+0,227	−0,936	−0,937
			32,44	32,44							−0,376	+0,031	−0,345	−0,345
				32,44								−0,366	−0,333	−0,335

δx_1	δx_2	δx_3
−2,636	−0,855	+3,171

Весовые коэффициенты

+0,376	+0,132	+0,164
+0,132	+0,270	+0,131
+0,164	+0,131	+0,358

I.2.10. Способ узлов проф. В. В. Попова для составления нормальных уравнений

Для случая уравнивания нивелирных сетей и узлов в сети полигонометрии проф. В. В. Попов предложил следующие правила составления нормальных уравнений с помощью чертежа сети:

а) квадратичные коэффициенты нормальных уравнений в строке i равны сумме весов ходов, сходящихся в узле с тем же номером i,

б) неквадратичные коэффициенты, расположенные в строке i и столбце j, равны отрицательному весу хода, соединяющего узлы с номерами i и j,

в) свободные члены нормальных уравнений получаются суммированием величин $\pm pl$ тех ходов, которые сходятся в узле i, причем, если узел является конечной точкой хода, то ставится знак «+», а если начальной, то «—».

Например, для нивелирной сети (см. рис. I.2.2) нормальные уравнения будут

$$(p_1+p_2+p_4)\,\delta x_1 - p_2\delta x_2 - p_4\delta x_3 + b_1 = 0,$$

$$-p_2\delta x_1 + (p_2+p_3+p_5+p_7)\,\delta x_2 - p_5\delta x_3 + b_2 = 0,$$

$$-p_4\delta x_1 - p_5\delta x_2 + (p_4+p_5+p_6) + b_3 = 0,$$

а свободные члены

$$b_1 = p_1 l_1 - p_2 l_2 - p_4 l_4,$$

$$b_2 = p_2 l_2 + p_3 l_3 - p_5 l_5 + p_7 l_7$$

$$b_3 = p_4 l_4 + p_5 l_5 + p_6 l_6.$$

Решение этих уравнений выполняется обычным образом.

I.2.11. О построении доверительных интервалов

Для истинного значения $\overline{F}$ любой функции можно построить доверительный интервал в виде

$$F - t_\beta m_F \leqslant \overline{F} \leqslant F + t_\beta m_F, \qquad (I.2.33)$$

где F — значение функции, вычисленной по уравненным неизвестным.

Коэффициенты t_β выбираются по вероятности β и числу степеней свободы $r = n - k$ из таблиц распределения Стьюдента.

В частном случае для точных истинных X_j имеем доверительные интервалы

$$x_j - t_\beta m_{x_j} \leqslant X_j \leqslant x_j + t_\beta m_{x_j}.$$

Так, для отметки x_1 уравненного репера 1 при доверительной вероятности $\beta = 0{,}90$ и $r = 4$ имеем $t_\beta = 2{,}40$ и интервал

$$189{,}615\text{ м} - 2{,}4\text{ м} \times 1{,}75\text{ см} \leqslant X_j \leqslant 189{,}615 + 2{,}4 \times 1{,}75$$

или

$$189{,}573 \leqslant X_j \leqslant 189{,}657.$$

Иногда результат уравнивания, как указывалось выше, записывают в виде

$$x_j \pm m_{x_j},$$

что соответствует доверительному интервалу при $\beta \approx 0{,}7$.

Доверительный интервал для стандарта единицы веса строят в виде

$$\gamma_1 \mu \leqslant \sigma_0 \leqslant \gamma_2 \mu, \qquad (I.2.34)$$

причем коэффициенты

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{n-k}{\chi_1^2}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{n-k}{\chi_2^2}},$$

а χ_1^2 и χ_2^2 выбираются из таблиц распределения χ^2, как описано в (I.1.21), но по числу степеней свободы $r = n - k$. Так, для стандарта σ_0 при $\beta = 0{,}90$ и $r = 4$ будем иметь $\chi_1^2 = 9{,}5$, $\chi_2^2 = 0{,}71$ и доверительный интервал

$$\sqrt{\frac{4}{9{,}5}} \cdot 2{,}85 \leqslant \sigma_0 \leqslant \sqrt{\frac{4}{0{,}71}} \cdot 2{,}85,$$

$$1{,}8 \text{ см} \leqslant \sigma_0 \leqslant 6{,}8 \text{ см}.$$

Для стандарта функции σ_F доверительный интервал будет

$$\gamma_1 m_F \leqslant \sigma_F \leqslant \gamma_2 m_F,$$

а для стандарта σ_{x_j}

$$\gamma_1 m_{x_j} \leqslant \sigma_{x_j} \leqslant \gamma_2 m_{x_j}.$$

Например, для σ_{x_1} в этом же примере будем иметь доверительный интервал

$$1{,}1 \text{ см} \leqslant \sigma_{x_1} \leqslant 4{,}2 \text{ см}.$$

Иногда вместо построения доверительного для σ_0 интервала вычисляют ошибку ошибки $m_\mu \approx \mu/\sqrt{2r}$ и пишут интервал в виде

$$\mu \pm m_\mu,$$

и

$$m_{\overline{x}} \pm m_{m_{\overline{x}}},$$

где

$$m_{m_x} = m_\mu \sqrt{Q_{x_j}}.$$

I.2.12. Постановка задачи. Условные и нормальные уравнения коррелат

В силу того что в геодезических сетях число измерений $n \gg k$, истинные значения измеренных величин Y_l должны удовлетворять $r = n - k$ точным математическим уравнениям вида

$$f_l(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 0, \qquad (I.2.35)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r)$$

называемыми условными уравнениями.

Поскольку истинные значения Y_l нам неизвестны, заменим их в (I.2.35) уравненными значениями y_l, такими, что $Y_l = y_l' + v_l$, где v_l, как и ранее, — поправки в результаты измерений y_l'.

Тогда вместо (I.2.35) получим уравнения

$$f_l = (y_1' + v_1, \quad y_2' + v_2, \ldots, y_n' + v_n) = 0.$$

Эти уравнения необходимо привести к линейному виду путем разложения в ряд Тейлора. Сделав это, получим условные уравнения

$$\left.\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n + w_1 &= 0 \\ b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n + w_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\

где $\pi_i = \frac{1}{p_i}$ — обратные веса, и нормальные уравнения коррелат

$$\left.\begin{array}{l}[\pi aa]\,k_1+[\pi ab]\,k_2+\ldots+[\pi aq]\,k_r+w_1=0\\ [\pi ab]\,k_1+[\pi bb]\,k_2+\ldots+[\pi bq]\,k_r+w_2=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [\pi aq]\,k_1+[\pi bq]\,k_2+\ldots+[\pi qq]\,k_r+w_r=0\end{array}\right\}, \qquad (I.2.39)$$

число которых равно r.

Решая эти уравнения, находим коррелаты k_j, затем поправки v_i и уравненные результаты измерений и их функций.

I.2.13. Контроль составления и решения системы нормальных уравнений коррелат

Составление условных уравнений производят в две руки.

Контроль составления коэффициентов нормальных уравнений коррелат производят методом сумм, следующим образом

$$a_l+b_l+c_l+\ldots+q_l=s'_l \qquad (I.2.40)$$

$$(l=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и

$$[a]+[b]+[c]+\ldots+[q]=[s'].$$

Затем

$$\left.\begin{array}{l}[\pi aa]+[\pi ab]+[\pi ac]+\ldots+[\pi aq]=[\pi as']\\ [\pi ab]+[\pi bb]+[\pi bc]+\ldots+[\pi bq]=[\pi bs']\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [\pi aq]+[\pi bq]+[\pi cq]+\ldots+[\pi qq]=[\pi qs']\end{array}\right\}. \qquad (I.2.41)$$

Далее

$$\left.\begin{array}{r}[\pi as']+w_1=\sum_1,\quad [\pi bs']+w_2=\sum_2\\ \ldots\ldots,\ [\pi qs']+w_r=\sum_r\end{array}\right\}, \qquad (I.2.42)$$

Решение системы нормальных уравнений по схеме Гаусса контролируют

$$\left.\begin{array}{r}[\pi aa]+[\pi ab]+[\pi ac]+\ldots+[\pi aq]+w_1=\sum_1\\ [\pi bb\cdot 1]+[\pi bc\cdot 1]+\ldots+[\pi bq\cdot 1]+[w_2\cdot 1]=\left[\sum_2\cdot 1\right]\\ [\pi cc\cdot 1]+\ldots+[\pi cq\cdot 2]+[w_3\cdot 2]=\left[\sum_3\cdot 2\right]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [\pi qq\,(r-1)]+[w_r\,(r-1)]=\left[\sum_r(r-1)\right]\end{array}\right\}. \qquad (I.2.43)$$

Заключительным контролем решения системы нормальных уравнений коррелат является

$$-[pv^2] = -\frac{w_1^2}{[\pi aa]} - \frac{[w_2 \cdot 1]^2}{[\pi bb \cdot 1]} - \frac{[w_3 \cdot 2]^2}{[\pi cc \cdot 2]} - \ldots - \frac{[w_r (r-1)]^2}{[\pi qq (r-1)]} =$$

$$= [w] - \frac{\sum_1}{[\pi aa]} w_1 - \frac{\left[\sum_2 \cdot 1\right]}{[\pi bb \cdot 1]} [w_2 \cdot 1] - \frac{\left[\sum_3 \cdot 2\right]}{[\pi cc \cdot 2]} [w_3 \cdot 2] -$$

$$- \ldots - \frac{\left[\sum_r (r-1)\right]}{[\pi qq (r-1)]} [w_r (r-1)]. \qquad (I.2.44)$$

Алгоритмы $[w_2 \cdot 1]$, $[w_3 \cdot 2]$ и т. д. в системе уравнений (I.2.43) и формуле (I.2.44) раскрываются аналогично (I.2.27) и (I.2.28). Например,

$$[w_2 \cdot 1] = w_2 - \frac{[\pi ab]}{[\pi aa]} w_1;$$

$$[w_3 \cdot 2] = w_3 - \frac{[\pi ac]}{[\pi aa]} w_1 - \frac{[\pi bc \cdot 1]\,[w_2 \cdot 1]}{[\pi bb \cdot 1]} \text{ и т. д.}$$

После вычисления поправок v по формуле (I.2.38) производят заключительный контроль

$$[pv^2] = -[kw]. \qquad (I.2.45)$$

Результаты, полученные по формулам (I.2.44, I.2.45), должны быть равны между собой.

I.2.14. Некоторые виды условных уравнений

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся виды условных уравнений в геодезических сетях.

I. Триангуляционные построения.

Пусть имеем простую сеть триангуляции (вставка в угол) (рис. I.2.3).

В этой сети возникает всего $r = 9 - 4 = 5$ условных уравнений ($n = 9$, $k = 4$ — удвоенное число координат определяемых пунктов), в том числе:

а) три условных уравнения уравненных фигур

$$v_1 + v_2 + v_3 + w_1 = 0,$$

$$v_4 + v_5 + v_6 + w_2 = 0,$$

$$v_7 + v_8 + v_9 + w_3 = 0,$$

где невязки w равны разностям между суммой измеренной в треугольнике углов и 180°;

б) условное уравнение жесткого угла

$$v_1 + v_4 + v_7 + w = 0,$$

где невязка

$$w = y'_1 + y'_4 + y'_7 - \angle AOB;$$

в) базисное условное уравнение, выражающее требование совпадения длины стороны OB с ее значением, вычисленным по уравненным углам от стороны OA.

В отличие от предыдущих это уравнение имеет нелинейный вид и носит название синусного условного уравнения. В линейном виде оно составляется по следующему правилу: 1) выбираем направление подхода от стороны AO к стороне OB (показано стрелкой); 2) последовательно по каждому треугольнику пометаем

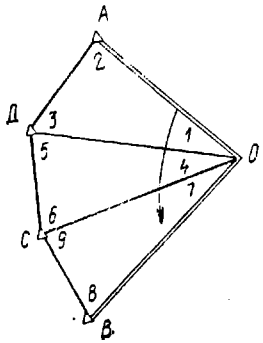


Рис. I.2.3

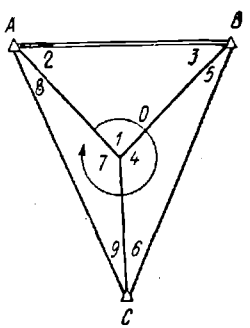


Рис. I.2.4

углы, лежащие против передней и задней по ходу стороны (углы 2, 5, 9 и 3, 6, 8); 3) пишем условное уравнение

$$\Delta_2 v_2 + \Delta_5 v_5 + \Delta_9 v_9 - \Delta_3 v_3 - \Delta_6 v_6 - \Delta_8 v_8 + w = 0, \qquad (I.2.46)$$

где Δ_i — изменение логарифма синуса угла с изменением угла на одну секунду, выраженное в шестом знаке логарифма, а невязка

$$w = \lg \frac{s_1 \cdot \sin 2 \cdot \sin 5 \cdot \sin 9}{s_2 \cdot \sin 3 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8}. \qquad (I.2.47)$$

В центральной системе (рис. I.2.4) кроме трех условных уравнений фигур возникает условное уравнение горизонта

$$v_1 + v_4 + v_7 + w = 0,$$

где

$$w = y'_1 + y'_4 + y'_7 - 360^g$$

и полюсное условное уравнение, составляемое так же, как и базисное, с той разницей, что начальная и конечная стороны здесь совпадают, а направление обхода выбирают, например, от стороны AO

и к ней же подходят. Условное уравнение также имеет вид (I.2.46), но в выражении (I.2.47) $s_1 = s_2$.

II. Полигонометрический ход (рис. I.2.5).

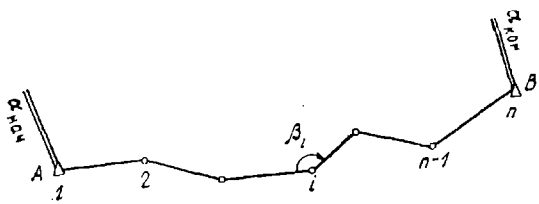


Рис. I.2.5

В этом ходе возникает условное уравнение дирекционных углов

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i + w_\beta = 0,$$

где невязка

$$w_\beta = \alpha_{\text{нач}} + \sum \beta_{i\ \text{лев}} - \alpha_{\text{кон}} - 180^\circ (n-1),$$

и два условных уравнения координат

$$\sum v_{\Delta x_i} + w_x = 0,$$

$$\sum v_{\Delta y_i} + w_y = 0,$$

где невязки

$$w_x = X_A + \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i - x_L,$$

$$w_y = Y_A + \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i - Y_A.$$

В последних двух уравнениях поправки приращений координат следует заменить поправками непосредственно измеренных величин — углов и линий. Заметим, что координатные условные уравнения возникают также в сети триангуляции.

III. Нивелирная сеть (рис. I.2.6).

В этой сети число условных уравнений $r = n - k = 5 - 2 = 3$ (n — число всех ходов, k — число узлов). Возникающие в этой

сети условные уравнения называют полигонными, и они для выбранных трех полигонов имеют вид

$$\begin{aligned} -v_1+v_3+v_4+w_1&=0\\ v_1+v_2+\quad\ \ &w_2=0,\\ -v_4+v_5+\quad\ \ &w_3=0, \end{aligned}$$

где невязку w вычисляют как разность между данными отметками конечных марок и этими же отметками, но полученными от отметок

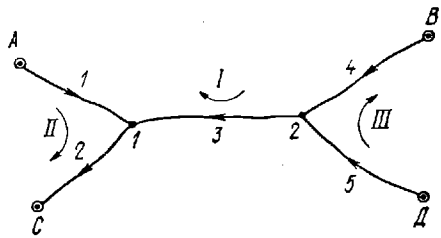


Рис. I.2.6

начальных марок по измеренным превышениям. Аналогичный вид имеют условные уравнения и в замкнутых полигонах, не содержащих твердых марок.

Полигонные условные уравнения возникают и в полигонометрической сети, но они имеют более сложный вид.

I.2.15. Оценка точности функций при коррелатном уравнивании

В отличие от параметрического способа при коррелатном способе уравнивания функцию составляют в виде

$$F=f(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n).$$

После разложения в ряд получим ее выражение

$$f_1v_1+f_2v_2+\ldots+f_nv_n+f_0=0, \qquad (I.2.48)$$

где коэффициенты

$$f_i=\left(\frac{\partial F}{\partial Y_i}\right)_{Y_i=y_i'},$$

а свободный член

$$f_0=f(y_1',\ y_2',\ \ldots,\ y_n').$$

Сравнивая (I.2.48) с (I.2.36), замечаем, что выражение (I.2.48) имеет вид условного уравнения. В некоторых случаях это упрощает составление функций. Например, при оценке точности длины стороны $ДС$ (см. рис. I.2.3) функцию составляют точно так же, как

базисное условное уравнение от стороны OA к стороне $ДС$. При оценке отметки репера 1 (см. рис. I.2.6) функция совпадает с условным уравнением между маркой A и репером 1 (так называемый весовой полигон). Свободный член f_0 в (I.2.48) не вычисляют, так как при оценке точности его не используют.

Обратный вес функции получают в виде алгоритма Гаусса

$$\frac{1}{P_F}=[\pi ff\cdot r]=[\pi ff]-\frac{[\pi af]^2}{[\pi aa]}-\frac{[\pi bf\cdot 1]^2}{[\pi bb\cdot 1]^2}-\ldots-\frac{[\pi qf\,(r-1)]^2}{[\pi qq\,(r-1)]}, \tag{I.2.49}$$

и он может быть вычислен попутно с решением нормальных уравнений добавлением к схеме Гаусса столбца F с элементом $[\pi af]$, $[\pi bf], \ldots, [\pi qf]$.

Контрольная функция имеет вид

$$\frac{1}{P_F}=[\pi fsr]=[\pi fs]-\frac{[\pi af]\,[\pi as]}{[\pi aa]}-\ldots-$$

$$-\frac{[\pi qf\cdot(r-1)]\,[\pi fs\,(r-1)]}{[\pi qq\,(r-1)]}, \tag{I.2.50}$$

где

$$s_l=a_l+b_l+\ldots+q_l+f_l.$$

С учетом этого схемы для составления нормальных уравнений имеют тот же вид, что и в параметрическом способе уравнивания, однако с той разницей, что столбец l заменится столбцом f. Роль столбца f в параметрическом способе играет столбец невязок w.

Средняя квадратическая ошибка функции

$$m_F=\mu\sqrt{\frac{1}{P_F}},$$

в которой ошибка μ (или m при равноточных измерениях) вычисляется, как и в параметрическом способе, по формуле

$$\mu=\sqrt{\frac{[pv^2]}{r}}\quad\left(m=\sqrt{\frac{[v^2]}{r}}\right).$$

I.2.16. Матричные формулы уравнивания коррелатным способом

Систему условных уравнений (I.2.35) можно записать в виде

$$BV+W=0, \tag{I.2.51}$$

где матрица

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_n \end{pmatrix},$$

а векторы

$$V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad W=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_r \end{pmatrix}.$$

Введя диагональную матрицу обратных весов измерений

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{P_1} & & & \\ & \frac{1}{P_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{P_n} \end{pmatrix},$$

нормальные уравнения получим в виде

$$NK+w=0, \tag{I.2.52}$$

где матрица

$$N=BP^{-1}B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} [paa] & [pab] & \ldots & [paq] \\ [pab] & [pbb] & \ldots & [pbq] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [paq] & [pbq] & \ldots & [pqq] \end{pmatrix},$$

а вектор коррелат

$$K=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ k_r \end{pmatrix}.$$

Определив из решения (I.2.52) вектор коррелат (решение можно выполнять в виде $K = -N^{-1}W$), получим вектор поправок

$$V=P^{-1}B^{\mathrm{T}}K, \tag{I.2.53}$$

что соответствует (I.2.38).

Обратный вес функции получают в виде

$$\frac{1}{P_F}=fP^{-1}f^{\mathrm{T}}-fP^{-1}B^{\mathrm{T}}\cdot N^{-1}\cdot BP^{-1}f^{\mathrm{T}}, \tag{I.2.54}$$

где

$$f=(f_1, f_2, \ldots, f_n),$$

что соответствует алгоритму Гаусса (I.2.49).

На основании (I.2.54) можно найти матрицу Q_F весовых коэффициентов сразу нескольких функций, при этом матрица f будет состоять из нескольких соответствующих функциям строк.

I.2.17. Определение допустимости невязок условных уравнений

Можно доказать, что стандарт невязки j-го условного уравнения выражается формулой

$$\sigma_{w_j}=\sigma_0\sqrt{N_{jj}}, \qquad (I.2.55)$$

где N_{jj} — соответствующие диагональные элементы матрицы коэффициентов нормальных уравнений. Если стандарт единицы веса σ_0 неизвестен, то вместо (I,2.55) имеем среднюю квадратическую ошибку невязки

$$m_{w_j}=\mu\sqrt{N_{jj}}.$$

Допустимая невязка определяется формулой

$$(w_j)_{\text{доп}}=t_\beta\sigma_0\sqrt{N_{jj}}$$

или

$$(w_j)_{\text{доп}}=t_\beta\mu\sqrt{N_{jj}}. \qquad (I.2.56)$$

При равноточных измерениях вместо σ_0 и μ следует иметь в виду σ и m.

Обычно в зависимости от точности и ответственности работ принимают

$$t_\beta=2{,}5 \text{ или } 3,$$

что соответствует вероятностям $\beta = 0{,}99$ или $0{,}997$ (чем точнее измерения, тем меньше t_β).

Пример. При измерении углов в триангуляции с точностью $\sigma = 2''$ наибольшая невязка условных уравнений фигур получена равной $12''$. Проверить ее допустимость, приняв $t_\beta = 3$.

Решение. Так как нормальное уравнение имеет вид

$$3k_j+W_j=0,$$

то $(N_{jj}) = 3$

и

$$(W_j)_{\text{доп}}=3\cdot 2\cdot\sqrt{3}=10{,}4'',$$

следовательно, невязка недопустима.

Аналогичным образом подсчитываются допустимые значения невязок и в других условных уравнениях.

I.2.18. Пример уравнивания нивелирной сети коррелатным способом

Уравняем нивелирную сеть (см. раздел I.2.9). В этой сети возникает $r = 7 - 3 = 4$ условных уравнения или полигона, показанных на рис. I.2.7.

Условные уравнения полигонов имеют вид

$$v_2 - v_4 + v_5 + w_1 = 0,$$
$$-v_5 + v_6 - v_7 + w_2 = 0,$$
$$-v_1 - v_2 + v_3 + w_3 = 0,$$
$$-v_3 + v_7 \quad + w_4 = 0.$$

Оценим также точность функций отметок реперов *1*, *2* и *3*, составив весовые функции по ходам 1, 3 и 6 (весовые полигоны). В табл. I.2.12 и I.2.13 приведены коэффициенты условных и нормальных уравнений.

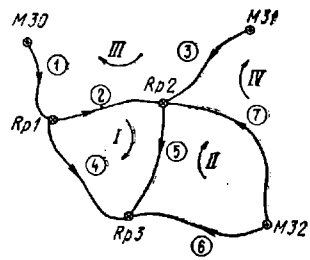


Рис. I.2.7

Решение нормальных уравнений по схеме Гаусса выполнено в табл. I.2.14.

Обратим внимание, что последняя схема предусматривает двойной контроль. Второй контроль получается вычитанием из чисел в столбце «контроль 1» чисел из столбца W и прибавлением чисел из столбцов F_1, F_2, F_3.

Контроль вычисления обратных весов (или матрицы Q_F) выполняется так же, как и в параметрическом способе (см. раздел I.2.9).

По найденным значениям коррелат в табл. I.2.14 получены поправки v_l и произведен заключительный контроль вычислений:

$$[pv^2] = -[kw].$$

После введения поправок v в измеренные значения получены уравненные значения превышений и отметок реперов

$h_1 = +6{,}108_6$ м,

$h_2 = +8{,}343_8$ м, $\qquad H_{Rp1} = 189{,}614_8$,

$h_3 = +5{,}605_5$ м,

$h_4 = +1{,}367_2$ м, $\qquad H_{Rp2} = 197{,}958_5$,

$h_5 = -6{,}976_7$ м,

$h_6 = -0{,}898_2$ м, $\qquad H_{Rp3} = 190{,}981_8$.

$h_7 = +6{,}078_5$ м,

Таблица 1.2.12

№ измерений	a	b	c	d	f_1	f_2	f_3	s	p	π	v	$[pv^2]$
1			−1		+1			0	1,20	0,83	−2,64	
2	+1		−1					0	1,18	0,85	+0,08	
3			+1	−1		+1		+1	1,32	0,76	−0,85	
4	−1							−1	1,22	0,82	−2,69	
5	+1	−1						0	1,25	0,80	−0,77	
6		+1					+1	+2	1,33	0,75	+3,18	
7		−1		+1				0	1,15	0,87	+0,05	
	+1	−1	−1	0	+1	+1	+1	+2			32,35	
$w=-2,0$		−3,9	−1,7	−0,9								
$k=+3,274$		+4,237	+3,174	+4,294	$[kw]=-32,33$							
$kw=-6,55$		−16,52	−5,40	−3,86								

Таблица 1.2.13

	$a]$	$b]$	$c]$	$d]$	$f_1]$	$f_2]$	$f_3]$	$s]$	Контроль	w	Σ
$[\pi a$	−2,47	−0,80	−0,85	0	0	0	0	0,82	0,82	−2,00	−1,18
$[\pi b$		2,42	0	−0,87	0	0	0,75	1,50	1,50	−3,90	−3,15
$[\pi c$			2,44	−0,76	−0,83	0,76	0	0,76	0,76	−1,70	−0,87
$[\pi d$				1,63	0	−0,76	0	−0,76	−0,76	−0,90	−0,90
$[\pi f_1$					0,83	0	0	0	0		
$[\pi f_2$						0,76	0	0,76	0,76		
$[\pi f_3$							0,75	1,50	1,50		

Таблица I.2.14

k_1	k_2	k_3	k_4	W	Σ	Контроль 1	f_1	f_2	f_3	s	Контроль 2
+2,47 (−1)	−0,80 +0,324	−0,85 +0,344	0 0	−2,00 +0,810	−1,18 +0,478	−1,18 +0,478	0 0	0 0	0 0	10,82 −0,266	−1,18 +0,478
(0,4630)	2,16 (−1)	−0,27 +0,125	−0,87 +0,403	−4,55 +2,107	−3,53 +1,634	−3,53 +1,635	0	0	+0,75 −0,347	+1,77 −0,820	1,77 −0,819
(0,4739)		+2,11 (−1)	−0,87 +0,412	−2,97 +1,407	−1,73 +0,820	−1,73 +0,819	−0,83 +0,393	+0,76 −0,360	+0,10 −0,047	+1,26 −0,597	+1,27 −0,602
(1,0870)			+0,92 (−1)	−3,95 +4,294	−3,03 +3,294	−3,03 +3,294	−0,34 +0,370	−0,45 +0,489	+0,34 −0,370	+0,47 −0,511	+0,47 −0,511
+3,274	+4,237	+3,174	+4,294	−32,34	−32,33	—	+0,38	+0,13 +0,27	+0,16 +0,13 +0,36	+0,67 +0,54 +0,65	+0,67 +0,53 +0,65

Средние квадратические ошибки единицы веса и одного километра хода равны

$$\mu = \sqrt{\frac{32{,}35}{4}} = 2{,}85 \text{ см},$$

$$m_{км} = \frac{\mu}{\sqrt{40}} = 0{,}45 \text{ см}.$$

Средние квадратические ошибки функций

$$m_{F_1} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{F_1}}} = 1{,}75 \text{ см},$$

$$m_{F_2} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{F_2}}} = 1{,}48 \text{ см},$$

$$m_{F_3} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{F_3}}} = 1{,}70 \text{ см}.$$

В пределах точности вычислений полученные результаты совпадают с результатами уравнивания этой же сети параметрическим способом.

Доверительные интервалы строят так же, как и в параметрическом способе.

I.2.19. Способ полигонов В. В. Попова для составления нормальных уравнений коррелат

В случае, если полигонные условные уравнения имеют коэффициенты ± 1 или 0, нормальные уравнения можно получить, не составляя условные уравнения. При этом схему сети необходимо предварительно подготовить, пронумеровав на ней все ходы от 1 до l и полигоны от 1 до $r = l - m$, где m — число узловых точек. Следует выбрать также направления ходов и полигонов и выписать измеренные величины (сумму углов или превышений) и обратные веса ходов (например, число углов или длины ходов). Сделав это, нормальные уравнения составляют по простым и удобным правилам, предложенным проф. В. В. Поповым:

а) квадратичные коэффициенты нормальных уравнений в строке i равны сумме обратных весов ходов, принадлежащих i-му полигону,

б) неквадратичные коэффициенты, расположенные в строке i и столбце j равны обратному весу хода, принадлежащего полигонам i и j, причем взятому со знаком «+», если направления этих полигонов совпадают и «—» в противном случае.

в) свободный член i-го нормального уравнения равен невязке i-го полигона.

Ясно, что каждому i-му полигону (условному уравнению) соответствует i-ая коррелата.

Решив нормальные уравнения, получают все коррелаты и далее поправки в измеренные в каждом ходе величины (в сумму углов или превышений) по правилу: поправка v_j равна обратному весу π_j, умноженному на сумму коррелат тех полигонов, которым принадлежит i-ый ход, причем, если направление хода и полигона не совпадают, то коррелата берется с обратным знаком.

Так, для сети (см. рис. I.2.7), имеем нормальные уравнения

$$\left.\begin{array}{rrr}(\pi_2+\pi_4+\pi_5)\,k_1-\pi_5k_2-\pi_2k_3 & & +W_1=0\\ -\pi_5k_1+(\pi_5+\pi_6+\pi_7)\,k_2- & \pi_7k_4+W_2=0\\ -\pi_2k_1+(\pi_1+\pi_2+\pi_3)\,k_3- & \pi_3k_4+W_3=0\\ -\pi_7k_2-\pi_3k_3+(\pi_3+\pi_7)\,k_4+W_4=0\end{array}\right\}. \quad (I.2.57)$$

Определив из решения (I.2.57) коррелаты, поправки вычислим по формулам

$$v_1=-\pi_1k_3,$$

$$v_2=\pi_2\,(k_1-k_3)$$

и т. д.

Для оценки точности отметок узлов выбирают весовой полигон от твердой точки до оцениваемого узла. Дополнительный столбец в схеме Гаусса тогда получается по тем же правилам, по которым составляются нормальные уравнения. Например, если для оценки точности отметки узла 1 выбрать полигон, совпадающий с первым ходом, то получим

$$[\pi af]=0,$$

$$[\pi bf]=0,$$

$$[\pi cf]=-\pi_1,$$

$$[\pi\, df]=0,$$

$$[\pi ff]=\pi_1.$$

Способ В. В. Попова применяется и при раздельном уравнивании полигонометрической сети.

I.2.20. Способ Крюгера — Урмаева

Проф. Н. А. Урмаев упростил применение двухгруппового способа Крюгера к уравниванию углов в сетях триангуляции. При этом в первую группу относят все условные уравнения фигур треугольников без пересекающихся диагоналей. Эти условные уравнения не содержат общих поправок. Поэтому нормальные уравнения первой группы имеют вид

$$3k'_j+w_j=0$$

и не содержат общих коррелат.

Решая каждое уравнение, относящееся к j-ому треугольнику, получим первичные поправки

$$v'_1 = v'_2 = v'_3 = -\frac{w_j}{3}.$$

Затем измеренные углы исправляем первичными поправками. По этим углам вычислим невязки условных уравнений второй группы и преобразованные коэффициенты этих уравнений. В каждом треугольнике они вычисляются по формулам

$$A_1 = \alpha_1 - \bar{\alpha}_j,$$

$$A_2 = \alpha_2 - \bar{\alpha}_j,$$

$$A_3 = \alpha_3 - \bar{\alpha}_j$$

временно полагаем, что углы в треугольнике имеют свою нумерацию),

$$B_1 = \beta_1 - \bar{\beta}_j,$$

$$B_2 = \beta_2 - \bar{\beta}_j,$$

$$B_3 = \beta_3 - \bar{\beta}_j,$$

где

$$\left.\begin{aligned} \bar{\alpha}_j &= \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \bar{\beta}_j &= \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \end{aligned}\right\}. \qquad (I.2.58)$$

Контроль: для каждого треугольника $[A] = [B] = 0$.

Аналогично преобразуются коэффициенты функции f_l, которую целиком относят во вторую группу:

$$F_1 = f_1 - \bar{f}_l,$$

$$F_2 = f_2 - \bar{f}_l,$$

$$F_3 = f_3 - \bar{f}_l,$$

где

$$\bar{f}_l = \frac{1}{3}(f_1 + f_2 + f_3). \qquad (I.2.59)$$

Обратный вес получаем в виде

$$\frac{1}{P_F}[FF] - \frac{[AF]^2}{[AA]} - \frac{[BF \cdot 1]^2}{[BB \cdot 1]} \cdots$$

Приведем пример уравнивания способом Крюгера — Урмаева.

Пример. Уравнять по способу Крюгера — Урмаева углы в системе треугольников между двумя жесткими сторонами (рис. I.2.8) и оценить точность определения стороны $ДС$.

Исходные данные следующие:

$$\lg s_1 = 3{,}2584263,$$

$$\lg s_2 = 3{,}3295004,$$

$$\angle BOA = 224^\circ\,14'\,40{,}5'' \text{ (твердый угол)}.$$

Измеренные углы приведены в табл. I.2.15.

Р е ш е н и е. I. Составим таблицу предварительного уравнивания углов.

II. Составим условные уравнения второй группы (см. раздел 1.2.14):

а) условие жесткого угла

$$v_2'' + v_5'' + v_8'' + 2{,}3 = 0,$$

б) базисное

$$+1{,}00v_1'' - 1{,}80v_3'' + 1{,}46v_4'' - 0{,}79v_6'' + \\ + 3{,}15v_7'' - 2{,}26v_9'' + 12{,}5 = 0,$$

получаемое с помощью табл. I.2.16.

$$W_{II} = \sum_1 - \sum_2 = +125 \cdot 10^{-7}.$$

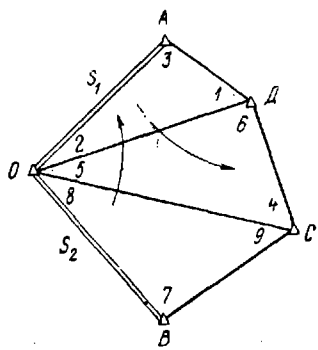


Рис. I.2.8

III. Составляем весовую функцию F для оценки точности стороны $ДС$

$$F = \lg s_1 \frac{\sin y_3 \cdot \sin y_5}{\sin y_1 \cdot \sin y_4}$$

и приводим ее к линейному виду

$$F = f_0 - 1{,}00v_1'' + 1{,}80v_3'' - 1{,}46v_4'' + 1{,}46v_5''.$$

IV. Составляем табл. I.2.17 коэффициентов условных и нормальных уравнений второй группы (все первое уравнение умножено на 3, чтобы избежать дробей).

V. Выполняем решение нормальных уравнений в табл. I.2.18.

По найденным коррелатам вычисляют вторичные поправки v_i'' в табл. I.2.17.

Вычисленные v_i'' вводят в предварительно уравненные углы (см. табл. I.2.15). По окончательно уравненным углам вновь вычисляют невязки всех условных уравнений. Они должны быть равны нулю.

VI. Оценивают точность результатов. В данном примере:

1) сумма квадратов поправок

$$[vv] = [v'v'] + [v''v''] = 33{,}28 + 10{,}26 = 43{,}54;$$

Таблица 1.2.15

№ треугольников	Название вершин	№ углов	Измеренные углы	Первичные поправки $v_i' = -\frac{\zeta}{3}$	Предварительно уравненные углы	Вторичные поправки v_i''	Окончательно уравненные углы	Логарифмы синусов углов
1	*Д*	1	64° 36′ 00,9″	−1,8″	64° 35′ 59,1″	−0,3″	64° 35′ 58,8″	9.995 8478
	О	2	65 53 45,2	−1,8″	65 53 43,4	−1,0	65 53 42,4	9.960 3754
	А	3	49 30 19,3	−1,8″	49 30 17,5	+1,3	49 30 18,8	9.881 0793
	Σ		180 00 05,4 $\zeta_a = +5{,}4''$	−5.4	180 00 00,0	0,0	180 00 00,0	
2	*С*	4	55 19 45,2	+2,4	55 19 47,6	−0,3	55 19 47,3	9.915 1042
	О	5	55 12 15,1	+2,4	55 12 17,5	−0,7	55 12 16,8	9.914 4466
	Д	6	69 27 52,6	+3,3	69 27 54.9	+1,0	69 27 55,9	9.971 4899
	Σ		179 59 52,9 $\zeta_b = -7{,}1''$	+7.1	180 00 00,0	0.0	180 00 00,0	
3	*В*	7	33 44 19,4	−1,5	33 44 17,9	−1,3	33 44 16,6	9.744 6022
	О	8	103 13 43,4	−1,5	103 13 41,9	−0,6	103 13 41,3	9.988 3211
	С	9	43 02 01,7	−1,5	43 02 00,2	+1,9	43 02 02,1	9.834 0589
	Σ		180 00 04,5 $\zeta_c = +4{,}5''$	−4.5	180 00 00,0	0.0	180 00 00,0	

$[v'v'] = 33{,}28$ $\qquad \sum v^2 = 1002$

Таблица I.2.16

№ углов (передних)	Значения углов	Логарифмы синусов углов	Δ1″
1	64° 35′ 59,1″	9.955 8481	+10,0
4	55 19 47,6	9.915 1047	+14,6
7	33 44 17,9	9.744 6390	+31,5
s_2		3.329 5004	
		$\Sigma_1 = 2.945\,0922$	

Продолжение табл. I.2.16

№ углов (задних)	Значения углов	Логарифмы синусов углов	Δ1″
3	49° 30′ 17,5″	9.881 082	+18,0
6	69 27 54,9	9.971 4873	+7,9
9	43 02 00,2	9.834 0579	+22,6
s_1		3.258 4263	
		$\Sigma_2 = 2.945\,0797$	

2) средняя квадратическая ошибка результата непосредственного измерения

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{r_1 + r_2}} = \sqrt{\frac{43{,}54}{3+2}} = 3{,}0''.$$

Ошибка самой ошибки

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2\,(r_1 + r_2)}} = \frac{3{,}0''}{\sqrt{2 \times 5}} = 0{,}95'';$$

3) средняя квадратическая ошибка логарифма стороны

$$m_{\lg_s} = m\sqrt{\frac{1}{P_u}} = 3{,}0\sqrt{5{,}87} = 7{,}2 \cdot 10^{-6};$$

4) относительная ошибка определения длины стороны $ДС$

$$\frac{m_s}{s} = \frac{m_{\lg_s}}{M} = \frac{7{,}2}{0{,}43 \cdot 10^6} = \frac{1}{60\,000}.$$

Заметим, что способ Крюгера — Урмаева применяют также в случае, когда в сети имеются геодезические четырехугольники, относя в первую группу условные уравнения фигур треугольников, не содержащих общих углов. Остальные условные уравнения от-

Таблица I.2.17

№ треугольников	Углы	α	β	t	$A]$	$B]$	$F]$	$s]$	v_i''
1	1	+1	+1,00	−1,00	−1	+1,27	−1,27	−1,00	−0,35″
	2				+2	+0,27	−0,27	+2,00	−0,97
	3		−1,80	+1,80	−1	−1,53	+1,53	−1,00	+1,32
2	4	+1	+1,46	−1,46	−1	+1,24	−1,46	−1,22	−0,33
	5			+1,46	+2	−0,23	+1,46	+3,23	−0,68
	6		−0,79		−1	−1,01	0	−2,01	+1,01
3	7	+1	+3,15		−1	+2,85		+1,85	−1,30
	8				+2	−0,29		+1,71	−0,64
	9		−2,26		−1	−2,56		−3,56	+1,94
	w	+2,3	+12,5	w	+6,9	+12,5		+19,400	10,26
				k	−0,409	−0,600			W
				$[A$	+18,00	−0,78	+3,60	+20,82	+6,90
				$[B$		+21,39	−6,17	+14,44	+12,50
									Σ
				$[F$			+8,28	+5,72	24,12
				$[s$				+40,98	33,11

Таблица I.2.18

k_{I}	k_{II}	W	Σ	Контроль 1	F	s	Контроль 2
(0,0556) +18,00 (−1)	−0,78 +0,043	+6,90 −0,383	+24,12 −1,341	+24,12 −1,340	+3,60 −0,200	+20,82 −1,158	+20,82 −1,158
(−0,0468)	+21,36 (−1)	+12,80 −0,599	+34,15 −1,598	+34,16 −1,599	−6,01 +0,282	+15,34 −0,718	+15,35 −0,717
		−10,32	−10,32		+5,87 $\frac{1}{P_F}$	+5,88 $\frac{1}{P_F}$	
−0,409	−0,600						

носят во вторую группу. Первичные поправки углов в геодезическом четырехугольнике

$$v_i' = -\frac{w_l}{4},$$

а формулы (I.2.58) и (I.2.59) примут вид

$$\overline{\alpha}_l = \frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4),$$

$$\overline{\beta}_l = \frac{1}{4}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4),$$

$$\overline{f}_l = \frac{1}{4}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4),$$

при этом для каждого треугольника придется вычислять по 4 коэффициента $A, B, \ldots, G, F$. Все остальные формулы останутся без изменений.

В. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

I.2.21. Уравнивание параметрическим способом с условиями (избыточными неизвестными)

В некоторых случаях вместо уравнений вида (I.2.2), возникающих при параметрическом способе уравнивания, бывает целесообразно составить уравнения

$$y_l = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{k'}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{I.2.60}$$

в которых число параметров $k' \geqslant k$. В таком случае эти параметры должны удовлетворять $r' = k' - k$ условным уравнениям вида

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{k'}) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, r'). \tag{I.2.61}$$

После разложения в ряд Тейлора (I.2.60) и (I.2.61) получим уравнения поправок

$$v_l = a_l\delta x_1 + b_l\delta x_2 + \ldots + g_l\delta x_k + l_l$$

и условные уравнения

$$\begin{aligned} [A\delta x] + W_1 &= 0, \\ [B\delta x] + W_2 &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ [G\delta x] + W_{r'} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее, v_l, δx – поправки к результатам измерений и приближенным значениям неизвестных $x_j'^{(0)}$. Невязки $W_j = f_j(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{k'}^{(0)})$. Коэффициенты

$$A_j = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^{(0)}}, \quad B_j = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^{(0)}}, \ \ldots,$$

$$G = \left(\frac{\partial f_{r'}}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^{(0)}}.$$

Условие $[pv^2] = \min$ приводит к системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l}
[paa]\,\delta x_1 + \ldots + [paq]\,\delta x_{k'} + A_1 k_1 + B_1 k_2 + \ldots + G_1 k_{r'} + [pal] = 0 \\
[pab]\,\delta x_1 + \ldots + [pbq]\,\delta x_{k'} + A_2 k_1 + B_2 k_2 + \ldots + G_2 k_{r'} + [pbl] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[paq]\,\delta x_1 + \ldots + [pqq]\,\delta x_{k'} + A_{k'} k_1 + B_{k'} k_2 + \ldots + G_{k'} k_{r'} + \\
\qquad + [pql] = 0 \\
A_1 \delta x_1 + A_2 \delta x_2 + \ldots + A_{k'} \delta x_{k'} + W_1 = 0 \\
B_1 \delta x_1 + B_2 \delta x_2 + \ldots + B_{k'} \delta x_{k'} + W_2 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_1 \delta x_1 + G_2 \delta x_2 + \ldots + G_{k'} \delta x_{k'} + W_{r'} = 0
\end{array}\right\} . \qquad (I.2.62)$$

В системе уравнений (I.2.62) соблюдается симметрия коэффициентов. Поэтому система эта может быть решена любым из способов. Значение $[pv^2]$ может быть получено в данном способе по обычному правилу, как сумма произведений чисел элиминационных строк на вышестоящие числа в графе свободных членов при решении нормальных уравнений, или по формуле

$$[pa_1 l]\,\tau_1 + [pa_2 l]\,\tau_2 + \ldots + [pa_k l]\,\tau_k + \\ + W_A k_A + W_B k_B + W_C k_C + [pll] = [pv^2].$$

Обратный вес функции в рассматриваемом способе может быть найден в дополнительной графе по тому же правилу, по которому его находят в параметрическом способе.

Справедлива также формула

$$\frac{1}{P_F} = f_1 f_1 Q_{11} + 2 f_1 f_2 Q_{12} + \ldots + 2 f_1 f_k Q_{1k'} + \\ + f_2 f_2 Q_{22} + \ldots + 2 f_2 f_k Q_{2k'} + \\ + f_k f_k Q_{k'k'}. \qquad (I.2.63)$$

Следует, однако, иметь в виду, что в формуле (I.2.63) фигурирует лишь часть общей системы весовых коэффициентов, которую определяют при помощи общей системы нормальных уравнений (I.2.62), учитывающей и условные уравнения.

Средняя квадратическая ошибка одного измерения

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n - (k' - r')}}.$$

В качестве примера можно привести уравнивание сетей, когда вместо необходимых неизвестных — поправок координат — приняты избыточные измерения — поправки приращений координат.

I.2.22. Способ условий с дополнительными неизвестными

В некоторых случаях имеется возможность упростить вид условных уравнений, вводя в них дополнительные неизвестные. Упрощение достигают путем увеличения числа условных уравнений на число дополнительных неизвестных, но иногда это может оказаться выгодным (например, при уравнивании систем рядов триангуляции или сетей полигонометрии). При этом в отличие от коррелатного способа уравнивания условные уравнения имеют вид

$$f_i(y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n,\quad t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_s)=0, \qquad (I.2.64$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ r')$$

где t — получаемые из уравнивания дополнительные неизвестные. Разложение (I.2.64) в ряд Тейлора приводит к уравнениям

$$\left.\begin{aligned}&[av]+[A\delta t]+W_1=0\\&[bv]+[B\delta t]+W_2=0\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&[qv]+[G\delta t]+W_{r'}=0\end{aligned}\right\}, \qquad (I.2.65)$$

где

$$A_p=\left(\frac{\partial f_1}{\partial t_p}\right)_{t_p=t_p^{(0)}},\quad B=\left(\frac{\partial f_2}{\partial t_p}\right)_{t_p=t_p^{(0)}},$$

$$G_p=\left(\frac{\partial f_{r'}}{\partial t_p}\right)_{t_p=t_p^{(0)}} \qquad (p=1,\ 2,\ \ldots,\ s),$$

$t_p^{(0)}$ — приближенные значения дополнительных неизвестных.

Решая (I.2.65) при условии $[p\,v^2]=\min$, получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}&[aa]\,k_1+\ldots+[aq]\,k_{r'}+A_1\delta t_1+\ldots+A_s\delta t_s+W_1=0\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&[aq]\,k_1+\ldots+[qq]\,k_{r'}+G_1\delta t_1+\ldots+G_s\delta t_s+W_{r'}=0\\&A_1k_1+\ldots+G_1k_{r'}=0\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&A_sk_1+\ldots+G_sk_{r'}=0\end{aligned}\right\}, \qquad (I.2.66)$$

решая которую, например, по схеме Гаусса, найдем неизвестные δt_p и коррелаты k. Поправки v_i определяются также по формулам (I.2.37). Значение $[p\,v^2]=-[kW]$.

Для оценки точности функции

$$F=F(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\quad t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_s)$$

ее приводят к линейному виду

$$F=F^{(0)}+f_iv_i+\Phi_p\delta t_p,$$

где

$$\Phi=\left(\frac{\partial F}{\partial t_p}\right)_{t_p=t_p^{(0)}},$$

и в схему Гаусса добавляют столбец из элементов

$$[\pi af],\ [\pi bf],\ \ldots,\ [\pi qf],\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_s \text{ и } [\pi ff].$$

Обратный вес получают, исключив все $r' + s$ неизвестных, по формуле

$$\frac{1}{P_F} = [\pi ff] - \frac{[\pi af]^2}{[\pi aa]} - \ldots - \frac{[\pi qf\,(r'-1)]^2}{[\pi qq\,(r'-1)]} -$$

$$- \frac{[\Phi_1 \cdot r']^2}{[AA \cdot r']} - \ldots - \frac{[\Phi_s \cdot (r'+s-1)]^2}{[GG \cdot (r'+s-1)]},$$

где в условных обозначениях знаменатели во второй строчке — преобразованные квадратичные коэффициенты последних s уравнений.

Средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r-s}}.$$

Наиболее широкое применение этот способ получил при уравнивании полигонометрических сетей. В качестве дополнительных неизвестных вводят поправки ориентирующих углов и координат узлов или только ориентирующих углов (предложение И. И. Купчинова, Б. А. Литвинова, Ю. И. Маркузе). Его применяют также для уравнивания при наличии систематических ошибок.

1.2.23. Уравнивание при большом числе неизвестных

И. Ю. Пранис-Праневич предложил следующий так называемый многогрупповой способ уравнивания больших сетей, суть которого применительно к параметрическому способу уравнивания сводится к следующему.

Сеть делят на несколько примерно равных участков. Обозначив векторы неизвестных, относящиеся только к данному участку, через Δx, а неизвестных, общих для участков, через Δx_0 и поставив эти неизвестные в уравнениях поправок на последние места, получим, например, для трех участков следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{aligned}
R_1 \Delta x_1 \qquad\qquad\quad &+ R_{1.0}\,\Delta x_0 + b_1 = 0,\\
R_2 \Delta x_2 \qquad\quad &+ R_{2.0}\,\Delta x_0 + b_2 = 0,\\
R_3 \Delta x_3 \qquad &+ R_{3.0}\,\Delta x_0 + b_3 = 0,\\
R^{\mathrm{T}}_{1.0}\,\Delta x_1 + R^{\mathrm{T}}_{20}\,\Delta x_2 + R^{\mathrm{T}}_{30}\,\Delta x_3 &+ R_0\,\Delta x_0 + b_0 = 0.
\end{aligned}$$

Первые три матричных уравнения называют частично независимыми, а последнее — связующим нормальным уравнением.

Эти уравнения могут быть получены одновременно по каждому участку. Затем в каждом участке исключают неизвестные Δx_i и в результате суммирования получают общую систему нормальных уравнений

$$[R_0 \cdot 3]\,\Delta x_0 + [b_0 \cdot 3] = 0.$$

Решая ее, находят вектор Δ_0, а затем и Δx_i независимо по каждому участку.

Этот способ завоевал заслуженное признание геодезистов и широко применяется, например, при уравнивании астрономо-геодезической сети СССР.

I.2.24. Понятие об уравнивании зависимых измерений

Метод наименьших квадратов можно применять и при зависимых (коррелированных) измерениях.

Суть уравнивания зависимых измерений заключается в том, что условие $[p v^2] = \min$, справедливое для независимых измерений, характеризующихся диагональной матрицей весов P, следует заменить условием

$$V^T Q^{-1} V = \min,$$

где матрица весовых коэффициентов результатов измерений

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обычно в качестве зависимых рассматривают не сами измерения, а их функции. Так что возникает задача уравнивания функций измеренных величин.

В качестве примера можно привести задачу уравнивания углов при измеренных направлениях (углы, имеющие общую сторону, коррелированы между собой, коэффициент корреляции между ними $r = -0{,}5$).

Другим примером является уравнивание сетей с учетом ошибок исходных данных — коррелированных величин.

Можно показать, что двухгрупповое уравнивание по способу Крюгера или Бесселя является частной задачей уравнивания зависимых измерений. Например, при двухгрупповом уравнивании полигонометрического хода матрица весовых коэффициентов предварительно уравненных углов имеет вид

$$Q = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n \end{pmatrix}, \qquad (I.2.67)$$

где n — число сторон хода.

Появление центральных координат при двухгрупповом уравнивании и есть следствие преобразования матрицы коэффициентов при поправках углов в условных уравнениях второй группы с помощью матрицы (I.2.67).

Теорию уравнивания зависимых измерений удобно излагать в матричной форме.

Так, нормальные уравнения в параметрическом способе имеют вид

$$A^T PA\,\Delta x + A^T PL = 0,$$

где, в отличие от (I.2.31), матрица весов P «полная».

В коррелатном способе нормальные уравнения следует записать в виде

$$BQB^T K + W = 0,$$

где $Q = P^{-1}$, а вектор поправок — в виде

$$V = QB^T K.$$

I.2.25. Применение метода наименьших квадратов при аппроксимации функций

Метод наименьших квадратов находит широкое применение при решении задачи аппроксимации функций или при так называемом сглаживании экспериментальных зависимостей. Пусть производится опыт, целью которого является исследование зависимости

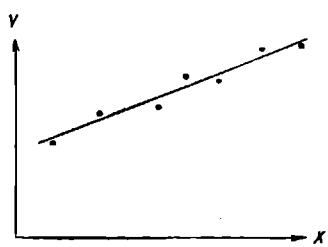


Рис. 1.2.9

Рис. 1.2.10

некоторой физической величины y от физической величины x, причем предполагается, что y и x связаны функциональной зависимостью

$$y = \varphi(x).$$

В результате наблюдений получены пары чисел

$$(x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

О форме зависимости судят исходя из существа задачи или по внешнему виду экспериментальной зависимости. Например, экспериментальные точки, изображенные на рис. I.2.9, предполагают прямолинейную зависимость вида $y = ax + b$, а на рис. I.2.10 полином второй степени $y = ax^2 + bx + c$. В общем случае можно говорить о подборе полинома степени $n - 1$, который задает

кривую, проходящую через все n точек (x_i, y_i). Но построение такого полинома нецелесообразно, ибо существующая закономерность будет искажена случайными ошибками наблюдений. Для сглаживания случайных уклонений как раз и служит метод наименьших квадратов.

С его помощью определяют коэффициенты сглаживающих полиномов. Так, для прямолинейных зависимостей будем иметь уравнения поправок вида

$$\begin{aligned} ax_1 + b - y_1' &= v_1, \\ ax_2 + b - y_2' &= v_2, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ ax_n + b - y_n' &= v_n. \end{aligned}$$

Здесь роль неизвестных играют два параметра a и b, а роль измерений величины $-y'$, коэффициенты при a и b образуют матрицы

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n & 1 \end{pmatrix}; \quad A^T A = \begin{pmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{pmatrix}; \quad A^T L = \begin{pmatrix} [xy] \\ [y] \end{pmatrix}.$$

Так что имеем систему нормальных уравнений с двумя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} [x^2]\, a + [x]\, b - [xy] = 0 \\ [x]\, a + nb - [y] = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Решение легко выполнить с помощью обратной матрицы по (I.2.32)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} [xy] \\ [y] \end{pmatrix},$$

где

$$Q = \frac{1}{[x^2]\, n - [x]^2} \begin{pmatrix} n & -[x] \\ -[x] & [x^2] \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{n\,[xy] - [x]\,[y]}{[x^2]\, n - [x]^2} \\ b &= \frac{-[x]\,[xy] + [y]\,[x^2]}{[x^2]\, n - [x]^2} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(I.2.68)}$$

Рассмотрим пример. Пусть имеем пары наблюдений (x_i, y_i), представленные в табл. I.2.19 и на графике рис. I.2.11 в виде точек.

Таблица I.2.19

№ наблюдений	x_l	y_l	v
1	1	2,8	−0,16
2	2	2,7	+0,11
3	3	2,9	+0,08
4	4	3,3	−0,16
5	5	3,2	+0,11
6	6	3,4	+0,08
7	7	3,6	+0,05
8	8	3,9	−0,08
9	9	4,0	−0,02
10	10	4,2	−0,04
	$\sum = 55$	$\sum = 34$	$\sum = -0,03$

$[x^2] = 385 \qquad [xy] = 200,9 \qquad [x^2]\,n - [x]^2 = 825$

График показывает, что можно предположить функциональную зависимость $y = ax + b$. Согласно (I.2.85) имеем

$$a = \frac{2009 - 1870}{825} = 0,168, \qquad b = \frac{-11049 + 13\,090}{825} = 2,473.$$

Далее вычисляем уклонения (см. табл. I.2.19)

$$v_l = 0,168 \cdot x_l + b - y_l$$

и осуществляем контроль на основании (I.2.14)

$$[xy] = -0,18 \approx 0,$$

$$[v] = -0,03 \approx 0.$$

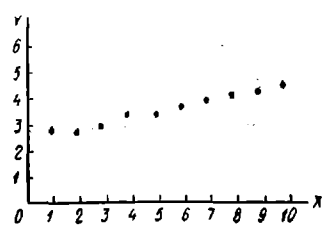


Рис. 1.2.11

Для оценки точности вычисляем

$$[v^2] = 0,0991 \text{ и } m = \sqrt{\frac{0,0991}{10 - 2}} = 0,11.$$

Далее имеем

$$m_a = m\sqrt{Q_{11}}, \quad m_b = m\sqrt{Q_{22}},$$

где

$$Q_{11} = \frac{n}{[x^2]\,n - [x]^2} = \frac{10}{825} = 0,0121;$$

$$Q_{22} = \frac{[x^2]}{[x^2]\,n - [x]^2} = \frac{385}{825} = 0,467.$$

Поэтому

$$m_a = 0{,}11 \cdot \sqrt{0{,}0121} = 0{,}012,$$

$$m_b = 0{,}11 \cdot \sqrt{0{,}467} = 0{,}068.$$

Можно показать, что, когда функциональная зависимость имеет вид

$$y = ax + b,$$

задача нахождения параметров a и b математически тождественна задаче построения уравнения регрессии, однако по существу отличается от нее, так как наличие функциональной связи предполагает, что коэффициент корреляции $r = \pm 1$. Так, применяя метод наименьших квадратов к примеру 29 (раздел I.1.18), получаем то же уравнение регрессии

$$y = 0{,}63x + 0{,}71,$$

по говорить о функциональной связи между y и x не приходится (это видно уже по расположению точек на графике рис. I.1.12).

Аналогично решается задача и для подбора параметров полиномов более высокого порядка, а также для определения коэффициентов систем линейных уравнений.

I.2.26. Решение нормальных уравнений методом приближений

Кроме описанных методов решения нормальных уравнений, называемых точными, для решения больших систем применяют методы приближений (итераций). В геодезических вычислениях наиболее часто используют метод простой итерации и метод Зейделя.

Метод простой итерации сводится к следующей процедуре. Система нормальных уравнений (например трех) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \cdot x_1 - \frac{[ab]}{[aa]} x_2 - \frac{[ac]}{[aa]} x_3 - \frac{b_1}{[aa]} \\ x_2 &= -\frac{[ab]}{[bb]} x_1 - 0 \cdot x_2 - \frac{[bc]}{[bb]} x_3 - \frac{b_2}{[bb]} \\ x_3 &= -\frac{[ac]}{[cc]} x_1 - \frac{[bc]}{[cc]} x_2 - 0 \cdot x_3 - \frac{b_3}{[cc]} \end{aligned}\right\}. \quad (I.2.69)$$

Здесь роль неизвестных x_j могут играть как поправки δx_j, так и коррелаты, а роль свободных членов — соответственно величины $[al]$, $[bl]$, $[cl]$ или невязки w_1, w_2, w_3. Обозначим коэффициенты при неизвестных x_j в правых частях через α_{ij} (i — номер строки, j — номер неизвестных), а свободные члены — через β_i.

Тогда процесс приближений выполняют по формуле

$$x_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(p-1)} + \beta_i.$$

Здесь $p = 0, 1, 2, \ldots, m$ — номер приближения, а n — число неизвестных в общем случае (в I.2.69 $n = 3$).

Приближение начинают со значений

$$x_i^{(0)} = \beta_i$$

и заканчивают, когда значения неизвестных $x_j^{(m-1)}$ и $x_j^{(m)}$ будут в пределах точности вычислений совпадать.

Можно доказать, что процесс будет всегда сходиться, если наибольшая из сумм абсолютных величин коэффициентов α_{ij}, вычисленных по строкам, меньше единицы.

Метод Зейделя отличается от метода простой итерации тем, что при вычислении значений неизвестных x_j в приближении p используются уже полученные в этом же приближении неизвестные $x_{j-1}^{(p)}$, а остальные неизвестные будут из приближения $p - 1$.

Формула для вычислений имеет вид

$$x_i^{(p)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(p)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(p-1)} + \beta_i.$$

Например, при $p = 3$ и $n = 3$ имеем

$$x_1^{(3)} = \alpha_{1,2} x_2^{(2)} + \alpha_{1,3} x_3^{(2)} + \beta_1,$$

$$x_2^{(3)} = \alpha_{2,1} x_1^{(3)} + \alpha_{2,3} x_3^{(2)} + \beta_2,$$

$$x_3^{(3)} = \alpha_{3,1} x_1^{(3)} + \alpha_{3,2} x_2^{(3)} + \beta_3.$$

Вычисления выполняют в таблице следующего вида:

№ неизвестных	Коэффициенты	$\beta_i = x_i^{(0)}$	Приближения			
			$x_i^{(1)}$	$x_i^{(2)}$	. . .	$x_i^{(m)}$
1	$0 \quad \alpha_{12} \quad \alpha_{13}$	β_1				
2	$\alpha_{21} \quad 0 \quad \alpha_{23}$	β_2				
3	$\alpha_{31} \quad \alpha_{32} \quad 0$	β_3				

Метод Зейделя для нормальной системы уравнений всегда сходится.

Пример. Решить систему из трех нормальных уравнений, составленных при уравнивании нивелирной сети (см. раздел I.2.9) методом Зейделя

$$3{,}60\delta x_1 - 1{,}17\delta x_2 - 1{,}22\delta x_3 + 12{,}36 = 0,$$

$$-1{,}17\delta x_1 + 4{,}88\delta x_2 - 1{,}25\delta x_3 + 5{,}05 = 0,$$

$$-1{,}22\delta x_1 - 1{,}25\delta x_2 + 3{,}81\delta x_3 - 16{,}37 = 0.$$

Решение:

				$\beta_i = x_i^{(0)}$	$x_i^{(1)}$	$x_i^{(2)}$
1	0	+0,325	+0,339	−3,433	−2,31	−2,23
2	+0,240	0	+0,256	−1,035	0	−0,66
3	+0,320	+0,328	0	+4,296	+3,56	+3,36

	$x_i^{(3)}$	$x_i^{(4)}$	$x_i^{(5)}$	$x_i^{(6)}$	$x_i^{(7)}$	$x_i^{(8)}$
1	−2,51	−2,59	−2,621	−2,631	−2,634	−2,636
2	−0,78	−0,83	−0,847	−0,853	−0,855	−0,855
3	+3,24	+3,19	+3,179	+3,174	+3,173	+3,172

Как видим, неизвестные получены те же, что и в примере раздела I.2.9. Заметим, что значения x_i в первых приближениях целесообразно получать с меньшей точностью, увеличивая ее по мере сходимости процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурмистров Г. А. Основы способа наименьших квадратов. М., Госгеолтехиздат, 1963, 392 с.
2. Гайдаев П. А., Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений. М., «Недра», 1969, 400 с.
3. Гайдаев П. А. Способ наименьших квадратов. М., Геодезиздат, 1959, 269 с.
4. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962, 349 с.
5. Маркузе Ю. И. Алгоритм уравнивания комбинированных геодезических сетей. М., «Недра», 1972, 152 с.
6. Пранис-Праневич И. Ю. Руководство по уравнительным вычислениям триангуляции. М., Геодезиздат, 1956, 362 с.
7. Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М., Геодезиздат, 1958, 606 с.
8. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1969, 400 с.
9. Кемниц Ю. В. Теория ошибок измерений. М., Геодезиздат, 1961, 112 с.
10. Большаков В. Д. Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей. М., «Недра», 1965, 183.
11. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1969, 576 с.

I.3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА В ГЕОДЕЗИИ

Е. Г. Ларченко

А. КРАТКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

I.3.1. Общие сведения о применении средств вычислительной техники

Вычислительную технику широко применяют при механизации и автоматизации различных расчетов, в том числе при математической обработке результатов геодезических измерений. Особая роль принадлежит вычислительной технике в области отыскания оптимальных (наилучших) решений, в деле автоматизации отдельных геодезических процессов и в автоматизированных системах управления (АСУ).

Успех решения геодезических задач во многом зависит от рационального использования вычислительных средств: счетных таблиц, счетных приборов, вычислительных машин.

Некоторые элементарные задачи в области геодезии можно решать при помощи простейших вычислительных средств, к которым относятся счеты, таблицы, логарифмические линейки и разные арифмометры, применяя при этом рациональные приемы вычислений. На логарифмической линейке можно решать все задачи, где достаточна точность чисел в три значащие цифры. На ней удобно вычислять различные поправки и ошибки, вычислять проценты и производить многие вычисления без промежуточных записей по различным формулам, что значительно повышает производительность труда.

Самым мощным средством механизации и автоматизации инженерных и экономических расчетов являются вычислительные машины, которые можно разделить на три класса: аналоговые вычислительные машины (АВМ), цифровые вычислительные машины (ЦВМ) и машины смешанного типа. Аналоговые машины, которые называются еще моделирующими, оперируют с данными, выраженными какими-нибудь физическими величинами: длинами отрезков, электрическими напряжениями, температурой и др. Большим их недостатком является ограниченная точность (от двух до четырех значащих цифр).

Цифровые вычислительные машины (ЦВМ) позволяют выполнять вычисления с любой необходимой точностью. Чтобы

подчеркнуть, что эти машины сконструированы на принципах электронной автоматики, их обычно называют ЭВМ. В настоящее время имеется много разных ЭВМ. С их помощью решаются самые разнообразные задачи геодезической техники и экономики. При этом их роль не сводится только к механизации и автоматизации расчетов — они являются также средством отыскания оптимальных планов на основе экономико-математических методов.

I.3.2. Классификация цифровых вычислительных машин и краткие сведения об их возможностях

Номенклатура цифровых вычислительных машин с каждым годом увеличивается. Создаются новые модели машин, расширяются их эксплуатационные возможности.

Существуют различные принципы классификации вычислительных машин. Однако в условиях бурного развития средств вычисли-

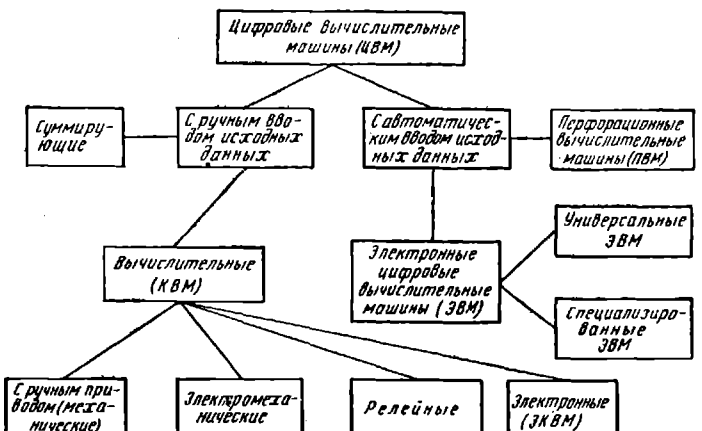


Рис. I.3.1. Классификация цифровых вычислительных машин

тельной техники любая из классификаций имеет условный характер.

На рис. I.3.1 показана классификация вычислительных машин, исходящая из способа ввода чисел в машину и учитывающая их эксплуатационные признаки. Все цифровые вычислительные машины можно подразделить на два больших класса: машины с ручным вводом чисел (исходных данных) и машины с автоматическим вводом чисел. Машины с ручным вводом исходных данных характеризуются тем, что каждое число набирается путем нажима на клавиши или путем перемещения рычагов. Эти машины делятся на две группы: суммирующие и вычислительные. Суммирующие машины главным образом применяются для сложения и вычитания, но на них можно производить умножение и деление. Вычислительные машины, которые можно разделить на три группы (см. рис. I.3.1), предназначены для умножения и деления, хотя на них производят

сложение и вычитание, но с меньшей производительностью, чем на суммирующих машинах.

Наибольшее развитие суммирующие машины, как и другие средства вычислительной техники, получили в последние десятилетия. Сконструировано и применяется много различных типов суммирующих машин с узкими и широкими каретками, на которых удобно находить алгебраические суммы чисел, производить запись обрабатываемых чисел, результатов вычислений и условных обозначений. Имеются суммирующие многосчетчиковые текстовые машины, снабженные цифровой и алфавитной клавиатурой.

В настоящее время сконструировано и применяется много типов полуавтоматических и автоматических клавишных вычислительных машин, действующих на различных принципах (см. рис. I.3.1). Эти машины, называемые клавишными вычислительными машинами (КВМ), наиболее приспособлены для индивидуальных инженерно-экономических расчетов небольших объемов. В настоящее время электромеханические КВМ заменяются электронными (ЭКВМ), позволяющими повышать производительность труда в 2—3 раза по сравнению с работой на арифмометре.

Перфорационные вычислительные машины (ПВМ) — это такие машины, ввод исходных данных в которые производится автоматически — с помощью перфорационных карт. ПВМ используются в комплекте, в который входят: 2—3 перфоратора, служащие для пробивки (в соответствии с исходными данными) отверстий на специальных карточках, называемых перфокартами; 1—2 контрольника, служащие для проверки правильности перфорации; сортировка, служащая для группировки перфокарт по заданному признаку; табулятор, являющийся основной счетно-записывающей машиной, и некоторые специализированные машины.

Наиболее эффективно на табуляторе выполняются сложение и вычитание. Например, на табуляторе Т-5М можно выполнить до 72 000 сложений в час при одновременной работе восьми его счетчиков. Комплект ПВМ применяется главным образом для механизации учетных и статистических работ.

В современный комплект ПВМ включают часто различные специальные машины (электронные вычислители, электронные вычислительные приставки и др.), позволяющие эффективно выполнять все арифметические операции и значительно повышающие производительность вычислительного труда. ПВМ также используются в автоматизированных системах управления.

Применение электронных вычислительных машин (ЭВМ) играет важную роль в повышении эффективности производства.

Первая электронная цифровая вычислительная машина, действующая на вакуумных лампах, была создана в 1946 г. Вскоре вслед за ламповыми машинами начали конструировать полупроводниковые ЭВМ и другие элементы электронной автоматики, в которых использовались полупроводниковые диоды и триоды. Полупроводниковые машины истребляют меньше энергии и более надежны. Машины, собранные на полупроводниковых элементах (транзисторах), пропускают импульсы с частотой свыше ста миллионов в секунду, чем и объясняется быстродействие таких машин.

Ламповые ЭВМ — это машины I поколения, в настоящее время сняты с производства как морально устаревшие. Полупроводниковые машины — это машины II поколения — широко

используются различными организациями для решения инженерных и экономических задач. ЭВМ II поколения уже начали заменять машинами III поколения, которые конструируются на базе микроэлектроники, на так называемых интегральных схемах. ЭВМ ближайшего будущего — это машины IV поколения, которые конструируются на больших интегральных схемах. Современные ЭВМ выполняют миллионы операций в секунду. Из вычислительных машин комплектуют вычислительные системы (ВС), позволяющие одновременно решать несколько задач по разным программам. В настоящее время сконструированы многопрограммные (мультипрограммные) ЭВМ, позволяющие одновременно выполнять несколько программ или несколько частей одной программы.

Современные электронные вычислительные машины могут выполнять за очень короткие промежутки времени, исчисляемые наносекундами (1 нсек $= 10^{-9}$ сек), не только операции счета, но также сложные логические действия. В настоящее время электронные вычислительные и управляющие машины применяют в экономике и управлении производством, при решении различных астрономических, геодезических, военных, медицинских и многих других задач и проблем.

С увеличением быстродействия электронных машин габариты их должны неуклонно уменьшаться, потому что скорость передачи информации ограничивается скоростью света. Легко подсчитать, что для передачи единицы информации на расстояние 30 см уже требуется времени 1 нсек. Применение интегральных схем открывает новые перспективы в развитии электронных вычислительных машин с резко уменьшенными размерами, с еще большей производительностью и надежностью. Возможности ЭВМ определяются их быстродействием, емкостью запоминающих устройств, устройств ввода-вывода и уровнем теории и техники программирования (кодирования) задач. Многие задачи могут быть сформулированы лишь один раз, а затем эта формулировка, представляющая машинный алгоритм (программу), повторяется ЭВМ столько раз, сколько необходимо, что резко повышает производительность труда.

I.3.3. Организационные формы использования вычислительных машин

Самые распространенные клавишные вычислительные машины (КВМ) используются не только индивидуальным путем, но и централизованным, когда они сосредоточены в машиносчетном бюро (МСБ). Кроме этого, КВМ используются в машиносчетных станциях (МСС), на фабриках механизированного счета (ФМС) и вычислительных центрах (ВЦ).

Перфорационные вычислительные машины (ПВМ) используются на МСС и ФМС. Этими машинами оснащаются районные машиносчетные станции (РМСС), которых в настоящее время организовано более 2000. В соответствии с решением правительства во всех районах страны должны быть организованы РМСС для решения инженерных и экономических задач, возникающих в предприятиях и учреждениях района.

Вычислительные центры (ВЦ) оснащаются быстродействующими электронными вычислительными машинами и машинами других

классов. ВЦ обычно обслуживают научные учреждения и крупные предприятия, требующие большого объема вычислений.

На основе современной вычислительной техники и математических методов у нас проводится большая работа по созданию автоматизированных систем управления (АСУ). За 1966—1970 гг. было внедрено на различных предприятиях более 400 АСУ, а в период 1971—1975 гг. должно быть внедрено не менее 1600 АСУ. Под АСУ понимают систему, которая включает в себя три основные функции:

1) сбор и обработка информации и выдача ее в таком виде, который необходим для эффективного выполнения функций управления;

2) анализ полученной информации и выработка оптимальных решений;

3) составление оптимальных планов на перспективу.

Создаются отраслевые автоматизированные системы управления (ОАСУ) для выполнения комплекса операций как в сфере планирования, так и управления отраслью на различных уровнях (района, области, края, республики).

Б. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА И ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЙ С НИМИ ПРИ ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

1.3.4. Об источниках происхождения приближенных чисел

Приближенное число отличается от точного на погрешность (ошибку), допустимую в соответствии с условиями данной задачи, и заменяет точное число в расчетных формулах.

Основными источниками происхождения приближенных чисел являются:

1. Погрешность исходных данных (результатов измерений *, различных коэффициентов, технологических данных и др.). Это неустранимые погрешности, они не зависят от метода решения задачи.

2. Неточность формул, методов и моделей. Многие практические формулы являются приближенными. Например, некоторые формулы получаются при разложении данных функций в ряды с ограниченным количеством членов. Экономико-математические модели как по точности коэффициентов уравнений и неравенств, так и по своей полноте обычно приближенно отражают действительные условия.

3. Погрешности округлений, зарождающиеся в процессе счета. Для уменьшения накопления погрешностей округления промежуточные результаты записывают с дополнительными (сомнительными) знаками.

Приближенные числа, записанные в любой позиционной системе, при машинном счете округляют по правилу: к старшему из отбрасываемых разрядов прибавляют половину основания системы счисления, в которой записано округляемое число.

* Обычно точность результата измерений и точность числа, выражающего этот результат, не одинаковы.

4. Погрешности, возникающие при переводе чисел из одной системы счисления в другую.

При решении задач на электронных вычислительных машинах приходится пользоваться двоичной, восьмеричной и другими позиционными системами счисления. Целые числа из одной позиционной системы в другую переводятся точно, а дробные — приближенно (за исключением отдельных чисел). Поэтому при переводе чисел из одной системы в другую, как правило, появляются дополнительные погрешности, которые относятся к неустранимым. Эти погрешности должны быть меньше погрешностей исходных данных. Например, для того, чтобы сохранилась точность при переводе десятичного числа $x = 990{,}45$ в двоичную запись, необходимо в двоичном числе сохранить 18 разрядов.

При действиях с приближенными числами необходимо учитывать точность, с которой можно получить значения искомых величин, и точность, с которой необходимо знать эти значения. В настоящее время разработаны правила вычислений с приближенными числами, применение которых облегчает решение различных задач, дает возможность выбирать соответствующие по точности средства вычислительной техники и рационально использовать их. Применение правил действий с приближенными числами экономит труд и время и повышает культуру вычислений.

I.3.5. Связь погрешностей приближенных чисел с верными значащими цифрами

Относительную погрешность выражают обычно аликвотной дробью (дробь, у которой числитель равен единице) и записывают

$$\varepsilon = \frac{1}{\left|\frac{a}{\Delta}\right|}.$$

Знаменатель a/Δ выражают приближенно целым числом, где a — приближенное значение числа, а Δ — погрешность его.

Чем меньше относительная погрешность, тем с большей точностью известен результат, поэтому в большинстве случаев критерием точности служит относительная погрешность. При помощи относительной погрешности обычно оценивается точность измерения линий, площадей, объемов; точность же углов оценивают при помощи абсолютной погрешности, так как погрешность измерения угла не зависит от величины самого угла.

В тех случаях, когда абсолютная погрешность неизвестна, а известно лишь ее предельное значение, вычисляют для характеристики точности результата предельную относительную погрешность как отношение предельной абсолютной погрешности к приближенному значению данной величины. Если, например, приближенные (округленные) числа 0,10 и 1,00 даны каждое с предельной абсолютной погрешностью в 0,005, то они имеют следующие предельные относительные погрешности:

$$\frac{0{,}005}{0{,}10} = \frac{0{,}5}{10} \text{ или } 5\%; \quad \frac{0{,}005}{1{,}00} = \frac{0{,}5}{100} \text{ или } 0{,}5\%.$$

Относительно точнее то число, которое больше, если его прочитать без запятой. Так, например, округленное число 6485,4 относительно точнее округленного числа 0,00065 в 1000 раз.

Величина относительной погрешности связана с количеством значащих цифр, заслуживающих доверия.

Значащими цифрами приближенного числа являются все цифры его, начиная слева от первой отличной от нуля и направо до цифры, имеющей погрешность не больше единицы. Например, следующие округленные числа имеют такое количество значащих цифр и относительные предельные погрешности:

320,02 ... 5 значащих цифр, 1 : 64 000

0,00320 ... 3 » » 1 : 640

Относительная погрешность однозначно определяет количество значащих цифр приближенного числа. Чем меньше значащих цифр, тем больше относительная погрешность.

Нуль, стоящий в конце числа, может иметь двоякий смысл. Так, в следующих двух записях цифра нуль имеет разный смысл:

а) 1 га = 10 000 м^2;

б) на земном шаре в настоящее время живет 3 680 000 000 чел.

В первом случае мы имеем точное соотношение, и нули здесь являются значащими цифрами. Во втором случае нули поставлены взамен неизвестных цифр, и число имеет только три значащие цифры.

Во избежание путаницы не следует писать нули вместо неизвестных цифр; лучше употреблять словесное название или степень десяти (3,68 миллиарда или 3,68 · 10^9).

Для приближенной оценки точности округленных чисел пользуются способом подсчета числа верных значащих цифр, который позволяет оценить точность приближенных чисел по самому их начертанию.

Если абсолютное значение погрешности приближенного числа больше единицы последнего знака, но меньше 10 единиц, то говорят, что все цифры данного числа верны, кроме последней, которую называют сомнительной.

При вычислении промежуточных значений необходимо сохранять одну или две, а иногда и больше запасных цифр, в зависимости от сложности вычислений.

Запасные цифры доверия не заслуживают и, чтобы не смешивать их с надежными цифрами, их обычно пишут в уменьшенном размере или отделяют от верных запятой.

Существуют разные способы оценки точности результатов вычислений. Их можно разделить на строгие и приближенные. Приближенные способы практически не требуют никаких затрат времени на их применение. Приближенные способы основаны на подсчете десятичных знаков (при сложении и вычитании) и значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень и извлечении корня).

I.3.6. Точность суммы и разности округленных чисел

Если дана сумма приближенных значений

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

то предельная погрешность суммы может быть представлена выражением

$$|\Delta S|_{\text{пр}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|,$$

где Δx_i — погрешности слагаемых.

Очевидно, что предельная погрешность суммы не может быть меньше предельной абсолютной погрешности слагаемого, имеющего наименьшее количество десятичных знаков. Поэтому в сумме нет смысла сохранять больше десятичных знаков, чем их имеется в слагаемом с наименьшим количеством десятичных знаков.

При вычитании приближенных чисел, когда вычитаемое близко по величине к уменьшаемому, исчезают значащие цифры слева, что вызывает резкое увеличение относительной ошибки разности. Поэтому, чтобы результат имел заданную точность, близкие по значению уменьшаемое и вычитаемое необходимо брать с большим количеством значащих цифр или применять другие формулы.

Исчезновение значащих цифр слева встречается при решении систем нормальных уравнений, при вычислении координат точек, определяемых засечками (угловыми и линейными), и при решении некоторых других геодезических задач.

I.3.7. Точность произведения, частного, степени и корня

При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное число с наименьшим количеством значащих цифр. В промежуточных результатах следует сохранять 1—2 запасных знака.

Пример. Пусть требуется вычислить

$$q = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{8{,}042 \cdot 20{,}066}{0{,}102} = 1581{,}593.$$

В данном примере все приближенные числа (a, b, c) даны с тремя десятичными знаками и с разным количеством значащих цифр. Наименьшее количество (три) значащих цифр имеет число c, поэтому в результате (в числе q) значащих цифр будет не больше трех.

В этом можно убедиться, изменив грубейший компонент (число c) на величину предельной погрешности округления и вновь вычислив число:

$$q = \frac{8{,}042 \cdot 20{,}060}{0{,}1025} = 1573{,}873.$$

Сопоставляя первое и второе значения q, видим, что результат действительно имеет только три верные цифры, так как он ошибочен примерно на 8 целых единиц.

Относительная предельная погрешность произведения и частного равна сумме предельных относительных погрешностей компонентов.

Для приведенного примера имеем

$$\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\text{пр}} = \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\frac{\Delta c}{c}\right| = \frac{0{,}5}{8042} + \frac{0{,}5}{20\,066} + \frac{0{,}5}{102} \approx \frac{1}{200}.$$

Абсолютную предельную погрешность вычисляют по формуле

$$(\Delta q)_{\text{пр}} = q\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\text{пр}}.$$

Для нашего примера получим

$$(\Delta q)_{\text{пр}} = \frac{1582}{200} \approx 7{,}9,$$

что приближенно равно разности найденных значений q

$$(\Delta q)_{\text{пр}} = 1581{,}6 - 1573{,}9 = 7{,}7.$$

При делении и умножении приближенного числа на точное (или условно точное), а также точного числа на приближенное в результате получится значащих цифр не больше, чем их имеется в приближенном числе.

При возведении в квадрат в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число.

Пример. $p = d^2 = 21{,}04^2 = 442{,}6816$.

Результат следует записать так: $p = 442{,}7$, поскольку остальные цифры числа неверны, а следовательно, их нельзя считать значащими. В данном примере сомнительны (ошибочны на несколько единиц) уже десятые доли, однако сомнительные цифры следует оставлять в результате, особенно если он промежуточный.

Относительная погрешность степени равна показателю степени, умноженному на относительную погрешность основания.

Для нашего примера имеем

$$\frac{\Delta p}{p} = 2\frac{\Delta d}{d} = 2\frac{0{,}5}{2104} \approx \frac{1}{2100};$$

$$\Delta p = \frac{443}{2100} = 0{,}21.$$

При извлечении квадратного корня в подкоренном числе необходимо брать столько значащих цифр, сколько их требуется получить в значении корня.

Пример. Найти $b = \sqrt{B} = \sqrt{3462{,}193081}$ с шестью значащими цифрами.

Округляя подкоренное выражение до шести значащих цифр, найдем $b = \sqrt{3462{,}19} = 58{,}8404$ с погрешностью, не превышающей 0,00005.

Относительная погрешность корня из приближенного числа уменьшается пропорционально показателю n корня, если $n > 1$.

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{n}\frac{\Delta B}{B}.$$

Для нашего примера имеем

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{2}\frac{0{,}5}{346\,219} \approx \frac{1}{1\,380\,000},$$

$$\Delta b = \frac{58{,}8}{1\,380\,000} = 0{,}000042.$$

I.3.8. Точность функции общего вида

Рассмотрим сначала функцию с одним аргументом

$$y = f(x). \qquad (I.3.1)$$

Дифференцируя функцию (I.3.1) и заменяя дифференциалы погрешностями, напишем

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x. \qquad (I.3.2)$$

Разделив (I.3.2) на (I.3.1), получим относительную погрешность функции

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x. \qquad (I.3.3)$$

Формулу (I.3.3) можно получить путем дифференцирования натурального логарифма функции (I.3.1).

Пример. Вычислить площадь круга и определить абсолютную и относительную погрешность площади его, если радиус круга $r = 10{,}0 \pm 0{,}05$ м. Число π будет считаться точным, поскольку в настоящее время оно известно с 2000 знаками.

Дифференцируя функцию

$$P = \pi r^2,$$

получим

$$\Delta P = \pi\, 2r\Delta r; \quad P = 3{,}142 \cdot 10{,}0^2 = 314 \text{ м}^2;$$

$$\Delta P = 3{,}14 \cdot 2 \cdot 10{,}0 \cdot 0{,}05 = 3{,}1 \text{ м}^2.$$

Относительная погрешность равна

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{3{,}1}{314} = \frac{1}{100}.$$

Относительную погрешность площади можно определить также путем дифференцирования выражения

$$\ln P = \ln \pi + 2 \ln r.$$

Имеем

$$\frac{\Delta P}{P} = 0 + 2\frac{\Delta r}{r} = 2\frac{0{,}5}{100} = \frac{1}{100}.$$

Пример. Определить, по какой из указанных ниже тригонометрических функций можно более точно найти угол, если

$$u_1 = \sin\alpha = 0{,}00757,$$
$$u_2 = \cos\alpha = 0{,}99997,$$
$$u_3 = \operatorname{tg}\alpha = 0{,}00759,$$
$$u_4 = \operatorname{ctg}\alpha = 132{,}2.$$

Дифференцируя каждую из этих функций и полагая $\Delta u_i = 0{,}5$ единицы последнего знака, легко определить погрешности углов $\Delta\alpha_i$, вызываемые погрешностями функций.

Для первой функции имеем

$$\Delta u_1 = \Delta \sin\alpha = \cos\alpha \frac{\Delta\alpha''}{\rho''} = 0{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

Отсюда

$$\Delta\alpha_1'' = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 2{,}06 \cdot 10^5}{\cos\alpha} = \pm 1{,}0''.$$

Аналогично находим

$$\Delta\alpha_2'' = \pm 131''; \quad \Delta\alpha_3'' = \pm 1{,}0''; \quad \Delta\alpha_4 = \pm 0{,}58''.$$

Таким образом, наиболее точно угол будет определен по $\operatorname{ctg}\alpha$, хотя его значение дано с одним десятичным знаком и с четырьмя значащими цифрами. Наиболее грубо (с погрешностью, равной $\pm 2{,}2'$) угол будет определен по $\cos\alpha$, значение которого имеет пять десятичных знаков и пять значащих цифр. Здесь правило значащих цифр не действует. При использовании таблиц натуральных значений тригонометрических функций более точно угол будет определен по той тригонометрической функции, которая быстрее изменяется в окрестности данного угла.

Если функция зависит от нескольких независимых аргументов

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

то предельную абсолютную погрешность ее можно выразить формулой

$$(\Delta y)_{\text{пр}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|,$$

где Δx_i — предельные погрешности аргументов.

Вычисленная по формуле погрешность при значительном числе аргументов будет сильно преувеличена, поэтому при $n \geqslant 3$ за предельную погрешность функции общего вида обычно берут утроенную среднюю квадратическую погрешность, которую вычисляют по формуле

$$(\Delta y)_{\text{пр}} = 3m_y = 3\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} m_{x_i} \right)^2}.$$

Иногда требуется определить погрешности нескольких аргументов по заданной погрешности функции. Такая задача называется обратной задачей теории погрешностей. Здесь получается одно уравнение и несколько неизвестных погрешностей аргументов, поэтому без дополнительных условий задачу решить нельзя. За дополнительные условия часто берут принцип равных влияний, полагая, что все частные дифференциалы $\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$ одинаково влияют на относительную или абсолютную погрешность функции, т. е. полагают

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right| = \ldots = \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right|.$$

В. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИЕМЫ И МЕТОДЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ

I.3.9. Выбор средств и приемов вычислений

Средства и приемы вычислений выбирают с учетом точности исходных данных и надобности получения результатов в кратчайший срок с необходимой и достаточной точностью. Если вычисления ведутся от случая к случаю и требуется небольшая точность результатов вычислений (2—3 значащие цифры), то в этих случаях следует применять логарифмические линейки (в том числе и специальные), которые при использовании рациональных приемов дают возможность получать ответы с быстротой, с какой числа записываются на бумаге.

При вычислении на логарифмической линейке надо стремиться сводить к минимуму передвижение движка, а при вычислении на арифмометре вращение рукоятки должно быть минимальным. Так, например, при вычислении процентов следует пользоваться формулой

$$X_i\% = \frac{100}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\, a_i = k a_i.$$

При вычислении на линейке коэффициент k не записывается и не читается и все проценты вычисляются при одном или при двух положениях движка. При вычислении на арифмометре коэффициент k вычисляется с необходимым и достаточным количеством значащих цифр, а значения $X_i\%$ находят, пользуясь приемом доумножения, без гашения счетчиков.

Если проводятся вычисления по одним и тем же формулам и результаты требуется знать с 2—3 значащими цифрами, то выгодно использовать номограммы, особенно в полевых условиях*.

При значительных объемах вычислений, но не превышающих одного технико-месяца, выгодным средством вычислений являются

* См. Е. Г. Ларченко. Механизация вычислительных работ. М., Геодезиздат, 1956.

клавишные вычислительные машины (особенно ЭКВМ) и различные таблицы с достаточным, но не излишним количеством знаков.

Весьма важное значение имеет рациональный порядок расположения отдельных действий, обеспечивающий четкость вычислений. Для четкости и быстроты вычисления ведут по определенной схеме, в которой каждое входящее в вычисление число записывается на заранее отведенном для него месте. При массовых вычислениях схемы заранее размножаются на листах бумаги определенного размера и на них приводится формула, в соответствии с которой составлена схема. Такие листы называют бланками или формулярами. Схема составляется с учетом рациональной организации вычислений и облегчения их контроля и рассчитана на применение определенных средств вычислений. Использование хорошо составленной схемы способствует механизации вычислительной работы, сводя ее к элементарным однообразным операциям.

Всегда надлежит помнить, что без проверки результат вычисления непадежен. Пока проверка не произведена, вычисление нельзя считать законченным. Любое действие можно проверить, повторяя его, но так как простое повторение мало надежно, то повторные вычисления следует проверять по контрольным формулам или выполнять каким-либо другим способом. Например, контрольное сложение нескольких чисел на счетах следует делать не сверху вниз, а снизу вверх.

1.3.10. Рациональные приемы вычислений на арифмометре

Наибольшую производительность труда при работе на арифмометре обеспечивают однотипные приемы вычислений, требующие минимального количества установок и гашения чисел, а также минимального количества поворотов рукоятки.

При умножении нескольких чисел на одно и то же число нужно это число считать за множимое, установить его на барабане и умножать на все данные множители. При этом нет надобности гасить сомножители и результаты, а лучше вращением рукоятки по ходу и против хода часовой стрелки подбирать на счетчике оборотов новые множители и получать на счетчике результатов новые произведения, т. е. использовать прием доумножения.

Деление на одно и то же число целесообразно заменять умножением на величину, обратную делителю, если деление повторяется более трех раз (этот прием можно рекомендовать, например, при решении систем линейных уравнений), при этом полезно пользоваться таблицей обратных величин.

Необходимо отметить, что при вычислении на арифмометре на запись затрачивается около 30% времени, потребного на умножение, и около 20%, требуемого на деление двух чисел. Кроме того, промежуточные записи и повторные установки являются дополнительными источниками ошибок. Поэтому надо стремиться вычислять без записи промежуточных результатов и без повторных установок чисел.

При извлечении квадратного корня на арифмометре удобно пользоваться приближенной формулой

$$\sqrt{B} = \frac{B}{b} 0{,}5 + 0{,}5b = b_1,$$

где b — приближенное значение корня, взятое на логарифмической линейке или найденное каким-нибудь другим путем с 3—4 значащими цифрами. Если значение b взять с тремя значащими цифрами, то b_1 получится с шестью, а если b взять с четырьмя значащими цифрами, то b_1 получится с восемью значащими цифрами. Порядок действий рассмотрим на следующем примере.

Пусть требуется определить

$$\sqrt{B}=\sqrt{206\,493{,}5114}$$ с шестью значащими цифрами.

Округляя подкоренное выражение до шести значащих цифр и взяв на линейке $b = 454$, найдем

$$\sqrt{B}=\sqrt{206\,494}=\frac{206\,494}{454}0{,}5+0{,}5\cdot 454=454{,}416.$$

При этом вычисление надо вести без промежуточных записей, придерживаясь следующего порядка:

1) значение B разделить на значение b, получив на счетчике оборотов шесть значащих цифр;

2) погасить счетчик результатов (сбросить остаток) и на барабане установить число 0,5;

3) вращением рукоятки арифмометра показания счетчика оборотов свести к нулю, тогда на счетчике результатов появится число $B/b\cdot 0{,}5$;

4) не гася счетчика результатов, умножить 0,5 на значение b и на счетчике результатов прочитать значение корня $b_1 = 454{,}416$ с шестью верными значащими цифрами.

Выражение $\sqrt{\frac{a\cdot b\cdot c}{d}}$ вычисляют следующим образом. Произведение $a \cdot b$ получают обычным путем на счетчике результатов, после чего гасят счетчик оборотов и на рычаги устанавливают число d. Имеющееся на счетчике результатов произведения $a \cdot b$ делят на d и на счетчике оборотов получают $(a \cdot b)/d$. После этого, не гася счетчиков оборотов, на рычаги устанавливают число c и вращают рукоятку в положительную сторону до тех пор, пока не исчезнет число, стоящее на счетчике оборотов, тогда на счетчике результатов получится выражение $(a \cdot b \cdot c)/d$, из которого извлекают квадратный корень по способу, изложенному выше.

Рассмотрим еще пример вычисления на арифмометре общей арифметической средины по формуле

$$x=\frac{a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_np_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}.$$

Перед выполнением действий в низшем разряде на крайнем правом рычаге устанавливают единицу, в высших разрядах устанавливают числа a_i так, чтобы высшие разряды суммы произведений не вышли за пределы счетчика результатов, на котором в высших разрядах получится $\sum_{i=1}^{n} a_ip_i$, а в низших разрядах $\sum_{i=1}^{n} p_i$. Деление производят обычным путем (методом последовательного вычитания

делителя из делимого). Сумму $\sum_{i=1}^{n} p_i$ можно снять со счетчика результатов, установив ее на рычагах и повернув рукоятку один раз в обратном направлении; попутно этим будет проконтролирована установка $\sum_{i=1}^{n} p_i$ на рычагах арифмометра. При больших значениях a_i арифметическую средину следует вычислять по формуле

$$x = a_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

где

$$\varepsilon_i = a_i - a_0.$$

Без записи промежуточных данных на арифмометре можно вычислять ряд других выражений.

К числу эффективных средств, которые широко используются при вычислении на арифмометрах и различных клавишных машинах, относятся различного рода таблицы.

I.3.11. Выбор и использование таблиц при вычислениях

Инженеру-геодезисту приходится пользоваться различными таблицами, составляемыми для определенных функций.

Таблицы обычно делят на общие и специальные. Общими таблицами являются, например, таблицы логарифмов чисел, таблицы умножения и деления, таблицы квадратных корней и т. п. Примером специальных таблиц могут служить таблицы превышений, таблицы приращений координат, таблицы размеров рамок планшетов и т. д.

Таблицы разделяют по системе расположения материала. Материал таблиц располагают по определенному закону так, чтобы они были компактны, удобны и по ним можно было быстро находить нужные величины. По системе расположения материала различают таблицы с одним, двумя, тремя входами и т. д. Число входов связано обычно с числом аргументов функции, для которой составлены таблицы.

Таблицы составляются с разным числом знаков. Например, при геодезических вычислениях применяются таблицы логарифмов, имеющие от четырех до восьми знаков. Таблицы натуральных значений тригонометрических функций при тех же вычислениях применяются от четырехзначных до десятизначных. Не безразлично, с каким числом знаков употреблять таблицы для тех или иных вычислений. Можно выбрать таблицы с недостаточным числом знаков, и тогда не получим требуемой точности в результате вычислений, если даже будем оперировать с точными числами. Если возьмем таблицы с бо́льшим числом знаков, чем требуется, то затратим много времени на вычисления, значительно понизим производительность вычислительного труда. При всех вычислениях

необходимо выбирать таблицы с необходимым и достаточным числом знаков в зависимости от точности исходных данных и требуемой точности результатов вычислений.

В настоящее время, в связи с применением различных вычислительных машин, особое значение имеют таблицы натуральных значений тригонометрических и других функций, хотя уже сконструированы настольные машины, на которых натуральные значения тригонометрических функций определяются за доли секунды (см. 1.3.15).

Основным достоинством всяких таблиц является удобство их использования и отсутствие в них ошибок (опечаток).

При составлении, контроле и употреблении таблиц используют конечные разности. Напишем функцию

$$y = f(x),$$

значение которой определено для ряда равностоящих значений аргументов

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad x_3 = a + 3h \text{ и т. д.}$$

Если независимой переменной x давать конечное приращение h, функция получит приращение, равное

$$\Delta' y_x = y_{x+h} - y_x.$$

Эта разность называется конечной разностью первого порядка функции y, или первой разностью. Вторые разности, или разности второго порядка, составляются из первых разностей

$$\Delta'' y_x = \Delta' y_{x+h} - \Delta' y_x.$$

Третьи разности составляются из вторых разностей

$$\Delta''' y_x = \Delta'' y_{x+h} - \Delta'' y_x \text{ и т. д.}$$

Табличные разности обычно записывают целыми числами в единицах младшего разряда значений функции, данных в таблицах.

О правильности таблиц можно судить по постоянству конечных разностей.

Если для целых рациональных функций конечные разности — постоянные величины, то для трансцендентных функций этого не будет. Однако и для этих функций конечные разности достаточно высокого порядка близки к постоянным и ими можно пользоваться при составлении и контроле таблиц.

При использовании таблиц приходится применять различные интерполяционные формулы. Если вторые разности $|\Delta'' y_0| < 4$ единиц последнего знака, то ими и последующими разностями можно пренебречь и пользоваться линейным (пропорциональным) интерполированием. Если $|\Delta'' y_0| \geqslant 4$ единиц, а $|\Delta''' y| < 7$ еди-

ниц последнего знака, то без потери точности можно допускать интерполирование по формуле

$$y = y_0 + t \cdot \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2} \Delta^2 y_0.$$

При этом значение t определяется по формуле

$$t = \frac{x - x_0}{h},$$

где x_0 — табличное значение аргумента, соответствующее табличному значению функции y_0; x — заданное значение аргумента, соответствующее искомому значению функции y; h — шаг таблиц.

Г. КЛАВИШНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ (КВМ) И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

I.3.12. Основные принципы устройства и развития КВМ

КВМ — это машины с ручным вводом исходных данных и ручным управлением работой на них путем нажатия на соответствующие клавиши. Сконструировано и применяется много различных КВМ: суммирующих, табличных, вычислительных и др.

На вычислительных табличных машинах можно записывать не только числа, но и буквенный текст. Эти машины имеют довольно сложные устройства, приспособленные для составления различных ведомостей и получения итогов как по строчкам, так и по столбцам ведомости.

Для инженерных и экономических расчетов наибольшее распространение получили клавишные вычислительные машины: электромеханические, релейные и электронные.

Имеются электромеханические машины полуавтоматические и автоматические. Полуавтоматические машины (например, ВМП-2) — это такие, при работе которых передвижение каретки по разряда в разряд и управление ходами машины осуществляется вручную. Операция деления на полуавтоматических машинах выполняется автоматически.

Автоматическими клавишными машинами (ВМА-2, САР, САРС, «Целлатрон» и др.) называют машины, автоматически выполняющие умножение и деление чисел. На всех КВМ типа «Целлатрон» удобно вычислять без промежуточных записей выражения вида

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i / c_i).$$

Полуавтоматические и автоматические электромеханические машины конструируются на принципах: однеровского колеса, ступенчатых валиков и пропорционального рычага *.

---

* См., например, Е. Г. Ларченко. «Механизация вычислительных работ». М., Геодезиздат, 1956, стр. 149—154.

Большую степень автоматизации вычислительного процесса имеют релейные клавишные машины («Вятка», «Вильнюс» и др.), они отличаются от электромеханических машин не только принципами конструкции, но и своими эксплуатационными данными.

В последние годы у нас и во многих других странах стали выпускать электронные клавишные вычислительные машины (ЭКВМ), которые обладают высокой надежностью и бесшумно за доли секунд выполняют арифметические и некоторые логические операции.

Широкое применение при инженерных и экономических расчетах нашли ЭКВМ «Вега», «Искра-12», «Искра-1122», «Элка-22», «Зоемтрон-220» и др.

Некоторые из ЭКВМ заменяются новыми, более совершенными полупроводниковыми машинами, имеющими 4—6 регистров и более, что дает возможность почти все расчеты в наших специальностях производить без промежуточных записей.

Регистр — это n-разрядное устройство запоминания и хранения чисел. В разных ЭКВМ количество разрядов в регистрах бывает разным: от 6 до 16 и более. В последнее время стали выпускать ЭКВМ на интегральных схемах, что позволило уменьшить общий вес до 1,5 кг и размеры машин до $4 \times 7 \times 25$ см и увеличить их надежность в работе.

Для повышения производительности труда необходимо стремиться выполнять вычисления без промежуточных записей, так как это одновременно уменьшает промахи, которые появляются при частом списывании чисел со счетчиков, а также сильно уменьшает влияние погрешностей вычислений на окончательный результат, что особенно важно при вычислении по сложным формулам.

I.3.13. Электронная клавишная вычислительная машина «Искра-12М»

Машина сконструирована на интегральных схемах, имеет 4 оперативных регистра и 2 регистра памяти. На цифровом индикаторе высвечиваются числа до 16 разрядов, высвечивается знак числа, номер индицируемого регистра и знак переполнения регистра. Машина автоматически бесшумно выполняет все арифметические операции и извлечение квадратного корня. На ней удобно производить без промежуточных записей различные геодезические вычисления, с учетом знаков чисел и места запятой в них.

Перед началом вычислений машину необходимо привести в рабочее состояние. Предварительно надо проверить, установлен ли предохранитель сети на требуемое напряжение. Затем, после включения шнура в сеть, тумблер выключателя поставить в положение «ВКЛ» и по истечении 3 минут нажать на клавишу «С» (клавиша *17* на рис. I.3.2). Если во всех разрядах индикатора загорятся нули, то машина готова к работе.

При появлении на индикаторе знака переполнения (рис. I.3.3) для приведения машины в рабочее состояние необходимо нажать клавишу сброса регистра клавиатуры «СК» (клавиша *1* на рис. 1.3.2).

При вводе числа нажимаются требуемые клавиши цифровой клавиатуры *11* и клавиша запятой *21*. Число каждый раз высвечивается на индикаторе.

Для установки необходимого количества десятичных знаков в числах служит вращающийся диск *5* с индексами 0, 2, 4, 6, 8, 10, с помощью которого переключается положение запятой. Учитывая количество значащих цифр, имеющихся в исходных данных, и количество требуемых значащих цифр в результате, можно приближенно

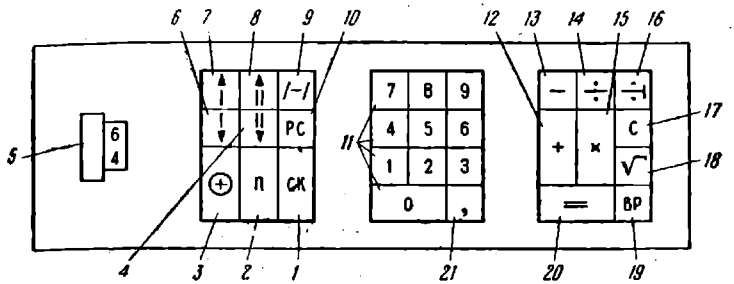


Рис. I.3.2. Клавиатура ЭКВМ «Искра-12М»

1 — клавиша сброса регистра клавиатуры; *2* — клавиша умножения на постоянную; *3* — клавиша накопления результатов; *4* — клавиша вызова числа из регистра два; *5* — переключатель установки запятой; *6* — клавиша вызова числа из регистра один; *7* — клавиша засылки числа в регистр один; *8* — клавиша засылки числа в регистр два; *9* — клавиша перемены знака числа в регистре клавиатуры; *10* — клавиша разрядного сброса (сдвиг числа вправо); *11* — десятичная клавиатура; *12* — клавиша сложения; *13* — клавиша вычитания; *14* — клавиша деления; *15* — клавиша умножения; *16* — клавиша обратного деления; *17* — клавиша общего сброса; *18* — клавиша извлечения квадратного корня; *19* — клавиша вызова содержимого регистров; *20* — клавиша вызова результата на индикатор; *21* — клавиша установки запятой

сообразить, на сколько знаков надо установить переключатель запятой.

Примеры вычислений на ЭКВМ «Искра-12М» показаны в табл. I.3.1.

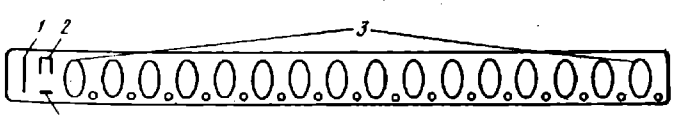


Рис. I.3.3. Цифровой индикатор ЭКВМ «Искра-12М»

1 — номер регистра; *2* — знак переполнения; *3* — десятичные разряды; *4* — знак числа

При выполнении операций каждый раз сначала необходимо переключатель установки запятой (см. рис. I.3.2) установить в требуемое положение, а затем уже нажимать цифровые и операционные клавиши.

Таблица I.3.1

Операции	Примеры	Порядок набора чисел и нажатия операционных клавиш	Результаты на индикаторе
Сложение и вычитание	Переключатель запятой в положении 2. 45,4—8,34+46,3	45,4 [−] 8,34 [+] 46,3 [=]	83,36
Умножение	Переключатель запятой в положении 2. −4,352 · 1,411 · 26,16	4,352 [+/−] [×] 1,411 [×] 26,16 [=]	−160,63
Деление	Переключатель запятой в положении 6. $\frac{434,564}{0,863465 \cdot 132,4648}$	434,564 [÷] 0,863465 [÷] 132,4648 [=]	3,799343
Обратное деление	Переключатель запятой в положении 4. $\frac{463,45}{12,382 \cdot 9,442 + 14,206}$	12,382 [×] 9,442 [+] 14,206 [=] [÷] 463,45 [=]	3,5346
Умножение на постоянный множитель	Переключатель запятой в положении 4. 0,61591 · 614,16 0,78781 · 614,16	614,16 [▲ ‖] 0,61591 [Π] 0,78781 [Π]	378,2672 483,8413
Возведение в степень	Переключатель запятой в положении 2. $4,18^3$	4,18 [×] [×] [=]	73,03
Извлечение квадратного корня	Переключатель запятой в положении 4. $\sqrt{31383,7}$	31 383,7 [√]	177,1544

I.3.14. Электронная клавишная вычислительная машина «Искра-1122»

ЭКВМ «Искра-1122» сконструирована на интегральных схемах с индикацией чисел на экране электронно-лучевой трубки. Машина оперирует с 12-разрядными десятичными числами и производит все арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление, обратное деление) с учетом знаков и положения запятой за доли секунды. Накопление результатов вычислений можно производить в трех регистрах памяти: *A1*, *A2* и *A3*.

Автоматическое накопление чисел (операндов) и результатов при выполнении арифметических действий осуществляется, если нажаты клавиши «$\sum$ 1», «$\sum$ 2», «$\sum$ 3».

Рассмотрим способ автоматического накопления на примере вычисления общей арифметической середины.

$$X=\frac{\sum a_i p_i}{\sum p_i}=\frac{6{,}4\times 2{,}1+6{,}8\times 1{,}7+4{,}3\times 0{,}9}{2{,}1+1{,}7+0{,}9}=\frac{28{,}87}{4{,}70}=6{,}14.$$

Для накопления значений $\sum p_i$ и $\sum a_i p_i$ необходимо нажать клавиши «$\sum$ 2» и «$\sum$ 3». Тогда в регистре *A2* накопится $\sum p_i = 4{,}70$, а в регистре *A3* накопится $\sum a_i p_i = 28{,}87$. Значение X можно получить так.

Нажать на клавиши «$\sum$ 2» и «$\sum$ 3» (выключить устройства накопления регистра памяти). Погасить число, находящееся в регистре клавиатуры (нажать клавишу «*C*», от чего погасятся все три операционные регистры *РК*, *РС*, *РВ*). Нажатием на клавишу *A3* передать число 28,87 в регистр клавиатуры.

Нажать клавишу деления ($\div$). Нажать клавишу «*A2*» (передать число 4,70 в регистр клавиатуры) и затем нажать на клавишу «=». После этого на экране ЭЛТ в четырех его строках появятся числа: 0; 4,70; 28,87; 6,14.

I.3.15. Электронные клавишные вычислительные машины «Электроника-70» и «Электроника-70М»

На этих ЭКВМ (рис. I.3.4) можно производить вычисления как вручную, так и с помощью программ.

Числа и знаки, вводимые путем нажатия соответствующих клавиш, и результаты вычислений индицируются на экране электронно-лучевой трубки (ЭЛТ). Важное преимущество этих машин по сравнению с другими ЭКВМ заключается в том, что на них можно выполнять вычисления как с плавающей, так и с фиксированной запятой. Все вычисления производятся с плавающей запятой для 12-разрядных чисел, а на экране ЭЛТ индицируются числа, имеющие до десяти значащих цифр в мантиссе и два разряда порядка. Каждой клавише (кроме «шаг прогр» и «ПП») соответствует цифровой код в восьмеричной системе (от 00 до 76), который служит для контроля ввода программы.

В табл. I.3.2 показаны операции, которые выполняются машиной при одном нажатии соответствующей клавиши.

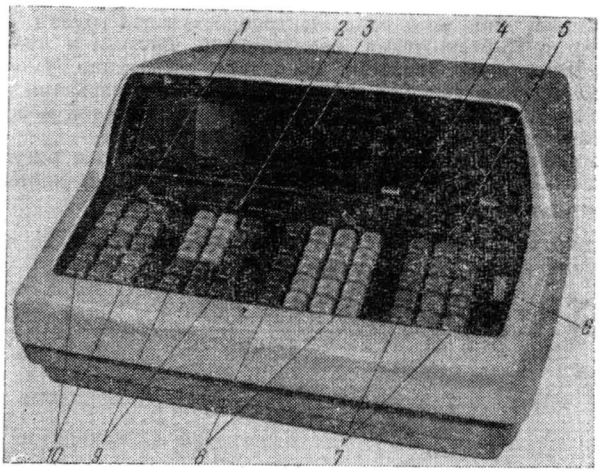


Рис. I.3.4. ЭКВМ «Электроника-70М»

1 — переключатель «градусы — радианы»; *2* — переключатель «плавающая — фиксированная запятая»; *3* — электроннолучевая трубка; *4* — устройство записи считывания с магнитных карт; *5* — переключатель «программирование — вычисление»; *6* — переключатель установки числа знаков после запятой; *7* — клавиши управления; *8* — клавиши арифметических операций и ввода данных; *9* — клавиши обмена и передачи информации между регистрами; *10* — функциональные клавиши

Таблица I.3.2

Номера операций	Наименование операций	Время выполнения (сек)
1	Сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение квадратного корня	0,02—0,04
2	Вычисление логарифмов (десятичных и натуральных) и показательной функции	0,05—0,15
3	Вычисление значений синусов, косинусов и тангенсов углов, а также обратных тригонометрических функций в радианах	0,3
4	Преобразование координат (вычисление прямоугольных координат по полярным и наоборот)	0,3

На ЭКВМ «Электроника-70» и «Электроника-70М» удобно находить логарифмы чисел, вычислять значения тригонометрических функций, производить преобразования полярных координат в прямоугольные и наоборот, а значит, удобно и эффективно решать массовые геодезические задачи. Например, на решение задачи Потенота по программе затрачивается около одной минуты, с вводом в машину координат и углов.

Программирование для этих машин производится упрощенным способом. Для составления программы необходимо знать назначение каждой клавиши и программу составлять по возможности с наименьшим количеством шагов (команд), учитывая ограниченный объем памяти ОЗУ (196 и 392 шага). Назначение каждой клавиши описывается в инструкции по эксплуатации машин. При записи программы указывается шаг, название клавиши и восьмеричный код клавиши.

Программа записывается на магнитную карту размером 5 × × 9 см и может быть использована любое число раз. Перед записью программы на магнитную карту необходимо ее проверить по шагам при помощи клавиши «шаг программирования». Из записанных программ на магнитные карты составляется библиотека программ. Кроме того, вместе с машиной поставляется библиотека программ, включающая более 100 программ для решения задач по различных областей науки и техники, некоторые из них можно использовать и в геодезии. Для решения той или иной задачи магнитная карта, на которой записана программа задачи, вставляется в считывающее устройство машины, и программа за несколько секунд записывается в регистры машины. После этого по данной программе можно решать любое число задач.

Машины «Электроника-70» и «Электроника-70М» могут быть использованы для решения разнообразных и сложных инженерных задач. Эти машины имеют ряд периферийных устройств, непосредственно стыкующихся с ЭКВМ — двухкоординатный графопостроитель, электростатическое цифропечатающее устройство и оптический считыватель с бумажных карт, на которые наносится программа с помощью карандашных меток.

Кроме того, имеется внешнее запоминающее устройство «Электроника-72», которое составляют 248 доступных оператору регистров для хранения до 248 числовых данных и до 3472 шагов программы.

К ЭКВМ со специальным буферным блоком одновременно можно подключать другие внешние устройства (перфоратор, считыватель с перфоленты, цифропечатающее устройство и др.).

I.3.16. Основные характеристики некоторых электронных клавишных вычислительных машин

ЭКВМ конструируются на различных принципах и основах, в том числе и на базе интегральных схем. Многие ЭКВМ могут работать не только от сети переменного тока и от 12-вольтной автомобильной батареи, но и от вмонтируемых в машину периодически заряжаемых батарей. Уже сконструированы миниатюрные ЭКВМ и машины «карманного» типа весом в 0,5 кг и даже 0,15 кг.

Таблица I.3

№ по пор.	Название машины	Количество регистров		Разрядность чисел	Скорость выполнения отдельных операций (сек)				Потребляемая мощность (Вт)	
		операционных	памяти		±	×	÷	$\sqrt{}$		
1	Вега	2	1	20	0,06	0,60	1,0	5,0	30	2
2	ЭДВМ	2	2	16	0,05	0,60	1,0	3,0	25	2
3	Раса	3	1	12	1,0	1,5	1,8	—	60	2
4	Искра-11	3	1	15	0,1	0,3	0,3	—	60	2
5	Искра-12	4	2	16	0,03	0,5	0,5	1,5	60	2
6	Искра-22	3	2	27	0,03	0,5	0,7	—	100	3
7	Искра-111	3	1	12	0,05	0,2	0,3	—	30	1
8	ПКВМ-3	2	1	12	0,15	1	1	3	100	1
9	Орбита	2	2	15	0,07	0,2	0,2	—	40	1
10	Зоемтроп-220 (ГДР)	3	3	15	0,01	0,5	0,5	—	60	1
11	ЭЛКА-22 (НРБ)	2	1	12	0,1	0,5	0,5	—	30	8
12	Искра-12М	4	2	16	0,05	0,5	0,5	0,5	45	1
13	Искра-110	3	—	8	0,03	0,25	0,35	—	15	3,5
14	Искра-122	6	5	16	0,02	0,2	0,3	0,5	50	15
15	Искра-1122	3	3	12	0,03	0,3	0,3	—	30	12
16	Электроника-ДД	2	1	14	0,03	0,4	0,4	—	45	15
17	Электроника-С2	3	3	15	0,05	0,5	0,5	—	35	7,5
18	Электроника-155	2	1	12	0,05	0,3	0,3	—	40	8
19	Электроника-70М	3	32	12	0,00	0,02	0,02	0,04	75	18
20	Искра-123	3	5	16	0,02	0,10	0,10	0,2	40	15

Почти на всех ЭКВМ, кроме обычных арифметических операций, можно получать алгебраические суммы произведений, алгебраические суммы частных и производить (применяя рациональные приемы) многие инженерные и экономические расчеты без промежуточных записей.

Необходимо отметить, что современные ЭКВМ конструируются не только с плавающей, но и с фиксированной запятой. В последних часто происходит переполнение регистров — устройств запоминания и хранения чисел. Хотя в ЭКВМ регистры имеют 12—16, а иногда и более десятичных разрядов, при вычислении на некоторых из этих машин результаты могут получиться неправильными потому, что в конструкции таких машин точность результатов определяется не числом значащих цифр в компонентах, а количеством десятичных знаков, т. е. знаков после запятой.

В технических описаниях и инструкциях по эксплуатации ЭКВМ часто не учитывается, что только при сложении и вычитании точность характеризуется количеством десятичных знаков. При умножении, делении, возведении в степень и извлечении корня точность результата характеризуется не количеством десятичных знаков, а количеством значащих цифр, имеющихся в приближенных числах, входящих в вычисление.

При использовании ЭКВМ с плавающей запятой можно даже на машинах, имеющих регистры в 8 десятичных разрядов, производить геодезические расчеты с необходимой и достаточной точностью и значительно повысить производительность труда.

В табл. I.3.3 приведены технико-эксплуатационные характеристики ЭКВМ, нашедших наибольшее распространение в нашей стране. Отметим, что ЭКВМ «Искра-123» — машина с программным управлением, с максимальной длиной программы в 71 шаг. С 1974 года выпускается ЭДВМ-3П, имеющая большие возможности для геодезических вычислений.

Д. ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ (ЭВМ)

I.3.17. Структурная схема и принципы работы ЭВМ

Около четверти века тому назад начали впервые применять ламповые ЭВМ для решения отдельных небольших задач. После первых экспериментов ЭВМ стали стремительно развиваться. За короткий срок сменилось первое поколение машин (ламповые) и заменяется второе поколение (полупроводниковые машины) машинами третьего поколения, конструируемыми на базе интегральных схем. Ведутся работы по конструированию ЭВМ четвертого и пятого поколений с производительностью свыше 10—100 млн. операций в секунду.

В инженерных, экономических, плановых и во многих других расчетах в настоящее время широко применяются полупроводниковые ЭВМ типа «БЭСМ», «Минск», «Урал» и др. Начинают внедряться ЭВМ единой системы (ЕС), построенные на интегральных схемах.

Каждая ЭВМ состоит из большого количества элементов электронной автоматики, которые объединены в отдельные блоки, называемые устройствами. К основным устройствам относятся:

ПРУ — пульт ручного управления; Увв — устройство ввода информации (программы и исходных данных); ЗУ — запоминающее устройство; АУ — арифметическое устройство; УУ — устройство управления; Увыв — устройство вывода решения и некоторых данных.

Все эти устройства соединены между собой каналами связи (проводами) для передачи чисел в виде электрических сигналов

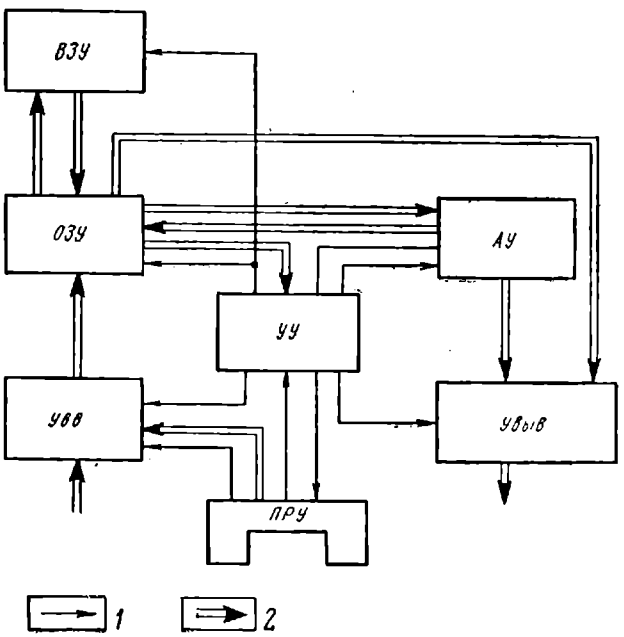


Рис. I.3.5. Блок-схема ЭВМ

1 — основные управляющие сигналы, передаваемые от одного устройства к другому; *2* — движение информации (чисел и команд)

из одного устройства в другие (рис. I.3.5). При этом каждое устройство выполняет определенную работу независимо от других частей машины.

Пульт ручного управления (ПРУ) служит для оперативного ручного управления машиной (пуск, остановка машины, ввод отдельных чисел, контроль за ходом вычислений).

Устройство ввода (Увв) служит для переноса в запоминающее устройство (ЗУ) программы решения задачи и исходных данных. Современные ЭВМ имеют различные устройства ввода, включающие ввод с перфокарт, перфолент, с ручной пишущей машинки и др.

Запоминающее устройство (ЗУ) предназначено для хранения исходной, промежуточной и результативной информации. Оно

состоит из нескольких отдельных устройств: а) быстродействующего, называемого оперативным (ОЗУ) или памятью машины; б) внешнего запоминающего устройства (ВЗУ), называемого накопителем (накопители на магнитных барабанах, на магнитных дисках, на магнитных лентах); в) долговременного запоминающего устройства (ДЗУ), в котором обычно записываются некоторые стандартные программы.

ОЗУ имеет емкость 2048, 4096, 8192, 16 384 чисел (слов), а иногда и бо́льшую. ОЗУ предназначено для приема, хранения и выдачи чисел и команд. Через ОЗУ проходит вся информация, поступающая в машину, и информация, идущая на вывод. Скорость работы ОЗУ выше скорости других устройств. ВЗУ имеет большую емкость, содержащую от нескольких сот тысяч до нескольких миллионов чисел.

Запоминающие устройства состоят из отдельных ячеек, каждой из которых присвоен свой номер, называемый адресом. В ячейку помещается обычно одно число с определенным количеством разрядов: от 30 до 50 двоичных знаков, что соответствует 6—10 десятичным знакам. Например, ЭЦВМ М-220, БЭСМ-4 и др. имеют ячейки по 45 двоичных разрядов и позволяют вводить и выводить 9-разрядные десятичные числа.

Содержание ячейки называется машинным словом, которое представляет собой некоторую закодированную информацию.

ВЗУ и ДЗУ связаны только с оперативной памятью (ОЗУ), и хранящаяся в них информация используется другими устройствами только через ОЗУ.

Арифметическое устройство (АУ) выполняет элементарные арифметические, логические и др. операции. АУ, как и другие устройства, выполняет операции в соответствии с командами, предусмотренными программой, для решения данной задачи.

Каждая команда изображается в виде некоторого условного числа, реализуемого электрическим сигналом. Команда состоит из адресов и кода операции, представляющего собой номер операции, которую машина должна выполнить. Последовательность команд является программой решения задачи. АУ вырабатывает управляющие сигналы, которые поступают в УУ. Обычно ОЗУ, АУ и УУ вместе называют процессором машины.

Устройство управления (УУ) обеспечивает автоматическое управление работой машины в процессе вычислений в соответствии с программой. Оно связано со всеми устройствами ЭВМ. УУ расшифровывает поступающие в него команды, вырабатывает управляющие сигналы и посылает их в другие устройства машины, указывая дальнейший путь вычислений. На рис. I.3.5 управляющие сигналы показаны одинарными стрелками, а двойные стрелки указывают обмен информации между различными устройствами ЭВМ.

Устройство вывода (Увыв) служит для записи полученных результатов вычислений в виде печати на бумаге, пробивок на перфокартах, перфолентах, вывода информации на телетайп, световое табло и др. Увыв преобразует электрические сигналы в механические действия, и поэтому скорость его работы значительно ниже других устройств. Скорость печати — 20 чисел в секунду, а скорость вывода чисел с использованием фотопечати — около 200 чисел в секунду. Это очень низкая скорость, если учесть, что сложение двух чисел простейшая ЭВМ выполняет за доли

миллисекунды (1 мсек $= 10^{-3}$ сек). Уже имеются ЭВМ, которые выполняют сложение за микросекунды (1 мксек $= 10^{-6}$ сек) и даже за наносекунды (1 нсек $= 10^{-9}$ сек). Ведутся исследования по созданию быстродействующих устройств ввода и вывода.

ЭВМ производит операции со словами, которые в нее вводятся. Слова в машине обычно изображаются в виде двоичных чисел, в которых используются только две цифры (два символа) 0 и 1, называемые битами. Имеются ЭВМ, выполняющие операции и в других системах счисления.

I.3.18. Системы счисления, применяемые в ЭВМ

Системы счисления подразделяются на позиционные и непозиционные. К позиционной относится наша десятичная система с основанием 10 и другие системы, применяемые в ЭВМ; к непозиционным относится римская система счисления.

Позиционные системы называются так потому, что значение каждой цифры зависит от ее позиции, положения в данной последовательности цифр. Например, в числе 648,36 цифра «6» слева обозначает шесть сотен, а цифра «6» справа — шесть сотых. Количество разных знаков, применяемых в данной позиционной системе, называется ее основанием. Привычная нам десятичная система имеет 10 знаков от 0 до 9. Число 648,36 в десятичной системе счисления можно записать так:

$$648{,}36 = 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}.$$

Обозначив буквами a_n, a_{n-1}, . . ., a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, . . ., $a_{-\kappa}$ цифры некоторого числа N в системе счисления с основанием q, можно написать

$$N = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ldots + a_1 q^1 + a_0 q^0 + a_{-1} q^{-1} + a_{-2} q^{-2} + \ldots a_{-\kappa} q^{-\kappa},$$

или сокращенно

$$N = \sum_{i=n}^{i=-\kappa} a_i q^i, \qquad \text{(I.3.4)}$$

где $n + 1$ — положительное число, определяющее количество разрядов в целой части числа N; κ — положительное число, определяющее количество разрядов в дробной части числа (после запятой); a_i — цифры числа, удовлетворяющие неравенству $0 \leqslant a_i \leqslant q - 1$; q — основание системы счисления. Пользуясь формулой I.3.4, можно переводить числа из любой позиционной системы в десятичную систему. При $q = 2$ система называется двоичной, в которой $a_i = 0, 1$; при $q = 3$ система называется троичной, в которой $a_i = 0, 1, 2$; при $q = 8$ система называется восьмеричной, в которой $a_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; при $q = 16$ система называется шестнадцатиричной, в которой $a_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f$. Представляет интерес система счисления с основанием $q = 32$, число цифр в которой совпадает с числом букв в русском алфавите, и поэтому буквы удобно кодировать числами. Используемая система счисления связана с конструкцией ЭВМ.

Арифметические операции во всех позиционных системах выполняются по одинаковым правилам, но с использованием своих таблиц сложения и умножения. Таблицы двоичной системы счисления наиболее просты, так как состоят только из четырех комбинаций цифр.

Таблица сложения	Таблица умножения
$0+0=0$	$0\times 0=0$
$0+1=1$	$0\times 1=0$
$1+0=1$	$1\times 0=0$
$1+1=10$	$1\times 1=1$

Для счета в ЭВМ чаще всего применяют двоичную систему потому, что арифметические операции наиболее просты именно в двоичной системе счисления. Например,

$$\begin{array}{rl} & 1001{,}11 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad 9{,}75 \\ + & 111{,}10 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad 7{,}50 \\ \hline & 10001{,}01 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad 17{,}25 \end{array}$$

Пользуясь формулой (I.3.4), полученную двоичную сумму легко перевести в десятичное число:

$$10001{,}01 = 1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0+0\cdot 2^{-1}+$$

$$+1\cdot 2^{-2}=17+\frac{1}{4},$$

при этом $(10001)_2=(17)_{10}$, а $(0{,}01)_2=(0{,}25)_{10}$.

Умножение двоичных чисел в ЭВМ сводится к сдвигу множимого в сторону старших разрядов и сложению. Однако двоичная система имеет и свой недостаток, заключающийся в том, что она требует для изображения числа примерно в 3,3 раза больше разрядов, чем десятичная.

В любой позиционной системе целые числа точно изображаются целыми. Дробные числа изображаются дробными, но обычно приближенно, за исключением отдельных дробных чисел.

Правило перевода целых чисел из одной позиционной системы в другую можно сформулировать так. Необходимо делить данное число и получающиеся частные на основание q новой системы до тех пор, пока не получится частное, меньшее основания системы. Новое число в системе q будет равно остаткам деления, начиная с последнего частного. Например, при переводе десятичного числа 473 в восьмеричную запись поступают так:

$$\begin{array}{r|l} 473 & 8 \\ \hline 40 & 59 \;\big|\; 8 \\ \hline 73 & 56 \quad 7 \\ \hline 72 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Это значит, что $(473)_{10} = (731)_8$. Для контроля полученное восьмеричное число можно перевести в десятичное число, пользуясь формулой (I.3.4):

$$N_{10} = 7 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 473.$$

Перевод дробных чисел производится путем умножения данного числа и получающихся дробных частей на основание новой системы, пока в дробной части числа не получится нуль, если число переводится точно, или пока не будет получено необходимое количество значащих цифр.

Десятичное число 0,5463 переводится в двоичное не точно, а приближенно. Производя последовательное умножение данного числа 0,5463 на 2, получим

Направление чтения искомого числа

0	$\times \overline{5463}$ 2
1	$\times \overline{0926}$ 2
0	$\times \overline{1852}$ 2
0	$\times \overline{3704}$ 2
0	$\times \overline{7408}$ 2
1	$\overline{4816}$
↓	↓

Следовательно, $(0{,}5463)_{10} = (0{,}10001\ldots)_2$.

Необходимое количество значащих цифр при переводе чисел из одной позиционной системы в другую можно подсчитать по формуле

$$\kappa = \frac{\lg a + (n-1)\lg q - \lg b}{\lg h} + 1, \qquad (I.3.5)$$

где κ — количество значащих цифр в определяемом числе с основанием h; n — количество значащих цифр в данном числе с основанием q; a — первая значащая цифра данного числа; b — первая значащая цифра определяемого числа.

Пользуясь формулой (I.3.5), для нашего примера приближенно получим

$$\kappa = \frac{0{,}7 + 3 - 0}{0{,}3} + 1 \approx 13.$$

Таким образом, чтобы сохранить точность при переводе десятичного числа 0,5463, имеющего четыре значащие цифры, в его двоичном эквиваленте, необходимо получить тринадцать значащих цифр, в нашем примере 13 двоичных знаков после запятой.

В практике вычислений на ЭВМ используются также смешанные формы записи чисел:

1) двоично-восьмеричная;
2) двоично-десятичная;
3) двоично-шестнадцатиричная.

Восьмеричная система счисления применяется для записи программы вычислений на ЭВМ благодаря простоте перевода чисел из восьмеричной в двоичную систему и обратно. Двоично-восьмеричная система заключается в том, что десятичное число сначала переводится в восьмеричное, а затем каждая восьмеричная цифра заменяется тройкой двоичных знаков, называемых триадой (табл. I.3.4).

Таблица I.3.4

Восьмеричные цифры	0	1	2	3	4	5	6	7
Триады	000	001	010	011	100	101	110	111

Каждая триада соответствует одному восьмеричному разряду. Поэтому для перевода двоичного числа в восьмеричное достаточно двоичное число разбить на триады вправо и влево от запятой и каждую триаду заменить восьмеричной цифрой. Например, двоичное число 101 001 001, 010 100 в восьмеричной системе изобразится так: 511,24.

Если каждую цифру восьмеричного числа заменить двоичной триадой, то получится запись числа в двоичной системе счисления. Например:

$$275{,}61_8 = 10\,111\,101,\ 110\,001_2.$$

Большинство ЭВМ выполняют все вычисления в двоичной системе счисления. Программа решения задачи, записанная в восьмеричной системе, легко перекодируется в двоичную систему на специальных перфораторах.

Исходные данные, заданные в десятичной системе, записываются на перфокартах или перфолентах в двоично-десятичном коде. Двоично-десятичная запись чисел заключается в том, что каждая десятичная цифра представляется двоичной четверкой, называемой тетрадой (табл. I.3.5).

Таблица I.3.5

Десятичные цифры	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Тетрады	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

Десятичное число 689,05 в двоично-десятичном коде изобразится так:

$$689{,}05_{(10)} = 110\ 1000\ 1001,\ 0000\ 0101_{(2-10)}.$$

Для перекодировки двоично-десятичного числа в десятичное необходимо двоично-десятичное число разбить на тетрады влево и вправо от запятой и каждую тетраду заменить соответствующей десятичной цифрой.

Из возможных шестнадцати различных тетрад: 0000, 00001, . . ., 1111 в двоично-десятичной записи используются только первые десять тетрад.

В шестнадцатиричной системе используются все 16 тетрад.

I.3.19. Операции с числами в ЭВМ

Двоичная система позволяет использовать наиболее простые электрические цепи в ЭВМ. С помощью запоминающих двоичных элементов может быть представлено любое двоичное число. В ЭВМ используются две формы представления чисел: естественная (с фиксированной запятой) и нормальная (с плавающей запятой). В соответствии с этим по своей конструкции ЭВМ бывают с фиксированной и плавающей запятой. В настоящее время ЭВМ конструируются для вычисления как с фиксированной, так и с плавающей запятой.

При работе на машинах с фиксированной запятой все числа x_i при помощи масштабных множителей изменяют в некоторое количество раз и делают их меньше единицы $|x_i| < 1$ так, чтобы для каждого из чисел выполнялось неравенство $q^{-n} \leqslant |x_i| \leqslant (1 - q^{-n})$, где q — основание используемой системы счисления, а n — количество разрядов в целой части числа.

При вычислении на машинах с фиксированной запятой может произойти потеря значащих цифр (а значит, и потеря точности) или даже получиться такое малое число, которое окажется меньше единицы младшего разряда ячейки памяти, так называемый машинный нуль. При дальнейших операциях это может привести к неверным результатам.

В машинах с плавающей запятой любое число представляется как произведение двух сомножителей:

$$x = \pm m q^{\pm p},$$

где m — мантисса числа ($m < 1$); p — целое положительное или отрицательное число, называемое порядком. Например, десятичные числа 425,75 и —0,09375 в нормальной форме могут быть записаны так:

$$425{,}75 = 0{,}42575 \cdot 10^3; \quad -0{,}09375 = -0{,}9375 \cdot 10^{-1}.$$

Эти числа в двоичной системе могут быть записаны так:

$$110\ 101\ 001{,}11 = 0{,}11010100111 \cdot 10^{+1001}; \quad -0{,}00011 = -0{,}11 \cdot 10^{-11}.$$

Различают нормализованные и ненормализованные числа. Нормализованным называют такое число, в котором в первом разряде (после запятой) стоит не нуль, а любая значащая цифра (для

двоичного числа — единица). Таким образом, в нормализованном виде число записывается так, чтобы

$$\frac{1}{q} \leqslant |m| < 1.$$

Операции в ЭВМ выполняются с кодами чисел и их знаками. Знак «+» кодируется нулем, знак «—» кодируется единицей. Все арифметические операции сводятся к сложению, точнее к наложению импульсов. При умножении знаки чисел складываются.

Арифметические и логические операции выполняются в ЭВМ по правилам действий двоичных чисел, при этом двоичные числа представляются в прямом, обратном и дополнительном кодах.

Положительные числа во всех трех кодах изображаются одинаково и их изображение совпадает с обычной формой записи двоичных чисел.

Отрицательные двоичные числа имеют единицу перед запятой. При записи отрицательных двоичных чисел в прямом коде (ПК) числовые разряды не изменяются. При записи отрицательных чисел в обратном коде (ОК) изменяются все нули на единицы, а единицы на нули, что позволяет вычитание чисел заменять сложением. При записи отрицательных чисел в дополнительном коде (ДК) сначала находят ОК числа и затем добавляют к нему единицу в младший разряд.

При сложении в ЭВМ числа сначала изображаются в обратном коде и после этого сложение выполняется по обычным правилам во всех разрядах, включая и знаковый разряд. При этом если слева у знакового разряда получается единица, то она прибавляется к младшему разряду.

Рассмотрим следующий пример. Пусть требуется найти сумму двух чисел:

$$x_1 = +9{,}875_{(10)} = +1001{,}111_{(2)} = 0{,}1001111 \cdot 10^{+100};$$

$$x_2 = -5{,}75_{(10)} = -101{,}11_{(2)} = -0{,}10111 \cdot 10^{+11}.$$

Если числа имеют разные порядки, то в машине сначала выравниваются порядки и затем производится сложение.

В нашем примере число x_2 надо записать так: $x_2 = -0{,}0101110 \times \times 10^{+100}$. После этого мантиссы чисел записываются в обратном коде и производится их сложение.

$$\begin{array}{r} \text{ОК}(x_1) = 0{,}1001111 \\ + \\ \text{ОК}(x_2) = 1{,}1010001 \\ \hline \text{ОК}(x_1 + x_2) = \underset{\uparrow}{10{,}0100000} \end{array}$$

Полученная сумма является положительной потому, что в знаковом разряде остается (после переноса единицы в младший разряд) цифра 0. Поэтому

$$x_1 + x_2 = +0{,}0100001 \cdot 10^{+100} = +100{,}001.$$

I.3.20. Характеристика наиболее распространенных отечественных ЭВМ

Программа для вычислений на ЭВМ состоит из последовательности команд, каждая из которых содержит элементарную операцию. Команда состоит из кода и номеров ячеек запоминающего устройства, называемых адресами. Число адресов в команде у разных машин разное. Наибольшее распространение в нашей стране получили полупроводниковые ЭВМ с трех-, двух- и одноадресными командами. Учитывая количество адресов в команде, ЭВМ называют одноадресными, двухадресными и трехадресными. В некоторых странах есть машины и с другим количеством адресов: четырехадресные, полутораадресные и др. Есть ЭВМ с переменной адресностью, т. е. с переменной длиной команд.

В одноадресных ЭВМ команда состоит из кода операции и одного адреса ячейки ОЗУ, в которой хранится номер ячейки, указывающий, откуда надо взять операнд, т. е. число, над которым выполняется операция.

Многие современные ЭВМ имеют одноадресную систему команд. К ним относятся ЭВМ семейства «Урал» и БЭСМ-6.

В двухадресных ЭВМ в адресной части команды содержится два адреса, которые отводятся либо для номеров ячеек, в которых хранятся операнды, либо для результата вычислений, или в его втором адресе указывается номер ячейки, в которой расположена следующая команда.

К двухадресным машинам относятся машины типа «Минск» и «Раздан».

В трехадресных ЭВМ команда содержит, кроме кода операции, три адреса, два из которых отводятся для номеров ячеек, в которых хранятся операнды, а в третьем адресе записывается номер ячейки ОЗУ, куда отсылается результат вычислений, полученный после выполнения данной команды.

К трехадресным ЭВМ относятся БЭСМ-3М, БЭСМ-4, М-20, М-220, М-222 и др.

В ЭВМ Единой системы длина одной команды может быть разной и состоять из 2 байтов (полуслово), 4 байтов (слово), или из 8 байтов (двойное слово). Один байт состоит из 8 битов, или двух десятичных цифр, или двух шестнадцатиричных цифр, или из одной буквы, или представлять собой специальный символ. Емкость запоминающих устройств выражается в килобайтах (один килобайт равен 1024 байтов) и мегабайтах (один мегабайт равен 1 млн. байтов).

В табл. I.3.6 приведены основные характеристики наиболее распространенных ЭВМ. На этих машинах решаются различные инженерные и экономические задачи.

К числу распространенных ЭВМ надо отнести полупроводниковую машину «Минск-22», хотя выпуск ее уже прекращен. Однако эта машина и в настоящее время еще играет заметную роль в решении различных планово-экономических и инженерно-технических, в том числе и геодезических задач. Это объясняется тем, что машина надежна в эксплуатации и достаточно полно обеспечена библиотекой стандартных программ, куда входят: программы для решения систем линейных уравнений, программы по обработке результатов наблюдений по методу наименьших квадратов, про-

Таблица 1.3.6

Название машины	Средняя скорость операций в секунду при работе с ОЗУ	Форма представления чисел	Число адресов в команде	Разрядность чисел (двоичных разрядов)	Средняя емкость ЗУ (слов)			Скорость ввода чисел, мин	Скорость печати чисел, мин	Потребляемая мощность, кВт	Площадь для размещения машин, м²
					оперативного	на магнитных лентах	на магнитных барабанах				
БЭСМ-6	1 000 000	Плавающая запятая	1	50	32 768	$32 \cdot 10^6$	262 000	8400	2400	20	200
БЭСМ-4	20 000	То же	3	45	8192	до $8 \cdot 10^6$	16 384—65 536	8400	2400	8	80
М-222	27 000	»	3	45	16 384—32 768	$32 \cdot 10^6$	192 000	7200	1200	10	160
Минск-32	30 000	Фиксированная и плавающая запятая	1,2	37	16 384—65 536	$38 \cdot 10^6$	—	8400	2400	15	100
Раздан-3	20 000	Плавающая запятая	2	48	16 384—32 768	$2{,}5 \cdot 10^6$	60 000	6000	2400	20—50	150
Наири-3	12 000	Фиксированная и плавающая запятая	1, 2, 3	37	4096	Постоянное ЗУ 8192 слов и для хранения программы 24 576 слов		2600		1,6	16
Мир-2		Плавающая запятая	Переменное	Произвольная	8192	БЗУ 4096 слов ПЗУ 1,6 млн. бит		10 симв/сек		4	20
ЕС-1020	20 000	Фиксированная и плавающая запятая	Свободная адресация	16, 32, 48, 64	64—256 Кбайтов	До $8 \cdot 25 \cdot 10^6$ байтов	До $8 \cdot 7{,}25$ Мбайтов на магнитных дисках	500 карт	650—890 строк	20	50
ЕС-1050	500 000	То же	То же	16, 32, 48, 64	До 1024 Кбайтов	То же	То же	500 карт	То же	70	200

граммы по решению различных задач методами линейного программирования и многие другие программы. Для ЭВМ «Минск-22» разработаны трансляторы (см. раздел Е) с языков АЛГОЛ, ФОРТРАН, АЛГЭМ и автокод-инженер (АКИ). Двухадресная ЭВМ «Минск-22» имеет объем ОЗУ 8192 слов, среднее быстродействие 5000 оп/сек, разрядность 37 двоичных знаков.

Для больших объемов вычислений заслуживает внимания многопрограммная ЭВМ «М и н с к - 32», на которой удобно решать различные инженерные, экономические и учетно-статистические задачи. Ввод информации в ЭВМ «Минск-32» осуществляется с перфоленты, перфокарт и с пишущей машинки со скоростью соответственно: 1500 строк/сек; 600 карт/мин; 10 знаков/сек. Вывод информации можно производить на перфоленту со скоростью 80 строк/сек; на перфокарты около 100 карт/мин; на печать при помощи пишущей машинки со скоростью 10 знаков/сек и на печать при помощи алфавитно-цифрового печатающего устройства (АЦПУ) со скоростью около 400 строк/мин.

Достаточно хорошее математическое (программное) обеспечение имеют ЭВМ семейства БЭСМ и М-222.

Для небольших объемов вычислений удобно применять ЭВМ «Мир», «Наири», «Проминь», для работы на которых не требуется специального обучения программированию. В машину достаточно ввести при помощи электрифицированной печатающей машинки исходную информацию, и она на основе внутренней библиотеки подпрограмм автоматически решает задачу и печатает результаты.

Для автоматизации решения математических задач весьма удобной ЭВМ является «Мир-2», которая имеет емкость ОЗУ 8192 13-разрядных слов, емкость буферного запоминающего устройства (БЗУ) 4096 10-разрядных слов, емкость постоянного запоминающего устройства (ПЗУ) 1,6 млн. бит. Вычислительный алгоритм и исходные числа вводятся в машину в виде словесно-формульного описания в языках «Мир» или «Аналитик».

ЭВМ быстро развиваются. Уже сконструированы машины третьего поколения на микромодулях и интегральных электронных схемах. Существует два типа интегральных схем: тонкопленочные и полупроводниковые интегральные схемы, имеющие миниатюрные размеры (до 5000 элементов в одном кубическом сантиметре). Это создает условия для конструирования небольших размеров ЭВМ с большой надежностью.

Машина третьего поколения «Наири-3» выполнена на интегральных гибридных микросхемах, что по сравнению с полупроводниковыми ЭВМ дало возможность уменьшить габариты и вес машины и увеличить ее надежность. «Наири-3» отличается многопрограммностью и способностью одновременно решать несколько различных задач. Результаты вычислений на «Наири-3» можно выводить на пишущую машинку, ленточный перфоратор и быстродействующую цифровую печать.

К третьему поколению относятся машины Единой системы (ЕС ЭВМ), созданные в содружестве социалистических государств. Единая система представляет собой унифицированную конструкцию программно-совместимых машин: ЕС-1010; ЕС-1020; ЕС-1021; ЕС-1030; ЕС-1040; ЕС-1050; ЕС-1060. Программы решения задач, составленные для одной машины, могут использоваться на всех других машинах Единой системы.

ЭВМ Единой системы оперируют с цифровой и буквенной информацией. Эти машины позволяют производить как различные вычисления, так и универсальную обработку данных и выдавать готовые документы, содержащие буквенно-цифровую информацию. В понятие буквенно-цифровой информации включаются и цифры, и буквы, и специальные символы.

ЭВМ Единой системы сконструированы для работы в режиме разделения времени, заключающемся в том, что ресурсы машины делятся между большим числом пользователей, имеющих свои индивидуальные дистанционные пульты, соединенные с машиной каналами связи.

На рис. I.3.6 показан общий вид ЭВМ ЕС-1020 минимального состава (машина сконструирована в СССР и Болгарии). ЭВМ

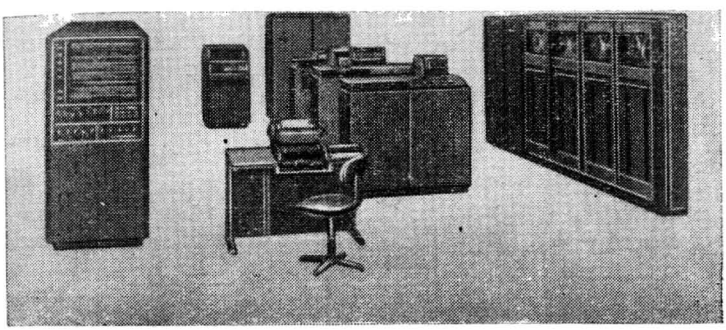


Рис. I.3.6. ЭВМ ЕС-1020 минимального состава

ЕС-1020 предназначена для решения технических, экономических и управленческих задач.

Структурная схема машины ЕС-1020 показана на рис. I.3.7. В ее состав входят: процессор, внешние запоминающие устройства, устройства ввода и вывода информации. Процессор состоит из вычислителя и основной оперативной памяти, которая может быть расширена от 64 до 256 Кбайтов (см. табл. I.3.6). Учитывая, что К = = 1024, можно подсчитать, что 64 Кбайта равны 16 384 десятичным восьмиразрядным числам $\left(\frac{64 \cdot 1024 \cdot 2}{8}\right)$. Соответственно 256 Кбайтов равны 65 536 десятичным восьмиразрядным числам. В процессор также включены каналы: мультиплексный (МК) и селекторный (СК), а также устройство питания (см. рис. I.3.7).

На рис. I.3.7 кроме процессора показаны: ЕС-5511 — устройство управления накопителями на магнитной ленте, в которое можно подключать до 8 накопителей ЕС-5010 емкостью каждый в $25 \cdot 10^6$ байтов; ЕС-5551 — устройство управления накопителями на магнитных дисках и барабанах, в которое можно подключать до 8 накопителей разных типов (емкость одного сменного пакета дисков равна 7,25 Мбайта); ЕС-6012 — устройство ввода с перфокарт; ЕС-6022 — устройство ввода с перфоленты; ЕС-7022 — устрой-

ство вывода на перфоленту; ЕС-7030 — алфавитно-цифровое печатающее устройство; ЕС-7010 — устройство вывода на перфокарты; ЕС-7070 — пишущая машинка с блоком сопряжения со стандартным каналом.

Высокопроизводительной ЭВМ, предназначенной для решения широкого круга технических, экономических и различных специальных задач, является изготовленная в СССР машина ЕС-1050, среднее быстродействие которой равно 500 тыс. оп/сек. Основные дан-

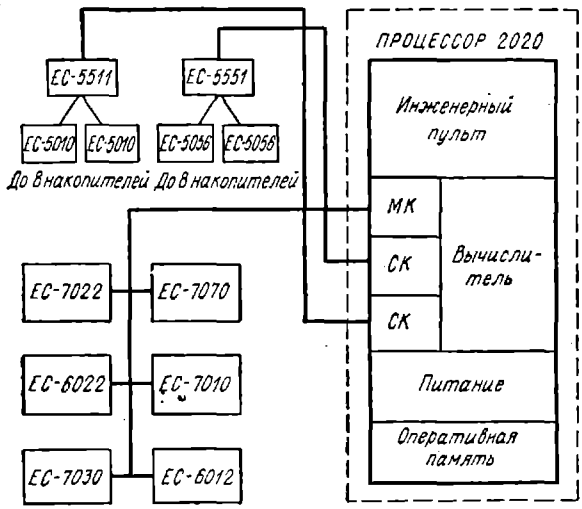


Рис. 1.3.7. Структурная схема ЭВМ ЕС-1020

ные о модели ЕС-1050 приведены в табл. 1.3.6. В состав ЭВМ ЕС-1050 входят: процессор, основная оперативная память общей емкостью до 1024 Кбайтов, каналы, устройства ввода-вывода информации, сервисная аппаратура. Количество и состав периферийных устройств определяются в каждом конкретном случае.

Е. ПРОГРАММИРОВАНИЕ ДЛЯ ЭВМ

1.3.21. Этапы решения задач на ЭВМ

Для решения конкретной задачи на ЭВМ необходимо выполнить комплекс ручных и машинных действий, которые можно разделить на следующие этапы:

1) выбор численного метода решения задачи;

2) разработка алгоритма решения задачи и составление программы;

3) перенесение программы и исходных данных на перфокарты, перфоленты или другие носители информации;

4) ввод в машину информации, зафиксированной на перфокартах или перфолентах;

5) автоматическое решение задачи, контроль и вывод результатов.

Один и тот же численный метод может быть реализован при помощи различных алгоритмов, и задача заключается не только в выборе метода и алгоритма, но и в обеспечении наиболее эффективного использования ЭВМ.

Основным на втором этапе является выбор или разработка алгоритма решения задачи, т. е. установление строгой последовательности всех операций (арифметических, логических и др.), применяя которые можно получить искомый ответ. Алгоритм, разработанный для данной задачи, должен быть применим к совокупности различных значений ее исходных данных. После выбора алгоритма составляют логическую схему программы в виде блок-схемы или в виде условных символов, называемых операторами, или в другом каком-либо виде. Логическая схема облегчает составление программы, наглядно и компактно отображая весь процесс решения задачи на ЭВМ. При разработке алгоритма решения задачи учитывается размещение информации в запоминающих устройствах ЭВМ.

Применяют два способа программирования: на языке конкретной машины (в кодах ЭВМ) и автоматизированное (с помощью алгоритмических языков). В обоих случаях необходимо пользоваться инструктивными материалами и применять разработанную технологию.

Программирование в кодах ЭВМ состоит из двух частей: распределение ячеек ЗУ и составление команд. ЗУ машины состоит из определенного числа ячеек, пронумерованных подряд от 0 до $n-1$. Поскольку каждая ячейка содержит определенное количество κ разрядов, в нее может быть записано κ-разрядное число, называемое словом.

Составленную программу записывают в восьмеричной системе счисления и при помощи специального перфоратора переносят на перфокарты или перфоленты. Исходные данные также записывают на перфокарты или перфоленты, но в двоично-десятичном коде. На одной перфокарте обычно можно записать 12 команд или 12 чисел. Команды записываются триадами, числа — тетрадами.

Четвертый этап заключается в том, что зафиксированную на перфокарты или перфоленты информацию вводят в машину.

Если программа используется впервые, то она отлаживается (проверяется) при помощи тестов — небольших задач, точное решение которых известно.

Пятый этап заключается в автоматическом решении задачи обычно без вмешательства человека. Проверка вычислений может осуществляться по контрольным формулам, или путем подстановки полученных заключений в решаемое уравнение, или при помощи двойного, а иногда и тройного счета. Машина автоматически производит все арифметические и логические операции, контролирует вычисления, полученные результаты переводит в десятичную систему счисления и печатает их на широкой или узкой бумажной ленте или перфорирует на перфокарты или перфоленту.

Работа на ЭВМ определяется соответствующими инструкциями по подготовке исходной информации, проведению счета и др.

I.3.22. Общие сведения о программировании в кодах ЭВМ

Эффективность программирования в кодах ЭВМ (непосредственного) или автоматизированного программирования определяется различными факторами: квалификацией программистов, сложностью задач, наличием математического обеспечения и др. Иногда для некоторых задач выгодно составлять программы непосредственным путем, но для большинства задач эффективно применять автоматизированное программирование, если для данной ЭВМ имеются программы-трансляторы, с помощью которых программа, записанная на алгоритмическом языке, переводится в команды данной машины. Отметим, что многие трансляторы недостаточно совершенны, и на выполнение программы, составленной с их помощью, затрачивается иногда в 1,5—2 раза больше времени по сравнению с программой, составленной в кодах машины квалифицированным программистом. Кроме того, программы, переведенные транслятором с алгоритмического языка, требуют бо́льших объемов ЗУ, чем программы, составленные вручную.

Каждая ЭВМ может выполнять операции сложения и вычитания чисел, вычитание модулей чисел, умножение, деление, пересылку чисел из ячейки в ячейку, сравнение чисел (кодов), сложение и вычитание команд и многие другие операции.

Ячейка памяти ЭВМ обладает тем свойством, что записанное в ней слово (число) может храниться и прочитываться любое число раз, до тех пор пока в эту ячейку не будет послано новое слово. При записи в ячейку нового слова предварительно стирается прежнее содержимое.

Команду можно рассматривать как число и как управляющий сигнал. Управление работой ЭВМ заключается прежде всего в изменении естественного порядка выполнения команд. Все команды машины можно разделить на две основные группы:

1. Команды со стандартной передачей управления, передающие управление следующей ячейке. Это значит, что после выполнения команды, записанной в ячейке n, выполняется команда, находящаяся в ячейке $n + 1$. Такие команды называют командами с принудительным управлением.

2. Команды передачи управления, предназначенные для изменения порядка выполнения команд. Эти команды делятся на команды безусловного и условного перехода. Безусловная команда всегда передает управление в указанную в этой команде ячейку. Условная команда передает управление в какую-нибудь ячейку в зависимости от заданных условий.

Непосредственное составление программы решения задачи включает в себя два вида работ: написание (или составление) команд программы и распределение памяти. Эти два вида работ тесно связаны друг с другом.

Сначала выполняют распределение памяти в общем виде, вводя буквенно-цифровые обозначения адресов ячеек: например адреса (номера) ячеек для команд программы обозначают $a + 1$, $a + 2$, . . ., для исходных данных — $b + 1$, $b + 2$, . . ., для промежуточных результатов — $r + 1$, $r + 2$, . . ., для констант — $c + 1$, $c + 2$, . . ., для окончательных результатов — $t + 1$, $t + 2$ . . .

После такого распределения памяти составляют программу, записывая на месте адресов их буквенно-цифровые обозначения. Составленная в таком виде программа называется программой в условных адресах. После того как программа составлена в буквенно-цифровом обозначении, видно, сколько она занимает ячеек, и можно решить вопрос о ее размещении в памяти машины, т. е. дать конкретные числовые значения буквам a, b, c, r, t. Далее переписывают программу, прибавляя к числовым значениям соответствующих букв относительные адреса, и получают таким образом программу в действительных адресах. Для сокращения записи при непосредственном программировании обычно пользуются символикой: 1) запись $x \rightarrow a$ обозначает: число x посылается в ячейку a; 2) запись $(a) = x$ означает: содержимое ячейки a равно x, т. е. в ячейке a хранится число x.

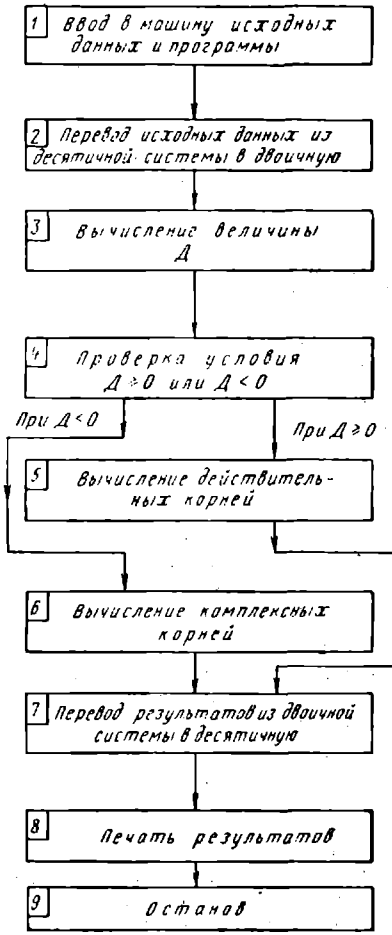


Рис. I.3.8. Блок-схема программы вычисления корней квадратного уравнения

I.3.23. Блок-схемное представление алгоритма решения задачи. Циклические программы

При непосредственном программировании процесс решения задачи разбивается на этапы, которые обычно изображаются графически в виде прямоугольников (или других фигур) и называются блоками. Внутри блока текстом или условными обозначениями указываются действия, которые необходимо выполнить. Передачи управления от блока к блоку указываются стрелками.

Представим в виде блок-схемы алгоритм решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, корни которого можно вычислить по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{Д}}{2a}.$$

Если $Д \geqslant 0$, то уравнение имеет действительные корни, если $Д < 0$, то уравнение имеет комплексно-сопряженные корни, т. е. решение уравнения производится по разветвляющейся программе, что отражается на блок-схеме (рис. I.3.8).

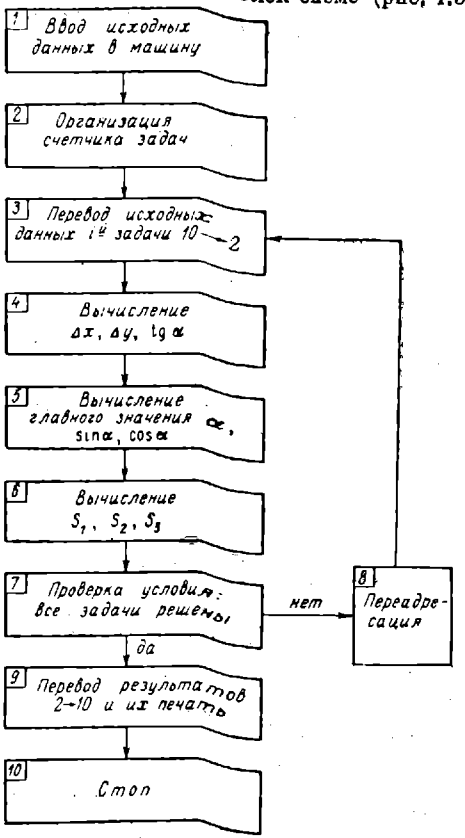


Рис. I.3.9. Блок-схема программы для решения нескольких обратных геодезических задач

Характерной чертой геодезических вычислений является многократное повторение серий операций по одним и тем же формулам, но с различными исходными данными. Повторяющиеся участки вычислительного процесса называются циклами.

Составим программу для решения n обратных геодезических задач по формулам

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha_{AB} &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}; \quad S_1 = \frac{y_B - y_A}{\sin\alpha_{AB}}; \\ S_2 &= \frac{x_B - x_A}{\cos\alpha_{AB}}; \quad S_3 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \end{aligned}\right\}. \quad (I.3.6)$$

Программа должна иметь арифметический цикл с переадресацией (для изменения адресов команд, с помощью которых вводятся новые исходные данные в цикл). Блок-схема программы показана на рис. I.3.9.

Распределение памяти в буквенно-цифровом обозначении адресов ячеек показано в табл. I.3.7.

Таблица I.3.7

Номера ячеек	$b+0$	$b+1$	$b+2$	$b+3$	$b+4$	$b+5$	$b+6$	$b+7$	$b+8$	. . .
Содержимое ячеек	Количество задач n	y_B^1	y_A^1	x_B^1	x_A^1	y_B^2	y_A^2	x_B^2	x_A^2	. . .
		Первая задача				Вторая задача				. . .

В табл. I.3.8 приведена программа решения n геодезических задач в условных адресах в кодах машины М-20, с обозначениями, показанными в табл. I.3.7.

По команде

$a+0)$ 010 $b+0$ $a+0$ $r+0$

производится ввод массива исходных данных, начиная с ячейки $b+0$.

По командам $a+0$; $a+1$; $a+2$; $a+3$; $a+4$; $a+5$ выполняется ввод исходных массивов с контролем и переводом из десятичной системы счисления в двоичную.

По командам

$a+11)$ 016 $a+12$ 7501 7610

$a+12)$ 000 $r+3$ 0012 $r+4$

производится вычисление главного значения угла α по найденному значению $\operatorname{tg}\alpha$.

Для определения значения дирекционного угла α используется команда

$a+13)$ 001 $r+3$ $c+0$ $r+3$.

В зависимости от знака $\operatorname{tg}\alpha$ вырабатывается признак ω, равный 1, если знак «—», и равный 0, если знак «+».

По команде

$a+14)$ 036 0000 $a+22$ 0000

передается управление в $a+22$, если $\omega=1$, или в следующую команду $a+15$, если $\omega=0$, т. е. в $a+22$, если $\operatorname{tg}\alpha<0$, или в $a+15$, если $\operatorname{tg}\alpha\geqslant 0$.

Таблица 1.3.8

Номера ячеек для команд	Команды: код операции	Команды: адреса A_1	Команды: адреса A_2	Команды: адреса A_3	Пояснения
$a+0$	010	$b+0$	$a+0$	$r+0$	
1	067	$b+0$	0000	$r+0$	
2	052	0000	0001	0000	
3	013	$a+43$	$r+0$	$a+43$	
4	016	$a+5$	7501	7610	
5	052	$b+1$	0042	$b+4$	
6	002	$b+3$	$b+4$	$r+1$	$(r+1)=x_B-x_A$
7	002	$b+1$	$b+2$	$r+2$	$(r+2)=y_B-y_A$
$a+10$	004	$r+2$	$r+1$	$r+3$	$(r+3)=\operatorname{tg}\alpha$
1	016	$a+12$	7501	7610	
2	000	$r+3$	0012	$r+4$	
3	001	$r+3$	$c+0$	$r+3$	
4	036	0000	$a+22$	0000	
5	001	$r+1$	$c+0$	$r+1$	
6	036	0000	$a+20$	0000	
7	056	$r+4$	$a+27$	$t+0$	
$a+20$	001	$c+1$	$r+4$	$t+0$	$(t+0)=\pi+$ гл. зн. α
1	056	0000	$a+27$	0000	
2	001	$r+1$	$c+0$	$r+1$	
3	036	0000	$a+26$	0000	
4	002	$c+2$	$r+4$	$t+0$	$(t+0)=2\pi-$ гл. зн. α
5	056	0000	$a+27$	0000	
6	002	$c+1$	$r+4$	$t+0$	$(t+0)=\pi-$ гл. зн. α
7	000	$t+0$	0000	$r+3$	$(r+3)=\alpha$
$a+30$	016	$a+31$	7501	7610	
1	000	$r+3$	0005	$r+4$	$(r+4)=\sin\alpha$
2	002	$c+3$	$r+3$	$r+3$	
3	016	$a+34$	7501	7610	
4	000	$r+3$	0005	$r+5$	$(r+5)=\cos\alpha$
5	004	$r+2$	$r+4$	$t+1$	$(t+1)=s_1$
6	004	$r+1$	$r+5$	$t+2$	$(t+2)=s_2$
7	005	$r+1$	$r+1$	$r+1$	$(r+1)=\Delta x^2$
$a+40$	005	$r+2$	$r+2$	$r+2$	$(r+2)=\Delta y^2$
1	001	$r+1$	$r+2$	$r+1$	$(r+1)=\Delta x^2+\Delta y^2$
2	044	$r+1$	0000	$t+3$	$(t+3)=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=S_3$
3	112	0000	$a+51$	0001	
4	055	$c+4$	$a+42$	$r+0$	
5	075	$r+0$	$a+47$	$a+47$	
6	016	$a+47$	7501	7610	
7	052	$t+0$	0027	0000	

Номера ячеек для команд	Команды: код операции	Команды: адреса A_1	Команды: адреса A_2	Команды: адреса A_3	Пояснения
$a+50$	037	0000	0000	0000	СТОП
1	013	$a+5$	$c+5$	$a+5$	
2	013	$a+6$	$c+6$	$a+6$	
3	013	$a+7$	$c+6$	$a+7$	
4	013	$a+17$	$c+7$	$a+17$	
5	013	$a+20$	$c+7$	$a+20$	
6	013	$a+24$	$c+7$	$a+24$	
7	013	$a+26$	$c+7$	$a+26$	
$a+60$	013	$a+27$	$c+10$	$a+27$	
1	013	$a+35$	$c+7$	$a+35$	
2	013	$a+36$	$c+7$	$a+36$	
3	013	$a+42$	$c+7$	$a+42$	
4	056	0000	$a+4$	0000	

Константы

$c+0$	000	0000	0000	0000	машинный ноль
1	102	6220	7732	5042	π
2	103	6220	7732	5042	2π
3	101	6220	7732	5042	$\frac{\pi}{2}$
4				7777	const для выделения третьего адреса
$c+5$		4	0000	0000	const для переадресации 1-го и 3-го адресов на четыре единицы
6		4	0004	0000	const для переадресации первого и второго адресов на четыре единицы
7				4	const для 3-го адреса
$c+10$		4	0000	0000	const для 1-го адреса

По командам

$a+15)$	001	$r+1$	$c+0$	$r+1$
$a+16)$	036	0000	$a+20$	0000

аналогично исследуем знак приращения Δx.

Команда

$a+17)$	056	$r+4$	$a+27$	$t+0$

выполняется при условии, что $\operatorname{tg}\alpha \geqslant 0$ и $\Delta x \geqslant 0$, т. е. дирекционный угол α равен главному значению α.

Команда

$a+20)$	001	$c+1$	$r+4$	$t+0$

выполняется при условии, что $\operatorname{tg}\alpha \geqslant 0$, $\Delta x < 0$, т. е. α расположен в III четверти.

По команде

$a+21)$	056	0000	$a+27$	0000

управление передается в ячейку $a+27$.

По командам

$a+22)$	001	$r+1$	$c+0$	$r+1$
$a+23)$	036	0000	$a+26$	0000

аналогично исследуется знак Δx при $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

Команда

$a+24)$	002	$c+2$	$r+4$	$t+0$

выполняется при $\operatorname{tg}\alpha < 0$, а $\Delta x \geqslant 0$, т. е. когда α находится в IV четверти.

По команде

$a+25)$	056	0000	$a+27$	0000

управление передается в $a+27$.

Команда

$a+26)$	002	$c+1$	$r+4$	$t+0$

выполняется при $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\Delta x < 0$.

По команде

$a+27)$	000	$t+0$	0000	$r+3$

число из ячейки $t+0$ пересылается в рабочую ячейку $r+3$.

По командам

$a+30)$	016	$a+31$	7501	7610
$a+31)$	000	$r+3$	0005	$r+4$

вычисляется значение $\sin\alpha$ и результат записывается в ячейку $r+4$. Команда $a+43$ определяет номер следующей задачи.

Команды $a + 44$; $a + 45$; $a + 46$; $a + 47$ выполняют перевод результата из двоичной системы в десятичную и выдачу его на печать.

Команда

$a+51)$ 013 $a+5$ $c+5$ $a+5$

будет выполняться перед решением каждой новой задачи. Так как для решения каждой следующей задачи необходимо использовать исходные данные, соответствующие данной задаче, то в команде $a + 5$ следует соответствующим образом изменить адресную часть по первому и третьему адресам.

Команды $a + 52 \div a + 63$ выполняются аналогично команде $a + 51$.

По команде

$a+64)$ 056 0000 $a+4$ 0000

управление передается в ячейку $a + 4$ на решение следующей задачи.

Команды программы, управляющие повторениями цикла, называются счетчиками. Циклическая программа может быть представлена блок-схемой, показанной на рис. I.3.10. Цикл, в котором число повторений заранее известно, называют арифметическим. Разработаны различные приемы управления повторениями в арифметических циклах. Один из таких приемов показан в табл. I.3.8.

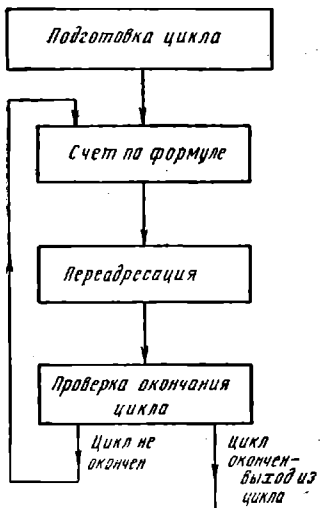


Рис. I.3.10. Принципиальная блок-схема циклической программы

В практике вычислений приходится иметь дело с циклами, число повторений для которых заранее неизвестно. Такие циклы возникают при решении задач методом итераций. Поэтому эти циклы называют итерационными. В итерационных процессах момент окончания вычислений определяется достижением заданной точности результата, т. е. вычисления прекращаются, когда выполняется условие

$$|\Delta z| < \varepsilon,$$

где $|\Delta z| = z_{k+1} - z_k$, а ε — заданная абсолютная погрешность.

Есть задачи, при программировании которых приходится создавать циклы в циклах.

I.3.24. Перенос программы и исходных данных на перфокарты и перфоленты и ввод их в машину

Программа решения задачи и исходные данные переносятся на перфокарты или перфоленты путем пробивки отверстий при помощи специальных клавишных устройств и перфораторов. На одной перфокарте может быть размещено 12 команд, чисел или

каких-либо вспомогательных кодов. Контроль правильности пробивок осуществляется путем пробивок информации в две руки, путем печатания зафиксированных чисел на носителях информации и сравнения результатов печати с данными, записанными на бланках, или каким-нибудь другим путем.

Ввод информации с перфокарт или с перфолент в оперативное запоминающее устройство осуществляется при помощи устройства ввода по специальной команде для ввода исходных данных и по другой команде для ввода программы решения задачи.

Правильность ввода исходной информации осуществляется по контрольным суммам или путем печати на бумажной ленте.

I.3.25. Вывод результатов вычислений

Современные ЭВМ имеют различные устройства для вывода результатов вычислений: устройство быстродействующей печати цифрового материала на узкой бумажной ленте, устройство печати алфавитно-цифрового материала на широкой бумажной ленте, устройства выдачи результатов на перфокарты и перфоленты и др. В табл. I.3.9 приведены примеры выдачи на узкую печать цифрового материала при решении задач на машине М-222.

Таблица I.3.9

Вид печати	Пояснения
− + + 01 456400000	Десятичное число $+4{,}564 = 0{,}4564 \cdot 10^{+1}$ с признаком
+ − − 02 304000000	Десятичное число $-0{,}00304 = -0{,}304 \cdot 10^{-2}$ без признака
+ − + 04 648945284	$-6489{,}45284 = -0{,}648945284 \cdot 10^{+4}$

В табл. I.3.9 первый слева знак обозначает признак числа, второй — знак числа, третий — знак порядка. Первые слева две цифры — порядок числа, а следующие девять цифр — мантисса числа.

При использовании быстродействующей печати порядок числа со знаком печатается в конце числа. Последнее число табл. I.3.9 будет напечатано так: + −648 945 284 +04.

I.3.26. Математическое обеспечение ЭВМ

Под математическим (программным) обеспечением понимают совокупность алгоритмов и программ, предназначенных для организации, проведения и контроля вычислительного процесса на данной ЭВМ и обнаружения ее неисправностей.

Всякий пользователь ЭВМ должен быть уверен, что машина исправна и все ее устройства работают безошибочно. Правильность работы ЭВМ и всех ее устройств обычно устанавливают с помощью тестовых и диагностических программ, комплекс которых с соответствующими инструкциями прилагается к каждой машине.

Для ускорения программирования составляют подпрограммы и стандартные программы для вычислений на конкретных ЭВМ. Примером подпрограмм являются программы для перевода чисел из десятичной системы счисления в двоичную и обратно, программы для извлечения корней из чисел, для вычисления значений тригонометрических функций и др. Такие подпрограммы, представляющие собой некоторую последовательность команд, обычно используются в нескольких местах программы.

Стандартными (типовыми) являются программы: для решения систем линейных алгебраических уравнений, для нахождения обратной матрицы, умножения векторов и др. Составлено много программ для уравнивания геодезических сетей (триангуляции, полигонометрии, нивелирных сетей).

На основе подпрограмм и типовых программ создаются библиотеки стандартных программ (БСП). Картотеки программ имеются в ВЦ и различных учреждениях, например в ЦНИИГАиКе.

Математическое обеспечение должно создавать возможности рациональной и экономной организации и проведения вычислительного процесса. В состав математического обеспечения включают:

1) тестовые и диагностические программы, служащие для установления правильности работы ЭВМ и определения неисправностей ее устройств;

2) библиотеки стандартных, типовых и конкретных программ;

3) комплекс алгоритмов задач, методик программирования, инструкций написания и оформления программ, описаний средств программирования, описаний средств отладки программ, позволяющих эффективно реализовать разработку программ решения конкретных задач на ЭВМ.

Для некоторых полупроводниковых ЭВМ — машин второго поколения (Минск-22, Минск-32 и др.) разработаны достаточно полные БСП, и математическое обеспечение этих машин считается лучшим по сравнению с машинами других марок, хотя и для названных машин математическое обеспечение не всегда удовлетворяет производственные организации.

Если в настоящее время в основном применяются ЭВМ второго поколения и начинают применять машины третьего поколения, то в ближайшие годы будут применяться более совершенные ЭВМ. Более совершенная вычислительная техника требует и более совершенных методов и средств программирования и математического обеспечения ЭВМ. В настоящее время наиболее распространенным методом автоматизации программирования являются различные алгоритмические языки, в связи с применением которых в состав математического обеспечения ЭВМ включаются и трансляторы с этих языков.

На принципы построения нового математического обеспечения ЭВМ влияют не только бурно развивающиеся средства вычислительной техники, но и интенсивно разрабатываемые теории алгоритмических языков и опыт их применения.

На рис. I.3.11 показана структура математического обеспечения ЕС ЭВМ. Операционная система (ОС ЕС) и дисковая операционная система (ДОС ЕС) являются основными; они предназначены для использования во всех совместимых моделях ЕС ЭВМ. ДОС ЕС имеет относительно малую емкость памяти (64—128 Кбайтов).

Она применяется главным образом для обработки экономической информации. ОС ЕС — более мощная система с емкостью памяти для хранения 128—2000 Кбайтов.

В состав операционной системы входят управляющие и обрабатывающие программы. Управляющие программы управляют данными (например обменом данных между оперативной памятью и

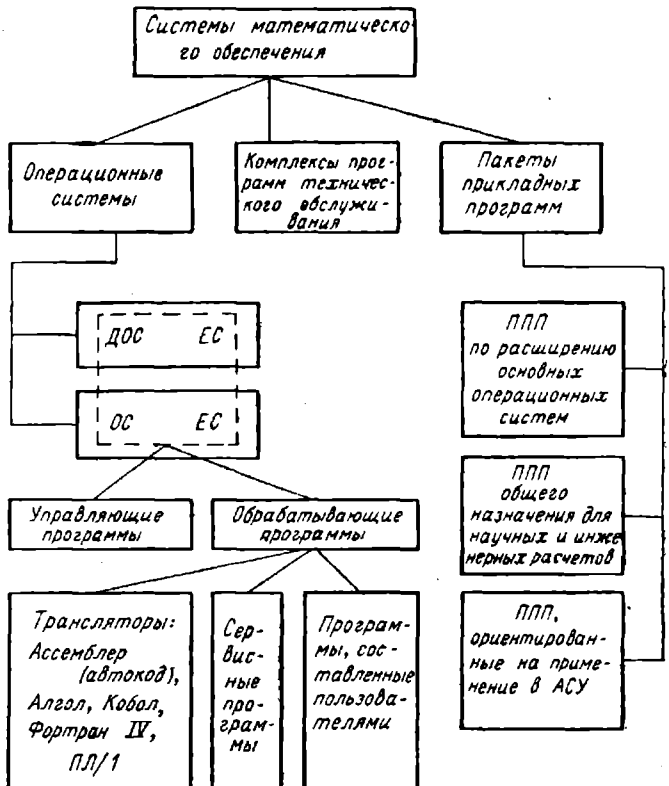


Рис. I.3.11. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ

внешними ЗУ), заданиями (например, организацией очереди выполнения заданий, распределением устройства ввода-вывода) и задачами. В основе управления задачами лежит программа, называемая супервизором, которая удовлетворяет запросы на основную память, обеспечивает службу времени, выполняет прерывания, осуществляет завершение задачи и выполняет ряд других функций.

К обрабатывающим программам относятся трансляторы и сервисные программы, используемые для выполнения наиболее часто встречающихся функций обслуживания при обработке данных.

В систему математического обеспечения входят также комплексы программ технического обслуживания, содержащие различные тест-программы и диагностические программы и пакеты прикладных программ (ППП).

Для некоторых моделей ЕС ЭВМ создаются дополнительные системы обработки, хранения и передачи информации, позволяющие достигать наибольшего экономического эффекта.

I.3.27. Общие сведения об алгоритмических языках

На ручное программирование и контроль программы затрачивается обычно очень много времени по сравнению с машинным временем решения задачи. Часто на непосредственное составление и отладку программы уходят месяцы, а на решение задач по составленным программам требуются только минуты. Программирование — весьма трудоемкий процесс. Поэтому сразу после изобретения ЭВМ стали разрабатывать приемы и методы, позволяющие составлять программы для машин при помощи самих машин, на основе алгоритмических языков и трансляторов с них.

Алгоритмические языки отличаются тем, что программы на них пишутся в удобной обозримой форме и затем с помощью особых программ, называемых трансляторами, переводятся в систему команд той или иной конкретной машины. Каждый алгоритмический язык содержит строго определенный набор символов и правила, позволяющие однозначно переводить (транслировать) программы, записанные на этом языке, в рабочие программы данной машины при помощи самой ЭВМ.

Существующие алгоритмические языки можно разделить на три группы: машинно-ориентированные (автокоды), универсальные и проблемно-ориентированные.

Отличительной особенностью машинно-ориентированных языков является простота трансляторов с них, так как в каждом таком языке учитываются конкретные особенности ЭВМ. Поэтому трансляторы с таких языков занимают мало места в запоминающих устройствах данной машины.

Универсальные языки отличаются тем, что в их структуре не учитываются особенности работы конкретной машины. Эти языки (как и другие языки) имеют свои преимущества и недостатки. К преимуществам таких языков относится простота составления и чтения программ, возможность широкого обмена программами между вычислителями, выполняющими работы на разных ЭВМ. К универсальным языкам относится алгоритмический язык АЛГОЛ-60 и, получивший широкое распространение (особенно в США) язык ФОРТРАН, предназначенный главным образом для решения инженерных и научных задач. Язык ФОРТРАН [6] (как и язык АЛГОЛ) позволяет записывать решение задачи в виде, близком к обычным математическим записям. Например, выражение

$$E = \frac{A \cdot B + C}{D}.$$

на языке ФОРТРАН будет записано в виде: $E = (A \times B + C)/D$.

На базе языка ФОРТРАН разработано много специализированных языков.

Алгоритмический язык АЛГОЛ-60 разработан группой математиков различных стран и предназначен для описания алгоритмов научно-технических задач. В алгоритмическом языке АЛГОЛ-60 используются все строчные и прописные буквы латинского алфавита и различные символы и слова на английском языке. Алгольные выражения кодируются так, чтобы они правильно были расшифрованы транслятором. Математические выражения должны быть записаны в одномерном виде, т. е. при записи выражений не допускается выносить за строку индексы и показатели степеней. Например, математические выражения

$$x_1^3; \quad \left(\frac{A+B}{C}\right)^{3,4}; \quad a^{b+c}; \quad \beta = \frac{-8}{2\sqrt{a}} + \frac{b^2}{4c^3}.$$

на языке АЛГОЛ записывают соответственно так:

$$x[1] \uparrow 3; \quad ((A+B)/C) \uparrow 3{,}4; \quad a \uparrow (b+c);$$

$$\text{Beta:} = -8/(2 \times a \uparrow 0{,}5) + b \uparrow 2/(4 \times c \uparrow 3),$$

где стрелка означает возведение в степень, а знак «: = » означает операцию присваивания.

В течение 1963—1968 гг. группой специалистов международной федерации по обработке информации разработан универсальный язык АЛГОЛ-68 с более расширенной областью применения, чем АЛГОЛ-60. Учитывая международный характер языка, его авторы предусмотрели создание «национальных» версий АЛГОЛа-68, разрешая присоединять к канонической версии дополнительные буквы алфавита и выбирать разные представления для основных символов.

Большое распространение во многих странах получает универсальный язык программирования *PL/1* (*ПЛ/1*), впервые опубликованный в США в 1964 г. Его применяют для решения широкого круга вычислительных, экономических, управленческих, логических и др. задач.

Получили также большое распространение проблемно-ориентированные языки, приспособленные для решения задач в той или иной области. Примером проблемно-ориентированного языка является алгоритмический язык КОБОЛ, приспособленный для обработки экономической информации. Язык КОБОЛ не связан с особенностями конкретной ЭВМ, он имеет и достаточно широкую универсальность.

В последние годы стали широко применять машинно-ориентированные языки (автокоды), позволяющие программисту в полной мере использовать свой опыт непосредственного программирования. Хотя автокоды не обладают такими широкими возможностями, как универсальные языки, они позволяют использовать более компактные трансляторы, значительно уменьшающие время трансляции.

Эффективным средством автоматизации программирования является автокод «Инженер» (АКИ), который широко применяется при автоматизации программирования для ЭВМ «Минск-22». Удобство применения языка АКИ для машины «Минск-22» объясняется также и тем, что он включает все символы международного телеграфного кода, используемые для ввода автокодовой программы в машину. Для записи программы на языке АКИ используются символы: рус-

ские прописные буквы (кроме Ё и ъ), все латинские прописные буквы, цифры десятичной системы и некоторые знаковые символы.

В нашей стране применяются и другие алгоритмические языки, к которым относятся АЛЬФА, АЛГЭК, АЛМО и др.

В Вычислительном центре Сибирского отделения АН СССР в 1966—1967 гг. разработан язык ЭПСИЛОН (принадлежащий к классу машинно-ориентированных языков), который применяется при вычислениях на ЭВМ типа М-220, БЭСМ-6 и др.

В ряде стран получает применение алгоритмический язык СИМУЛА, разработанный в Норвежском вычислительном центре в 1964 г. Язык СИМУЛА основан на языке АЛГОЛ и предназначен для программирования и описания систем с дискретными событиями.

1.3.28. Алгоритмический язык АЛГОЛ

Алгоритмический язык АЛГОЛ получил широкое распространение в различных странах мира для решения задач численного анализа, линейной алгебры, геодезических, астрономических и др. задач. В основу АЛГОЛа положен общепринятый язык математи-

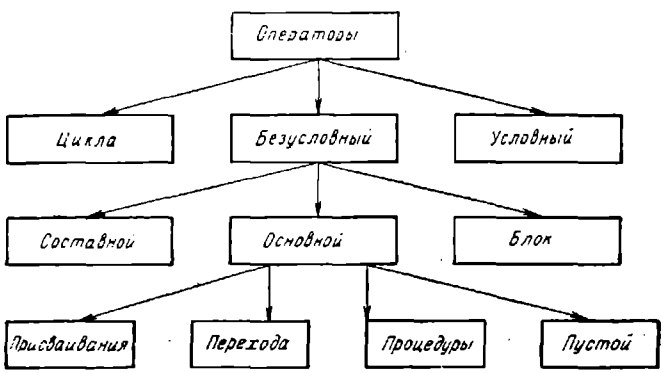


Рис. 1.3.12. Состав операторов языка АЛГОЛ

ческих формул, дополненный различными знаками и словами, необходимыми для формального описания алгоритмов.

Программа на АЛГОЛе состоит из блоков, внутри которых могут быть другие блоки. Каждый блок представляет собой автономный участок программы, содержащий информацию двух видов: описание данных (типа, массива, переключателя, процедуры) и операторов, представляющих собой указания о действиях, предусмотренных в программе. На рис. 1.3.12 показан состав операторов языка АЛГОЛ. В АЛГОЛе используются шесть различных типов операторов: присваивания, перехода, условный, цикла, процедуры и пустой.

Оператор присваивания является одним из основных операторов. Он присваивает тем или иным переменным определенные значения.

В левых частях формул, описывающих синтаксис, на АЛГОЛе ставятся только определяемые переменные, заключенные в угловые

скобки, в правых — записываются определяющие выражения (операции перечисления и операции построения определяющего выражения). Например, запись

$$\langle z \rangle :: = A \mid B \mid C \mid D$$

означает, что z может принимать значения A, или B, или C или D, где знак «:: =» читается «это есть», вертикальная черта используется для отделения символов друг от друга и читается как союз «или».

Запись $z := ABC$ означает, что значению z присваивается конкретно выражение ABC. Символ «: =» называется знаком присваивания.

Оператор перехода служит для изменения естественного порядка выполнения операторов. Естественным порядком выполнения операторов является порядок их записи. Операторы программы, к которым должны совершаться переходы, снабжаются метками, которые записываются перед этими операторами и отделяются от них двоеточием. Общий вид оператора перехода: перейти к L (go to<метка>), где L — метка оператора в каком-нибудь месте алгольной программы.

Если, например, даны операторы

$$x := 5 \times b \uparrow 2 + a;$$

$$z := A[2] + 8;$$

$$\textbf{go to } L;$$

$$u := i + 3;$$

$$L : y := b \uparrow 2 / (4 + c \uparrow 3),$$

то после выполнения первых двух операторов присваивания, в соответствии с третьим оператором перехода, следующим будет выполняться последний оператор.

Условный оператор позволяет изменить последовательность выполнения операторов, в зависимости от результатов выполнения программы, т. е. позволяет сделать условную передачу управления.

Оператор цикла служит для организации циклических программ. Он имеет вид

$$\textbf{for } z : \varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \ldots, \ \varepsilon_n \textbf{ do } P,$$

где **for** (для) и **do** (цикл) — символы АЛГОЛа, z — переменная, P — алгольный оператор, e_i — элементы цикла.

Оператор процедуры служит для обращения к процедуре. Блоки, составные или простые операторы, играющие роль подпрограммы, называются в алгольных программах процедурами (см. пример на стр. 180).

В АЛГОЛе содержится 116 наименований неделимых символов и знаков языка, в число которых входят:

$$\langle \text{буква} \rangle :: = A \mid B \mid C \mid D \mid \ldots \mid Z \mid a \mid b \mid c \mid d \mid \ldots \mid z \mid.$$

Можно использовать буквы русского алфавита, не совпадающие с латинскими буквами.

⟨цифра⟩ : : = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

⟨логическое значение⟩ : : = истинно | ложно.

В эталонном АЛГОЛе используются для этого английские слова **true** и **false**

⟨разделитель⟩ : : = , | · | $_{10}$ | : | ; | : = | ␣ | шаг | до | пока | примечание.

В эталонном АЛГОЛе используются соответствующие английские слова **step, until, while, comment**. Запятая используется для разделения элементов, например индексов $[i, j]$; точка — для отделения целой части числа от дробной; число 10 есть основание степени, которое записывается с понижением; двоеточие служит для разделения граничных пар в описаниях массивов и для отделения пустых операторов (меток) от операторов; точка с запятой используются для разделения отдельных участков программы, которыми являются описания и операторы, знак «: =» используется в операторах присваивания и в операторах циклов, а также в описаниях переключателей; знак ␣ представляет собой пробел, используемый при построении строк; слова **шаг, до, пока** используются при записи операторов цикла. Символ «примечание» транслятором не воспринимается и ставится после слова «начало» или точки с запятой для пояснения текста и понимания программы людьми.

⟨знак арифметической операции⟩ : : = + | − | × | / | ÷ | ↑, где знак «÷» означает операцию целочисленного деления, а знак «↑» — операцию возведения в степень.

⟨знак логической операции⟩ : = ∨ | ∧ | ¬ | ⊃ | ≡

соответственно означает «ИЛИ» (логическое сложение); «И» (логическое умножение); «НЕ» (логическое отрицание); «ИМПЛИКАЦИЯ», «ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ».

⟨операции отношения⟩ : : = < | ≤ | = | ≥ | > | ≠

⟨знак операции следования⟩ : : = **на** | **если** | **то** | **иначе** | **для** | **цикл**, что в эталонном АЛГОЛе соответствует английским словам: **go to, if, then, else, for, do**.

⟨скобка⟩ : : = (|) | [|] | ' (' | ') ' | **начало** | **конец**. Круглые скобки используются для определения порядка действий при вычислении, а квадратные для заключения индексов величин и индексов в указателях, а также в описаниях массивов, при этом индексы отделяются друг от друга запятыми. Например, переменная $X_{i,j,k}$ в АЛГОЛе записывается так: $X[i, j, k]$. Строчные кавычки используются при образовании строк с нечисловыми величинами. Словесные скобки «начало» и «конец» (по английски «**begin**» и «**end**») используются для объединения операторов в блоки и составные операторы.

⟨описание⟩ : : = **целый** | **реальный** | **массив** | **собственный** | **булевский** | **переключатель** | **процедура**, что в эталонном АЛГОЛЕ соответствует английским словам **integer, real, array, own, boolean, switch, procedure.**

При помощи описаний транслятор получает информацию для установления свойств описанных величин и распределения памяти машины.

<спецификатор> : : = строка | метка | значение, что в английской записи соответствует словам **string**, **label**, **value**.

Спецификаторы используются для описания типов величин в алгоритмах.

В АЛГОЛ-программах широко используются идентификаторы, представляющие собой любую последовательность букв или цифр, начинающуюся с буквы. Идентификаторы служат для обозначения различных величин: постоянных коэффициентов, функций, массивов, меток, переключателей, процедур. Описание одного типа идентификаторов от другого отделяются точкой с запятой. Например, для обозначения действительных переменных (**real**) и для обозначения целых (**integer**) идентификаторы можно записать так: **real** a2, a3, a5, a9; **integer** i, k, l; но смысл не изменится, если запись сделать так: **real** a2, a3; **integer** i; **real** a5, a9; **integer** k, l; или в каком-нибудь другом произвольном порядке. Сама программа представляет собой блок, начинается символом **begin** и заканчивается символом **end**.

Пример. Составить стандартную АЛГОЛ-программу для вычисления полинома

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

в котором степень и коэффициенты a_i заданы.

Такая программа имеет вид описания процедуры **Procedure** polinom (p, x, power, coeff); **value** power; **integer** power; **real** array coeff [0: power]; **real** p, x; **begin integer** i; i : = power; p: = coeff [i] × x; **for** i: = power — 1 **step** — 1 **until** 1 **do**

p : = (P + coeff [i]) × x;
i : = 0; p: = p + coeff [i] **end.**

Для автоматического ввода в машину данных, зафиксированных на перфокартах или перфолентах, и для вывода результатов вычислений на печать используются команды ввода (**read**) и печати (**print**), которые записываются так:

read (список идентификаторов);
print (список идентификаторов).

В списках, заключенных в круглые скобки, перечисляются идентификаторы переменных, численные значения которых зафиксированы на носителе информации.

В язык АЛГОЛ введены следующие обозначения стандартных функций:

sqrt (A) — квадратичный корень из значения A ($\sqrt{A}$),
abs (A) — абсолютное значение A (| A |),
sin (A) — синус с аргументом в радианах (**sin** A),
cos (A) — косинус с аргументом в радианах (**cos** A),
arctg (A) — арктангенс для значений от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ (**arctg** A),
ln (A) — натуральный логарифм (**ln** A),
exp (A) — показательная функция с основанием e (e^A),
entier(A) — целая часть A,

sign (A) — знак A: **sign** (A) $= \begin{cases} +1 \text{ при } A > 0 \\ 0 \text{ при } A = 0 \\ -1 \text{ при } A < 0. \end{cases}$

Например, математические выражения

$$\ln x + y^n x; \quad |K - e^{3 \sin x}|; \quad \frac{4 \cos x}{\sqrt{K^2+8}}$$

на АЛГОЛе записываются так:

$$\ln(x)+y \uparrow n \times x; \qquad \mathrm{abs}(K-\exp(3 \times \sin(x)));$$

$$4 \times \cos(x)/\mathrm{sqrt}(K \uparrow 2+8).$$

I.3.29. Алгоритмический язык ФОРТРАН

Язык ФОРТРАН получил широкое распространение сначала в США, а затем в ряде других стран. С ФОРТРАНа разработаны трансляторы для ЕС ЭВМ. Язык ФОРТРАН быстро развивается. В настоящее время используется ФОРТРАН IV. Слова и выражения ФОРТРАНа составляются из 26-ти заглавных букв латинского алфавита, десяти арабских цифр и специальных символов. К специальным символам ФОРТРАНа относятся «+» (плюс); «—» (минус); «*» (знак умножения); «,» (запятая); «.» (десятичная точка; «/» (знак деления); «=» (равно); «()» (скобки); «**» (знак возведения в степень).

Символ «=» является знаком операции присваивания. Запятая используется как разделитель в списках аргументов и индексов.

Идентификаторы в ФОРТРАНе составляются из наборов букв и знаков, включающих от одного до шести символов; первым элементом должна быть буква.

В ФОРТРАНе используются следующие обозначения стандартных функций:

SQRT (A) — квадратный корень из A ($\sqrt{A}$);
SIN (A) — синус с аргументом в радианах (sin A);
COS (A) — косинус с аргументом в радианах (cos A);
ARCTG (A) — арктангенс с аргументом в радианах (arctg A);
LOG (A) — натуральный логарифм (ln A);
EXP (A) — показательная функция с основанием e (e^A);
ABS (A) — абсолютное значение A ($|A|$).

Например, квадратный корень из $1/B^{2.5}(S/18)^p$ на ФОРТРАНе надо записать так:

SQRT (1/B**2.5*(S/18.0)**p).

Программа решения задачи, записанная на языке ФОРТРАН, состоит из последовательности операторов. Арифметический оператор $a = b$ есть вычисления, выполняя которые ЭВМ определяет значение выражения в правой части и присваивает это значение переменной в левой части оператора. Оператор вида $N = N + 1$ означает: переменной N присвоить старое значение плюс единица. Оператор ввода информации в ЭВМ READ содержит перечисление переменных, для которых требуется прочесть новые значения, зафиксированные на перфокартах. Оператор вывода PRINT действует так, что значения, передаваемые на печать, перечисляются в том порядке, в каком они должны располагаться в строчке. Оператор этот всегда означает печатание с новой строки. Операторам

READ и PRINT сопутствует оператор FORMAT, который содержит различные сведения о вводимой и выводимой информации.

Оператор безусловного перехода GO TO определяет передачу управления какому-либо оператору, находящемуся в программе. Запись «GO TOn» означает, что управление передается оператору с номером n, находящемуся до или после оператора GO TO. Оператор условного перехода IF записывается в виде

$$\text{IF } (e)\, n_1,\ n_2,\ n_3,$$

где e — некоторое выражение, а n_1, n_2 и n_3 представляют собой номера операторов, при этом если выражение (e) отрицательно, то выполняется оператор с номером n_1, если это выражение равно нулю, то n_2, а если оно положительно, то выполняется оператор с номером n_3.

Кроме арифметических, в ФОРТРАНе используются логические (булевы) выражения.

Операторы PAUSE и STOP записываются в случаях, когда требуется приостановить выполнение программы.

Оператор END записывается в конце программы, указывая, что закончилась программа или подпрограмма.

С помощью оператора DO в программе организуются циклы. Этот оператор записывается в виде

$$n\ \text{DO}\ mi = j_1,\ j_2,\ j_3,$$

где n — номер оператора DO, m — номер некоторого оператора, указывающего предел действия оператора DO, i — целая переменная без индексов, а j_1, j_2, j_3 — целые числа либо целые переменные без индексов.

Описательный (неисполнимый) оператор DIMENSION применяется для различных указаний, например, для указания размеров массивов, которые используются в программе. Запись DIMENSION A (20), B (2, 3, 5) означает, что под массив A отводится 20 ячеек, а под массив B — 30 ячеек памяти машины.

В алгоритмическом языке ФОРТРАН используются кроме перечисленных и некоторые другие операторы и применяются установленные правила записи программ, с которыми можно ознакомиться в работе [6].

Пример. Программа для вычисления площадей участков (в гектарах) по формуле

$$P = \frac{1}{20\,000} \sum_{k=1}^{n} X_k (Y_{k+1} - Y_{k-1}) \qquad (\text{I.3.7})$$

на языке ФОРТРАН будет иметь вид, показанный на рис. I.3.13.

Программа начинается с управляющей перфокарты NAME, в которой указывается название программы. Вся программа состоит из одного блока, который начинается с названия ПЛОЩ и заканчивается оператором END. Оператор DIMENSION X (200), У (200) указывает транслятору на загрузку оперативной памяти исходными данными для решения одного варианта, предполагая, что количество вариантов будет не более 200. Количество исходных данных (количество точек) будет меняться от варианта к варианту.

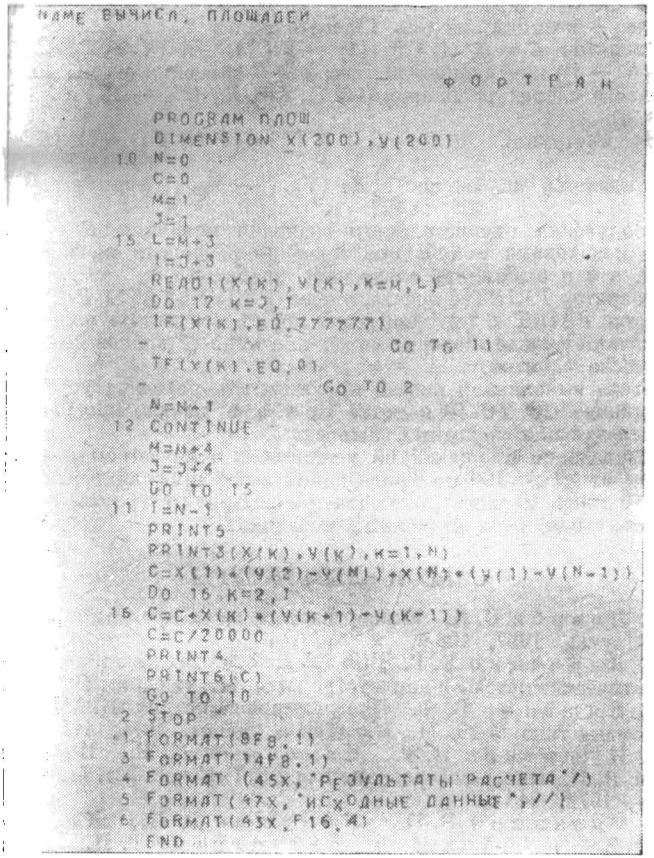


Рис. I.3.13. Контрольная печать отперфорированной программы для вычисления площадей по координатам точек

В программе приняты следующие обозначения для переменных

N — количество заданных переменных в исходных данных (X_k, Y_k);

k — значение индекса переменных X и Y;

C — накопление результата вычисления по формуле (I,3,7);

I, J, L, M — вспомогательные переменные.

Длина вводимого слова занимает 6 позиций, из них 1 — десятичная и 5 — целые. В конце массива исходных данных набивается число 777777, которое определяет конец варианта.

Операторы PRINT 5 и PRINT 3 осуществляют печать исходных данных, причем оператор PRINT 5 печатает текст ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ, а оператор PRINT 3 производит непосредствен-

ную печать исходных данных по 14 чисел в каждой строке, печатая не более 8 позиций, из них 1 десятичная.

Оператор $C = X(1) * Y((2) - Y(N) + X(N) * Y(1) - Y(N-1))$ присваивает переменной C значения суммы первого последнего членов уравнения (I.3.7), т. е. $X_1(Y_2 - Y_n)$ и $X(Y_1 - Y_{n-1})$.

По инструкции 16 $C = C + X(K) * (Y(K+1) - Y(K-1))$ подсчитывается выражение $\sum_{k=1}^{n} X_k (Y_{k+1} - Y_{k-1})$ формулы (I.3.7). Для получения окончательного значения величины P формулы (I.3.7) необходимо полученное значение разделить на константу 20 000, что и выполняет следующий оператор.

Оператор PRINT 4 печатает текст РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА. Оператор PRINT 6 (c) производит печать результата решения C, т. е. печатает число, которое может иметь до 12 знаков до запятой и 4 после запятой.

После выполнения печати производится передача управления инструкцией GO TO 10 к метке 10, т. е. в начало программы на ввод следующих исходных данных.

Вычисление площадей 60 участков с количеством вершин в каждом от 20 до 100 по приведенной выше программе заняло на БЭСМ-6 около 10 минут, включая трансляцию программы и печать (для контроля) всех введенных координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лавров С. А. Универсальный язык программирования. М., «Наука», 1967, 196 с.

2. Ларченко Е. Г. Вычислительная техника и экономико-математические методы в землеустройстве. М., «Недра», 1973, 400 с.

3. Ляшенко В. Ф. Программирование для ЦВМ с системой команд типа М-20. М., «Советское радио», 1974, 414.

4. Кушнерев Н. Т., Неменман М. Я., Цагельский В. И. Программирование для ЭВМ «Минск-32». М., «Статистика», 1972, 248 с.

5. Рязанкин В. Н., Криушин В. Н., Каплинский В. В., Усков Н. Ф., Евстигнеев Г. П. Вычислительные машины и программирование. М., «Статистика», 1969, 344 с.

6. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. М., «Мир», 1969, 582 с.

Раздел II

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ И ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АСТРОНОМИЯ

П.1. КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

И. И. Краснорылов, М. С. Урмаев

А. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

П.1.1. Роль космической геодезии в системе геодезических работ

Космическая геодезия — раздел геодезической науки, в котором для решения научных и практических задач геодезии используются результаты наблюдений искусственных спутников Земли (ИСЗ), космических аппаратов (КА) и Луны.

Задачами космической геодезии являются:

1) определение взаимного положения пунктов в некоторой геодезической системе координат,

2) определение положения центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли,

3) определение координат пунктов в абсолютной системе, отнесенной к центру масс Земли, и создание единой мировой геодезической системы,

4) установление связи между отдельными геодезическими системами,

5) изучение внешнего гравитационного поля и формы Земли,

6) уточнение некоторых фундаментальных геодезических постоянных.

Методы космической геодезии имеют существенные преимущества при решении некоторых задач по сравнению с традиционными. Возникает возможность быстрой передачи координат на расстояния в несколько тысяч километров и создания построений в абсолютной системе координат, отнесенной к центру масс Земли. Определение параметров гравитационного поля по наблюдениям искусственных спутников требует сравнительно небольшого числа станций на поверхности Земли, в то время как использование для этой цели традиционных методов основывается на густой сети пунктов на суше и на море.

Повышение точности лазерных наблюдений создает предпосылки для использования наблюдений спутников при изучении дрейфа континентов и движения земных полюсов. Особенно полезными могут оказаться при этом стационарные ИСЗ, оснащенные уголковыми отражателями. Для решения этих задач можно использовать также отражатели, установленные на Луне,

Применение спутникового динамического метода позволит исследовать возможные изменения гравитационного поля Земли во времени, а также определить фигуру геоида в океанах, причем для успешного решения последней задачи потребуются высотомеры, обеспечивающие высокую точность.

Обобщением и развитием задач и методов космической геодезии является использование искусственных спутников Луны и планет для изучения этих объектов геодезическими методами: создание опорных сетей, определение параметров гравитационных полей, исследование формы, составление топографических и специальных карт.

Задачи космической геодезии обычно подразделяют на геометрические и динамические. В задачах первой группы спутник используется как высокая визирная цель и не требуется знать теорию его движения. При решении геометрических задач используют синхронные или квазисинхронные наблюдения ИСЗ с нескольких пунктов. В динамических задачах теории движения ИСЗ используются в качестве основы для вывода по результатам наблюдений ИСЗ параметров гравитационного поля Земли и определения координат пунктов в абсолютной системе координат, отнесенной к центру масс Земли.

II.1.2. Общие принципы использования ИСЗ в геодезических целях

На рис. II.1.1 $\bar{\rho}_i$ — геоцентрический радиус-вектор ИСЗ, $\bar{r}'_{ki}$ — топоцентрический радиус-вектор ИСЗ, имеющий точку приложения в пункте земной поверхности k, $\bar{R}_k$ — радиус-вектор пункта k, имеющий точку приложения в центре O' некоторого референц-эллипсоида, $\Delta\bar{R}$ — вектор, связывающий положение центра референц-эллипсоида O' (начало геодезической системы) с центром масс Земли O.

Векторы $\bar{\rho}_i$, $\bar{r}'_{ki}$, $\bar{R}_k$ и $\Delta\bar{R}$ связаны соотношением

$$\bar{\rho}_i = \bar{r}'_{ki} + \bar{R}_k + \Delta\bar{R}, \qquad \text{(II.1.1)}$$

которое является фундаментальным уравнением космической геодезии.

Одним из этапов при решении задач космической геодезии может являться определение положений ИСЗ (прямая задача). Решается эта задача с помощью уравнения (II.1.1), если известны координаты пункта наблюдений k (т. е. компоненты вектора $\bar{R}_k$) и для некоторого момента времени определены все три компоненты топоцентрического вектора $\bar{r}'_{ki}$. При этом положение ИСЗ будет определено в той системе координат, в какой заданы координаты пункта наблюдений.

При использовании геодезических координат пунктов (система референц-эллипсоида) возникает еще задача определения положения центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли, т. е. определения вектора $\Delta\bar{R}$ в уравнении (II.1.1).

Гораздо чаще в космической геодезии приходится рассматривать вопрос об определении координат пунктов наблюдений (обратная задача).

В этом случае уравнение (II.1.1) будет иметь вид

$$\overline{R}_k = \overline{\rho}_i - \overline{r}'_{ki} - \Delta\overline{R}. \qquad \text{(II.1.2)}$$

Задачу можно решить, если для некоторого момента известен из теории движения геоцентрический радиус-вектор ИСЗ $\overline{\rho}_i$ и для этого же момента на пункте k получены по результатам наблюдений все три компоненты топоцентрического радиуса-вектора $\overline{r}'_{ki}$, а также известен вектор $\Delta\overline{R}$.

Для создания геодезических построений широко применяются синхронные и квазисинхронные наблюдения ИСЗ. Если для некоторого момента на пунктах k и j синхронно определены компоненты топоцентрических векторов $\overline{r}'_{ki}$ и $\overline{r}'_{ji}$ ИСЗ, то получим два векторных уравнения

$$\left.\begin{aligned} \overline{\rho}_i &= \overline{R}_k + \overline{r}'_{ki} + \Delta\overline{R} \\ \overline{\rho}_i &= \overline{R}_j + \overline{r}'_{ji} + \Delta\overline{R} \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.3)}$$

откуда

$$\overline{R}_j - \overline{R}_k = \overline{r}'_{ki} - \overline{r}'_{ji}. \qquad \text{(II.1.4)}$$

Если координаты одного из пунктов заданы, то уравнение (II.1.4) дает возможность получить координаты другого пункта в системе исходного.

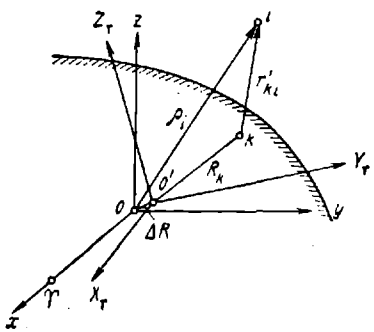


Рис. II.1.1.

Динамический метод космической геодезии заключается в совместном определении параметров гравитационного поля Земли, элементов орбит и координат пунктов наблюдений по совокупности измерений, выполняемых на пунктах. Кроме этого, часто определяют некоторые аппаратурные постоянные, параметры, характеризующие атмосферу, и уточняют значение гравитационного параметра $fM_\oplus$.

Геоцентрический радиус-вектор ИСЗ есть сложная функция элементов орбиты E_l, параметров ψ_k гравитационного поля и времени t

$$\overline{\rho} = \overline{\rho}(E_l, \psi_k, t). \qquad \text{(II.1.5)}$$

Поскольку измеренными величинами в общем случае можно считать топоцентрические радиусы-векторы, то в обобщенной форме можно написать

$$\overline{r}' = \overline{\rho}(E_l, \psi_k, t) - \overline{R}. \qquad \text{(II.1.6)}$$

Линеаризуя уравнение (II.1.6) и полагая безошибочными моменты t регистрации времени, получим

$$\frac{\partial \bar{r}'}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial E} \Delta E_l + \frac{\partial \bar{r}'}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \psi_k} \Delta \psi_k - \frac{\partial \bar{r}'}{\partial \bar{R}} \Delta \bar{R} + (\bar{r}'_0 - \bar{r}'_{\text{изм}}) = \bar{v}_r, \qquad \text{(II.1.7)}$$

где ΔE_l, $\Delta \psi_k$, $\Delta \bar{R}$ — соответственно поправки к элементам орбиты, параметрам гравитационного поля и координатам пунктов, $\bar{r}'_0$ — приближенное значение топоцентрического радиуса-вектора, $\bar{v}_r$ — вектор вероятнейших поправок измеренных величин.

В частном случае, когда не определяются поправки к принятой модели гравитационного поля, надо положить $\psi_k = 0$, тогда получим основное уравнение о р б и т а л ь н о г о м е т о д а

$$\frac{\partial \bar{r}'}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial E} \Delta E_l - \frac{\partial \bar{r}'}{\partial \bar{R}} \Delta \bar{R} + (\bar{r}'_0 - \bar{r}'_{\text{изм}}) = \bar{v}_r, \qquad \text{(II.1.8)}$$

в котором предполагаются известными возмущающие силы, действующие на ИСЗ, и ставится задача совместного определения элементов орбиты и координат пунктов.

Наконец, полагая известными для моментов измерений и элементы орбиты E_l, получим основное уравнение у п р о щ е н н о г о о р б и т а л ь н о г о м е т о д а

$$-\frac{\partial \bar{r}'}{\partial \bar{R}} \Delta \bar{R} + (\bar{r}'_0 - \bar{r}'_{\text{изм}}) = \bar{v}_r. \qquad \text{(II.1.9)}$$

В последнем случае ставится задача определения лишь координат пунктов.

II.1.3. Системы координат

В космической геодезии приходится использовать несколько координатных систем. При обработке фотографических наблюдений, например, топоцентрические прямое восхождение α' и склонение спутника δ' определяются в системе координат, заданной опорными звездами. При этом изображения звезд и спутника на снимке получаются в мгновенной системе координат, а исходными являются координаты опорных звезд в системе некоторого звездного каталога. Эта система непригодна для задания координат пунктов и параметров гравитационного поля, так как в ней они являлись бы функциями времени. Чтобы упомянутые величины не изменялись со временем, надо использовать систему координат, жестко связанную с Землей.

Следует отметить, что система координат, используемая в динамических исследованиях, должна быть инерциальной. Практически инерциальной можно считать систему координат, образованную привязкой к внегалактическим туманностям. Создание такой системы является одной из основных задач астрометрии на современном этапе.

Приведем системы координат, наиболее часто используемые при исследованиях в космической геодезии.

Звездные геоцентрические системы координат

I. $x, y, z\ (\alpha, \delta, \rho)$* — мгновенная геоцентрическая звездная система координат. Ось x направлена в мгновенную точку весеннего равноденствия $\Upsilon_{мгн}$ (рис. II.1.2), ось z — вдоль мгновенной оси вращения Земли, плоскость xoy совпадает с плоскостью мгновенного экватора, ось y дополняет систему до правой. Направление на звезду в этой системе задается прямым восхождением

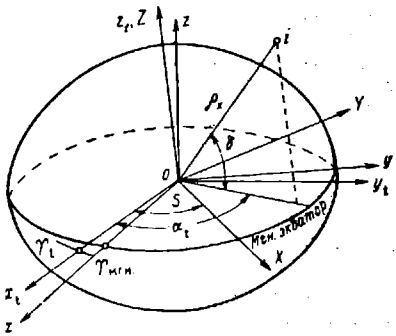


Рис. II.1.2.

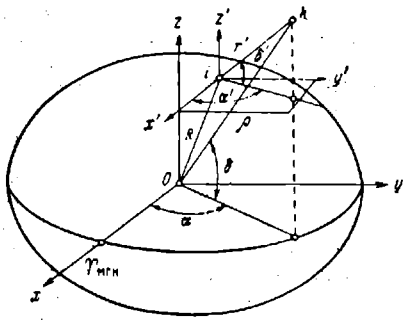


Рис. II.1.3

α $[0 \leqslant \alpha \leqslant 24^h]$ и склонением δ $[-90^\circ \leqslant \delta \leqslant +90^\circ]$, ρ — геоцентрический радиус-вектор.

$$\left.\begin{aligned} &\alpha,\ \delta,\ \rho \to x,\ y,\ z \\ &x = \rho \cos\alpha \cos\delta \\ &y = \rho \sin\alpha \cos\delta \\ &z = \rho \sin\delta \end{aligned}\right\}, \qquad (II.1.10)$$

$$\left.\begin{aligned} &x,\ y,\ z \to \alpha,\ \delta,\ \rho \\ &\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \\ &\operatorname{tg}\delta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (II.1.11)$$

II. $x_t, y_t, z_t\ (\alpha_t, \delta_t, \rho)$ — средняя геоцентрическая звездная система координат. Ось x_t направлена в среднюю точку весеннего равноденствия Υ_t на эпоху t, ось z_t совпадает со средней осью вращения Земли, плоскость $x_t o y_t$ совпадает с плоскостью среднего экватора, ось y_t дополняет систему до правой.

* В скобках указываются соответствующие полярные координаты.

III. x_0, y_0, z_0 (α_0, δ_0, ρ) — средняя геоцентрическая звездная система на эпоху звездного каталога t_0.

IV. X, Y, Z (δ, $\gamma = \alpha - S$, ρ) — гринвичская звездная геоцентрическая система (см. рис. II.1.2). Ось X параллельна плоскости меридиана Гринвича, ось Z направлена вдоль оси вращения Земли, ось Y дополняет систему до правой. Система X, Y, Z участвует во вращении Земли; полярные координаты: склонение δ и угол γ, равный часовому углу T меридиана Гринвича, взятому с обратным знаком,

$$\gamma = -T = (\alpha - S),$$

где S — гринвичское звездное время. В зависимости от решаемых задач гринвичская звездная система может вводиться как мгновенная или как средняя.

Звездные топоцентрические системы координат

V. x', y', z' (α', δ', r') — топоцентрическая звездная мгновенная система координат имеет начало в точке физической поверхности Земли, оси соответственно параллельны осям системы I (рис. II.1.3). Аналогично вводятся две следующие системы.

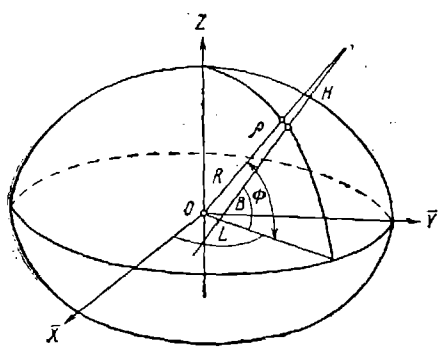


Рис. II.1.4

VI. x_t', y_t', z_t' (α_t', δ_t', r_t') — топоцентрическая звездная средняя система координат.

VII. X', Y', Z' (γ', δ', r') — топоцентрическая гринвичская звездная система координат.

Земные системы координат

VIII. $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ (Λ, Φ, R) (L, B, H)* — квазигеоцентрическая земная система координат (рис. II.1.4). Начало в центре эллип-

* L, B, H — геодезические координаты (долгота, широта, нормальная высота).

соида, принятого в настоящее время за общий земной. Ось $\overline{X}$ направлена в точку пересечения геодезического меридиана Гринвича с плоскостью экватора общего земного эллипсоида, ось $\overline{Z}$ совпадает с малой осью общего земного эллипсоида, плоскость $\overline{XOY}$ совпадает с плоскостью геодезического экватора. Полярные координаты: квазигеоцентрическая долгота Λ — двугранный угол между плоскостями гринвичского и местного меридианов, квазигеоцентрическая широта Φ — угол между квазигеоцентрическим радиусом-вектором R и плоскостью экватора общего земного эллипсоида.

IX. X_Γ, Y_Γ, Z_Γ (L_Γ, B_Γ, H_Γ) — геодезические координаты в системе некоторого референц-эллипсоида.

X. u, v, w (A_Γ, z_Γ, r') — прямоугольная горизонтальная геодезическая система координат (рис. II.1.5). Начало этой системы

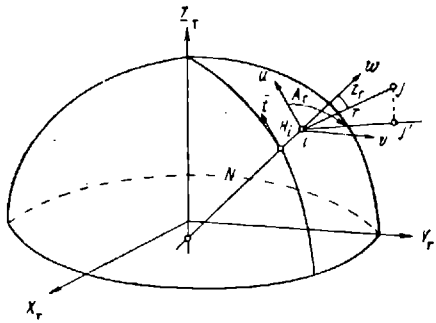


Рис. II.1.5

находится в точке физической поверхности Земли, ось u параллельна касательной к геодезическому меридиану и направлена на север, ось w направлена вдоль нормали к референц-эллипсоиду и положительна в направлении от центра, ось v дополняет систему до правой. Полярные координаты: геодезический азимут A_Γ, геодезическое зенитное расстояние z_Γ и расстояние r' от текущей точки до начала координат.

XI. φ, λ, H^g — астрономические координаты: астрономическая долгота λ — двугранный угол между плоскостями гринвичского и местного астрономических меридианов. Плоскость астрономического меридиана проходит через отвесную линию в заданной точке и параллельна оси вращения Земли; астрономическая широта φ — угол между отвесной линией в заданной точке и плоскостью экватора; ортометрическая высота H^g — расстояние по отвесной линии от точки на физической поверхности Земли до поверхности геоида.

XII. $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ (A, $\overline{z}$, r') — астрономическая прямоугольная горизонтальная система координат, в которой ось u параллельна касательной к астрономическому меридиану и положительна к северу, ось $\overline{w}$ направлена по отвесной линии и положительна в сторону от центра Земли, ось $\overline{v}$ дополняет систему до правой.

Полярные координаты: астрономический азимут A, астрономическое зенитное расстояние z и расстояние r' от текущей точки до начала координат.

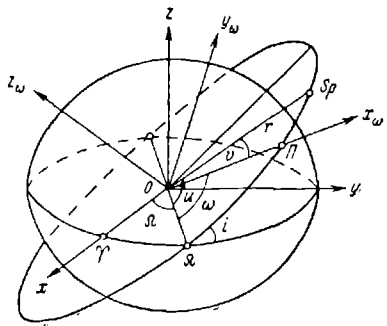


Рис. II.1.6

XIII. $x_\omega, y_\omega, z_\omega$ — орбитальная система координат (рис. II.1.6). Начало в центре масс Земли. Ось x_ω направлена в перицентр орбиты, ось z_ω перпендикулярна к плоскости орбиты, ось y_ω в плоскости орбиты дополняет систему до правой. Возможны орбитальные системы с другой ориентацией осей, например, x_Ω, y_Ω, z_Ω и т. д. Здесь обозначено через Ω восходящий узел орбиты, ω — аргумент перицентра (см. II.1.6).

XIV. x_s, y_s, z_s — спутникоцентрическая система координат. Ось y_s (радиальная) направлена к центру масс центрального тела, ось x_s (трансверсальная) — перпендикулярно к y_s в плоскости орбиты в направлении движения спутника, ось z_s (бинормальная) — перпендикулярна к плоскости орбиты (положительна к северу). Единичные векторы вдоль осей x_s, y_s, z_s часто обозначаются соответственно $\overline{T}$, $\overline{S}$ и $\overline{W}$.

II.1.4. Преобразования систем координат

1. От средней звездной системы на эпоху t_0 звездного каталога α_0, δ_0 (x_0, y_0, z_0) к средней звездной α_t, δ_t (x_t, y_t, z_t) на эпоху t. Выписывают из каталога координаты звезды α_0 и δ_0 и исправляют их поправками за собственное движение от эпохи каталога t_0 до эпохи t. Далее вычисляют направляющие косинусы направления на звезду

$$\left.\begin{aligned} l_0 &= \cos\alpha_0 \cos\delta_0 \\ m_0 &= \sin\alpha_0 \cos\delta_0 \\ n_0 &= \sin\delta_0 \end{aligned}\right\}^{*}. \qquad (II.1.12)$$

Влияние прецессии учитывается с помощью формулы

$$\begin{bmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_0 \\ m_0 \\ n_0 \end{bmatrix}, \qquad (II.1.13)$$

* В формуле (II.1.12) α_0 и δ_0 — средние координаты на эпоху t_0, исправленные за собственное движение.

где

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -\sin\xi_0 \sin z + \cos\xi_0 \cos z \cos\Theta \\ b_1 &= -\cos\xi_0 \sin z - \sin\xi_0 \cos z \cos\Theta \\ c_1 &= -\cos z \sin\Theta \\ a_2 &= +\sin\xi_0 \cos z + \cos\xi_0 \sin z \cos\Theta \\ b_2 &= +\cos\xi_0 \cos z - \sin\xi_0 \sin z \cos\Theta \\ c_2 &= -\sin z \sin\Theta, \\ a_3 &= +\cos\xi_0 \sin\Theta \\ b_3 &= -\sin\xi_0 \sin\Theta \\ c_3 &= +\cos\Theta \end{aligned}\right\}, \qquad (II.1.14)$$

причем

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= (2304'',253 + 1'',397\, t_0)\,\tau + 0'',302\tau^2 + 0'',018\tau^3 \\ z &= (2304'',253 + 1'',397\, t_0)\,\tau + 1'',095\tau^2 + 0'',018\tau^3 \\ \Theta &= (2004'',685 + 0'',853\, t_0)\,\tau - 0'',427\tau^2 - 0'',042\tau^3 \end{aligned}\right\}, \qquad (II.1.15)$$

где $\tau = t - t_0$, t, t_0 и τ задаются в тропических столетиях, считая от 1900.0.

Затем вычисляют α_t и δ_t

$$\left.\begin{aligned} \alpha_t &= \operatorname{arctg}\frac{\overline{m}}{\overline{l}} \\ \delta_t &= \operatorname{arctg}\frac{\overline{n}}{\sqrt{\overline{m}^2 + \overline{l}^2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (II.1.16)$$

2. От средней звездной системы α_t, δ_t на эпоху t к истинной α, δ на эпоху t.

Вначале учитывают влияние нутации

$$\begin{bmatrix} l_{\text{ист}} \\ m_{\text{ист}} \\ n_{\text{ист}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta\psi\cos\varepsilon & -\delta\psi\sin\varepsilon \\ \delta\psi\cos\varepsilon & 1 & -\delta\varepsilon \\ \delta\psi\sin\varepsilon & \delta\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{l} \\ \overline{m} \\ \overline{n} \end{bmatrix}, \qquad (II.1.17)$$

где $\delta\psi$ — долгопериодическая и короткопериодическая нутация по долготе; $\delta\varepsilon$ — долгопериодическая и короткопериодическая нутация в наклонении,

$$\delta\psi = -17'',2327 \sin\Omega - 1'',2729 \sin 2(\Omega + F - D) + 0'',2088 \sin 2\Omega + \\ + 0'',1261 \sin l' - 0'',0497 \sin(2\Omega + l' + 2F - 2D) - \\ - 0'',2037 \sin 2(\Omega + F) + 0'',0675 \sin l; \qquad (II.1.18)$$

$$\delta\varepsilon = +9'',2100 \cos\Omega + 0'',5522 \cos 2(\Omega + F - D) - \\ - 0'',0904 \cos 2\Omega + 0'',0884 \cos 2(\Omega + F). \qquad (II.1.19)$$

Аргументы в формулах для вычисления нутации представляют рядами. По исправленным таблицам движения Луны Брауна эти ряды имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
\Omega &= 259^\circ 10' 59'',79 - 1934^\circ 08' 31'',23T + 7'',48T^2 + 0'',0080T^3\\
l &= 296^\circ 06' 16'',59 + 477\,198^\circ 50' 56'',79T + 33'',09T^2 + 0'',0518T^3\\
l' &= 358^\circ 28' 33'',00 + 35\,999^\circ 02' 59'',10T - 0'',54T^2 - 0'',0120T^3\\
F &= 11^\circ 15' 03'',20 + 483\,202^\circ 01' 30'',54T - 11'',56T^2 - 0'',0012T^3\\
D &= 350^\circ 44' 14'',95 + 445\,267^\circ 06' 51'',18T - 5'',17T^2 + 0'',0068T^3\\
T &= (t - 1900),\ \text{в тропических столетиях}
\end{aligned}\right\} \qquad (II.1.20)$$

Затем вычисляют α и δ

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \operatorname{arctg}\frac{m}{l}\\
\delta &= \operatorname{arctg}\frac{n}{\sqrt{m^2+l^2}}
\end{aligned}\right\}, \qquad (II.1.21)$$

3. От истинных координат α, δ, ρ на эпоху t к гринвичским X, Y, Z

$$\begin{bmatrix} l_{гр}\\ m_{гр}\\ n_{гр}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & x\\ -\sin S & \cos S & -y\\ -x\cos S - y\sin S & -x\sin S + y\cos S & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{ист}\\ m_{ист}\\ n_{ист}\end{bmatrix}, \qquad (II.1.22)$$

$$\left.\begin{aligned}
X &= \rho l_{гр},\\
Y &= \rho m_{гр},\\
Z &= \rho n_{гр},
\end{aligned}\right. \qquad (II.1.22')$$

где S — истинное звездное время в Гринвиче; x, y — координаты мгновенного полюса в радианах.

4. От гринвичских координат X, Y, Z к квазигеоцентрическим $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{X} &= X - \Delta X_0 - \psi_0 Y + \gamma_0 Z\\
\overline{Y} &= Y - \Delta Y_0 + \psi_0 X - \nu_0 Z\\
\overline{Z} &= Z - \Delta Z_0 - \gamma_0 X + \nu_0 Y
\end{aligned}\right\}, \qquad (II.1.23)$$

где ΔX_0, ΔY_0, ΔZ_0 — координаты центра эллипсоида, принятого за общий земной, в гринвичской системе координат, ψ_0, ν_0, γ_0 — Эйлеровы углы.

Обычно полагают $\psi_0 = \nu_0 = \gamma_0 = 0$.

5. От прямоугольных квазигеоцентрических координат $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ к геодезическим B, L, H

$$\operatorname{tg} L = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}, \tag{II.1.24}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\overline{Z} + Ne^2 \sin B}{\overline{X}\cos L + \overline{Y}\sin L}, \tag{II.1.25}$$

$$H = \frac{\overline{X}}{\cos B \cos L} - N = \frac{\overline{Y}}{\cos B \sin L} - N = \\ = \frac{\overline{Z}}{\sin B} - N(1-e^2), \tag{II.1.26}$$

где a — большая полуось эллипсоида, e — эксцентриситет эллипсоида, N — длина внутренней нормали (см. рис. II, 1.5), причем

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \tag{II.1.27}$$

Вычисления по формуле ((II.1.25) ведутся последовательными приближениями.

В первом приближении можно положить

$$\operatorname{tg} B^{(1)} = \frac{\overline{Z}}{\overline{X}\cos L + \overline{Y}\sin L}. \tag{II.1.28}$$

Обратный переход от B, L, H к $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$:

$$\left.\begin{aligned} \overline{X} &= (N+H)\cos B \cos L \\ \overline{Y} &= (N+H)\cos B \sin L \\ \overline{Z} &= [N(1-e^2)+H]\sin B \end{aligned}\right\}. \tag{II.1.29}$$

6. От квазигеоцентрических координат $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ к прямоугольным геодезическим горизонтальным u, v, w и далее к геодезическому азимуту $A_г$, зенитному расстоянию $z_г$ и расстоянию r'.

$$\begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin B_i \cos L_i & -\sin B_i \sin L_i & \cos B_i \\ -\sin L_i & \cos L_i & 0 \\ \cos B_i \cos L_i & \cos B_i \sin L_i & \sin B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{X}_j - \overline{X}_i \\ \overline{Y}_j - \overline{Y}_i \\ \overline{Z}_j - \overline{Z}_i \end{bmatrix}, \tag{II.1.30}$$

$$\left.\begin{aligned} r'_{ij} &= \sqrt{v_j^2 + u_j^2 + w_j^2} \\ \operatorname{tg}(A_г)_{ij} &= \frac{v_j}{u_j} \\ \operatorname{tg}(z_г)_{ij} &= \frac{\sqrt{v_j^2 + u_j^2}}{w_j} \end{aligned}\right\}, \tag{II.1.31}$$

где индексом j отмечают координаты текущей точки, а индексом i — координаты начала координат горизонтальной системы.

7. От астрономических широты φ и долготы λ к геодезическим B и L.

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \varphi - B\\ \eta &= (\lambda - L)\cos B\end{aligned}\right\}, \qquad (II.1.32)$$

где ξ — составляющая полного уклонения отвесной линии u в меридиане, η — в плоскости первого вертикала, причем

$$u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \qquad (II.1.33)$$

8. От экваториальных прямоугольных координат x, y, z к орбитальным x_ω, y_ω, z_ω.

$$\begin{bmatrix} x_\omega \\ y_\omega \\ z_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ W_x & W_y & W_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad (II.1.34)$$

где

$$\left.\begin{aligned}P_x &= \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i\\ P_y &= \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i\\ P_z &= \sin\omega\sin i\\ Q_x &= -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i\\ Q_y &= -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i\\ Q_z &= \cos\omega\sin i\\ W_x &= \sin\Omega\sin i\\ W_y &= -\cos\Omega\sin i\\ W_z &= \cos i\end{aligned}\right\}, \qquad (II.1.35)$$

В формулах (II.1.35) ω, Ω, i — элементы орбиты, определения которых будут даны ниже (см. II.1.6, рис. II.1.6).

II.1.5. Системы измерения времени

Промежуток времени, в течение которого Земля совершает один оборот вокруг своей оси относительно направления на какую-нибудь точку в пространстве, называется сутками. Если оборот Земли вокруг своей оси фиксируется относительно направления на точку весеннего равноденствия, то это — звездные сутки; при направлении на центр видимого диска Солнца, смещенный годичной аберрацией — истинные солнечные сутки; при направлении на «среднее солнце» — средние солнечные сутки.

В зависимости от того, какая точка весеннего равноденствия используется в качестве отсчетного индекса, звездное время подразделяют на среднее, истинное и квазиистинное.

Местное среднее солнечное время гринвичского меридиана называют мировым или всемирным UT - 0. Получив из наблюдений местное звездное время некоторого меридиана и зная долготу последнего, находят UT-0. Вследствие движения полюса полученное из наблюдений в разных точках Земли время UT-0 будет неодинаковым.

С учетом движения полюса имеем

$$\mathrm{UT\text{-}1} = \mathrm{UT\text{-}0} + \Delta\lambda, \qquad (\mathrm{II}.1.36)$$

где

$$\Delta\lambda = \frac{1}{15}(x \sin\lambda_0 + y \cos\lambda_0)\operatorname{tg}\varphi_0. \qquad (\mathrm{II}.1.37)$$

Вследствие неравномерного вращения Земли вокруг своей оси время UT-1 будет неравномерным.

Учет поправки за сезонные неравномерности во вращении Земли дает систему UT-2

$$\mathrm{UT\text{-}2} = \mathrm{UT\text{-}1} + \Delta T_s = \mathrm{UT\text{-}0} + \Delta\lambda + \Delta T_s. \qquad (\mathrm{II}.1.38)$$

Необходимость использования при составлении эфемерид и в других динамических задачах в качестве аргумента равномерно текущего времени привела к введению так называемого эфемеридного времени. Начиная с 1960 г. эфемеридное время является аргументом во многих таблицах «Астрономического ежегодника СССР». Различие эфемеридного времени и времени UT-2 обусловлено — вековыми и нерегулярными изменениями скорости вращения Земли.

Эфемеридное время связано с UT-0 формулой

$$\mathrm{ET} = \mathrm{UT\text{-}0} + \Delta T^{*}, \qquad (\mathrm{II}.1.39)$$

где ΔT определяют из специальных наблюдений Луны.

«Эфемеридная» секунда по определению Международного Бюро мер и весов (1956 г.) — это $^1/_{31\,556\,925{,}9747}$ доля тропического года для 1900 г., январь 0, в 12 часов эфемеридного времени. Таким образом, определение «эфемеридной» секунды связано как с вращением Земли вокруг своей оси, так и с ее движением по орбите вокруг Солнца.

Молекулярные и атомные эталоны частоты позволяют получить шкалу времени, не зависящую от вращения Земли. Атомная секунда определяется как промежуток времени, равный 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующих переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома-изотопа цезия с массовым числом 133 при нулевом магнитном поле. Таким образом получаем шкалу атомного времени (AT). В СССР такая шкала времени обозначается AT-1 и является государственным эталоном времени и частоты. При переходе к ней от UT-2 приняли, что 1 января 1964 г. в 12^h (UT) эти времена совпадали **.

---

* ΔT приводится в § 1 «Объяснений к Астрономическому ежегоднику СССР».

** Практической реализацией времени AT-1 является всемирное координированное время TUC; оно согласуется с TU-2 так, что $(\mathrm{TU}-2-\mathrm{TUC}) < 100$ мсек.

II.1 6. Невозмущенное движение ИСЗ

В первом приближении движение искусственного спутника вокруг Земли можно рассматривать в рамках ограниченной задачи двух тел. При этом полагают, что притягивающее тело (в нашем случае Земля) является шаром со сферическим распределением плотности, а спутник — материальная точка, не притягивающая центральное тело. При таком допущении спутник будет двигаться вокруг Земли в соответствии с законами Кеплера, которые формулируются следующим образом.

Первый закон. Орбита искусственного спутника Земли есть эллипс, в одном из фокусов которого находится центр масс притягивающего тела. Уравнение орбитального эллипса имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos v}; \qquad (II.1.40)$$

$$p = a(1 - e^2),$$

где p — параметр орбиты, a — большая полуось, e — эксцентриситет.

Второй закон. Радиус-вектор спутника за равные промежутки времени описывает равные площади. Другими словами, секториальная скорость спутника есть величина постоянная,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2 \frac{dv}{dt}. \qquad (II.1.41)$$

Третий закон. Квадраты периодов обращения двух спутников относительно центра масс притягивающего тела относятся как кубы больших полуосей их орбит

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \qquad (II.1.42)$$

Период обращения спутника вокруг Земли равен

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{fM_\oplus}}, \qquad (II.1.43)$$

следовательно,

$$\frac{T^3}{a^3} = \frac{4\pi^2}{fM_\oplus} = \text{const}. \qquad (II.1.44)$$

Учитывая притяжение спутником центрального тела, Ньютон уточнил третий закон Кеплера и получил формулу

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot \frac{M + m_1}{M + m_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \qquad (II.1.45)$$

Вместо формулы (II.1.44) в этом случае имеем

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f(M_\oplus + m)}. \qquad (II.1.46)$$

Для того чтобы тело стало искусственным спутником Земли, ему необходимо сообщить некоторую начальную скорость. Минимальное значение этой скорости называют первой космической скоростью

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \tag{II.1.47}$$

где

$$\mu = f(M_\odot + m). \tag{II.1.47'}$$

У поверхности Земли $V_c = 7{,}9$ км/сек.

Скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно преодолело земное притяжение, называют второй космической, или скоростью освобождения.

Эта скорость равна

$$V_p = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}}. \tag{II.1.48}$$

и у поверхности Земли составляет 11,2 км/сек.

Движение спутника вокруг Земли в неподвижной системе координат с началом в ее центре масс определяется системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\mu\frac{x}{\rho^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\mu\frac{y}{\rho^3} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\mu\frac{z}{\rho^3} \end{aligned}\right\}, \tag{II.1.49}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mu &= f(M+m) \\ \rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}\right\}. \tag{II.1.50}$$

Уравнения (II.1.49) называются дифференциальными уравнениями невозмущенного кеплеровского движения. Эти уравнения в цилиндрических координатах (ρ, λ, z) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 &= -\frac{\mu\rho}{r^3} \\ \frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\lambda}{dt}\right) &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\mu z}{r^3} \end{aligned}\right\}, \tag{II.1.51}$$

где

$$r = \sqrt{\rho^2+z^2}. \tag{II.1.52}$$

Если ρ, φ, λ — сферические координаты, определяемые выражениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\cos\lambda \\ y &= \rho\cos\varphi\sin\lambda \\ z &= \rho\sin\varphi \end{aligned}\right\}, \tag{II.1.53}$$

то дифференциальные уравнения невозмущенного движения будут

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\cos^2\varphi &= -\frac{\mu}{\rho^2} \\ \frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\right) + \rho^2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\sin\varphi\cos\varphi &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\lambda}{dt}\cos^2\varphi\right) &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{II.1.54}$$

Интегрирование дифференциальных уравнений невозмущенного кеплеровского движения приводит к совокупности независимых между собой первых интегралов.

Интегралы площадей:

$$\left.\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1 \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2 \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3 \end{aligned}\right\}, \tag{II.1.55}$$

В уравнениях (II.1.55) c_1, c_2, c_3 — постоянные площадей. Интеграл энергии

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2\mu}{\rho} + h, \tag{II.1.56}$$

где произвольную постоянную h называют постоянной энергии. Так как

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V^2, \tag{II.1.57}$$

то вместо (II.1.56) получаем

$$V^2 = \frac{2\mu}{\rho} + h. \tag{II.1.58}$$

Интегралы Лапласа

$$\left.\begin{aligned} x\dot{\rho} - \rho\dot{x} &= f_1 \\ y\dot{\rho} - \rho\dot{y} &= f_2 \\ z\dot{\rho} - \rho\dot{z} &= f_3 \end{aligned}\right\}, \tag{II.1.59}$$

где f_1, f_2, f_3 — постоянные Лапласа.

Между семью полученными интегралами существуют следующие соотношения:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0, \tag{II.1.60}$$

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \mu^2 + h\,(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2). \tag{II.1.61}$$

Отметим также, что

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

есть вектор момента количества движения,

$$f_{\text{Л}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$$

— вектор Лапласа.

Векторы c и $f_{\text{Л}}$ перпендикулярны друг к другу и определяют неизменную плоскость Лапласа. Из семи интегралов (II.1.55), (II.1.56) и (II.1.59) только пять будут независимыми.

Общим интегралом системы (II.1.49) являются системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= x\,(t,\ h,\ g,\ |c|,\ |f|) \\ y &= y\,(t,\ h,\ g,\ |c|,\ |f|) \\ z &= z\,(t,\ h,\ g,\ |c|,\ |f|) \end{aligned}\right\}, \tag{II.1.62}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}\,(t,\ h,\ g,\ |c|,\ |f|) \\ \dot{y} &= \dot{y}\,(t,\ h,\ g,\ |c|,\ |f|) \\ \dot{z} &= \dot{z}\,(t,\ h,\ g,\ |c|,\ |f|) \end{aligned}\right\}, \tag{II.1.63}$$

где $F\,(t,\ h,\ g,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3)$ — функция времени и шести независимых произвольных постоянных.

Произвольные постоянные могут быть определены через так называемые начальные условия, т. е. через координаты $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и составляющие скорости спутника $(\dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0)$ в момент t_0. Однако с практической точки зрения во многих случаях произвольные постоянные целесообразно выразить через элементы орбиты.

Элементы орбиты спутника есть совокупность параметров, характеризующих положение орбиты в пространстве, ее размеры и форму, а также положение спутника на орбите в некоторый момент времени.

Положение орбиты в пространстве характеризуют: Ω — долгота восходящего узла, ω — аргумент перигея, i — угол наклона орбиты (см. рис. II.1.6).

Размеры и форму орбиты характеризуют: a — большая полуось, e — эксцентриситет орбиты.

В качестве шестого элемента может быть использован момент прохождения спутника через перигей τ.

Возможны разные модификации элементов орбиты (табл. II.1.1, рис. II.1.7).

Таблица II.1.1.

a	e	ω	τ
$p=a(1-e^2)$ $q=a(1-e)$ $n=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ $T=\frac{2\pi}{n}$	$\operatorname{Sin}\varphi=e$	$\pi=\Omega-\omega$	$M_0=n(t-\tau)$ $\varepsilon=\Omega+\omega+M_0$ $M=n(t-t_0)+M_0$ $E=M+e\sin E$ $\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}$

В табл. II.1.1 и на рис. II.1.7 p — фокальный параметр, n — среднее движение, T — период обращения спутника, π — долгота перигея, M — средняя аномалия, E — эксцентрическая аномалия, v — истинная аномалия, ε — средняя долгота, $\mu = fM_\oplus$ — гравитационный параметр.

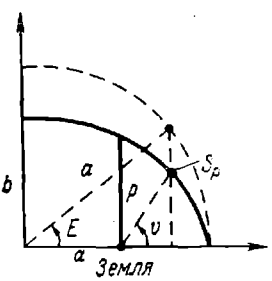


Рис. II.1.7

Связь между эксцентрической и средней аномалиями устанавливается посредством уравнения

$$E - e\sin E = M, \qquad \text{(II.1.64)}$$

называемого уравнением Кеплера. Обычно это уравнение решают методом приближений.

В соответствии с рис. II.1.6.

$$u = v + \omega, \qquad \text{(II.1.65)}$$

где u — аргумент широты.

Между элементами орбиты и постоянными интегрирования существует следующая связь:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\mu p}\sin i \sin\Omega \\ c_2 &= -\sqrt{\mu p}\sin i\cos\Omega \\ c_3 &= \sqrt{\mu p}\cos i \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.66)}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \mu e(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i) \\ f_2 &= \mu e(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i) \\ f_3 &= \mu e\sin\omega\sin i \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.67)}$$

$$\left.\begin{aligned} c &= \sqrt{\mu p} \\ f &= e\mu \\ h &= -\frac{\mu}{p}(1-e^2) \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.68)}$$

Невозмущенное движение ИСЗ может происходить либо по эллиптической, либо по круговой орбите. В случае эллиптической орбиты

$$c\neq 0, \quad 0<e<1, \quad h<0, \quad V_0<\sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}}; \quad f<\mu. \qquad \text{(II.1.69)}$$

Для круговой орбиты соответственно имеем

$$c\neq 0, \quad e=0, \quad h=-\frac{\mu}{\rho_0}<0, \quad V_0=\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad f=0. \qquad \text{(II.1.70)}$$

Для орбит с очень малыми эксцентриситетами вместо элементов e и ω, которые становятся неудобными, часто используют λ_1, λ_2, λ_0:

$$\lambda_1=e\cos\omega, \quad \lambda_2=e\sin\omega, \quad \lambda_0=M_0+\omega. \qquad \text{(II.1.71)}$$

Формулы для представления составляющих радиуса-вектора положения и радиуса-вектора скорости через элементы орбиты имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho(\cos\Omega\cos u-\sin\Omega\sin u\cos i)\\ y&=\rho(\sin\Omega\cos u+\cos\Omega\sin u\cos i)\\ z&=\rho\sin u\sin i \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.72)}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x&=v_\rho(\cos\Omega\cos u-\sin\Omega\sin u\cos i)-\\ &\quad -v_n(\cos\Omega\sin u+\sin\Omega\cos u\cos i)\\ v_y&=v_\rho(\sin\Omega\cos u+\cos\Omega\sin u\cos i)-\\ &\quad -v_n(\sin\Omega\sin u-\cos\Omega\cos u\cos i)\\ v_z&=v_\rho\sin u\sin i+v_n\cos u\sin i \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.73)}$$

где

$$v_\rho=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,e\sin v, \qquad \text{(II.1.74)}$$

$$v_n=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,(1+e\cos v). \qquad \text{(II.1.75)}$$

Основные разложения в ряды в задаче двух тел

$$v=E+2\left(\beta\sin E+\frac{1}{2}\beta^2\sin 2E+\frac{1}{3}\beta^3\sin 3E+\ldots\right), \qquad \text{(II.1.76)}$$

$$\beta=\frac{1}{e}(1-\sqrt{1-e^2})=\frac{1}{2}e+\frac{1}{8}e^3+\frac{1}{16}e^5+\ldots, \qquad \text{(II.1.77)}$$

$$E=v-2\left(\beta\sin v-\frac{1}{2}\beta^2\sin 2v+\frac{1}{3}\beta^3\sin 3v-\ldots\right), \qquad \text{(II.1.78)}$$

$$v = M + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \ldots\right)\sin M + \left(\frac{5}{4}e^2 + \ldots\right)\sin 2M + \left(\frac{13}{12}e^3 + \ldots\right)\sin 3M + \ldots, \quad \text{(II.1.79)}$$

$$E = M + \left(e - \frac{1}{8}e^3 + \ldots\right)\sin M + \left(\frac{1}{2}e^2 - \ldots\right)\sin 2M + \left(\frac{3}{8}e^3 - \ldots\right)\sin 3M + \ldots, \quad \text{(II.1.80)}$$

$$\frac{\rho}{a} = 1 - e\cos M - \frac{e^2}{2}(\cos 2M - 1) - \frac{e^3}{1\cdot 2\cdot 2^2}(3\cos 3M - 3\cos M) - \ldots, \quad \text{(II.1.81)}$$

$$\cos E = \cos M + \frac{e}{2}(\cos 2M - 1) + \frac{e^2}{1\cdot 2\cdot 2^2}(3\cos 3M - 3\cos M) - \ldots \quad \text{(II.1.82)}$$

II.1.7. Возмущенное движение ИСЗ

В зависимости от характера действующих сил возмущения в движении ИСЗ делятся на гравитационные (возмущения от аномального гравитационного поля Земли, от притяжения Луны и Солнца) и возмущения от неконсервативных сил, основными из которых являются сопротивление атмосферы и давление солнечного излучения.

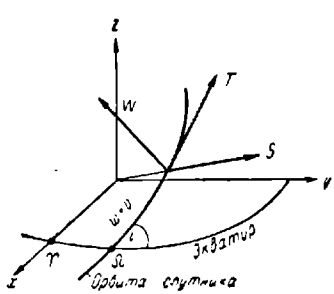


Рис. II.1.8

Для изучения возмущенного движения используют понятие оскулирующей (соприкасающейся) орбиты, которая определяется как кеплерова орбита, элементарная дуга которой в любой момент совпадает с элементарной дугой действительной орбиты. Элементы этой орбиты называются оскулирующими. Изменение оскулирующих эллипсов описывается функциями $p(t)$, $e(t)$, $\Omega(t)$, $\omega(t)$, $M(t)$. Определение этих функций является основной задачей теории возмущенного движения.

В самом общем виде возмущенное движение описывается системой дифференциальных уравнений Лагранжа (2-го рода)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_l} + Q_l, \quad (i = 1, 2, 3), \quad \text{(II.1.83)}$$

где q_i — обобщенная координата, T — кинетическая энергия системы, V — потенциальная функция, Q_i — обобщенная неконсервативная сила.

Если q_i — декартовы координаты (x, y, z) в абсолютной системе прямоугольных координат с началом в центре масс Земли, то уравнения Лагранжа обращаются в систему

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{x}{\rho^3}&=\frac{\partial V}{\partial x}+Q_x\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\mu\frac{y}{\rho^3}&=\frac{\partial V}{\partial y}+Q_y\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\mu\frac{z}{\rho^3}&=\frac{\partial V}{\partial z}+Q_z\end{aligned}\right\}. \qquad (II.1.84)$$

Начальными условиями для интегрирования уравнений (II.1.84) являются координаты x_0, y_0, z_0 и составляющие скорости $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ в начальный момент t_0.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения (в оскулирующих элементах) могут быть представлены через компоненты возмущающего ускорения в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt}&=W\frac{\rho}{\sqrt{\mu p}}\frac{\sin u}{\sin i}\\ \frac{dp}{dt}&=2\sqrt{\frac{p}{\mu}}\rho T\\ \frac{di}{dt}&=\frac{\rho}{\sqrt{\mu p}}W\cos u\\ \frac{de}{dt}&=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[S\sin v+\left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\cos v+e\frac{\rho}{p}T\right]\\ \frac{d\omega}{dt}&=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-\frac{1}{e}S\cos v+\frac{1}{e}\left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\sin v-\frac{\rho}{p}W\operatorname{ctg} i\sin u\right]\\ \frac{d\bar{u}}{dt}&=\frac{\sqrt{\mu p}}{\rho^2}\left[1-\frac{\rho^3}{\mu p}W\operatorname{ctg} i\sin u-\frac{\rho^2}{(\rho)^2}\sqrt{\frac{(p)}{p}}\right]\end{aligned}\right\}, \qquad (II.1.85)$$

где (u), (p) и (ρ) — невозмущенные значения аргумента широты u, фокального параметра p и радиуса-вектора ρ; W, T, S — компоненты возмущающего ускорения соответственно в направлении бинормали, трансверсали и радиуса-вектора (рис. II.1.8); $\bar{u}=u-(u)$.

При малых значениях эксцентриситета e уравнения для de/dt и $d\omega/dt$ в системе (II.1.85) заменяют на уравнения

$$\frac{d\lambda_1}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-S\cos u+T\left(1+\frac{\rho}{p}\right)\sin u+\right.$$
$$\left.+\frac{\rho}{p}\left(T\lambda_1-W\lambda_2\operatorname{ctg} i\sin u\right)\right], \qquad (II.1.86)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[S\sin u+T\left(1+\frac{\rho}{p}\right)\cos u+\right.$$
$$\left.+\frac{\rho}{p}\left(T\lambda_2+W\lambda_1\operatorname{ctg} i\sin u\right)\right], \qquad (II.1.87)$$

где

$$\lambda_1=e\sin\omega,\quad \lambda_2=e\cos\omega,\quad e=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2},\quad \operatorname{tg}\omega=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Система уравнений движения интегрируется при известных начальных условиях.

II.1.8. Методы интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения ИСЗ

Для интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения используются аналитические методы (Пикара, малого параметра), численные методы и аппроксимации решений в виде систем полиномов.

При аналитическом интегрировании в качестве независимой переменной обычно выбирают не t, а одну из быстро меняющихся переменных, чаще всего u или v.

С помощью выражения

$$\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{\mu p}}{\gamma\rho^2}\ \text{или}\ \frac{dt}{du}=\gamma\frac{\rho^2}{\sqrt{\mu p}}, \qquad (II.1.88)$$

где

$$\gamma=\frac{1}{1-\dfrac{\rho^3}{\mu p}W\operatorname{ctg} i\sin u}, \qquad (II.1.89)$$

легко перейти от уравнений (II.1.85) к следующим уравнениям по переменной u:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{du}&=W\frac{\rho^3\gamma}{\mu p}\frac{\sin u}{\sin i}\\
\frac{dp}{du}&=\frac{2\gamma}{\mu}\rho^3T\\
\frac{di}{du}&=\frac{\rho^3\gamma}{\mu p}W\cos u\\
\frac{de}{du}&=\frac{\rho^2\gamma}{\mu}\left[S\sin v+\left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\cos v+e\frac{\rho}{p}T\right]\\
\frac{d\omega}{du}&=\frac{\rho^2\gamma}{\mu e}\left[-S\cos v+\left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\sin v-e\frac{\rho}{p}W\operatorname{ctg} i\sin u\right],\\
\frac{d\overline{u}}{du}&=1-\frac{\rho^2\gamma}{\sqrt{p}}\cdot\frac{\sqrt{(p)}}{(\rho^2)}
\end{aligned}\right\}, \qquad (II.1.90)$$

Аналогично с помощью выражения

$$\frac{dt}{dv}=\frac{\rho^2\gamma_1}{\sqrt{\mu p}} \text{ или } \frac{dv}{dt}=\frac{\sqrt{\mu p}}{\rho^2\gamma_1}, \qquad (II.1.91)$$

где

$$\gamma_1=\frac{1}{1+\frac{\rho^2}{\mu e}S\cos v-\frac{\rho^2}{\mu e}\left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\sin v}, \qquad (II.1.92)$$

можно перейти к уравнениям по переменной v, которые будут иметь такой же вид, как и (II.1.90), но с заменой множителя γ на γ_1.

Система (II.1.85) или (II.1.90) может быть решена методом последовательных приближений, для чего она представляется в интегральной форме. В первом приближении оскулирующие элементы в правых частях полагают постоянными, после чего система распадается на отдельные уравнения, которые решаются с помощью квадратур,

$$\left.\begin{aligned}
\delta\Omega&=\Omega-(\Omega)=\int\frac{\rho^3\gamma}{\mu p}W\frac{\sin u}{\sin i}\,du\\
\delta p&=p-(p)=\int\frac{2\gamma}{\mu}\rho^3T\,du\\
\delta i&=i-(i)=\int\frac{\rho^3\gamma}{\mu p}W\cos u\,du\\
\delta e&=e-(e)=\int\frac{\rho^2\gamma}{\mu}\left[S\sin v+\left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\cos v+e\frac{\rho}{p}T\right]du\\
\delta\omega&=\omega-(\omega)=\int\frac{\rho^2\gamma}{\mu e}\left[-S\cos v+\left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\sin v-\right.\\
&\qquad\left.-e\frac{\rho}{p}W\operatorname{ctg} i\sin u\right]du\\
\delta\bar{u}&=\bar{u}-(\bar{u}_0)=\int\left(1-\frac{\rho^2\gamma}{\sqrt{p}}\frac{\sqrt{(p)}}{(\rho)^2}\right)du
\end{aligned}\right\}, \qquad (II.1.93)$$

где (Ω), (p), (i), (e), (ω) — невозмущенные элементы орбиты, определяемые как $(\Omega)=\Omega_0-\int_{u_0}^{u}W\frac{\rho^3\gamma\sin u}{\mu p\sin i}du$ и т. д., а Ω_0, p_0, ..., ω_0 — начальные значения элементов.

Для интегрирования системы (II.1.85) или (II.1.90) численными методами используются, как правило, экстраполяционный и интерполяционный методы Адамса, при этом начальные («разгонные») точки для применения метода Адамса получаются при помощи метода Рунге-Кутта четвертого порядка.

Для получения интегралов системы (II.190) методом аппроксимирования используют степенные ряды, тригонометрические функции и так называемые гиперболические члены, при этом любой элемент E_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) представляется в виде

$$E_i(t) = \sum_{j=0}^{n} E_j^i (t-t_0)^j + \sum_{j=0}^{n} S_j^i (\alpha_j^i + \beta_j^i t) + \\ + \sum_{j=0}^{n} H_j^i \exp\{H_j^i [\ln(H_j^i - t)]\}. \qquad (II.1.94)$$

II.1.9. Возмущения от гравитационного поля Земли

Одной из основных причин, вызывающих возмущения в движении искусственных спутников Земли, является весьма сложная структура гравитационного поля Земли, определяемая неправильностью ее формы и неравномерным распределением масс в ее недрах.

Одной из распространенных формул, выражающих гравитационное действие Земли на точку во внешнем пространстве, является

$$V = \frac{fM_\oplus}{\rho}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^n P_n(\sin\Phi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^n P_{nm}(\sin\Phi)(J_{nm}\cos m\lambda + K_{nm}\sin m\lambda)\right], \qquad (II.1.95)$$

где Φ — геоцентрическая широта, λ — долгота, $P_n(\sin\Phi)$ — полиномы Лежандра, $P_{nk}(\sin\Phi)$ — присоединенные функции Лежандра, R_0 — средний радиус Земли, J_{nm}, K_{nm} — безразмерные коэффициенты.

Возможно представление гравитационного потенциала в иной форме:

$$V = \frac{fM_\oplus}{\rho}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^n (C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda) \times \right.$$

$$\left. \times P_{nm}(\sin\Phi)\right], \qquad (II.1.95')$$

причем

$$\left.\begin{aligned} -C_{n0} &= J_n \\ -C_{nm} &= J_{nm} \\ -S_{nm} &= K_{nm} \end{aligned}\right\}. \qquad (II.1.95'')$$

Первый член fM/ρ характеризует притяжение шарообразной Земли со сферической симметрией.

Все остальные члены (R) учитывают переход к реальной Земле. Члены, содержащие $P_n(\sin\Phi)$, называют зональными гармониками. Члены, содержащие $P_{nm}(\sin\Phi)$, называют долготными, причем в случае $n \neq m$ имеем дело с так называемыми тессеральными гармониками, а при $n = m$ — с секториальными.

Если на спутник действует только притяжение Земли, гравитационный потенциал который равен

$$V = \frac{fM_\oplus}{\rho} + R, \tag{II.1.96}$$

то возмущения в движении ИСЗ будут обусловлены только величиной R (пертурбационная функция).

Влияние второй зональной гармоники на движение спутника характеризуется величиной возмущающей функции

$$R = -J_2 \frac{fM_\oplus R_0^2}{\rho^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\Phi - \frac{1}{2}\right) \tag{II.1.97}$$

или в виде разложения по степеням эксцентриситета (с точностью до e^3)

$$R = -\frac{1}{2}J_2 fM_\oplus \frac{R_0^2}{a^3}\left(1-\frac{3}{2}s^2\right)\left[1+\frac{3}{2}e^2+3\left(e+\frac{9}{8}e^3\right)\cos M + \right.$$
$$\left. +\frac{9}{2}e^2\cos 2M+\frac{53}{8}e^3\cos 3M\right]+\frac{3}{4}\ J_2 fM_\oplus \frac{R_0^2}{a^3}s^2\times$$
$$\times\left[\frac{1}{48}e^3\cos(M-2\omega)-\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{8}e^3\right)\cos(M+2\omega)+\left(1-\frac{5}{2}e^2\right)\times\right.$$
$$\times\cos(2M+2\omega)+\frac{7}{2}\left(e-\frac{123}{56}e^3\right)\cos(3M+2\omega)+\frac{17}{2}e^2\times$$
$$\left.\times\cos(4M+2\omega)+\frac{845}{48}e^3\cos(5M+2\omega)\right], \tag{II.1.98}$$

где $s = \sin i$.

Действие возмущающей функции (II.1.98) вызывает вековые возмущения в элементах Ω, ω, M_0

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2}J_2 n\left(\frac{R_0}{a}\right)^2\cos i\,(1-e^2)^{-2}, \tag{II.1.99}$$

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4}J_2 n\left(\frac{R_0}{a}\right)^2\frac{5\cos^2 i-1}{(1-e^2)^2}, \tag{II.1.100}$$

$$\dot{M}_0 = \frac{3}{4}J_2 n\left(\frac{R_0}{a}\right)^2\frac{3\cos^2 i-1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{II.1.101}$$

Вследствие возмущающего действия второй зональной гармоники, как видно из приведенных формул, перемещение узла происходит в направлении, обратном движению спутника (регрессия узла). Одновременно в противоположном направлении происходит вращение плоскости орбиты вокруг собственной оси.

Как отмечалось выше, вместо ω и M_0 могут использоваться соответственно элементы π и ε; для них имеем

$$\dot{\pi} = \frac{3}{4} J_2 n \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \frac{5\cos^2 i - 2\cos i - 1}{(1-e^2)^2}, \qquad \text{(II.1.102)}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{3}{4} J_2 n \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \frac{(5+3\sqrt{1-e^2})\cos^2 i - 2\cos i - 1 - \sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^2}, \qquad \text{(II.1.103)}$$

Кроме того, вторая зональная гармоника вызывает короткопериодические возмущения во всех элементах орбиты.

Формулы для вычисления этих возмущений могут быть взяты из [1], [9].

При исследовании движения ИСЗ в течение продолжительных промежутков времени в формулах должны быть учтены влияния вековых возмущений второго порядка и долгопериодические возмущения первого порядка относительно полярного сжатия. Возможность использования при этом формул для орбит с разными эксцентриситетами определяется количеством сохраненных в разложении членов. Имеет место особенность при $e = 0$.

Для орбит с малыми эксцентриситетами при вычислении возмущений от второй зональной гармоники возмущающую функцию выражают в виде

$$R = \frac{1}{2} J_2 \frac{fM_\oplus R_0^2}{a^3}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[1 + 3l\cos\lambda + 3h\sin\lambda + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}(h^2+l^2) + \frac{9}{2}(h^2-l^2)\cos 2\lambda + 9hl\sin 2\lambda\right] -$$

$$- \frac{3}{4} J_2 \frac{fM_\oplus R_0^2}{a^3}\sin^2 i\left[-\frac{1}{2}l\cos\lambda + \frac{1}{2}h\sin\lambda + \cos 2\lambda + \right.$$

$$+ \frac{7}{2}l\cos 3\lambda + \frac{7}{2}h\sin 3\lambda - \frac{5}{2}(h^2+l^2)\cos 2\lambda +$$

$$\left. + \frac{17}{2}(l^2-h^2)\cos 4\lambda + 17hl\sin 4\lambda\right], \qquad \text{(II.1.104)}$$

где

$$h = e\sin(\pi-\Omega), \quad l = e\cos(\pi-\Omega), \quad \lambda = \varepsilon - \Omega + \int_{t_0}^{t} n\,dt.$$

Формулы вычисления возмущений для этого случая можно взять из [9]; там же даются формулы для круговой орбиты.

Зональные гармоники, порядок которых $n \geqslant 2$, вызывают вековые возмущения в элементах Ω, ω, M и долгопериодические —во всех элементах. Вековые возмущения первого порядка вызываются только четными зональными гармониками.

Формулы для вычисления влияния зональных гармоник высших порядков ($n \geqslant 2$) имеют вид

$$\Delta\dot{\Omega} = -n\cos i\left[\frac{15}{32}\gamma_4(2+3e^2)(4-7s^2)-\right.$$

$$-\frac{105}{1024}\gamma_6(8+40e^2+15e^4)(8-36s^2+33s^4)+$$

$$\left.+\frac{315}{32\,768}\gamma_8(16+168e^2+210e^4+35e^6)(64-528s^2+1144s^4-715s^6)\right]; \quad (II.1.105)$$

$$\Delta\dot{\omega} = -\Delta\dot{\Omega}\cos i + n\left[\frac{15}{128}\gamma_4(4+3e^2)(8-40s^2+35s^4)-\right.$$

$$-\frac{105}{2048}\gamma_6(8+20e^2+5e^4)(16-168s^2+378s^4-231s^6)+$$

$$+\frac{315}{262\,144}\gamma_8(64+336e^2+280e^4+35e^6)\times$$

$$\left.\times(128-2304s^2)+9504s^4-13728s^6+6435s^8)\right], \quad (II.1.105')$$

где

$$\gamma_n = J_n\left(\frac{R_0}{p}\right)^n, \quad s=\sin i, \quad p=a(1-e^2).$$

Для вычисления долгопериодических возмущений, обусловленных зональными гармониками, могут быть рекомендованы формулы, приведенные в [1]. Эти формулы для эксцентриситета орбиты имеют следующую структуру:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta e_* = 2\pi\sum_n J_n\left(\frac{R_0}{p}\right)^n e_n\\
&e_2 = 0\\
&e_3 = -\frac{3}{2}(1-e^2)\sin i\cos\omega\left(1-\frac{5}{4}\bar{f}\right)\\
&e_4 = -\frac{45}{16}(1-e^2)\left(1-\frac{7}{6}\bar{f}\right)\bar{f}e\sin 2\omega\\
&e_5 = \frac{15}{4}(1-e^2)\sin i\left[\left(1-\frac{7}{2}\bar{f}+\frac{21}{8}\bar{f}^2\right)\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\times\right.\\
&\quad\left.\times\cos\omega+\frac{7}{8}\left(1-\frac{9}{8}\bar{f}\right)\bar{f}e^2\cos 3\omega\right]
\end{aligned}\right\}, \quad (II.1.105'')$$

где

$$\bar{f} = \sin^2 i.$$

Аналогично можно записать выражения для возмущений в других элементах орбиты.

В формулах вида (II.1. 105″) члены, содержащие синусы или косинусы от ω, 2ω, 3ω, 4ω, . . ., вызывают долгопериодические возмущения. Точные вычисления требуют продолжения рядов в этих формулах.

Долгопериодические возмущения имеют такой же порядок, что и короткопериодические возмущения от второй зональной гармоники. Вековые возмущения от второй зональной гармоники примерно в 1000 раз больше вековых возмущений от зональных гармоник высших порядков.

Тессеральные и секторнальные гармоники вызывают только периодические возмущения. Амплитуды долгопериодических возмущений примерно в 10—15 раз больше амплитуд короткопериодических возмущений. Период долгопериодических возмущений примерно соответствует суткам, формулы для вычисления этих возмущений могут быть взяты из [1], [9].

II.1.10. Влияние притяжения Луны и Солнца

Под влиянием притяжения Луны в элементах орбиты спутника появляются вековые и долгопериодические возмущения, для вычисления которых могут быть использованы формулы, например, из [1], [9].

В этих формулах не учитывается лунный параллакс, а орбита принимается за круговую.

По аналогичным формулам производится вычисление возмущений, обусловленных притяжением Солнца.

Короткопериодическими возмущениями, возникающими по указанной выше причине, пренебрегают, так как они малы.

II.1.11. Возмущения в движении ИСЗ вследствие тормозящего действия атмосферы

Сила сопротивления атмосферы

$$F = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D,$$

где ρ — плотность воздуха, V — скорость спутника относительно атмосферы, S — площадь поперечного сечения спутника, C_D — аэродинамический коэффициент лобового сопротивления.

Для большинства спутников $C_D = 2{,}2$.

Изменения плотности воздуха в первом приближении происходят по закону, выражающемуся экспоненциальной формулой

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right),$$

где H — постоянная (шкала высот), ρ_0 — плотность воздуха в исходной точке, например в точке перигея, h — высота, отсчитанная от исходной точки.

Для вычисления возмущений от сопротивления атмосферы используются формулы из [1], [9].

Возмущения наклона i настолько малы, что их можно не принимать во внимание.

Для учета вращения атмосферы необходимо вместо $\varkappa = SC_D/m_0$ использовать в формулах для подсчета возмущений

$$\varkappa = \left(1 - \frac{r_\pi}{V_\pi}\,\omega \cos i_0\right)^2,$$

где r_π и V_π — радиус-вектор и скорость спутника в перигее, ω — угловая скорость вращения атмосферы.

II.1.12. Влияние светового давления

Сила светового давления определяется формулой

$$F = \frac{CS_0(1+k)}{c}\left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^2 \cos^2\alpha, \qquad \text{(II.1.106)}$$

где C — площадь поперечного сечения спутника, S_0 — мощность солнечной радиации на 1 см^2 земной поверхности в единицу времени (солнечная постоянная), k — коэффициент отражения, R_0 — среднее расстояние от Земли до Солнца, Δ — расстояние между спутником и Солнцем, α — угол падения солнечного луча, c — скорость света.

Формулы для вычисления возмущений от светового давления для случая, если спутник постоянно освещен Солнцем, могут быть взяты из [9]; там же даются формулы для вычисления возмущений с учетом теневого эффекта.

II.1.13. Учет возмущений от аномального гравитационного поля Земли при интегрировании уравнений движения ИСЗ

Потенциал аномалий силы тяжести можно представить в виде

$$V' = \gamma_m \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^{n+1}(\alpha_{nm}\cos m\lambda + \beta_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\sin\Phi), \qquad \text{(II.1.107)}$$

где γ_m — среднее ускорение силы тяжести на поверхности земного эллипсоида, α_{nm}, β_{nm} — постоянные числа [(коэффициенты разложения (II.1.107)].

Эти коэффициенты связаны с соответствующими коэффициентами в формуле (II.1.95) следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{n0} &= -\frac{fM_\oplus}{R_0}J_n\\ \alpha_{nm} &= -\frac{fM_\oplus}{R_0}J_{nm}\\ \beta_{nm} &= -\frac{fM_\oplus}{R_0}K_{nm}\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.1.107')}$$

Компоненты T, S, W возмущающего ускорения, обусловленного действием аномалий, получаются по формулам

$$\left.\begin{aligned} T &= \Delta g_\varphi \cos\theta + \Delta g_\lambda \sin\theta \\ W &= -\Delta g_\lambda \cos\theta + \Delta g_\varphi \sin\theta \\ S &= -\Delta g_\rho \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.108)}$$

где Δg_φ, Δg_λ — проекции ускорения, вызываемые аномалиями, в направлении меридиана (на север) и параллели (на восток) в данной точке, Δg_ρ — в направлении к центру Земли, причем

$$\Delta g_\rho = \frac{\gamma_m}{R_0} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^{n+2} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{n} (\alpha_{nm} \cos m\lambda + \beta_{nm} \sin m\lambda) P_{nm} (\sin \Phi), \qquad \text{(II.1.109)}$$

$$\Delta g_\varphi = \frac{\gamma_m}{R_0} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^{n} (\alpha_{nm} \cos m\lambda + \beta_{nm} \sin m\lambda) \times$$

$$\times \left[P_{n, m+1} (\sin \Phi) - \frac{m \sin \Phi}{\cos \Phi} P_{nm} (\sin \Phi) \right], \qquad \text{(II.1.110)}$$

$$\Delta g_\lambda = \frac{\gamma_m}{R_0 \cos \Phi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^{n+2} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{n} (-\alpha_{nm} \sin m\lambda + \beta_{nm} \cos m\lambda)\, m P_{nm} (\sin \Phi), \qquad \text{(II.1.111)}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \sin i \sec \Phi \cos u \\ \sin\theta &= \cos i \sec \Phi \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.1.112)}$$

Значения T, S, W, определенные формулами (II.1.108), подставляются в дифференциальные уравнения (II.1.85), после чего производится их интегрирование.

II.1.14. Вычисление эфемериды ИСЗ

Эфемеридой называется таблица, в которой для равноотстоящих моментов времени даются топоцентрические экваториальные $\alpha'(t)$ и $\delta'(t)$ или горизонтальные координаты $A(t)$ и $z(t)$ ИСЗ с точностью, необходимой для организации наблюдений на станциях.

Порядок вычисления эфемериды. Интегрируют систему дифференциальных уравнений движения (II.1.85) соответственно для моментов $t_1, t_2, \ldots, t_n$. При этом ограничиваются учетом лишь

первых членов (до четвертого порядка) в разложении аномалий силы тяжести, сопротивление атмосферы учитывают приближенно.

В результате интегрирования получают оскулирующие элементы орбиты.

С помощью уравнения Кеплера $E - e \sin E = M$ вычисляют эксцентрическую аномалию E с использованием итеративной схемы

$$E_{q+1} = E_q - \frac{E_q - (e^{(0)}) \sin E_q - M}{1 - e^{(0)} \cos E_q}, \qquad \text{(II.1.113)}$$

где $e^{(0)}$ — эксцентриситет орбиты в градусах, $e^{(0)} = e\ 57°, 295780$.

Далее вычисляют истинную аномалию v

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e \cos E} \sin E, \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \qquad \text{(II.1.114)}$$

радиус-вектор ρ

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos v} = a(1 - e \cos E), \qquad \text{(II.1.115)}$$

прямоугольные геоцентрические координаты ИСЗ

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \rho [\cos(\omega + v) \cos\Omega - \sin(\omega + v) \sin\Omega \cos i] \\ y_c &= \rho [\cos(\omega + v) \sin\Omega + \sin(\omega + v) \cos\Omega \cos i] \\ z_c &= \rho \sin(\omega + v) \sin i \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.116)}$$

геоцентрическое прямое восхождение и склонение

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_c}{x_c}; \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{z_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}},$$

прямоугольные гринвичские координаты пункта наблюдений

$$\left.\begin{aligned} X_n &= (N + H) \cos B \cos L \\ Y_n &= (N + H) \cos B \sin L \\ Z_n &= [N(1 - e^2) + H] \sin B \\ N &= a(1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.117)}$$

экваториальные геоцентрические координаты пункта наблюдений

$$\left.\begin{aligned} x_n &= X_n \cos S + Y_n \sin S \\ y_n &= -X_n \sin S + Y_n \cos S \\ z_n &= Z_n \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.1.118)}$$

В формулах (II.1.118) S — гринвичское звездное время, причем

$$S = S_0 + \text{UT-1} + \mu\text{UT-1}. \qquad \text{(II.1.119)}$$

Затем вычисляют топоцентрические экваториальные координаты ИСЗ

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{y_c - y_n}{x_c - x_n}, \tag{II.1.120}$$

$$\operatorname{tg}\delta' = \frac{z_c - z_n}{\sqrt{(x_c - x_n)^2 + (y_c - y_n)^2}} \tag{II.1.121}$$

и далее в случае необходимости горизонтальные координаты, азимут A и зенитное расстояние z

$$\operatorname{tg} A = \frac{\cos\delta' \cos s}{-\sin\delta' \cos\varphi + \cos\delta' \sin\varphi \cos s}, \tag{II.1.122}$$

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos s, \tag{II.1.123}$$

$$s = S + \lambda. \tag{II.1.124}$$

II.1.15. Определение орбит ИСЗ

Определение орбиты ИСЗ заключается в нахождении вероятнейших поправок к приближенным начальным условиям интегрирования дифференциальных уравнений движения (II.1.85) по совокупности орбитальных измерений, выполненных на станциях наблюдения за некоторый промежуток времени $t - t_0$.

Приближенные начальные условия обычно известны для момента выхода ИСЗ на орбиту.

Элементы орбиты в любой момент t есть функции начальных условий и времени. Если начальными условиями являются кеплеровские элементы, то

$$\left.\begin{aligned} a &= a\,(a_0,\ e_0,\ i_0,\ \omega_0,\ \Omega_0,\ M_0,\ t) \\ e &= e\,(a_0,\ e_0,\ i_0,\ \omega_0,\ \Omega_0,\ M_0,\ t) \\ i &= i\,(a_0,\ e_0,\ i_0,\ \omega_0,\ \Omega_0,\ M_0,\ t) \\ \omega &= \omega\,(a_0,\ e_0,\ i_0,\ \omega_0,\ \Omega_0,\ M_0,\ t) \\ \Omega &= \Omega\,(a_0,\ e_0,\ i_0,\ \omega_0,\ \Omega_0,\ M_0,\ t) \\ M &= M\,(a_0,\ e_0,\ i_0,\ \omega_0,\ \Omega_0,\ M_0,\ t) \end{aligned}\right\}; \tag{II.1.125}$$

с другой стороны, любая измеренная величина U_{jk}, связывающая положения ИСЗ (k) и станции наблюдения (j), есть функция текущих координат, скорости ИСЗ и времени t

$$U_{jk} = U_{jk}\,(x_k,\ y_k,\ z_k,\ \dot{x}_k,\ \dot{y}_k,\ \dot{z}_k,\ t). \tag{II.1.126}$$

Раскладывая (II.1.126) в ряд Тейлора и переходя к уравнениям поправок, с учетом (II.1.125) получим

$$\sqrt{P_{U_{jk}}} \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial U_{jk}}{\partial \vartheta_i^0} \Delta\vartheta_i^0 + (U_{jk}^0 - U_{jk}^{\text{изм}}) = v_{jk} \sqrt{P_{U_{jk}}}. \tag{II.1.127}$$

где $\Im_i$ — любой из шести элементов, $\Delta\Im_i^0$ — поправка к i-му элементу орбиты, v_{jk} — вероятнейшая поправка измеренного значения U_{jk}, $U_j^n{}_k$ — приближенное значение U_{jk}, $U_{jk}^{изм}$ — измеренное значение U_{jk}, $P_{U_{jk}}$ — вес U_{jk}.

Производные от измеренных величин по начальным значениям элементов $\partial U_{jk}/\partial\Im_i^0$ будут

$$\frac{\partial U_{jk}}{\partial \Im_i^0} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial U_{jk}}{\partial \Im_i} \cdot \frac{\partial \Im_i}{\partial \Im_i^0}. \qquad (II.1.128)$$

Из (II.1.128) следует, что возникает необходимость в вычислении производных $\partial\Im_i/\partial\Im_i^0$ от текущих значений элементов по начальным.

Матрицу производных от текущих элементов по начальным можно приближенно, с учетом только вековых возмущений первого порядка от сжатия, вычислить по формулам

$$\frac{\partial(a,\ e,\ t,\ \omega,\ M,\ \Omega)}{\partial(a_0,\ e_0,\ i_0,\ \omega_0,\ M_0,\ \Omega_0)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(a,\ e,\ i)}{\partial(a_0,\ e_0,\ i_0)} & \dfrac{\partial(a,\ e,\ i)}{\partial(M_0,\ \omega_0,\ \Omega_0)} \\ \dfrac{\partial(M,\ \omega,\ \Omega)}{\partial(a_0,\ e_0,\ i_0)} & \dfrac{\partial(M,\ \omega,\ \Omega)}{\partial(M_0,\ \omega_0,\ \Omega_0)} \end{vmatrix} =$$

$$= \left|\begin{array}{c:c} E & 0 \\ \hdashline K & E \end{array}\right|, \qquad (II.1.129)$$

где

$$K = \begin{vmatrix} -\dfrac{(3-7\gamma)}{2a_0} n & -3n\gamma \dfrac{\cos E_0}{1-e_0\cos E_0} & 6n\gamma \dfrac{\operatorname{ctg} i_0 \sin^2 \Phi_0}{1-3\sin^2\Phi_0} \\ -\dfrac{7}{2a_0}\dot{\omega} & \dfrac{4e_0}{1-e_0^2}\dot{\omega} & 5\dot{\Omega}\sin i_0 \\ -\dfrac{7}{2a_0}\dot{\Omega} & \dfrac{4e_0}{1-e_0^2}\dot{\Omega} & -\dot{\Omega}\operatorname{tg} i_0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times (t-t_0) \qquad (II.1.130)$$

В формуле (II.1.130)

$$\gamma = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_0}{\rho_0}\right)^3 \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 (1-3\sin^2\Phi_0), \qquad (II.1.131)$$

$$M = M_0 + \bar{n}(t-t_0), \qquad (II.1.132)$$

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t-t_0), \qquad (II.1.133)$$

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}(t-t_0), \qquad (II.1.134)$$

$$a = a_0, \qquad (II.1.135)$$

$$e = e_0, \qquad (II.1.136)$$

$$i = i_0, \qquad (II.1.137)$$

$$\bar{n} = n(1-\gamma), \qquad (II.1.138)$$

$\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$ вычисляются соответственно по формулам (II.1.99) и (II.1.100).

Система (II.1.127) решается последовательными приближениями по способу наименьших квадратов до выполнения условия

$$\left| U_{jk}^{0(N)} - U_{jk}^{0(N-1)} \right| \leqslant \varepsilon, \qquad \text{(II.1.139)}$$

где N — номер приближения, ε — заданная точность вычислений.

Приближенные значения U_{jk}^{0} получают следующим образом. С принятыми приближенными начальными условиями $\Im_i^0$ $(i=6)$ интегрируют систему дифференциальных уравнений движения (II.1.85) для момента t_{jk} измерения величины U_{jk}, в результате чего получают приближенные элементы $\bar{\Im}_{0i}$ $(i=6)$ для момента t_{jk}, точно соответствующие принятым $\Im_i^0$. По значениям $\bar{\Im}_{0i}$ вычисляют координаты и компоненты скорости ИСЗ и далее величины U_{jk}^{0}.

В результате всех вычислений получают поправки к элементам орбиты по формуле

$$\Im_i = \bar{\Im}_{0i} + \sum_1^N \Delta\Im_i^0. \qquad \text{(II.1.140)}$$

В. СПУТНИКОВАЯ СФЕРИЧЕСКАЯ АСТРОНОМИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ ВИДИМОСТИ

II.1.16. Движение спутника относительно вращающейся Земли

Формулы для вычисления координат подспутниковых точек спутника следующие:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \arcsin(\sin u \sin i), \\ \lambda &= \Omega_0 + \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} u \cos i) - S + \Delta\Omega \frac{t}{T} \\ S &= S_0 + \omega_3 (t - t_{S_0}) \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.141)}$$

где Ω_0 — начальное значение долготы восходящего узла, S — гринвичское звездное время, $\omega_3 = 7{,}29211 \cdot 10^{-5}$ сек$^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли, $\Delta\Omega$ — процессия орбиты за один оборот, t — время, прошедшее от некоторого начального момента, для которого задано значение Ω_0.

Семейство точек, координаты которых определяются по формулам (II.1.141), образует проекцию траектории спутника на поверхность Земли (трассу полета).

Величины, входящие в формулы (II.1.141), вычисляют следующим образом (табл. II.1.2).

После того как по формуле (II.1.141) подсчитано значение λ_1, для каждого n-го витка имеем

$$\lambda_n = \lambda_1 - (n-1)\left(qT - d\frac{\cos i}{a^2}\right), \qquad \text{(II.1.142)}$$

где $q = 15{,}0411$ градус/час, $d = -2{,}378 \cdot 10^7$ градус $\cdot$ км^2,

Круговая орбита, $e=0$	Эллиптическая орбита, $0<e<1$
$u=2\pi\dfrac{t-t_\Omega}{T}$	$u=\omega+v$
$\Delta\Omega=-\dfrac{2\pi}{\rho^2}\times$	$\omega=\omega_0+\Delta\omega\dfrac{t-t_{\omega_0}}{T}$
$\times\dfrac{\varepsilon}{\mu}\cos i=-A\dfrac{\cos i}{\rho^2}$	$\Delta\omega=\dfrac{\pi}{p^2}\cdot\dfrac{\varepsilon}{\mu}(5\cos^2 i-1)$
$\rho=\sqrt[3]{\mu\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2}$	$t=\tau+\dfrac{E-e\sin E}{n}$
$\varepsilon=2{,}634\cdot10^{10}$ км^5/сек^2	$n=\dfrac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$
$\mu=3{,}98602\cdot10^5$ км^3/сек^2	$\operatorname{tg}\dfrac{E}{2}=\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}$
$A=4{,}15196\cdot10^5$ км^2	$e=\dfrac{r_a-r_\pi}{r_a+r_\pi}$
	$\Delta\Omega=-\dfrac{2\pi}{p^2}\cdot\dfrac{\varepsilon}{\mu}\cos i=$
	$=-A\dfrac{\cos i}{p^2}$
	$p=a(1-e^2)=\rho(1+e\cos v)$
	$\rho=\dfrac{p}{1+e\cos v}=a(1-e\cos E)$

II.1.17. Элементы спутниковой сферической астрономии

Топоцентрическое зенитное расстояние спутника в кульминации

$$\operatorname{tg} z_c'=\frac{\dfrac{\rho}{R_0}\sin z_c}{\dfrac{\rho}{R_0}\cos z_c-1}, \qquad (II.1.143)$$

где

$$\rho=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}, \qquad (II.1.144)$$

z_c — геоцентрическое зенитное расстояние.

Топоцентрическое зенитное расстояние спутника в текущей точке орбиты S

$$\operatorname{tg} z_s'=\frac{\dfrac{\rho}{R_0}\sin z_s}{\dfrac{\rho}{R_0}\cos z_s-1}=\frac{\dfrac{\rho}{R_0}\operatorname{tg} z_c}{\dfrac{\rho}{R_0}\cos\Delta-\sqrt{\cos^2\Delta+\operatorname{tg}^2 z_e}}, \qquad (II.1.145)$$

где

$$\Delta = A_s - A_c. \qquad (II.1.146)$$

Геоцентрическое зенитное расстояние спутника

$$\operatorname{tg} z_s = \frac{\operatorname{tg} z_c}{\cos \Delta}. \qquad (II.1.147)$$

Формулы (II.1.143)—(II.1.147) не учитывают сжатия и вращения Земли.

С учетом сжатия и вращения Земли

$$\operatorname{tg} z_c' = \frac{\sqrt{\frac{\rho^2}{R_0^2} \sin^2 z_c + 2 \frac{\rho}{R_0} \sin (B - \Phi) \sin z_c \cos A_c}}{\frac{\rho}{R_0} \cos z_c - \cos (B - \Phi)}, \qquad (II.1.148)$$

$$\Phi = \operatorname{arc\,tg} [(1 - e^2) \operatorname{tg} B], \qquad (II.1.149)$$

$$\operatorname{tg} z_s' = \frac{\sqrt{\frac{\rho^2}{R_0^2} \operatorname{tg}^2 z_c + 2 \frac{\rho}{R_0} \sin (B - \Phi) \operatorname{tg} z_c \cos A_c \sqrt{\cos^2 \Delta + \operatorname{tg}^2 z_c}}}{\frac{\rho}{R_0} \cos \Delta - \cos (B - \Phi) \sqrt{\cos^2 \Delta + \operatorname{tg}^2 z_c}}. \qquad (II.1.150)$$

Время между двумя последовательными прохождениями спутника через один и тот же меридиан (без учета возмущений) равно

$$\Delta T_M^m = T^m \left(1 + \frac{T^m}{1440} \frac{\cos i}{\sin^2 \Delta\lambda_M + \cos^2 \Delta\lambda_M \cos^2 i}\right), \qquad (II.1.151)$$

где

$$\Delta\lambda_M = \lambda_M - \lambda_\Omega.$$

Изменение угла пересечения проекции траектории спутника на поверхности Земли (принимается за шар) с меридианом места вследствие вращения Земли

$$\Delta Q'' = 2',4 T^m \cos i \operatorname{ctg} Q, \qquad (II.1.152)$$

где Q — угол пересечения проекции траектории с меридианом места для случая неподвижной Земли.

Зависимость сферических координат спутника от времени. Полагая $d\omega/ds = 0$, $de/ds = 0$ и учитывая, что $u = (v + \omega)$, имеем

$$\frac{du}{ds} \cong \frac{dv}{ds} = \frac{dM}{ds} + 2e \cos M \frac{dM}{ds} = \frac{dM}{ds} (1 + 2e \cos M). \qquad (II.1.153)$$

Так как

$$\frac{dM}{ds} \cong \frac{2\pi}{T},$$

то

$$\frac{du}{ds} \cong \frac{2\pi}{T} (1 + 2e \cos M). \qquad (II.1.154)$$

Для геоцентрических координат имеют место соотношения

$$\frac{d\delta}{ds}=\frac{\cos u\sin i}{\cos\delta}\frac{du}{ds}=\frac{\cos i}{\operatorname{tg}Q\cos\delta}\frac{du}{ds}, \qquad (II.1.155)$$

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\cos^3\Delta\alpha\cos i}{\cos^2 u}\frac{du}{ds}=\frac{\cos i}{\cos^2\delta}\frac{du}{ds}=\frac{\sin^2 Q}{\cos i}\frac{du}{ds}, \qquad (II.1.156)$$

$$\frac{dz}{ds}=-\cos\varphi\sin A\left(1-\frac{d\alpha}{ds}\right)-\cos q\frac{d\delta}{ds}=$$

$$=-\cos\varphi\sin A-\cos(Q-q)\frac{du}{ds}, \qquad (II.1.157)$$

$$\frac{dA}{ds}=\frac{\cos\delta\cos q}{\sin z}\left(1-\frac{d\alpha}{ds}\right)+\frac{\cos z\sin A\cos q+\sin\delta\sin t}{\sin z\cos A}\frac{d\delta}{ds}=$$

$$=\frac{\cos\delta\cos q}{\sin z}-\frac{\sin(Q-q)}{\sin z}\frac{du}{ds}. \qquad (II.1.158)$$

В двух последних формулах и далее q — параллактический угол в параллактическом треугольнике, A — азимут, отсчитанный от направления на север.

Для топоцентрических координат

$$\frac{dz'}{ds}=\frac{\left(\cos z-\frac{\rho}{R_0}\right)\cos\varphi\sin A}{\frac{\rho}{R_0}-2\cos z+\frac{R_0}{\rho}}+\frac{\left(\frac{\rho}{R_0}-\cos z\right)\sin(Q-q)}{\frac{\rho}{R_0}-2\cos z+\frac{R_0}{\rho}}\frac{du}{ds} \qquad (II.1.159)$$

и, принимая поверхность Земли за сферу,

$$A'=A,$$

$$\frac{dA'}{ds}=\frac{dA}{ds}. \qquad (II.1.160)$$

Геоцентрические зенитные расстояния и азимуты можно вычислить с помощью аналитических выражений

$$z=z_0-\left[\cos(Q-q)\frac{1440}{T}+\cos\varphi\sin A\right]\Delta s+\ldots, \qquad (II.1.161)$$

$$A=A_0-\left[\frac{\sin(Q-q)}{\sin z}\frac{1440}{T}+\frac{\cos\delta\cos q}{\sin z}\right]\Delta s+\ldots \qquad (II.1.162)$$

Аналогично получаются в виде разложения в ряд значения геоцентрических α и δ

$$\alpha=\alpha_0+\frac{\sin^2 Q}{\cos i}\frac{1440}{T^m}\Delta s+\ldots, \qquad (II.1.163)$$

$$\delta=\delta_0+\frac{\cos i}{\operatorname{tg}Q\cos\delta}\frac{1440}{T^m}\Delta s+\ldots \qquad (II.1.164)$$

Для вычисления азимута и величины $\Delta u = u_\sigma - u_S$ спутника в момент восхода в соответствии с рис. II.1.9 применяются формулы

$$\sin(A-M) = \pm \operatorname{tg}\Delta\varphi \operatorname{ctg}\theta \sin M, \qquad (II.1.165)$$

$$\cos(\Delta u \pm N) = \cos\theta \cos N \sec\Delta\varphi, \qquad (II.1.166)$$

$$\operatorname{tg} M = \cos\Delta\varphi \operatorname{tg} Q_\sigma, \qquad (II.1.167)$$

$$\operatorname{tg} N = \operatorname{tg}\Delta\varphi \cos Q_\sigma, \qquad (II.1.168)$$

а для захода соответственно получим

$$\sin(A-M) = \pm \operatorname{tg}\Delta\varphi \operatorname{ctg}\theta \sin M, \qquad (II.1.169)$$

$$\cos(\Delta u \mp N) = \cos\theta \cos N \sec\Delta\varphi. \qquad (II.1.170)$$

Вторые знаки в формулах (II.1.165), (II.1.166), (II.1.169), (II.1.170) будут иметь место для случая, когда точка M (см. рис. II.1.9) лежит южнее точки σ.

Если восход (заход) спутника происходит вблизи нисходящего узла, применяют те же формулы, но угол Q_σ отсчитывается от южной части меридиана к дуге орбиты по ходу часовой стрелки.

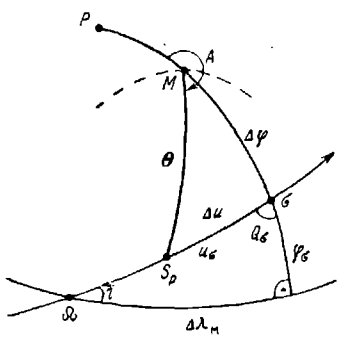


Рис. II.1.9

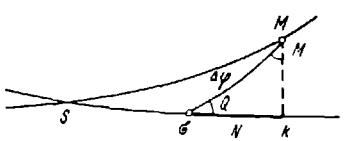


Рис. II.1.10

Вычисление времени восхода (захода) ведется в такой последовательности:

$$\left.\begin{aligned}
u_S &= u_\sigma - \Delta u \\
\cos u_\sigma &= \operatorname{ctg} i \operatorname{ctg} Q_M \\
u_S &= \arccos(\operatorname{ctg} i \operatorname{ctg} Q) - \Delta u \\
u_S &= \operatorname{arcctg}(\cos i \operatorname{ctg}\Delta\lambda_M) - \Delta u \\
v &= u_S - \omega \\
T_{\substack{\text{восх}\\(\text{зах})}} &= \frac{MP}{2\pi} + \tau \\
T_{\substack{\text{восх}\\(\text{зах})}} &= \frac{T}{1440}\left[u_S - \omega + 2e\sin(u_S - \omega)\right] + \tau
\end{aligned}\right\}. \qquad (II.1.171)$$

Геометрическая интерпретация величин M и N ясна из рис. II.1.10.

Время, в течение которого спутник находится над горизонтом пункта наблюдений, вычисляется по формулам (для неподвижной Земли)

$$T_{\text{зах}} - T_{\text{восх}} = \Delta T_{2\tau}, \tag{II.1.172}$$

$$\Delta T_{2\tau} = \frac{T}{1440}\,[2\tau + 4e\,(\cos u_\sigma \cos\tau \cos N - \sin u_\sigma \sin\tau \sin N)], \tag{II.1.173}$$

$$\cos\tau = \cos\theta \cos N \sec\Delta\varphi, \tag{II.1.174}$$

$$\sec\theta = \frac{\rho}{R_0}. \tag{II.1.175}$$

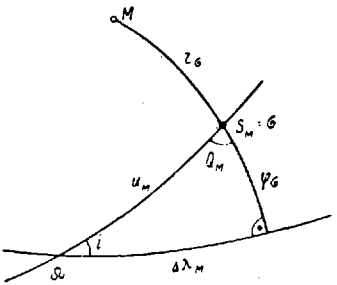


Рис. II.1.11

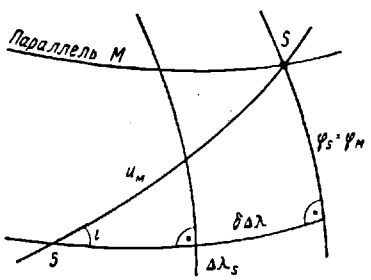


Рис. II.1.12

В момент кульминации ИСЗ в пункте M

$$u_c = u_{\text{восх}} + \arccos(\cos\theta \cos N \sec\Delta\varphi_M) =$$

$$= \operatorname{arcctg}(\cos i \operatorname{ctg}\Delta\lambda_M) + \operatorname{arctg}(\cos Q \operatorname{tg}\Delta\varphi_M); \tag{II.1.176}$$

$$A_c = \arcsin(\operatorname{tg}\Delta\varphi_M \operatorname{ctg}\theta \sin M) = 180^\circ - \operatorname{arcctg}(\cos\Delta\varphi_M \operatorname{tg} Q), \tag{II.1.177}$$

где

$$\Delta\lambda_M = \lambda_M - \lambda_\Omega; \quad \Delta\varphi_M = \varphi_M - \operatorname{arctg}(\sin\Delta\lambda_M \operatorname{tg} i). \tag{II.1.178}$$

При прохождении спутника через меридиан места (рис. II.1.11) $A = 0$ или $A = 180^\circ$
геоцентрическое зенитное расстояние

$$z_\sigma = \Delta\varphi_M - \varphi_\sigma, \tag{II.1.179}$$

$$\cos\varphi_\sigma = \cos i \operatorname{cosec} Q_M, \tag{II.1.180}$$

$$Q_M = \arccos(\sin i \cos\Delta\lambda_M); \tag{II.1.181}$$

момент прохождения

$$T_M = \tau + \frac{T}{1440}\,[u_M - \omega + 2e\sin(u_M - \omega)], \qquad \text{(II.1.182)}$$

$$\operatorname{tg} u_M = \operatorname{tg} u_s = \operatorname{tg} \Delta\lambda_M \sec i. \qquad \text{(II.1.183)}$$

При прохождении спутника через параллель места (рис. II.1.12)

$$\operatorname{tg} A = \pm \frac{\sin\delta\,\Delta\lambda}{\sin\varphi\,(1-\cos\delta\,\Delta\lambda)}\Bigg\}^{+E}_{-W}, \qquad \text{(II.1.184)}$$

геоцентрическое зенитное расстояние

$$z_{\text{пар}} = \sin\delta\,\Delta\lambda\cos\varphi_s \quad (\text{для } A \cong |\,90^\circ\,|), \qquad \text{(II.1.185)}$$

в общем случае

$$\cos z_{\text{пар}} = \sin^2\varphi_s + \cos^2\varphi_s\cos\delta\,\Delta\lambda, \qquad \text{(II.1.186)}$$

$$\delta\,\Delta\lambda = \lambda_s - \lambda_M, \qquad \text{(II.1.187)}$$

момент прохождения

$$T_{\text{пар}} = \tau + \frac{T}{1440}\,[u_M - \omega + 2e\sin(u_M - \omega)], \qquad \text{(II.1.188)}$$

$$\sin u_M = \sin\varphi_s\operatorname{cosec} i. \qquad \text{(II.1.189)}$$

II.1.18. Определение условий видимости

Определение условий видимости ИСЗ. Для расчета условий видимости в соответствии с рис. II.1.13 можно применить формулы

$$h = R_0\left[\frac{\cos\gamma}{\cos(\gamma+\beta)} - 1\right], \qquad \text{(II.1.190)}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{R_0}{R_0+h}\cos\gamma\right) - \gamma, \qquad \text{(II.1.191)}$$

$$h = R_0\left[\frac{\sin(\alpha'+\beta)}{\sin\alpha'} - 1\right], \qquad \text{(II.1.192)}$$

$$\beta = \arcsin\left[\left(\frac{h}{R_0}+1\right)\sin\alpha',\right] - \alpha', \qquad \text{(II.1.193)}$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha' - \delta', \qquad \text{(II.1.194)}$$

$$\delta' = \arcsin\left(\frac{R_0+h}{R_0}\right)\sin\alpha', \qquad \text{(II.1.195)}$$

$D \cong h\operatorname{tg}\alpha' \pm 0{,}02D$ (для $h < 1000$ км, $\alpha' < 25^\circ$).

Если имеется ограничение в работе аппаратуры по наклонной дальности d, то

$$\beta_{d_{\max}} = \arcsin\left(\frac{d}{R_0+h}\cos\gamma_{d_{\min}}\right), \qquad (II.1.196)$$

$$h_{d_{\max}} = (R_0^2 + d^2 + 2R_0 d\sin\gamma_{d_{\max}})^{1/2} - R_0. \qquad (II.1.197)$$

Видимость поверхности планеты со спутника. Пусть требуется определить участок орбиты спутника планеты, при движении на котором угол между планетоцентрическими направлениями спутник — Солнце не превышает заданной величины ψ.

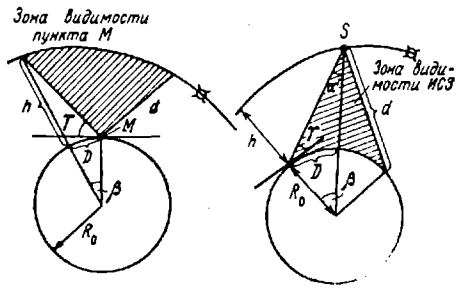


Рис. II.1.13

Граничные значения эксцентрической аномалии в этом случае определяются из уравнения

$$E = \bar{\gamma} \pm \arccos\left[\frac{\beta e + \cos\psi}{\sqrt{(\beta + e\cos\psi)^2 + (1-e^2)\,\xi^2}}\right], \qquad (II.1.198)$$

где

$$\operatorname{tg}\bar{\gamma} = \frac{\xi\sqrt{1-e^2}}{\beta + e\cos\psi}, \qquad (II.1.199)$$

$$\beta = \frac{X_\odot P_x + Y_\odot P_y + Z_\odot P_z}{\sqrt{X_\odot^2 + Y_\odot^2 + Z_\odot^2}}, \qquad (II.1.200)$$

$$\xi = \frac{X_\odot Q_x + Y_\odot Q_y + Z_\odot Q_z}{\sqrt{X_\odot^2 + Y_\odot^2 + Z_\odot^2}}. \qquad (II.1.201)$$

Координаты Солнца могут быть взяты из Астрономического ежегодника, P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z вычисляют по формулам (II.1.35).

Уравнение (II.1.198) имеет решение для всех $\psi \leqslant \frac{\pi}{2}$, если

$$\frac{\beta e + \cos\psi}{\sqrt{(\beta + e\cos\psi)^2 + (1-e^2)\,\xi^2}} \leqslant 1. \qquad (II.1.202)$$

Моменты, соответствующие граничным значениям эксцентрической аномалии равны

$$t_l = \frac{E_l - e \sin E_l}{n} + \tau. \qquad \text{(II.1.203)}$$

Пребывание спутника в тени Земли. Наблюдения пассивных ИСЗ возможны только в том случае, когда они освещаются Солнцем. В связи с этим из рассмотрения следует исключить часть орбиты, находящуюся в тени Земли. Это имеет также значение при анализе условий, благоприятных для зарядки солнечных батарей. Подобная задача возникает также при учете влияния светового давления на движение ИСЗ.

Уравнение тени

$$S^* = A_0 \cos^4 v + A_1 \cos^3 v + A_2 \cos^2 v + A_3 \cos v + A_4, \qquad \text{(II.1.204)}$$

$$A_0 = \left(\frac{R_0}{p}\right)^4 e^4 - 2\left(\frac{R_0}{p}\right)^2 (\xi^2 - \beta^2)\, e^2 + (\beta^2 + \xi^2)^2, \qquad \text{(II.1.205)}$$

$$A_1 = 4\left(\frac{R_0}{p}\right)^4 e^3 - 4\left(\frac{R_0}{p}\right)^2 (\xi^2 - \beta^2)\, e, \qquad \text{(II.1.206)}$$

$$A_2 = 6\left(\frac{R_0}{p}\right)^4 e^2 - 2\left(\frac{R_0}{p}\right)^2 (\xi^2 - \beta^2) -$$

$$- 2\left(\frac{R_0}{p}\right)^2 (1 - \xi^2)\, e^2 + 2(\xi^2 - \beta^2)(1 - \xi^2) - 4\beta^2\xi^2, \qquad \text{(II.1.207)}$$

$$A_3 = 4\left(\frac{R_0}{p}\right)^4 e - 4\left(\frac{R_0}{p}\right)^2 (1 - \xi^2)\, e, \qquad \text{(II.1.208)}$$

$$A_4 = \left(\frac{R_0}{p}\right)^4 - 2\left(\frac{R_0}{p}\right)^2 (1 - \xi^2) + (1 - \xi^2)^2. \qquad \text{(II.1.209)}$$

При соблюдении условия

$$\beta \cos v + \xi \sin v = 0 \qquad \text{(II.1.210)}$$

спутник будет всегда освещен Солнцем. При входе в тень S^* меняет знак минус на плюс, при выходе из тени — плюс на минус. Приведенные формулы не учитывают сжатия Земли и ее движения по орбите. Моменты входа в тень и выхода из нее вычисляются по формуле (II.1.203).

Время пребывания в тени Земли

$$\Delta t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{fM_\oplus}} [E_2 - E_1 + e(\sin E_1 - \sin E_2)], \qquad \text{(II.1.211)}$$

причем

$$\sin E = \frac{(1 - e^2)^{1/2} \sin v}{1 + e \cos v}, \qquad \text{(II.1.212)}$$

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v}. \qquad \text{(II.1.213)}$$

II.1.19. Влияние аберрации и рефракции

Учет влияния аберрации. Поправки в координаты спутника за аберрацию вычисляют по формулам

$$\Delta\alpha'' = \frac{V\cos\theta\cos\Phi}{c\cos\delta}\,206\,265'', \qquad \text{(II.1.214)}$$

$$\Delta\delta'' = \frac{V\cos\theta\sin\Phi}{c}\,206\,265'', \qquad \text{(II.1.215)}$$

$$\Delta z'' = \frac{V\cos\theta\cos(Q+q)}{c}\,206\,265'', \qquad \text{(II.1.216)}$$

$$\Delta A'' = \frac{V\cos\theta\sin(Q+q)}{c\sin z}\,206\,265''. \qquad \text{(II.1.217)}$$

В формулах (II.1.214) — (II.1.217) V — скорость движения ИСЗ по отношению к наблюдателю, c — скорость света. Углы Φ и θ изображены на рис. II.1.14.

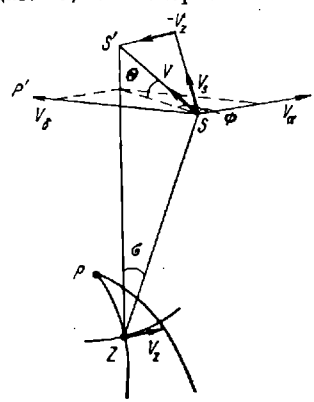


Рис. II.1.14.

Спутниковая рефракция.

$$r_s = r_* - \Delta r, \qquad \text{(II.1.218)}$$

где r_* — астрономическая рефракция.

$$\Delta r = k_3\frac{1}{s}\operatorname{tg} z\sec z\,[1+k_4(2\sec^2 z + \operatorname{tg}^2 z)(1-e^{-0{,}1385h})], \qquad \text{(II.1.219)}$$

где s — расстояние до спутника, $k_3 = 435{,}0''/\text{км}$, $k_4 = -0{,}00113''/\text{км}$, e — основание натуральных логарифмов, h — высота спутника над станцией.

Если $h \geqslant 1000$ км, $z \leqslant 45°$, то

$$\Delta r \cong 206\,265''\frac{2{,}33}{h}\operatorname{tg} z. \qquad \text{(II.1.220)}$$

Поправки в координаты спутника за рефракцию вычисляют по формулам

$$\Delta r_\alpha = -\Delta r\sec\delta'\sin q, \qquad \text{(II.1.221)}$$

$$\Delta r_\delta = -\Delta r\cos q. \qquad \text{(II.1.222)}$$

II.1.20. Методы наблюдений ИСЗ

Методы наблюдений ИСЗ можно подразделить на оптические и радиоэлектронные.

К оптическим методам относятся визуальные, фотографические, фотоэлектрические и лазерные наблюдения.

К радиоэлектронным методам относятся интерференционные, доплеровские и дальномерные наблюдения. Кроме того, существуют комбинированные методы радиоэлектронных наблюдений.

Визуальные наблюдения не обеспечивают точности, достаточной для использования результатов этих наблюдений в геодезических целях.

Наиболее широкое распространение получили фотографические наблюдения ИСЗ, так как долгое время ни один другой метод не мог с ними конкурировать по точности. Только бурное развитие лазерных методов обещает в самое ближайшее время отодвинуть эти методы по точности на второе место.

Фотографические наблюдения документальны, позволяют в случае необходимости, многократно повторять измерения. Положения ИСЗ на снимке определяются путем привязки к опорным звездам в системе некоторого фундаментального каталога.

Масштаб фотографического изображения

$$m'' = 206\,265'' \frac{1}{F}. \qquad \text{(II.1.223)}$$

Размеры поля зрения

$$2\sigma^0 = 57^0{,}3 \frac{a}{F}, \qquad \text{(II.1.224)}$$

где a — сторона снимка.

Зависимость между угловым расстоянием σ звезды (или спутника) от проекции оптического центра на небесную сферу и линейным расстоянием s изображения звезды от оптического центра снимка выражается законом тангенса (в идеальном случае)

$$s = F \operatorname{tg} \sigma. \qquad \text{(II.1.225)}$$

Закон тангенса выполняется только приближенно из-за влияния ошибок объектива, дифференциальной рефракции, дифференциальной аберрации, атмосферной дисперсии, внешней среды, уравнения яркости.

II.1.21. Камеры для фотографических наблюдений ИСЗ

Для фотографирования использовались и используются как модифицированные камеры, в первоначальном варианте применявшиеся для других целей (НАФА-3с/25, Wild BC-4 и т. д.), так и специально созданные спутниковые камеры (Baker — Nunn, ВАУ, АФУ — 75, SBG и т. д.).

Все камеры, используемые для наблюдений спутников, можно разделить на две группы. Камеры одной из этих групп не отслеживают движение спутника. Они могут иметь азимутальную или

экваториальную монтировку. Вторую группу образуют следящие камеры. Эти камеры имеют трехосную или четырехосную монтировку. Как правило, последящие камеры более портативные и дешевые. Данные о камерах приведены в табл. II.1.3.

Следует отметить, что с принципиальной точки зрения отслеживание движения ИСЗ и тем самым интегрирование световой энергии в определенной точке фотографической пластинки (пленки) может осуществляться в разных камерах одним из следующих методов:

1) отслеживание спутника по малому кругу путем перемещения камеры (четырехосная монтировка);

2) отслеживание спутника по большому кругу путем перемещения камеры (трехосная монтировка);

3) отслеживание путем использования плоскопараллельной пластинки;

4) отслеживание путем перемещения кассеты или пленки.

Совершенно очевидно, что следящие камеры позволяют фотографировать более слабые спутники, а также получать большее количество снимков за одно прохождение.

Камеры для фотографических наблюдений ИСЗ снабжены специальными затворами, с помощью которых задается необходимая продолжительность экспозиции, многие из них имеют обтюраторы для прерывания следов спутника и звезд на фотопленке (фотопластинке) с целью привязки наблюдений к шкале времени.

Турбулентные явления в атмосфере вряд ли позволят получить из фотографических наблюдений направления с точностью, превышающей 0,4—0″,5.

II.1.22. Порядок вычисления топоцентрических координат ИСЗ по результатам фотографических наблюдений

1. Отождествление звезд на снимке выполняется с помощью звездных атласов, например Бечваржа.

2. Из звездного каталога выписываются координаты опорных звезд α_i и δ_i. Используются каталоги FK-4, AGK-3, звездный каталог SAO, GC и т. д.

3. Координаты α_i, δ_i приводятся от эпохи каталога на момент наблюдений и исправляются поправками за годичную аберрацию и рефракцию.

4. Координаты оптического центра снимка A_0 и D_0 определяют, используя координаты опорных звезд и оценивая по ним положение геометрического центра. Взаимное положение оптического и геометрического центров должно быть известно из специальных исследований.

5. С помощью координатной измерительной машины измеряют на снимке прямоугольные координаты звезд (x_i, y_i) и спутника (x_c, y_c) и исправляют их за ошибки прибора.

6. Переходят от экваториальных координат звезд к их идеальным координатам (ξ_i, η_i)

$$\xi_i = \frac{\cos q_i \operatorname{tg}(\alpha_i - A_0)}{\cos(q_i - D_0)}, \qquad \text{(II.1.226)}$$

$$\eta_i = \operatorname{tg}(q_i - D_0), \qquad \text{(II.1.227)}$$

Таблица II.1.3

№ по пор.	Название камеры	Страна-изготовитель	Монтировка	Фокусное расстояние, см	Действующее отверстие объектива, см	Поле зрения градус×градус	Фотоматериал и размеры снимка, мм	Масштаб в центре снимка, 1/м	Сведения о достигнутой точности
			Неследящие камеры						
1	MOTS-24	США	Двухосная	60	10		Пластинка	344	
2	MOTS-40	США	»	101,6	20,3	10×10	Пластинка 203×254	202	2″
3	PC-1000	США	»	~100	~21	10×10	Пластинка 215×190	206	1—2″
4	IGN-1964	Франция	»	30	6,7	35×35	Пластинка	685	2—4″
5	Wild BC-4	Швейцария	»	45	11,5	25×25	Пластинка	460	
				30,4	11,5	35×35	Пластинка 215×190	675	2″
6	ВМК А 30/23	ФРГ	»	46,3	23	30×30	Пластинка	445	
7	Хьюита	Англия	»	91,5	14,8	14×14	Пластинка	225	1″
8	Познань-2	ПНР	»	100	~14	8×6		206	
			Следящие						
9	АФУ-75	СССР	Четырехосная	75	21	15×10	Пленка	275	~1″
10	ВАУ	СССР	Трехосная	70	50	30×5	Пленка	294	~1″
11	Baker — Nunn	США	Трехосная	53,5	53,5	35×5	Пленка 56×300	385	2″
12	SBG	ГДР	Четырехосная	76	42,5	6×6	Пластинка	260	
13	Antares	Франция	Трехосная	90	30	11×11	Пластинка	229	2″

где

$$\operatorname{ctg} q_i = \operatorname{ctg} \delta_i \cos(\alpha_i - A_0). \qquad \text{(II.1.228)}$$

7. Составляют для звезд уравнения вида (способ Тернера)

$$\left.\begin{aligned} \xi_i - x_i &= ax_i + by_i + c \\ \eta_i - y_i &= dx_i + ey_i + f \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.229)}$$

где a, b, c, d, e, f — постоянные снимка (постоянные Тернера), которые необходимо найти из решения уравнений (II.1.229) или составленных на их основе нормальных уравнений при числе звезд более 3. Если точность, получаемая из решения уравнений (II.1.229), недостаточна, то учитываются члены второго порядка (обобщенный способ Тернера)

$$\left.\begin{aligned} \xi_i - x_i &= ax_i + by_i + c + a'x_i^2 + b'x_iy_i + c'y_i^2 \\ \eta_i - y_i &= dx_i + ey_i + f + d'x_i^2 + e'x_iy_i + f'y_i^2 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.1.230)}$$

8. Учет дисторсии производится с помощью следующих формул:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= -c\,(x - x_0)\,[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \\ \Delta y &= -c\,(y - y_0)\,[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.231)}$$

где x_0, y_0 — координаты оптического центра снимка; x, y — координаты звезд (спутника); $c = \nu_1 F^{-3}$; ν_1 — коэффициент дисторсии.

9. Составляют уравнения Тернера для спутника

$$\left.\begin{aligned} \xi_c &= x_c + ax_0 + by_c + c \\ \eta_c &= y_c + dx_c + ey_c + f \end{aligned}\right\}; \qquad \text{(II.1.232)}$$

решая их, можно найти его идеальные координаты, так как постоянные a, b, c, d, e, f определены раньше.

10. Вычисляют топоцентрические экваториальные координаты спутника

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg} \delta_c \sin(\alpha_c - A_0) &= \frac{\xi_c \sec D_0}{\eta_c + \operatorname{tg} D_0} \\ \operatorname{ctg} \delta_c \cos(\alpha_c - A_0) &= \frac{1 - \eta_c \operatorname{tg} D_0}{\eta_c + \operatorname{tg} D_0} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.1.233)}$$

Обычно при обработке фотографических наблюдений ИСЗ в качестве опорных используется от 8 до 14 звезд.

Кроме приведенных формул Тернера, являющихся классическими в фотографической астрометрии, могут использоваться для вычислений формулы других авторов, например, Шлезингера, Дейча, Киселева. Вопрос о выборе надлежащих формул решается в зависимости от особенностей задачи и требований к точности.

Измерения астрофотографий выполняются с помощью координатно-измерительных машин типа КИМ-3, СИП-5, УИМ-21, Ascorecord и т. д. Измерения координат на пластинках выполняются с точностью, характеризуемой средней квадратической ошибкой 1,0—1,5 мкм, а на пленке 2,5—3,0 мкм.

II.1.23. Радиоэлектронные методы наблюдений ИСЗ

Радиоэлектронные методы, используемые для наблюдений спутников, подразделяют на интерференционные, допплеровские и дальномерные.

В радиоинтерферометре измеряется разность фаз сигналов от спутника, которые регистрируются на Земле в один и тот же момент на двух разнесенных антеннах.

В допплеровском методе измеряют разность скорости изменения фазы частоты, принимаемой на станции, и стандартной частоты.

При измерении расстояний сигнал, посылаемый станцией, модулируется по фазе. Сигнал принимается импульсным приемо-передатчиком спутника, который ретранслирует сигнал как фазовую модуляцию с измененной несущей частотой, и наземные станции принимают сигнал; при этом фазовый сдвиг модуляции измеряется фазометром и далее пересчитывается в расстояние.

Для решения задач космической геодезии применяется преимущественно эффект Допплера, поскольку соответствующая аппаратура является наиболее простой и обеспечивающей более высокую точность, чем метод радиоинтерферометра или непосредственное измерение расстояний.

Допплеровская установка состоит из приемника для приема транслируемой спутником частоты, высокостабильного наземного генератора частоты и регистрирующих устройств.

Принятая приемником частота сравнивается с частотой наземного генератора и из их разности выделяется допплеровский сдвиг частот Δf на достаточно малых интервалах времени $\Delta\tau$. Сдвиг частоты пропорционален изменению расстояния до ИСЗ за интервал времени $\Delta\tau$

$$\Delta r' = c\frac{\Delta f}{f}, \qquad (II.1.234)$$

где c — скорость распространения радиоволн, f — частота, относительно которой измеряется допплеровский сдвиг Δf.

Таким образом, допплеровские системы позволяют получить разность расстояний до ИСЗ.

Если значение допплеровского сдвига отнесено к среднему моменту, то допплеровская система дает возможность определить радиальную составляющую топоцентрической скорости ИСЗ ($\dot{r}'$)

$$\dot{r}' = \frac{c}{f\,\Delta\tau}\Delta f. \qquad (II.1.235)$$

Точность измерений допплеровскими системами зависит от полноты учета условий распространения радиоволн, стабильности частот генераторов и точности счетчиков. В настоящее время точность определения $\dot{r}'$ составляет 0,02 м/сек [2].

II.1.24. Лазерные наблюдения ИСЗ

Лазерные установки используются для измерения расстояний до ИСЗ, а также для освещения ИСЗ при его фотографировании на фоне звездного неба, в последнем случае мощность излучения должна быть намного выше.

Лазерные установки для наблюдений ИСЗ состоят из лазерного передатчика (применяются, например, рубиновые лазеры с $\lambda = 0{,}694$ мк), приемного устройства, платформы, системы измерения и регистрации результатов. Процесс измерений заключается в фиксации времени прохождения светового импульса до ИСЗ и обратно.

В момент выхода лазерного импульса с передатчика начинает работать счетчик циклов частоты 100 Мгц или 1 Ггц, который выключается в момент поступления в приемник отраженного импульса, что дает возможность определить интервал времени $\Delta\tau$ прохождения светового импульса от установки до ИСЗ и обратно. Зная скорость распространения света c на трассе, можно рассчитать расстояние до ИСЗ (r')

$$r' = \frac{1}{2} c\,\Delta\tau. \qquad (II.1.236)$$

Дальность действия лазерной дальномерной системы пропорциональна четвертой степени излучаемой энергии, обратно пропорциональна квадратному корню из ширины луча и прямо пропорциональна квадратному корню из диаметра апертуры приемника.

Расходимость (ширина) лазерного луча устанавливается в зависимости от точности эфемерид и точности наведения лазера, и в настоящее время лазерные установки имеют расхождение луча от 0′,5 до 20′. Выходная мощность лазера колеблется в пределах от 10 до 50 мВт, длительность импульса от 10 до 60 нсек и энергия в импульсе от 0,5 до 7,5 Дж [2].

Точность измерения расстояний лазерными системами определяется длительностью и крутизной фронта возвращенного сигнала, разрешающей способностью счетчика для регистрации интервалов времени, а также точностью учета изменения скорости света в атмосфере.

При повышении мощности и сокращении длительности импульса достигается соответствие посланного и возвращенного импульсов, что может обеспечить измерение расстояний с точностью порядка 0,6 м.

Ошибка лазерного метода определения расстояний до ИСЗ окажется порядка 0,6—0,7 м при точном учете температуры и давления, так как в этом случае влияние атмосферы приведет к ошибке, не превышающей 0,2 м.

II.1.25. Предварительная обработка радиоэлектронных и лазерных наблюдений

Со счетчиков допплеровской аппаратуры получают числовые характеристики, соответствующие допплеровскому сдвигу частоты за определенный интервал времени (например 10 сек), сдвиг частоты пропорционален разности расстояний между положениями спутника в начале интервала и в его конце.

Предварительная обработка допплеровских измерений сводится к вычислению по снятым со счетчиков значениям числовых характеристик (n) разности расстояний ($\Delta r' = r'_1 - r'_2$) за соответствующий мерный интервал $\Delta\tau$ или вычислению радиальной скорости

($\dot{r}'$), которая получается делением разности дальностей на счетный интервал $\Delta\tau$. Поскольку изменение радиальной скорости за интервал $\Delta\tau$, вообще говоря, нелинейно, полученное таким образом значение $\dot{r}'$ не будет соответствовать середине интервала и его нужно редуцировать к моменту $t_0 + \Delta\tau/2$.

Значения $\Delta r'$ и $\dot{r}'$ исправляются поправками за рефракцию радиолуча в ионосфере, тропосфере и релятивистский эффект. Поправками за рефракцию в тропосфере и релятивистский эффект обычно пренебрегают, а для исключения ионосферной рефракции прием сигналов осуществляется на двух когерентных частотах.

В приемной аппаратуре принятые частоты выравниваются, и на регистрирующее устройство подается смешанная частота, свободная от влияния ионосферной рефракции.

Помимо указанных поправок, в результаты доплеровских измерений вводится поправка ΔF за счет так называемой ошибки «частотной подставки», возникающей вследствие нестабильности работы генераторов.

Непосредственным результатом лазерных измерений является значение расстояния r' до ИСЗ, отнесенное к некоторым стандартным значениям температуры T_0 и давления атмосферы P_0, поэтому в измеренные расстояния вводится поправка δr (за отклонения $\Delta T = T - T_0$ и $\Delta P = P - P_0$ реальных значений температуры T и давления P от стандартных) по формуле

$$\delta r = \frac{a + \dfrac{b\,\Delta P}{\Delta T} + cH}{\cos z + 0{,}0171\,\mathrm{tg}\,z}, \qquad \text{(II.1.237)}$$

где a, b, c — постоянные коэффициенты, T, P — температура и давление, определенные в момент измерений с точностью до 0°,1, 0,2 мм рт. ст., z — зенитное расстояние ИСЗ, H — высота пункта над уровнем моря.

Кроме того, в измеренную дальность вводятся поправки за аппаратурные задержки.

Д. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

II.1.26. Космические геодезические сети

Космическая триангуляция — геометрическое построение, основанное на определении взаимного положения пунктов по синхронно наблюденным на них мгновенным положениям ИСЗ. Таким образом, при создании космической триангуляции спутник является промежуточной высокой визирной целью.

При создании космической триангуляции наблюдения пассивных ИСЗ ведутся синхронно, однако нет необходимости в строгой одновременности фотографирования, так как достаточно организовать перекрытие по времени на двух или более станциях, участвующих в наблюдениях.

В результате фотографирования пассивных ИСЗ получаются снимки, содержащие по десяти и более точечных изображений спутника в перекрывающемся интервале времени τ. Каждому изображению i спутника соответствует зарегистрированное время T_i. Далее последовательно определяют периоды перекрытий и средний момент перекрытия T_0. Такие наблюдения называются квазисинхронными. Введение поправки за спутниковую аберрацию эквивалентно введению поправки в T_0, поэтому на каждом пункте вводится своя поправка в T_0 за аберрационное время

$$\Delta T_0 = -\frac{D}{c}, \qquad (II.1.238)$$

где D — расстояние до ИСЗ, c — скорость света.

По моментам T_i и измеренным на снимках прямоугольным координатам x_i и y_i точечных изображений ИСЗ вычисляются координаты «фиктивной вспышки» (момента синхронизации), причем выполняют интерполирование по способу наименьших квадратов с использованием полиномов третьей степени

$$\left.\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 \\ y &= b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + b_3 T^3 \end{aligned}\right\}. \qquad (II.1.239)$$

После определения коэффициентов a_i и b_i ($i = 1, 2, 3$) средний момент T_0 подставляют в (II.1.239) и находят координты x_0 и y_0 «фиктивной вспышки» в момент синхронизации.

Синхронность наблюдений активных спутников обеспечивается фотографированием одних и тех же вспышек с разных пунктов.

II.1.27. Особенности построения космической триангуляции

В зависимости от назначения сетей космической триангуляции возможны три типа их построения.

1. Построение отдельных фигур или засечек для определения уединенных пунктов, например, при привязке местных геодезических систем, разделенных морями, к единой (материковой) геодезической сети.

2. Построение рядов для передачи системы координат на большие расстояния и для связи весьма удаленных геодезических систем (например, европейской и австралийской триангуляций).

3. Развитие сплошных сетей для обеспечения обширных территорий единой системой координат и создания сети пунктов с заданной плотностью.

Построение сетей космической триангуляции обладает двумя особенностями. Первая из них — все измерения в сетях космической триангуляции являются односторонними, поскольку с борта ИСЗ измерений не производится.

Вторая особенность — положения ИСЗ получаются с гораздо меньшим весом, чем положения пунктов, поскольку каждое положение ИСЗ наблюдается лишь с нескольких (иногда двух) пунктов и притом однократно. Для определения положений пунктов в процессе длительных наблюдений накапливается большое количество избыточных измерений.

II.1.28. Основные элементы космической триангуляции

Выражая основное векторное уравнение космической геодезии (II.1.1) в проекциях на оси гринвичской системы координат, получим (при $\Delta\bar{R} = 0$)

$$\left.\begin{aligned} X_k - X_i &= \Delta X_{ik} = r'_{ik}\cos\delta'_{ik}\cos\gamma'_{ik} \\ Y_k - Y_i &= \Delta Y_{ik} = r'_{ik}\cos\delta'_{ik}\sin\gamma'_{ik} \\ Z_k - Z_i &= \Delta Z_{ik} = r'_{ik}\sin\delta'_{ik} \end{aligned}\right\}, \qquad (II.1.240)$$

где X_k, Y_k, Z_k — координаты пункта наблюдений, X_i, Y_i, Z_i — координаты ИСЗ, r'_{ik}, δ'_{ik}, γ'_{ik} —топоцентрические координаты ИСЗ, полученные по результатам наблюдений на пункте.

Из (II.1.240) следуют формулы для выражения измеренных величин r'_{ik}, γ'_{ik} и δ'_{ik} через неизвестные ΔX_{ik}, ΔY_{ik}, ΔZ_{ik}

$$\left.\begin{aligned} \gamma'_{ik} &= \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{ik}}{\Delta X_{ik}} \\ \delta'_{ik} &= \operatorname{arctg}\frac{\Delta Z_{ik}}{\sqrt{\Delta X^2_{ik} + \Delta Y^2_{ik}}} \\ r'_{ik} &= \sqrt{\Delta X^2_{ik} + \Delta Y^2_{ik} + \Delta Z^2_{ik}} \end{aligned}\right\}. \qquad (II.1.241)$$

В случае применения радиотехнических систем, основанных на использовании эффекта Доплера, измеряются разности расстояний $\Delta r_{ik_{1\text{-}2}}$ от пункта наблюдений до ИСЗ в двух (k_1 и k_2) положениях

$$\Delta r'_{ik_{1,2}} = \sqrt{\Delta X^2_{ik_1} + \Delta Y^2_{ik_1} + \Delta Z^2_{ik_1}} - \sqrt{\Delta X^2_{ik_2} + \Delta Y^2_{ik_2} + \Delta Z^2_{ik_2}}. \qquad (II.1.242)$$

Основными элементами космической триангуляции являются а) вектор, соединяющий пункт наблюдений и мгновенное положение ИСЗ, б) вектор, соединяющий два пункта наблюдений, в) плоскость, проходящая через два пункта наблюдений и мгновенное положение ИСЗ, называемая плоскостью синхронизации.

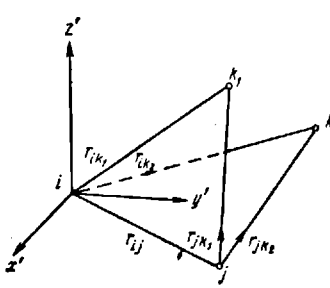


Рис. II.1.15

Если на пунктах наблюдений производятся только фотографические наблюдения, то по ним можно определить лишь ориентировку указанных элементов в пространстве.

Направление с пункта наблюдений на положение спутника

определяется по результатам фотографических наблюдений δ'_{ik} и γ'_{ik} или по координатам орта вектора $\bar{r}_{ik}$ (рис. II.1.15)

$$\left.\begin{aligned} l_{ik} &= \cos\delta'_{ik}\cos\gamma'_{ik} \\ m_{ik} &= \cos\delta'_{ik}\sin\gamma'_{ik} \\ n_{ik} &= \sin\delta'_{ik} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.1.243)}$$

Если с пунктов i и j синхронно фотографируется ИСЗ, находящийся в точке k, то определяется плоскость синхронизации ijk, уравнение которой в векторной форме имеет вид

$$(\bar{R}_i - \bar{R}_j)\,\bar{r}^0_{ik}\bar{r}^0_{jk} = 0, \qquad \text{(II.1.244)}$$

где $\bar{R}_i$ и $\bar{R}_j$ — геоцентрические векторы пунктов наблюдений, а $\bar{r}^0_{ik}$ и $\bar{r}^0_{jk}$ — орты топоцентрических векторов соответственно с пункта i и пункта j.

Уравнение (II.1.244) в координатной форме имеет вид

$$A_k\Delta X_{ij} + B_k\Delta Y_{ij} + C_k\Delta Z_{ij} = 0, \qquad \text{(II.1.245)}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_k &= m_{ik}n_{jk} - m_{jk}n_{ik} \\ B_k &= l_{jk}n_{ik} - l_{ik}n_{jk} \\ C_k &= m_{jk}l_{ik} - m_{ik}l_{jk} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.1.246)}$$

Направляющие косинусы орта $\bar{r}^0$, перпендикулярного к плоскости синхронизации, получаются в виде

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{A_k}{\sin\beta_k} \\ m &= \frac{B_k}{\sin\beta_k} \\ n &= \frac{C_k}{\sin\beta_k} \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.247)}$$

где β_k — угол засечки на ИСЗ с пунктов i и j, причем

$$\beta_k = \arccos(l_{ik}l_{jk} + m_{ik}m_{jk} + n_{ik}n_{jk}). \qquad \text{(II.1.248)}$$

Если с пунктов i и j синхронно наблюдались два положения ИСЗ ($k = 1, 2$), то определяются две плоскости синхронизации (см. рис. II.1.15) ijk_1 и ijk_2, пересекающиеся по хорде $\bar{r}_{ij}$, соединяющей пункты i и j.

При этом направление хорды $\bar{r}_{ij}$ определится как векторное произведение ортов $\bar{r}^0_1$ и $\bar{r}^0_2$, нормальных к плоскостям синхронизации,

$$\bar{r}_{ij} = \bar{r}^0_1 \times \bar{r}^0_2, \qquad \text{(II.1.249)}$$

а направляющие косинусы хорды $\bar{r}_{ij}$ получатся из выражений

$$\left.\begin{aligned} L_{ij} &= Q\,(B_1C_2 - C_1B_2) \\ M_{ij} &= Q\,(C_1A_2 - C_2A_1) \\ N_{ij} &= Q\,(A_1B_2 - A_2B_1) \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.250)}$$

где

$$Q = \frac{1}{\sin\psi \sin\beta_1 \sin\beta_2}, \qquad \text{(II.1.251)}$$

здесь ψ — угол между плоскостями синхронизации.

Направление хорды можно также задать двумя углами (по аналогии с δ и γ), один из которых характеризует наклон хорды к плоскости экватора (угол Ф), другой — есть угол между проекцией хорды на плоскость экватора и осью OX (угол Λ)

$$\Lambda_{ij} = \operatorname{arctg}\left(\frac{M}{L}\right)_{ij}, \qquad \text{(II.1.252)}$$

$$\Phi_{ij} = \operatorname{arctg}\left(\frac{N}{\sqrt{M^2+L^2}}\right)_{ij}. \qquad \text{(II.1.253)}$$

II.1.29. Виды условий, возникающих в сетях космической триангуляции

В космической триангуляции направления между пунктами получаются независимо друг от друга в единой звездной системе координат, поэтому в сетях космической триангуляции не возникает условий сумм и азимутов, но, как и в обычной триангуляции, в них могут быть полюсные базисные и координатные условия.

Помимо указанных условий, возникают специфические условия, присущие только пространственным сетям, — компланарности трех векторов, пучка плоскостей и связки плоскостей.

1. Условие компланарности трех топоцентрических векторов $\bar{r}_1'$, $\bar{r}_2'$, $\bar{r}_3'$

$$\bar{r}_1'\bar{r}_2'\bar{r}_3' = 0, \qquad \text{(II.1.254)}$$

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} l_{1\cdot2} & m_{1\cdot2} & n_{1\cdot2} \\ l_{1\cdot3} & m_{1\cdot3} & n_{1\cdot3} \\ l_{2\cdot3} & m_{2\cdot3} & n_{2\cdot3} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(II.1.255)}$$

Это условие является основным в космической триангуляции и возникает вследствие синхронности наблюдений одного положения ИСЗ с двух пунктов.

2. Условие пучка плоскостей.

Это условие заключается в том, что, строго говоря, все плоскости синхронизации для двух пунктов должны пересекаться по одной хорде. Две плоскости синхронизации должны пересекаться по

хорде, соединяющей пункты наблюдения, каждая новая плоскость является избыточной и приводит к возникновению одного условия.

Если три плоскости заданы своими нормальными векторами

$$\overline{N}_1(A_1, B_1, C_1), \quad \overline{N}_2(A_2, B_2, C_2), \quad \overline{N}_3(A_3, B_3, C_3),$$

где A, B, C — коэффициенты уравнений плоскостей, то смешанное произведение этих векторов

$$V = \overline{N}_1\overline{N}_2\overline{N}_3 \tag{II.1.256}$$

выражает объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ и $\overline{N}_3$. Если плоскости образуют пучок, то параллелепипед вырождается в прямую и в этом случае $V = 0$. Таким образом, условие пучка трех плоскостей в координатной форме будет иметь вид

$$V = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{II.1.257}$$

3. Условие связки плоскостей.

Пересечение трех плоскостей определит точку в пространстве, любая дополнительная плоскость связки должна проходить через эту же точку, что приводит к условию связки плоскостей

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0, \tag{II.1.258}$$

где A, B, C, D — соответственно коэффициенты и свободные члены уравнений плоскостей, образующих связку.

Дальнейшее увеличение фотографических синхронных наблюдений ИСЗ с пунктов i и j приводит к уточнению углов Ф и Λ, определяющих ориентацию хорды в пространстве.

II.1.30. Уравнивание космической триангуляции

Уравнивание космической триангуляции можно выполнять параметрическим, коррелатным способом и способом условий с дополнительными неизвестными.

Коррелатный способ в данном случае является достаточно сложным и не находит практического применения, но введение дополнительных неизвестных может упростить составление условных уравнений.

Если каждое положение ИСЗ наблюдается только с двух пунктов, то все измеренные величины можно разделить на группы, каждая из которых относится к соответствующей хорде. Тогда уравнивание можно выполнить в два этапа. На первом этапе определяются вероятнейшие значения неизвестных, характеризующие положение и ориентировку каждой из хорд. Далее, полагая в качестве измеренных величин ориентирующие углы хорд и их длины,

полученные на первом этапе, уравнивают сети, составленные из хорд. При выполнении в сети только фотографических наблюдений этот метод получил название «метода замыкающих направлений».

Наиболее общим и строгим является способ параметрического уравнивания, в котором определяются вероятнейшие поправки к координатам пунктов наблюдения и мгновенным координатам ИСЗ, соответствующим синхронному моменту. При этом число нормальных уравнений будет $3(s+p)$, где s — число положений ИСЗ, p — число определяемых пунктов, причем, как правило, s существенно больше p.

Выражая результаты фотографических наблюдений δ'_{ik} и γ'_{ik} как функции координат пункта i и координат спутника k и линеаризируя эти функции, получим уравнения поправок в следующем виде:

$$v_{\gamma_{ik}} = a\xi_k + b\eta_k - a\xi_i - b\eta_i + l_{\gamma_{ik}}, \qquad (II.1.259)$$

$$v_{\delta_{ik}} = -c\xi_i - d\eta_i - e\zeta_i - c\xi_k + d\eta_k + e\zeta_k + l_{\delta_{ik}}, \qquad (II.1.260)$$

где ξ_i, η_i, ζ_i — поправки к приближенным координатам пункта, ξ_k, η_k, ζ_k — поправки к приближенным координатам спутника.

Коэффициенты уравнений (II.1.259) и (II.1.260) определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{\sin\gamma'_{ik}}{r'^0_{ik}\cos\delta'_{ik}}, \quad d = -\frac{\sin\gamma'_{ik}\sin\delta'_{ik}}{r'^0_{ik}} \\ b &= \frac{\cos\gamma'_{ik}}{r'^0_{ik}\cos\delta'_{ik}}, \quad e = \frac{\cos\delta'_{ik}}{r'^0_{ik}} \\ c &= -\frac{\cos\gamma'_{ik}\sin\delta'_{ik}}{r'^0_{ik}}, \end{aligned}\right\} \qquad (II.1.261)$$

а свободные члены равны

$$\left.\begin{aligned} l_{\gamma_{ik}} &= \gamma'^0_{ik} - \gamma'^{(изм)}_{ik} \\ l_{\delta_{ik}} &= \delta'^0_{ik} - \delta'^{(изм)}_{ik} \end{aligned}\right\}, \qquad (II.1.262)$$

где γ'^0_{ik} и δ'^0_{ik} — приближенные значения углов, точно соответствующие приближенным координатам пункта i и спутника k. Величины γ'^0_{ik} и δ'^0_{ik} вычисляются по формулам (II.1.241).

Веса измеренных величин определяются из выражений

$$\left.\begin{aligned} p_\delta &= \frac{c}{m^2_{\delta'}} \\ p_\gamma &= \frac{c}{m^2_{\delta'}\sec^2\delta'} \end{aligned}\right\}; \qquad (II.1.263)$$

если измерения в сети выполнялись однотипными установками, то

$$p_\delta = 1 \quad \text{и} \quad p_\gamma = \cos^2\delta'.$$

В случае если лазерными или радиотехническими средствами измеряется расстояние r'_{ik}, то возникает уравнение поправок вида

$$v_{r_{ik}} = l_{ik}\xi_k + m_{ik}\eta_k + n_{ik}\zeta_k - l_{ik}\xi_i - m_{ik}\eta_i - n_{ik}\zeta_i + l_{r_{ik}}, \quad \text{(II.1.264)}$$

где

$$\left.\begin{aligned} l_{ik} &= \frac{X'_k - X'_i}{r'_{ik}} \\ m_{ik} &= \frac{Y'_k - Y'_i}{r'_{ik}} \\ n_{ik} &= \frac{Z'_k - Z'_i}{r'_{ik}} \end{aligned}\right\}, \quad \text{(II.1.265)}$$

$$l_{r_{ik}} = r'^{0}_{ik} - r'^{(\text{изм})}_{ik} =$$

$$= \sqrt{\left(X'^{0}_k - X'^{0}_i\right)^2 + \left(Y'^{0}_k - Y'^{0}_i\right)^2 + \left(Z'^{0}_k - Z'^{0}_i\right)^2} - r'^{(\text{изм})}_{ik}, \quad \text{(II.1.266)}$$

и вес

$$p_r = \frac{m_0^2 r'^2}{m_r^2}. \quad \text{(II.1.267)}$$

Для измеренных доплеровскими системами разностей расстояний $\Delta r = r'_{ik} - r'_{il}$ уравнения поправок будут иметь вид

$$v_{\Delta r} = -F\xi_l - G\eta_l - H\zeta_l + l_{ik}\xi_k + m_{ik}\eta_k + n_{ik}\zeta_k - \\ - l_{il}\xi_l - m_{il}\eta_l - n_{il}\zeta_l + l_{\Delta r}, \quad \text{(II.1.268)}$$

где

$$\left.\begin{aligned} F &= -l_{ik} + l_{il} \\ G &= -m_{ik} + m_{il} \\ H &= -n_{ik} + n_{il} \end{aligned}\right\} \quad \text{(II.1.269)}$$

вес

$$p_{\Delta r} = \frac{c}{m^2_{\Delta r}},$$

при

$$c = m_0^2 \quad p_{\Delta r} = \frac{m_0^2}{m^2_{\Delta r}}. \quad \text{(II.1.270)}$$

II.1.31. Установление масштаба в космической триангуляции

При отсутствии линейных измерений в сéти, создаваемые путем исключительно фотографических наблюдений, включают «космические базисы», представляющие собой длины некоторых хорд, соединяющих пункты космической триангуляции. Эти длины получаются из комплекса высокоточных линейных и угловых измерений, выполненных на поверхности Земли, в сочетании с астрономическими и гравиметрическими определениями.

В этом случае в уравнивание также вводят уравнения поправок космических базисов; их вид аналогичен (II.1.264), но неизвестными будут поправки к координатам обоих пунктов наблюдения. Вес «базисного» уравнения поправок выводится из оценки точности соответствующих геодезических работ, выполненных при создании базиса.

Возможны также случаи, когда в качестве измеренных элементов в уравнивание вводятся углы Λ_{ij} и Φ_{ij}, определяющие направление хорды ij, полученные из обычной триангуляции. В этих случаях для углов Λ и Φ составляются уравнения поправок точно такие же, как и для углов γ'_{ik} и δ'_{ik}.

Для установления масштаба космических геодезических построений могут быть использованы измеренные радиоэлектронными или лазерными методами расстояния «пункт — спутник».

II.1.32. Орбитальный метод построения космических сетей

В основе орбитального метода лежит уравнение (II.1.8). Таким образом, орбитальный метод построения сетей заключается в одновременном определении элементов орбиты E_i, положения пункта $\overline{R_k}$ и поправок за перенос начала системы координат в центр масс Земли по совокупности измерений U_{ik}, выполняемых на пунктах наблюдений и связывающие мгновенное положение ИСЗ i с положением пункта наблюдений k.

Основные измерения на пунктах включают определения топоцентрических экваториальных координат α' и δ', расстояний r'_{ik} и радиальных скоростей $\dot{r}'_{ik}$.

Линеаризация уравнений, связывающих измеренные величины α', δ', r', $\dot{r}'$ с координатами ИСЗ и пункта наблюдений, приводит к уравнениям поправок [2] (см. ф-лу II.1.271 на стр. 245), где

$$\Delta X = X_k - X_i,$$

$$\Delta Y = Y_k - Y_i,$$

$$\Delta Z = Z_k - Z_i.$$

Уравнения (II.1.271) можно привести к виду

$$v_{ik} = \frac{\partial U_{ik}}{\partial (X,\ Y,\ Z,\ \dot{X},\ \dot{Y},\ \dot{Z})_k}\, d\,(X,\ Y,\ Z,\ \dot{X},\ \dot{Y},\ \dot{Z})_k -$$

$$- \frac{\partial U_{ik}}{\partial (X,\ Y\ \ Z)_i}\, d\,(X,\ Y,\ Z)_i + L_{ik}. \qquad \text{(II.1.272)}$$

$$\begin{bmatrix} v_{\alpha'} \\ v_{\delta'} \\ v_{r'} \\ v_{\dot{r}'} \end{bmatrix}_{ik} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin\alpha'}{r'\cos\delta'} & \frac{\cos\alpha'}{r'\cos\delta'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\cos\alpha'\sin\delta'}{r'} & -\frac{\sin\alpha'\sin\delta'}{r'} & \frac{\cos\delta'}{r'} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\alpha'\cos\delta' & \sin\alpha'\cos\delta' & \sin\delta' & 0 & 0 & 0 \\ \left[\frac{\dot{X}_k}{r'} - \frac{\dot{r}}{r'^2}\Delta X\right] & \left[\frac{\dot{Y}_k}{r'} - \frac{\dot{r}}{r'^2}\Delta Y\right] & \left[\frac{\dot{Z}_k}{r'} - \frac{\dot{r}}{r'^2}\Delta Z\right] & \frac{\Delta X}{r'} & \frac{\Delta Y}{r'} & \frac{\Delta Z}{r'} \end{bmatrix}_{ik} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} d(X_k - X_i) \\ d(Y_k - Y_i) \\ d(Z_k - Z_i) \\ d\dot{X}_k \\ d\dot{Y}_k \\ d\dot{Z}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_\alpha \\ l_\delta \\ l_{r'} \\ l_{\dot{r}'} \end{bmatrix}_{ik}, \qquad \text{(II.1.271)}$$

Текущие координаты и скорость ИСЗ есть функция начальных условий движения и времени

$$\left.\begin{aligned}\bar{r}'_{ik}&=\bar{r}'_{ik}(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0,\ t)\\ \bar{\dot{r}}'_{ik}&=\bar{\dot{r}}'_{ik}(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0,\ t)\end{aligned}\right\}. \qquad (II.1.273)$$

Линеаризуя уравнения (II.1.273) и подставляя результат в (II.1.272), получим

$$v_{ik}=\frac{\partial U_{ik}}{\partial(X,\ Y,\ Z,\ \dot{X},\ \dot{Y},\ \dot{Z})_k}\cdot\frac{\partial(X,\ Y,\ Z,\ \dot{X},\ \dot{Y},\ \dot{Z})_k}{\partial(X,\ Y,\ Z,\ \dot{X}\ \dot{Y},\ \dot{Z})_0}\times$$

$$\times d(X,\ Y,\ Z,\ \dot{X},\ \dot{Y},\ \dot{Z})_0-\frac{\partial U_{ik}}{\partial(X,\ Y,\ Z)_i}d(X,\ Y,\ Z)_i+L_{ik}=$$

$$=QR\cdot d(X,\ Y,\ Z,\ \dot{X},\ \dot{Y},\ \dot{Z})-Sd(X,\ Y,\ Z)_i+L_{ik}. \qquad (II.1.274)$$

Матрица R производных от текущих значений координат и скорости по начальным условиям может быть вычислена методом, изложенным выше (см. II.1.15).

Система уравнений вида (II.1.274) решается последовательными приближениями под условием $[p\,vv]=\min$, веса p уравнений поправок устанавливаются в соответствии с точностью измерений.

Для вычисления свободных членов l_{ik} в каждом приближении численно или аналитически интегрируется система дифференциальных уравнений движения в оскулирующих элементах (II.1.85) или в прямоугольных координатах с возможным в данное время учетом всех действующих на ИСЗ сил. По полученным в результате интегрирования значениям координат и скоростей ИСЗ вычисляются приближенные, но точно соответствующие принятым начальным условиям значения величин U^0_{ik}, после чего получают свободные члены

$$l_{ik}=U^0_{ik}-U^{(\text{изм})}_{ik}. \qquad (II.1.275)$$

В случае когда необходимо отнести координаты к центру масс Земли, в уравнения (II.1.274) вводят соответствующие неизвестные δx, δy, δz, представляющие собой координаты центра референц-эллипсоида в абсолютной системе координат с началом в центре масс Земли.

Орбитальный метод может быть применен для определения параметров общего земного эллипсоида, установления связи между отдельными геодезическими системами, определения положения центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли. Все эти задачи подробно рассмотрены в [3].

Е. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

II.1.33. Общие соображения

Геометрические методы космической геодезии позволяют определить относительное положение пунктов на поверхности Земли. Применяя динамические методы, получаем возможность определить координаты пунктов в абсолютной системе, отнесенной к центру масс Земли, параметры ее гравитационного поля и уточнить значения элементов орбит спутников.

Основным уравнением динамического метода является уравнение (II.1.7).

Возможно представление основного уравнения динамического метода в другой форме:

$$\bar{a}=\frac{\bar{x}-R_Z(-S)\,P^{-1}\bar{u}}{\bar{x}-R_Z(-S)\,P^{-1}\bar{u}}, \qquad \text{(II.1.276)}$$

где $\bar{u}$ — координаты станции наблюдения в системе, жестко связанной с Землей и отнесенной к среднему полюсу, $\bar{x}$ — мгновенное положение спутника, R_Z и P — матрицы вращения, причем

$$R_Z=\begin{vmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad P=\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -y \\ -x & y & 1 \end{vmatrix},$$

$\bar{a}$ — единичный вектор, полученный из наблюдений; x, y — координаты мгновенного полюса.

Положения спутника $\bar{x}$ являются функциями оскулирующих элементов орбиты

$$\bar{x}=\bar{x}(a,\ e,\ \omega,\ i,\ \Omega,\ M). \qquad \text{(II.1.277)}$$

Если учтено влияние всех факторов, кроме возмущений, обусловленных гравитационным полем Земли, и если для момента t_0 имеем a_0, e_0, ω_0, i_0, Ω_0, M_0, то вместо (II.1.277) получим

$$\bar{x}=\bar{x}(a_0,\ e_0,\ \omega_0,\ i_0,\ \Omega_0,\ M_0,\ C_{nm},\ S_{nm}). \qquad \text{(II.1.278)}$$

Принимая во внимание

$$\bar{u}=\bar{u}(X,\ Y,\ Z) \qquad \text{(II.1.279)}$$

и учитывая также (II.1.278), убеждаемся, что использование в качестве исходных уравнений вида (II.1.276) позволяет определить координаты пунктов, параметры гравитационного поля и элементы орбит спутников.

В силу различного характера возмущений в элементах орбиты от зональной и долготной частей геопотенциала зональные гармоники определяют отдельно от тессеральных и секториальных.

II.1.34. Определение зональных гармоник

Для определения зональных гармоник гравитационного поля Земли используются вековые и долгопериодические возмущения в элементах орбиты спутника. Поскольку интегрирование при этом выполняется для значительных отрезков времени (месяц и более), пренебрегают действием тессеральных и секториальных гармоник, вызывающих короткопериодические возмущения. Подлежит учету влияние только отдельных тессеральных и секториальных гармоник, вызывающих так называемый резонансный эффект. При определении зональных гармоник можно обойтись приближенными значениями координат пунктов, не выполняя их уточнения.

Исходным является представление гравитационного потенциала Земли в виде

$$V=\frac{fM_\oplus}{\rho}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}J_n\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^n P_n(\sin\Phi)\right]. \qquad (II.1.280)$$

Полученные по результатам наблюдений возмущения элементов орбиты освобождают от влияния, обусловленного притяжением Солнца и Луны, сопротивлением атмосферы, световым давлением и резонансными эффектами. Должны также учитываться возмущения второго порядка, обусловленные J_2^2.

Четные зональные гармоники вызывают вековые возмущения в элементах Ω, ω и M. На практике для определения J_{2n}, как правило, используют вековые изменения $\dot\Omega$ и $\dot\omega$.

Гармоники с нечетными коэффициентами J_{2n+1} приводят к долгопериодическим возмущениям в Ω, ω, i, e; эти возмущения имеют период $2\pi/\omega_3$.

Последовательность обработки при определении зональных гармоник заключается в следующем.

Для орбитальных дуг временной протяженностью 2—5 суток определяют из наблюдений средние элементы орбиты. Из средних элементов исключают значительные короткопериодические возмущения, используя приближенные значения гармонических коэффициентов $J_2^{(0)}$, $J_3^{(0)}$, . . . Элементы орбиты представляют в виде соотношений

$$\Omega=\Omega_0+\delta\Omega+\dot\Omega\,(T-T_0)+A_\Omega\cos\omega, \qquad (II.1.281)$$

$$\omega=\omega_0+\delta\omega+\dot\omega\,(T-T_0)+A_\omega\cos\omega, \qquad (II.1.282)$$

$$i=i_0+\delta i+A_i\sin\omega, \qquad (II.1.283)$$

$$e=e_0+\delta e+A_e\sin\omega, \qquad (II.1.284)$$

где члены $\delta\Omega$, $\delta\omega$, δi, δe учитывают возмущения, вызванные сопротивлением атмосферы, световым давлением и притяжением Солнца и Луны. Из величины $\dot\Omega$ исключают также возмущения второго порядка, обусловленные J_2^2.

Величины $\dot\Omega$, $\dot\omega$ и A_Ω, A_ω, A_i, A_e выражают в виде линейных функций поправок к зональным гармоническим коэффициентам

$$a_2\delta J_2+a_4\delta J_4+\ldots+a_{2n}\delta J_{2n}=\dot\Omega-\dot\Omega_0=l_\Omega, \qquad (II.1.285)$$

$$a_3\delta J_3+a_5\delta J_5+\ldots+a_{2n+1}\delta J_{2n+1}=A_e-A_{e_0}=l_e. \qquad (II.1.286)$$

Аналогично (II.1.285) получают уравнение для $\dot\omega$ и аналогично (II.1.286) — для A_Ω, A_ω, A_i. Величины $\dot\Omega_0$ . . . и A_{e_0}. . . вычисляют по приближенным значениям гармонических коэффициентов

$J_2^{(0)}$ $J_3^{(0)}$. . ., формулы для коэффициентов a_2, a_3, . . ., по Е. М. Гапошкину [10], имеют вид

$$
\left.
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{2\pi n}{p^2}\left(\frac{3}{2}\cos i\right)\\
a_4 &= \frac{2\pi n}{p^4}\left[-\frac{15}{32}(2+3e^2)(3-7\cos^2 i)\cos i\right]\\
a_6 &= \frac{2\pi n}{p^6}\left[-\frac{105}{1024}(5-30\cos^2 i+33\cos^4 i)\times\right.\\
&\quad \left.\times(8+40e^2+15e^4)\cos i\right]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_3 &= -\frac{\sin i}{2pJ_2}\eta^2\\
a_5 &= -\frac{5\sin iD}{32p^3J_2}\eta^2(1-14\cos^2 i+24\cos^4 i)(4+3e^2)\\
a_7 &= -\frac{35\sin iD}{2048p^5J_2}\eta^2(5-135\cos^2 i+49\cos^4 i-\\
&\quad -429\cos^6 i)(8+20e^2+5e^4)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\} \quad (II.1.287)
$$

где n — среднее движение $\left(n = \frac{dM}{dt}\right)$,

$$\eta^2 = 1-e^2,$$

$$D = (1-5\cos^2 i)^{-1}.$$

Уравнения вида (II.1.285) и (II.1.286) являются уравнениями поправок, которые решаются по способу наименьших квадратов. Веса уравнений определяются в зависимости от точности определения величин Ω, ω и A_Ω, A_ω, A_i и A_e и исходя из возможного влияния гармонических коэффициентов высших порядков, которые отбрасываются при ограничении рядов.

Поскольку в формулы (II.1.287) для коэффициентов входят тригонометрические функции наклонения $\cos i$ и $\sin i$ и степени эксцентриситета, для уверенного определения зональных коэффициентов необходимо иметь набор орбитальных дуг с различными наклонениями и эксцентриситетами.

Зональные гармоники определялись по наблюдениям спутников разными авторами [8]. Приведем здесь результаты, о которых на XV Генеральной ассамблее МГГС в Москве (1971 г.) сообщил Козаи, а также более поздние и точные результаты по Вагнеру* (1972 г.) (табл. II.1.4).

Козаи была предпринята попытка выявить годовую вариацию J_2. По его оценке, J_2 имеет годовую вариацию с амплитудой $(1{,}3 \pm \pm 0{,}2)\cdot 10^{-9}$, однако этот вывод требует основательной проверки с привлечением более точных наблюдений.

* Wagner C. A. Zonal gravity ha monics from long satellite arcs by a seminumeric method. «J. Geophys. Res», 1973, 78, N 17, p. 3272—3280.

Таблица II.1.4.

№	$J_{n0}\cdot 10^6$		№	$J_{n0}\cdot 10^6$		№	$J_{n0}\cdot 10^6$	
	Козаи	Вагнер		Козаи	Вагнер		Козаи	Вагнер
2	1082,637	1082,635	11	+0,323	+0,137	20	−0,126	−0,085
3	−2,539	−2,541	12	−0,190	−0,208	21	−0,086	+0,015
4	−1,617	−1,600	13	−0,333	−0,101	22	+0,024	
5	−0,234	−0,230	14	+0,105	+0,166	23	+0,128	
6	+0,555	+0,530	15	+0,108	−0,072	28	+0,058	
7	−0,348	−0,364	16	+0,042	+0,003	34	+0,055	
8	−0,209	−0,200	17	−0,218	−0,204	35	−0,104	
9	−0,159	−0,081	18	−0,103	−0,086	36	+0,148	
10	−0,240	−0,224	19	+0,084	+0,047			

II.1.35. Определение тессеральных и секториальных гармоник

Точное определение тессеральных и секториальных гармонических коэффициентов по наблюдениям ИСЗ — задача более сложная, чем определение зональных коэффициентов, поскольку тессеральные и секторпальные гармоники вызывают лишь короткопериодические возмущения элементов орбит. Периоды этих возмущений обычно составляют доли суток $\frac{24^h}{m}$ (здесь m — второй индекс гармонического коэффициента), а амплитуды не превышают 150 м. Тессеральные и секториальные гармоники, как отмечалось выше, определяют отдельно от зональных.

Малые амплитуды этих возмущений приводят к тому, что при определении тессеральных и секториальных коэффициентов необходимо иметь частую и равномерно распределенную вдоль орбиты систему наблюдений. Кроме того, между координатами станций наблюдения и тессеральными гармониками имеется корреляция, пренебрегать которой нельзя.

Таким образом, необходимо совместное определение тессеральных и секториальных коэффициентов и координат станций. В общем случае задача решается с использованием соотношений (II.1.7) динамического метода.

На практике задачу решают в два этапа. На первом этапе по всей совокупности измерений на орбитальной дуге, охватывающей промежуток времени от 1 до 4 недель, производится дифференциальное уточнение орбиты. После завершения уточнения для каждого наблюдения получают текущие значения a_i, i_i, ω_i, e_i, Ω_i, M_i средних орбитальных элементов в некоторый момент звездного гринвичского времени S и остаточных разностей наблюдений dV_i и

dW_i в направлении вдоль и поперек орбиты. Выделяемые таким образом остаточные разности зависят от ошибок координат станций, принятых коэффициентов тессеральных и секториальных гармоник и ошибок в определении времени.

На втором этапе составляют уравнения ошибок, связывающие остаточные разности, искомые коэффициенты $\overline{C}_{nm}$ и $\overline{S}_{nm}$ и координаты станций, из решения которых по способу наименьших квадратов получают поправки к принятой модели гравитационного поля. Через $\overline{C}_{nm}$ и $\overline{S}_{nm}$ обозначены коэффициенты разложения долготной части геопотенциала по нормированным сферическим функциям, причем

$$\left.\begin{aligned}\overline{C}_{nm} &= fMR_0^n C_{nm}\\ \overline{S}_{nm} &= fMR_0^n S_{nm}\end{aligned}\right\}.$$

Приведем значения незональных гармонических коэффициентов, полученных по наблюдениям ИСЗ Е. М. Гапошкиным* и вошедших в «Стандартную Землю, II, 1969 г.» (табл. II.1.5).

Таблица II.1.5

n	m	$C_{nm}\cdot 10^6$	$S_{nm}\cdot 10^6$	n	m	$C_{nm}\cdot 10^6$	$S_{nm}\cdot 10^6$
2	2	+2,43	−1,39	7	1	+0,15	+0,08
3	1	+1,89	+0,24	7	2	+0,26	+0,11
3	2	+0,77	−0,69	7	3	0,29	−0,17
3	3	+0,69	+1,42	7	4	−0,24	−0,06
4	1	−0,62	−0,46	7	5	−0,07	+0,02
4	2	+0,33	+0,66	7	6	−0,10	−0,05
4	3	+0,89	−0,16	7	7	+0,01	+0,02
4	4	−0,13	+0,37	8	1	−0,09	+0,10
5	1	−0,07	−0,06	8	2	+0,02	+0,00
5	2	+0,58	−0,33	8	3	−0,04	+0,00
5	3	−0,41	+0,07	8	4	−0,17	−0,03
5	4	−0,29	+0,21	8	5	−0,21	+0,00
5	5	+0,10	−0,62	8	6	−0,29	+0,19
6	1	−0,06	+0,02	8	7	+0,05	−0,05
6	2	+0,01	−0,40	8	8	−0,19	+0,26
6	3	−0,05	+0,01				
6	4	+0,01	−0,45				
6	5	−0,30	−0,46				
6	6	−0,11	−0,21				

* Gaposchkin E. M., Lambeck K. Smithsonian standard earth (II), 1969. «Spac. Rept. Smithsonian Astrophys. Observ.». 1970, N 315, XI, 95 pp.

II.1.36. Формулы вычисления гравитационного потенциала для разных моделей Земли

1. Земля — шар с симметричным распределением плотностей

$$V_0 = \frac{fM_\oplus}{\rho} = \frac{\mu}{\rho}; \quad \mu = fM_\oplus. \tag{II.1.288}$$

2. Земля — эллипсоид вращения

$$\left.\begin{aligned} V_{II} &= \frac{\mu}{\rho}\left[1 + C_{20}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^2 P_2(\sin\Phi)\right] \\ C_{20} &= -\frac{2}{3}\left(\alpha - \frac{1}{2}q\right) \\ q &= \frac{\omega_3^2 R_0^3}{\mu}(1-\alpha) \end{aligned}\right\}, \tag{II.1.288'}$$

α — полярное сжатие Земли, ω_3 — угловая скорость вращения Земли.

3. Земля — эллипсоид вращения (дальнейшее уточнение V_{II})

$$\left.\begin{aligned} V_{III} &= \frac{\mu}{\rho}\left[1 + C_{20}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^2 P_2(\sin\Phi) + \right. \\ &\quad \left. + C_{40}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^4 P_4(\sin\Phi)\right] \\ C_{20} &= -\frac{2}{3}\left(\alpha - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{7}\alpha q\right) \\ C_{40} &= \frac{8}{35}\left(\frac{7}{2}\alpha^2 - \frac{5}{2}\alpha q\right) \end{aligned}\right\}. \tag{II.1.289}$$

4. Земля — трехосный эллипсоид

$$V_{IV} = \frac{\mu}{\rho}\left[1 + C_{20}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^2 P_2(\sin\Phi) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^2 (C_{22}\cos 2\lambda + S_{22}\sin 2\lambda) P_{22}(\sin\Phi)\right]. \tag{II.1.290}$$

5. Земля — сфероид, несимметричный относительно плоскости экватора,

$$V_V = \frac{\mu}{\rho}\left[1 + C_{20}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^2 P_2(\sin\Phi) + C_{30}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^3 P_3(\sin\Phi)\right]. \tag{II.1.291}$$

6. Земля — трехосный эллипсоид, несимметричный относительно плоскости экватора

$$V_{IV}=\frac{\mu}{\rho}\left\{1+\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^2\left[C_{20}P_{20}(\sin\Phi)+\right.\right.$$

$$\left.+(C_{22}\cos 2\lambda+S_{22}\sin 2\lambda)\,P_{22}(\sin\Phi)\right]+\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^3 C_{30}P_{30}(\sin\Phi)+$$

$$\left.+\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^4 C_{40}P_{40}(\sin\Phi)\right\}. \qquad (II.1.292)$$

Ж. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ИСКУССТВЕННЫЕ СПУТНИКИ ЗЕМЛИ (ГИСЗ)

II.1.37. Требования к ГИСЗ и параметрам их орбит

По целевому назначению ИСЗ можно подразделить на исследовательские, метеорологические, навигационные, связные и геодезические.

Для геодезических целей в принципе могут использоваться различные ИСЗ, относящиеся ко всем группам, однако наиболее ценные для геодезии и смежных с ней отраслей знаний данные могут быть получены в результате наблюдений специальных геодезических спутников.

Спутник может быть использован для целей геодезии, если он отвечает определенным требованиям. Такой спутник должен иметь:

1) правильную форму, лучше близкую к сферической,

2) поверхность, характеризующуюся большим коэффициентом отражения (для пассивных ИСЗ),

3) возможно большее отношение массы к площади поперечного сечения,

4) ограниченные определенными пределами параметры орбиты,

5) специальное бортовое оборудование (для активных ИСЗ).

Исключение составляют спутники-баллоны, для которых характерна малая величина отношения масса/поверхность и которые могут использоваться только при синхронных или квазисинхронных наблюдениях, когда не требуется знать точно геоцентрические координаты спутника.

Используемые для целей геодезии спутники должны иметь орбиты с. эксцентриситетом 0,02—0,05* и во всяком случае, как правило, не более 0,1 [8]. Высота перигея орбиты должна заключаться между 1000—4000 км. Она не должна быть менее 500—800 км, так как в этом случае возникают существенные трудности при учете сопротивления атмосферы; кроме того, для обеспечения одной и той же территории при малой высоте спутника требуется

---

* Л. П. Пеллинен. Геодезическое использование искусственных спутников Земли. «Итоги науки, Геодезия, 1965», М., 1967.

большее число станций наблюдений. Наконец, чем меньше высота спутника, тем больше его видимая скорость, что осложняет производство наблюдений.

Недопустимо и значительное увеличение высоты перигея, так как в этом случае действие отдельных гармоник гравитационного поля Земли на движение ИСЗ начинает сглаживаться и, таким образом, спутник становится мало пригодным для динамических исследований. Усиливается гравитационное действие на движение ИСЗ Луны и Солнца и осложняется учет этих влияний.

При решении геометрических задач для обеспечения большей территории целесообразно использовать спутники с большими наклонениями (60°—80°).

Решение динамических задач требует использования ИСЗ с разными параметрами орбит и в первую очередь с разными высотами и наклонениями.

На борту геодезического спутника может находиться следующее оборудование:

1) импульсные источники света (оптические маяки или лампы-вспышки) с переменной силой света 3500—15000 св./сек;

2) радиотехническое оборудование, необходимое для реализации допплеровских наблюдений;

3) радиотехническое оборудование, необходимое для измерения наклонных дальностей;

4) радиотехническое оборудование, необходимое для применения интерференционного метода;

5) уголковые отражатели (трипельпризмы), необходимые для использования лазеров;

6) радиовысотомер;

7) кварцевые или атомные часы;

8) специальная бортовая ЭЦВМ;

9) фотокамеры для съемки земной поверхности или поверхности планеты и для съемки звездного неба (при изучении геодезическими методами планет).

Для обеспечения обзора поверхности всей Земли должно соблюдаться условие

$$\frac{\pi}{2} - \frac{l}{R_0}(1-k') \leqslant i \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{l}{R_0}(1-k'), \qquad \text{(II.1.293)}$$

где R_0 — средний радиус Земли, $2l$ — ширина зоны обзора бортовой аппаратуры, причем

$$l = \frac{\pi R_0}{90^2}\left[\arcsin\left(\frac{\rho}{R_0}\sin\alpha\right) - \alpha\right], \qquad \text{(II.1.294)}$$

$$\alpha = 90^\circ - \arccos\left(\frac{R_0}{\rho}\cos h\right). \qquad \text{(II.1.295)}$$

В приведенных формулах α — половина угла поля зрения со спутника, ρ — геоцентрический радиус-вектор спутника, k' — коэффициент, выражающий заданный процент перекрытия.

Для обеспечения наблюдений пунктов с заданной широтой φ следует выполнить условие

$$\pi-\varphi+\frac{l}{R_0}(1-k')\geqslant i\geqslant\varphi-\frac{l}{R_0}(1-k'). \quad \text{(II.1.296)}$$

Появление спутника над пунктом с заданной широтой в одно и то же время (без учета возмущений) возможно при соблюдении равенства

$$i=\arccos\frac{2\pi T}{T_{\text{г}}c}, \quad \text{(II.1.297)}$$

где $T_{\text{г}}$ — продолжительность тропического года (365, 2422 средних солнечных суток),

$$\left.\begin{aligned} c&=\frac{-(2\pi)^{7/3}\varepsilon}{(1-e^2)^2\,T\sqrt[3]{T}\,(fM_\oplus)^{5/3}}\\ \varepsilon&=fM_\oplus R_0^2\left(\alpha-\frac{\omega_3^2R_0}{2\gamma_e}\right)\end{aligned}\right\}. \quad \text{(II.1.298)}$$

Обеспечение последовательного перекрытия полос обзора за заданное число суток достигается при условии

$$\omega_3T+\frac{(2\pi)^{7/3}\varepsilon\cos i}{(fM_\oplus)^{5/3}(1-e^2)^2\,T^{4/3}}=\frac{2\pi k_{\text{c}}}{1+(n_{\text{c}}-1)k_{\text{c}}}, \quad \text{(II.1.299)}$$

где n_{c} — целое число витков в течение звездных суток, k_{c} — число суток, через которое обеспечивается совпадение полос обзора для одного ИСЗ, $k_{\text{c}}=\eta/l$, η — смещение проекции орбиты вследствие вращения Земли за один оборот спутника.

Долгота n-го витка при $e\leqslant 0{,}06$ вычисляется по формуле (II.1.142).

Значение периода T, при котором спутник пройдет через заданную долготу λ_n, равно

$$T=\frac{1}{\omega_3}\left(\frac{\lambda_1-\lambda_n+360^\circ N_{\text{c}}}{n-1}+d_1\frac{\cos i}{a^2}\right). \quad \text{(II.1.300)}$$

Число витков n, которое должен совершить спутник при заданном T, чтобы попасть в район заданной долготы,

$$n=\frac{\lambda_1-\lambda_n+360^\circ N_{\text{c}}}{\omega_3T-d_1\dfrac{\cos i}{a^2}}. \quad \text{(II.1.301)}$$

Если n — нецелое число, а n^* — ближайшее целое, то

$$\lambda_n-\lambda_n^*=(n-n^*)\left(\omega_3T-d_1\frac{\cos i}{a^2}\right). \quad \text{(II.1.302)}$$

В приведенных формулах N_c — сутки полета, n — номер витка, скорость вращения Земли $\omega_З = 0{,}25068447$ градус/мин, $d_1 = -2{,}3784766 \cdot 10^7$ градус·км^2.

II.1.38. Формулы для вычисления яркости пассивных спутников

При диффузном отражении (для шара):

$$m = m_\odot - 2{,}5 \lg \frac{2}{3} a_0 - 5 \lg \frac{R_s}{h} + 5 \lg \sec z + \\ + D(\sec z - 1) - 2{,}5 \lg \frac{\sin p + (\pi - p)\cos p}{\pi}, \qquad (II.1.303)$$

где $m_\odot = -26{,}8$ яркость (визуальная) Солнца в зените, a_0 — коэффициент отражения при диффузном отражении, R_s — радиус спутника, s — расстояние до спутника ($h \cong s \cos z$), p — фазовый угол спутника (угол между направлениями со спутника на Солнце и пункт наблюдений), D характеризует поглощение света атмосферой в зените.

Для зеркального отражения (в случае шара):

$$m = -25{,}3 - 5 \lg \frac{R_s}{s}. \qquad (II.1.304)$$

Количество света, необходимое для потемнения фотографического слоя при отслеживании движения спутника,

$$B = k \left(\frac{D^*}{d} \right)^2 E\tau; \qquad (II.1.305)$$

при неподвижной камере

$$B = k \frac{D^{*2}}{df\omega} E, \qquad (II.1.306)$$

где D^* — действующее отверстие объектива, d — диаметр кружка рассеивания в плоскости изображения, k — коэффициент проницаемости оптики, f — фокусное расстояние объектива, ω — угловая скорость перемещения изображения спутника, τ — эффективное время выдержки, E — освещенность, создаваемая спутником, например для шара

$$E = \frac{1}{4} a \left(\frac{R_s}{s} \right) E_0, \qquad (II.1.307)$$

здесь E_0 — интенсивность солнечного излучения, падающего на спутник.

Яркие спутники в большинстве случаев наблюдают при высоте Солнца под горизонтом $-12°$, а слабые — порядка $-18°$.

Очень яркие спутники ($1-2^m$) в случае использования светосильной камеры можно наблюдать при $h_\odot$, равном $(-9°)-(-10°)$.

«Геодезическую референц-систему 1967», принятую на XIV Генеральной Ассамблее МГГС (1967 г.), в полном соответствии с астрономическими фундаментальными постоянными, принятыми МАС (1964 г.), образуют величины

$$a_e = 6\,378\,160 \text{ м},$$

$$fM_\oplus = 398\,603 \text{ км}^2 \cdot \text{сек}^{-2},$$

$$J_2 = 10\,827 \cdot 10^{-7};$$

им соответствуют

$$\gamma_e = 978\,031{,}846 \text{ мгал},$$

$$\alpha = 1 : 298{,}249.$$

Выше уже говорилось об определении и уточнении J_2. По результатам наблюдений спутников могут быть уточнены фундаментальные постоянные a_e и $fM_\oplus$, причем для уточнения последней величины могут быть также использованы данные слежения за далекими космическими аппаратами (КА). Один из вариантов уточнения параметров общего земного эллипсоида предложил М. Бурша*. Суть его способа состоит в следующем. Пусть параметры общего земного эллипсоида a и e равны

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 + da \\ e^2 &= e_0^2 + de^2 \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.1.308)}$$

где a_0 и e_0^2 — приближенные значения параметров, а поправки к ним da и de^2 — искомые величины.

Располагая топоцентрическими координатами спутников, полученными из наблюдений с некоторого количества пунктов, и геоцентрическими координатами ИСЗ, а также значениями a_0 и e_0^2, приходим к уравнениям поправок вида

$$\Delta r = -da\left\{1 - \frac{1}{2}e_0^2\left[1 - (X_0^2 + Y_0^2)\,r_0^{-2}\right]\right\} -$$

$$-\frac{1}{2}a_0\,de^2\left[1 - (X_0^2 + Y_0^2)\,r_0^{-2}\right] + l, \qquad \text{(II.1.309)}$$

где

$$l = (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)^{1/2} - a_0\left\{1 - \frac{1}{2}e_0^2\left[1 - (X_0^2 + Y_0^2)\,r_0^{-2}\right] -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{8}e_0^4\left[1 + 2\,(X_0^2 + Y_0^2)\,r_0^{-2} - 3\,(X_0^2 + Y_0^2)^2\,r_0^{-4}\right]\right\}, \qquad \text{(II.1.310)}$$

$$\Delta r = \left[X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right]^{1/2} - a\,(1 - e^2)^{1/2}\left[1 - e^2\,(X_0^2 + Y_0^2)\,r_0^{-2}\right]^{-1/2}, \qquad \text{(II.1.311)}$$

* М. Бурша. Теория определения размеров общего земного эллипсоида и исходных геодезических дат по наблюдениям искусственных спутников Земли, «Studia geophysica et geodatica», 1962, № 4.

X_0, Y_0, Z_0 — координаты пункта на поверхности Земли,

$$r_0 = [X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2]^{1/2}. \qquad (II.1.312)$$

Решая систему уравнений вида (II.1.309) по способу наименьших квадратов, найдем поправки к параметрам общего земного эллипсоида и по (II.1.308) — сами параметры. Решение должно проводиться под условием

$$\sum (\Delta r)^2 = \min; \qquad (II.1.313)$$

если учесть, что поверхность общего земного эллипсоида близка к поверхности квазигеоида, то должно соблюдаться условие

$$\sum (\Delta r - H)^2 = \min, \qquad (II.1.314)$$

где H — нормальная высота. Тогда свободный член в (II.1.309) будет

$$l' = l - H. \qquad (II.1.315)$$

Поправку к $fM_\oplus$ определяют в рамках спутникового динамического метода, по наблюдениям далеких КА и Луны.

Новейшие результаты свидетельствуют о том, что величины a_e и $fM_\oplus$, приведенные в начале параграфа, являются завышенными. Так, согласно данным, приведенным в [8], $a_e = 6378140$ м, а по данным слежения за далекими КА $fM_\oplus = 398600{,}37 \pm 1{,}0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд К. Методы спутниковой геодезии. М., «Недра», 1973. 224 с.

2. Бойко Е. Г., Клепицкий Б. М., Лапдис И. М., Устинов Г. А. Построение, уравнивание и оценка точности космических сетей. М., «Недра», 1972. 208 с.

2. Бурша М. Основы космической геодезии. М., «Недра», 1971. 128 с.

4. Вейс Г. Геодезическое использование искусственных спутников Земли. М., «Недра», 1967. 116 с.

5. Каула У. Спутниковая геодезия. Теоретические основы. М., «Мир», 1970. 172 с.

6. Лозинский А. М., Масевич А. Г. Фотографические наблюдения искусственных спутников Земли, «Научные информации Астросовета АН СССР», вып. 18. М., 1970, с. 3—36.

7. Основы теории полета космических аппаратов, Под ред. Г. С. Наримапова и М. К. Тихоправова, М., «Машиностроение», 1972. 608 с.

8. Пеллинен Л. П. Исследование гравитационных полей и формы Земли, других планет и Луны по наблюдениям космических аппаратов. «Итоги науки, Исследование космического пространства, 1970». М., 1972. 180 с.

9. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г. Н. Дубошина. М., «Наука», 1971. 584 с.

10. Стандартная Земля. Геодезические параметры Земли на 1966 г. Под ред. К. Лунквиста и Т. Вейса. М., «Мир», 1969. 278 с.

11. Эскобал П. Методы определения орбит. М., «Мир», 1970. 472 с.

12. Ludostaw Cichowicz. Satellite spherical astronomy, Geodezja № 19, WPW, Warszawa, 1966, p. 89—129.

II.2. ТЕОРИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ И ГРАВИМЕТРИЯ

В. П. Шимбирев

А. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

II.2.1. Сила тяжести

Изучение гравитационного поля Земли имеет важное научное и практическое значение.

Определение орбит межконтинентальных ракет и искусственных спутников Земли, разведка полезных ископаемых, изучение внутреннего строения Земли и определение ее фигуры — все эти проблемы требуют для своего решения знания гравитационного поля Земли.

Гравитационное поле Земли является полем силы тяжести. Сила тяжести есть та сила, с которой всякое тело притягивается к Земле. Она измеряется ускорением $\vec{g}$, сообщаемым ею свободно падающему телу.

Единицей ускорения силы тяжести является гал = 1 см/сек²*; 0,001 гала называется миллигал (мгал); 0,001 мгала называется микрогалом (мкгал).

Поскольку сила тяжести для единичной массы численно равна ускорению силы тяжести, то обычно эти два понятия не различаются.

Сила тяжести ($\vec{g}$) является равнодействующей двух сил: силы ньютонианского притяжения ($\vec{F}$) и центробежной силы ($\vec{K}$), т. е.

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{K}. \qquad (II.2.1)$$

Обычный способ представления вектора в прямоугольных координатах состоит в использовании трех единичных векто-

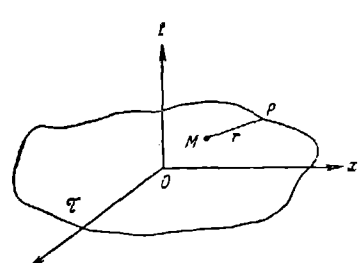


Рис. II.2.1

* В системе единиц СИ 1 гал = $=10^{-2}$ м/сек².

ров $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$, которые направлены вдоль осей x, y и z соответственно

$$\vec{g} = g_x\bar{i} + g_y\bar{j} + g_z\bar{k},$$

где g_x, g_y и g_z — проекции величины ускорения g на оси координат, величина ускорения g есть

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}; \qquad \text{(II.2.2)}$$

направление вектора $\vec{g}$ определяется через направляющие косинусы по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} \cos(g, x) &= \frac{g_x}{g} \\ \cos(g, y) &= \frac{g_y}{g} \\ \cos(g, z) &= \frac{g_z}{g} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.2.3)}$$

Проекции силы тяжести на оси координат (g_x, g_y, g_z) можно получить, если воспользоваться теоремой: проекция равнодействующей равна сумме проекций составляющих. Тогда на основании формулы (II.2.1) получим

$$g_x = F_x + K_x,$$
$$g_y = F_y + K_y,$$
$$g_z = F_z + K_z.$$

Проекции силы ньютонианского притяжения и центробежной силы на оси координат равны

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -f\int_\tau \frac{\delta\, d\tau}{r^2}\cos(r, x), \quad K_x = \omega^2 x \\ F_y &= -f\int_\tau \frac{\delta\, d\tau}{r^2}\cos(r, y), \quad K_y = \omega^2 y \\ F_z &= -f\int_\tau \frac{\delta\, d\tau}{r^2}\cos(r, z), \quad K_z = \omega^2 z \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.2.4)}$$

где в соответствии с рис. II.2.1 приняты следующие обозначения:

f — постоянная тяготения, равная $6{,}67 \times 10^{-8}$ см^3/г·сек^2,
δ — объемная плотность в текущей точке M,
$d\tau$ — элемент объема,
r — расстояние между текущей точкой M и точкой P, в которой определяется сила тяжести,
x, y, z — прямоугольные координаты точки P,
ω — угловая скорость вращения Земли,
τ — объем всей Земли.

Вследствие крайне неравномерного распределения масс в теле Земли сила тяжести изменяется на ее поверхности по такому сложному закону, что невозможно дать точную функциональную зависимость между силой тяжести и координатами точки на земной поверхности.

II.2.2. Потенциал силы тяжести

Изучение гравитационного поля Земли значительно упрощается, если воспользоваться понятием потенциальной функции (или просто — потенциала). Потенциалом называется функция, частные производные которой по осям координат равны проекциям действующей силы на соответствующие оси.

Следовательно, если через W обозначить потенциал силы тяжести, то проекции силы тяжести на оси координат будут связаны с потенциалом W следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial W}{\partial x} \\ g_y &= \frac{\partial W}{\partial y} \\ g_z &= \frac{\partial W}{\partial z} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.2.5)}$$

Потенциал силы тяжести равен сумме потенциалов силы ньютонианского притяжения (V) и центробежной силы (Q):

$$W = V + Q. \qquad \text{(II.2.6)}$$

Потенциал силы ньютонианского притяжения вычисляется по формуле

$$V = f\int_{\tau}\frac{\delta\, d\tau}{r},$$

а потенциал центробежной силы — по формуле

$$Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

в соответствии с обозначениями, принятыми для рис. II.2.1.

Дифференциал потенциала силы тяжести при перемещении единичной массы на бесконечно малый отрезок ds

$$dW = g\cos(g,\ s)\, ds, \qquad \text{(II.2.7)}$$

где угол (g, s) — дополнение зенитного расстояния до 180°.

Полученная формула позволяет получить проекцию силы тяжести на любое произвольное направление s.

В самом деле, поскольку

$$g\cos(g,\ s) = g_s,$$

имеем

$$g_s = \frac{dW}{ds}.$$

Формула (II.2.7) показывает также, что дифференциал потенциала равен дифференциалу работы и, следовательно, работа, которую совершает сила тяжести g при перемещении единичной массы между точками, находящимися на конечном расстоянии, равна разности потенциалов в этих точках:

$$W_B - W_A = \int_A^B g \cos(g, s)\, ds. \qquad (II.2.8)$$

Потенциал силы тяжести является функцией ограниченной и непрерывной. Он имеет три первые производные: $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ и $\frac{\partial W}{\partial z}$, которые являются также функциями непрерывными. Физический их смысл ясен из формул (II.2.5): они являются проекциями силы тяжести на оси координат.

Потенциал силы тяжести имеет шесть вторых производных:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial z}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial z}.$$

Потенциал силы тяжести во внешнем пространстве относительно объема τ удовлетворяет уравнению

$$\Delta W = 2\omega^2, \qquad (II.2.9)$$

а во внутреннем пространстве (внутри объема τ)

$$\Delta W = -4\pi f\delta + 2\omega^2, \qquad (II.2.10)$$

где символом Δ, называемым оператором Лапласа (лапласианом), обозначена сумма вторых частных производных от потенциала

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}.$$

Поскольку вторые производные потенциала связаны с плотностью (формула (II.2.10)), то можно сделать вывод, что вторые производные W (или, по крайней мере, одна из них) терпят разрыв непрерывности на земной поверхности и внутри Земли там, где плотность притягивающих масс (δ) меняется скачком.

Потенциал силы тяжести полностью характеризует гравитационное поле Земли, поскольку всегда, в случае необходимости, по формулам (II.2.5) можно вычислить составляющие силы тяжести (g_x, g_y, g_z), а зная их, по формулам (II.2.2) и (II.2.3) — величину силы тяжести g и ее направление в пространстве.

II.2.3. Силовые линии, уровенные поверхности

Важной характеристикой гравитационного поля Земли являются силовые линии. Силовыми, или отвесными, линиями поля силы тяжести называются такие, касательные к которым во всех точках совпадают с направлением вектора силы тяжести. Силовые линии выражаются всюду непрерывными функциями; непрерывно

меняются и направления касательных к силовым линиям. Вектор кривизны силовой линии определяется по формуле

$$\frac{\bar{\nu}}{\rho} = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}\,\bar{i} + \frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}\,\bar{j}\right], \qquad \text{(II.2.11)}$$

где $\bar{\nu}$ — единичный вектор главной нормали кривой, ρ — радиус кривизны силовой линии.

На основании полученной формулы делаем вывод, что при пересечении силовой линией масс с различными плотностями ее вектор кривизны будет меняться скачком. Однако вне масс вторые производные потенциала W непрерывны, а поэтому и силовые линии вне масс изменяют свою кривизну непрерывно.

Семейство уровенных поверхностей силы тяжести также является важной характеристикой поля силы тяжести.

Уровенной поверхностью называется поверхность равного потенциала, ее уравнение имеет вид

$$W(x, y, z) = \text{const}. \qquad \text{(II.2.12)}$$

Придавая различные значения постоянной, будем получать различные уровенные поверхности. В зависимости от величины постоянной уровенные поверхности могут проходить вне Земли, пересекать ее или же находиться внутри Земли.

В каждой точке уровенной поверхности сила тяжести направлена по нормали к ней.

Если единичная масса будет перемещаться вдоль уровенной поверхности ортогонально направлению силы тяжести, то в этом случае угол (g, s) всегда будет равен 90°. Тогда на основании формулы (II.2.7) получаем $dW = 0$, т. е. при движении по уровенной поверхности работа не совершается.

Поверхность воды в спокойном состоянии, находящейся под действием только силы тяжести, совпадает с одной из уровенных поверхностей. Уровенные поверхности являются поверхностями равновесия, поскольку слагающая силы тяжести по касательной к уровенной поверхности в любой точке равна нулю, и, следовательно, не может возникнуть никаких тангенциальных сил, которые могли бы вызвать перемещения водных масс по ее поверхности.

Одна из уровенных поверхностей потенциала силы тяжести, совпадающая в открытом океане с невозмущенной поверхностью воды, называется г е о и д о м.

Наличие материков делит геоид на две части: внешнюю, совпадающую с уровнем океана, и внутреннюю, проходящую под материками. Из непрерывности потенциала силы тяжести вытекает, что уровенные поверхности, как проходящие вне масс, так и пересекающие земную поверхность или находящиеся внутри Земли, не терпят никаких разрывов, наклон касательной плоскости при перемещении точки касания по уровенной поверхности также меняется непрерывно.

Однако кривизна уровенной поверхности, пересекающей слои различной плотности, будет изменяться скачком там, где меняется скачком плотность. Это обусловлено тем, что кривизна уровенной поверхности определяется вторыми производными потенциала:

$$-\frac{g}{\rho} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\cos^2 A + \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\sin 2A + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\sin^2 A, \qquad \text{(II.2.13)}$$

где ρ — радиус кривизны нормального сечения уровенной поверхности, A — угол, образуемый плоскостью нормального сечения с осью x.

Следовательно, кривизна геоида в тех местах, где он пересекает материковые массы, изменяется скачком, и поэтому всякое продолжение аналитическими методами поверхности геоида внутрь притягивающих масс не будет соответствовать действительному положению геоида. Кривизну геоида нельзя представить одной аналитической функцией.

Кроме того, есть еще одна трудность, заключающаяся в том, что положение геоида, проходящего под материками, невозможно точно определить, не зная закона распределения плотностей в земной коре.

Выясним физический смысл вторых производных потенциала. Возьмем начало прямоугольных координат в точке M земной поверхности. Направим ось z по отвесной линии внутрь Земли, а оси x и y — на север и восток соответственно.

Тогда очевидно, что

$$\frac{\partial W}{\partial z} = g.$$

Представим вторую производную $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$ следующим образом:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right) = \frac{\partial g}{\partial z},$$

отсюда видно, что эта производная представляет собой вертикальный градиент силы тяжести.

Переписав аналогичным образом производные

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right) = \frac{\partial g}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right) = \frac{\partial y}{\partial y},$$

убеждаемся в том, что эти производные характеризуют изменение силы тяжести в горизонтальной плоскости: первая — в направлении меридиана, а вторая — в направлении первого вертикала. Они получили наименование горизонтальных градиентов силы тяжести.

Полным горизонтальным градиентом называется геометрическая сумма векторов $\vec{\partial g}/dx$ и $\vec{\partial g}/dy$, т. е. вектор $\vec{dg}/ds$, указывающий направление, в котором сила тяжести возрастает (или убывает) быстрее всего. Величина его равна

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}\right)^2},$$

а угол с осью x, т. е. азимут, определяется формулой

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}}{\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}}.$$

Вторые производные $\partial^2 W/dx^2$, $\partial^2 W/\partial y^2$, $\partial^2 W/\partial x \partial y$, как мы видели в формуле (II.2.13), характеризуют кривизну нормального сечения уровенной поверхности.

Приняв в (II.2.13) $A = 0$, получим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{g}{\rho_x}$$ (кривизна меридионального сечения),

при $A = \frac{\pi}{2}$ $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{g}{\rho_y}$ (кривизна сечения уровенной поверхности плоскостью первого вертикала).

II.2.4. Вертикальный градиент силы тяжести

Приведем формулу для вычисления вертикального градиента силы тяжести, которой удобно пользоваться в тех случаях, когда кривизны нормальных сечений уровенной поверхности бывают известны.

Подставив в (II.2.10) значения производных $\partial^2 W/\partial x^2$ и $\partial^2 W/\partial y^2$, полученные выше, найдем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 2\omega^2 + g\left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{1}{\rho_y}\right) - 4\pi f\delta. \qquad \text{(II.2.14)}$$

Полученная формула показывает зависимость вертикального градиента силы тяжести от плотности.

Отсюда следует, что редуцирование силы тяжести внутри притягивающих масс невозможно выполнить точно без детального знания закона распределения плотностей.

Напротив, во внешнем пространстве, где притягивающие массы отсутствуют и $\delta = 0$, редуцирование силы тяжести возможно.

II.2.5. Разность потенциалов. Ортометрическая высота

Для определения разности потенциала силы тяжести относительно среднего уровня моря используются результаты геометрического нивелирования.

Поскольку при геометрическом нивелировании измеряются не наклонные отрезки ds земной поверхности, а отрезки нормали dn между уровенными поверхностями силы тяжести, получаемые как разности отсчетов dh по рейкам, то, используя соотношение (рис. II.2.2)

$$dn = -ds\cos(g, s),$$

приведем формулу (II.2.7) к виду

$$dW = -g\,dn. \qquad \text{(II.2.15)}$$

Величину dn можно рассматривать как элементарное превышение dh между двумя бесконечно близкими уровенными поверхностями. Поэтому в формуле (II.2.15) величину dn можно заменить величиной dh.

Интегрируя (II.2.15) вдоль хода нивелирования от исходного пункта нивелирования — футштока 0 до репера B, получим формулу для вычисления разности потенциалов между этими точками

$$W_B - W_0 = -\int_0^B g\, dh. \qquad \text{(II.2.16)}$$

Из (II.2.15) следует, что

$$g = -\frac{dW}{dn}, \qquad \text{(II.2.17)}$$

т. е. сила тяжести есть производная от потенциала, взятая по направлению внешней нормали к уровенной поверхности силы тяжести.

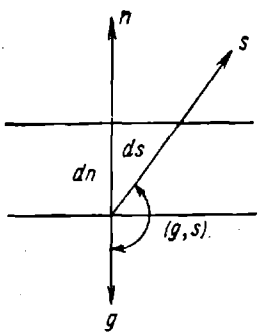


Рис. II.2.2

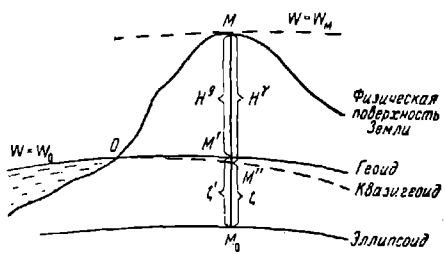


Рис. II.2.3

Расстояние между близкими уровенными поверхностями обратно пропорционально величине силы тяжести в данной точке. Действительно, из (II.2.15) следует

$$dn = -\frac{dW}{g}. \qquad \text{(II.2.18)}$$

Так как сила тяжести на уровенной поверхности непостоянна, то и расстояние между двумя уровенными поверхностями в разных местах различно. Поскольку сила тяжести увеличивается от экватора к полюсам, то в направлении полюсов уровенные поверхности сближаются, а в направлении экватора удаляются друг от друга.

Именно вследствие непараллельности уровенных поверхностей силы тяжести сумма элементарных превышений между двумя точками земной поверхности не определяется однозначно, она зависит от направления, по которому проложен нивелирный ход.

Для определения конечной величины отрезка силовой линии $H\ell$, заключенного между двумя уровенными поверхностями си-

лы тяжести $W = W_M$ и $W = W_0$ (рис. II.2.3), проинтегрируем выражение (II.2.15) вдоль силовой линии MM':

$$W_M - W_0 = -\int_{M'}^{M} g\,dh = -g_m \int_{M'}^{M} dh = -g_m H^g.$$

Отсюда

$$H^g = \frac{W_0 - W_M}{g_m}, \qquad (II.2.19)$$

где g_m — среднее значение силы тяжести на отрезке MM'.

Заметим, что отрезок силовой линии можно принять за отрезок нормали к уровенной поверхности $W = W_0$, поскольку разница между этими отрезками даже при расстояниях между точками M и M' порядка 10 км составляет менее 0,01 мм.

Полученная здесь высота точки M над уровнем моря называется о р т о м е т р и ч е с к о й в ы с о т о й. Индекс g над H означает, что для ее определения требуется знать среднее значение действительной силы тяжести на отрезке MM'.

Формулу для ортометрической высоты можно написать иначе:

$$H^g = \frac{1}{g_m} \int_0^M g\,dh.$$

Интеграл $\int_0^M g\,dh$ может быть точно вычислен. Для этого нужно, чтобы между футштоком О и пунктом M был проложен нивелирный ход, который даст возможность получить величины нивелирных превышений dh, и чтобы в точках этого хода были измерены значения силы тяжести g. Среднее же значение силы тяжести g_m на отрезке MM' неизвестно. Для его определения необходимо использовать данные о строении верхних слоев Земли, которые в большинстве случаев отсутствуют. По этой причине система ортометрических высот в СССР и в ряде других стран не применяется.

II.2.6. Проблема определения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли

Для определения фигуры Земли требуется знание ее потенциала W. Однако вычислить потенциал Земли по формуле (II.2.6) в настоящее время не представляется возможным, так как в нее входит потенциал ньютонианского притяжения V, зависящий от плотности δ. Точный же закон изменения плотности внутри Земли нам неизвестен. Поэтому при изучении гравитационного поля Земли ученым приходилось использовать те или иные гипотезы о ее внутреннем строении.

В 1849 г. замечательный английский ученый Стокс полностью освободил теорию от необходимости привлечения каких-либо гипотез о внутреннем строении Земли при изучении ее фигуры, он доказал, что внешний потенциал Земли может быть определен независимо от плотности.

В основе теоретических исследований Стокса лежит его знаменитая теорема, которая может быть сформулирована следующим

образом: если известна общая масса планеты, угловая скорость ее вращения и форма внешней уровенной поверхности потенциала силы тяжести, целиком охватывающая все притягивающие массы, то потенциал силы тяжести и сама сила тяжести определяются однозначно как во всем внешнем пространстве, так и на самой поверхности уровня.

Можно обобщить теорему Стокса, распространив ее на физическую поверхность планеты (вместо внешней уровенной поверхности считается известной сама поверхность планеты). Только в этом случае необходимо знать на ее поверхности приращение потенциала силы тяжести относительно какого-либо начального пункта О.

Теорема Стокса устанавливает принципиальную возможность определения потенциала W независимо от плотности, однако она не отвечает на вопрос, как может быть решена эта задача для данной конкретной уровенной поверхности. Решение этого вопроса составляет так называемую проблему Стокса.

В общем виде, т. е. для любой произвольной уровенной поверхности, проблема Стокса ввиду ее исключительной трудности не решена до сих пор. Имеются решения проблемы Стокса для некоторых наиболее простых поверхностей, в частности для эллипсоида вращения.

Стоксом была решена и обратная задача, состоящая в определении формы внешней уровенной поверхности силы тяжести и внешнего потенциала при условии, если известны угловая скорость вращения, значения силы тяжести и потенциала W_0 на поверхности уровня.

Решение было получено Стоксом при предложении, что искомый внешний потенциал W достаточно близок к некоторому вспомогательному потенциалу U, называемому нормальным.

Нормальный потенциал задается.

Таким образом, в задаче Стокса определению подлежат лишь малые величины $W - U = T$, квадратами которых можно пренебречь.

Строго говоря, для определения потенциала Земли и формы геоида нельзя использовать задачу Стокса, так как, во-первых, геоид не удовлетворяет условиям теоремы Стокса, он не является внешней уровенной поверхностью и над ним возвышаются массы материков и, во-вторых, измерения силы тяжести производятся на физической поверхности Земли, а не на геоиде.

Поэтому М. С. Молоденский (1945 г.) предложил не связывать задачи геодезии и теории фигуры Земли с проблемой определения фигуры геоида.

Задача геодезии, по мысли М. С. Молоденского, должна заключаться в определении физической поверхности Земли и внешнего гравитационного поля. М. С. Молоденский доказал, что эту задачу можно решить принципиально строго, без привлечения каких-либо гипотез о внутреннем строении Земли.

Решение сформулированной выше задачи было получено М. С. Молоденским при предположении, что внешний потенциал Земли W близок к известному нормальному потенциалу U. Как и в задаче Стокса, в этом случае определению подлежат небольшие величину $T = W - U$. Эта величина T получила название возмущающего потенциала Земли.

II.2.7. Нормальный потенциал Земли, нормальная сила тяжести

За нормальный потенциал U Земли принимается потенциал уровенного эллипсоида (уровенным называется эллипсоид, у которого внешняя поверхность является уровенной поверхностью силы тяжести и, следовательно, в каждой точке которой сила тяжести направлена по нормали), который настолько близко представлял бы действительный внешний потенциал W, чтобы квадратами малых величин $T = W - U$ можно было пренебречь.

Потенциал такого эллипсоида определяется в результате решения проблемы Стокса. Проблема эта может быть сформулирована следующим образом: пусть форма уровенного эллипсоида определяется уравнением

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Известны его общая масса M и угловая скорость вращения ω. Определению подлежат потенциал и сила тяжести этого эллипсоида как во всем внешнем пространстве, так и на самой поверхности эллипсоида.

Приведем наиболее важные соотношения между параметрами уровенного эллипсоида.

Сила тяжести на поверхности уровенного эллипсоида, называемая нормальной силой тяжести, изменяется по закону, установленному итальянским геодезистом Сомильяна:

$$\gamma_0=\frac{a\gamma_e\cos^2 B+b\gamma_p\sin^2 B}{\sqrt{a^2\cos^2 B+b^2\sin^2 B}}, \qquad (II.2.20)$$

где B — геодезическая широта, γ_e — нормальная сила тяжести на экваторе эллипсоида, γ_p — нормальная сила тяжести на полюсе эллипсоида, a и b — большая и малая полуоси эллипсоида.

Формула Сомильяна неудобна для вычислений. Если разложить ее в ряд, то получим приближенную формулу (с точностью до малых второго порядка), удобную для вычислений:

$$\gamma_0=\gamma_e(1+\beta\sin^2 B-\beta_1\sin^2 2B), \qquad (II.2.21)$$

где

$$\beta=\frac{\gamma_p-\gamma_e}{\gamma_e}, \quad \beta_1=\frac{1}{8}\alpha^2+\frac{1}{4}\alpha\beta. \qquad (II.2.22)$$

Формула (II.2.21) называется формулой Клеро с малыми величинами второго порядка.

II.2.8. Соотношения между параметрами уровенного эллипсоида

Между формой уровенного эллипсоида, угловой скоростью его вращения и значениями силы тяжести на полюсе и на экваторе существует строгая математическая зависимость, открытая итальянским ученым Пицетти. Для удобства вычислений полученную

Пицетти формулу раскладывают в ряд по степеням сжатия α, приводя ее к виду

$$\alpha+\beta=\frac{5}{2}q-\frac{17}{14}\alpha q, \qquad (II.2.23)$$

где

$$q=\frac{\omega^2 a}{\gamma_e}. \qquad (II.2.24)$$

Эта формула имеет важное значение для геодезии: она позволяет определить сжатие Земли

$$\alpha=\frac{\frac{5}{2}q-\beta}{1+\frac{17}{14}q}. \qquad (II.2.25)$$

Для определения α по формуле (II.2.25) коэффициент нормальной формулы β должен быть определен из наблюдений силы тяжести, величину q можно считать для Земли величиной известной.

Наблюдения силы тяжести производятся как на континентах, так и на поверхности морей и океанов, поэтому естественно, что сжатие α, определенное на основании теоремы Клеро, лучше характеризует фигуру Земли в целом, чем сжатие, выводимое по результатам градусных измерений, покрывающих лишь материковую часть Земли, т. е. примерно $^1/_3$ всей ее поверхности.

Значение нормального потенциала U_0 на поверхности уровенного эллипсоида определяется формулой

$$U_0=\gamma_e a\left(1-\frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{5}\alpha^2-\frac{8}{105}\alpha^3\ldots\right)+$$
$$+\frac{11}{6}\omega^2 a^2\left(1-\frac{24}{77}\alpha-\frac{236}{2695}\alpha^2-\ldots\right). \qquad (II.2.26)$$

Масса эллипсоида M вычисляется по формуле

$$fM=a^2\gamma_e(1-\alpha)+\frac{3}{2}\omega^2 a^3\left(1-\frac{5}{7}\alpha-\frac{1}{441}\alpha^2\right), \qquad (II.2.27)$$

Приведем еще формулу для определения разности моментов инерции эллипсоида

$$3f(C-A)=fMa^2(2\alpha-\alpha^2)-\omega^2 a^5\left(1-\frac{9}{7}\alpha+\frac{25}{49}\alpha^2-\ldots\right) \qquad (II.2.28)$$

Из семи параметров, определяющих нормальный потенциал Земли (γ_e, a, fM, U_0, α, β, ω), достаточно знать только четыре, ибо, используя приведенные выше формулы [(II.2.23, II.2.26 и II.2.27)], можно получить остальные.

В выводах по данным наземных измерений в качестве исходных параметров принимают a, α, ω и γ_e.

Большую полуось a и сжатие α берут такими же, как и для референц-эллипсоида, принятого в качестве поверхности относимости, на которую проектируются триангуляционные сети.

Так, в СССР и странах народной демократии в качестве референц-эллипсоида принят референц-эллипсоид Красовского (1942 г.), параметры которого

$$a = 6\,378\,245 \text{ м},$$

$$\alpha = 1 : 298{,}3.$$

Если же речь идет об изучении всей нашей планеты в целом, то целесообразно принять параметры общего земного эллипсоида. XIV Генеральная ассамблея Международного геодезического и геофизического союза в 1967 г. рекомендовала в качестве параметров общего земного эллипсоида следующие:

$$a = 6\,378\,160 \text{ м},$$

$$\alpha = 1 : 298{,}15.$$

Угловая скорость ω вращения Земли вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{2\pi}{n},$$

где $n = 86164{,}09$ — число средних секунд в звездных сутках.

Экваториальная постоянная γ_e определяется по данным мировой гравиметрической съемки.

II.2.9. Нормальная формула силы тяжести

В Советском Союзе для вычисления нормальной силы тяжести принята формула Гельмерта (1901—1909 гг.)

$$\gamma_0 = 978{,}030\,(1 + 0{,}005302 \sin^2 B - 0{,}000007 \sin^2 2B).$$

Использование этой формулы объясняется тем обстоятельством, что сжатие, соответствующее коэффициенту $\beta = 0{,}005302$, определенному Гельмертом, практически совпадает со сжатием эллипсоида Красовского (по Гельмерту $\alpha = 1 : 298{,}2$).

Постоянные γ_e и β определены Гельмертом по результатам гравиметрической съемки того времени, коэффициент β_1 получен теоретически.

II.2.10. Вертикальный градиент нормальной силы тяжести и кривизна силовой линии нормального поля

При редуцировании нормальной силы тяжести с одной уровенной поверхности на другую приходится пользоваться ее вертикальным градиентом, вычисляемым по формуле

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -0{,}30855\,(1 + 0{,}00071 \cos 2B) \text{ мгал/м},$$

здесь n — направление внешней к уровенному эллипсоиду нормали.

Вертикальный градиент нормальной силы тяжести в очень слабой степени зависит от широты пункта. Поэтому при малых

значениях высот второй член можно не учитывать и значение нормальной силы тяжести на высоте H над эллипсоидом (высоты H отсчитываются по направлению нормали к эллипсоиду) вычислять по формуле

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{\partial \gamma}{\partial n} H = \gamma_0 - 0{,}0003086H,$$

если H выражать в метрах, нормальную силу тяжести — в галах. Знак минус указывает, что при положительных высотах над эллипсоидом поправка в нормальную силу тяжести за высоту будет отрицательной.

Кривизна силовой линии нормального поля определяется по формуле

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\beta}{R} \sin 2B,$$

где R — средний радиус Земли.

Силовая линия нормального поля, в отличие от силовой линии действительного поля Земли, — плоская кривая, всегда лежащая в плоскости меридиана и обращенная вогнутостью к полюсу. Поскольку β является величиной порядка сжатия α, заключаем, что радиус кривизны силовой линии примерно в 200 раз больше радиуса Земли.

В. ВЕЛИЧИНЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ОТЛИЧИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ОТ НОРМАЛЬНОГО

II.2.11. Возмущающий потенциал

При помощи возмущающего потенциала определяются отступления физической поверхности Земли от уровенного эллипсоида.

Если по аналогии с формулой (II.2.6) для действительного потенциала Земли представить нормальный потенциал как $U = V^э + Q^э$, где $V^э$ — потенциал притяжения уровенного эллипсоида, а $Q^э$ — потенциал его центробежной силы, и взять разность между W и U, то получим следующее выражение для возмущающего потенциала:

$$T = (V - V^э) + (Q - Q^э).$$

Как видно, величина возмущающего потенциала существенно зависит от выбора нормального потенциала, от того, какой эллипсоид взят в качестве уровенного. Дело в том, что в качестве уровенного эллипсоида может быть взят общий земной эллипсоид, а может быть и референц-эллипсоид.

Под общим земным эллипсоидом понимается эллипсоид, у которого центр масс совмещен с центром масс Земли и оси вращения совпадают, масса эллипсоида равна массе Земли, потенциал U_0 на поверхности эллипсоида равен потенциалу Земли в футштоке (W_0) и разность между экваториальным и полярным моментами инерции эллипсоида равна разности между средним из экваториальных и полярным моментами инерции Земли.

Референц-эллипсоид — поверхность относимости, принятая для обработки триангуляции данной страны, ориентируется в теле Земли иначе. Их центры масс не совпадают, а ось вращения эллипсоида параллельна оси вращения Земли.

Если в качестве уровенного эллипсоида взят общий земной эллипсоид, то $Q = Q^э$, если же взят референц-эллипсоид, то в общем случае $Q \neq Q^э$. Однако, учитывая, что расстояние между осями вращения эллипсоида и Земли мало (порядка 100 м), можно этим различием пренебречь.

Таким образом, приходим к выводу, что во всех случаях возмущающий потенциал можно определять как разность потенциалов притяжения Земли и эллипсоида

$$T = V - V^э.$$

Возмущающий потенциал обладает всеми свойствами потенциала притяжения. В частности, во внешнем пространстве возмущающий потенциал является гармонической функцией, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta T = 0$.

Возмущающий потенциал не может быть непосредственно измерен, однако в точках физической поверхности Земли он может быть выражен через величины, находимые из измерений.

Условие, которому должен удовлетворять возмущающий потенциал в точках физической поверхности Земли, называется граничным, или краевым.

Определение возмущающего потенциала сводится к решению уравнения Лапласа $\Delta T = 0$ таким образом, чтобы найденное значение T в точках физической поверхности Земли удовлетворяло граничному (краевому) условию. Подобные задачи называются краевыми задачами теории потенциала.

II.2.12. Уклонения отвеса

Вследствие отличия действительного гравитационного поля Земли от нормального, обусловленного неправильным строением нашей планеты и сложностью ее фигуры, направление действительной силы тяжести g (отвесной линии) в данной точке M поверхности Земли не будет совпадать с направлением нормальной силы тяжести γ в той же точке.

Угол между направлением отвесной линии и направлением нормальной силы тяжести в той же точке называется *гравиметрическим уклонением отвесной линии*.

Явление уклонения отвеса наблюдается повсеместно. В равнинных областях величины уклонения отвеса составляют несколько секунд, а в горах могут доходить до 1′. Вследствие этого астрономические координаты (φ, λ) точек земной поверхности отличаются от геодезических (B, L).

Имеем

$$\left.\begin{aligned} B &= \varphi - \xi - \Delta B \\ L &= \lambda - \eta \sec \varphi \end{aligned}\right\}, \qquad (II.2.29)$$

где ξ — проекция уклонения отвеса на плоскость меридиана, η — проекция уклонения отвеса на плоскость первого вертикала, ΔB —

поправка за кривизну силовой линии нормального поля, $\Delta B = 0'', 171\ H \sin 2B$, где H — высота точки над эллипсоидом.

Принято следующее правило знаков для составляющих ξ и η: если астрономический зенит отклоняется от геодезического на северо-восток, то составляющие отвеса ξ и η считаются положительными, если же на юго-запад, то отрицательными.

Зависимость между возмущающим потенциалом T и составляющими гравиметрического уклонения отвеса выражается формулами

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{\gamma R}\frac{\partial T}{\partial B} \\ \eta &= -\frac{1}{\gamma R\cos B}\frac{\partial T}{\partial L} \end{aligned}\right\}, \qquad (II.2.30)$$

где R — средний радиус Земли.

II.2.13. Нормальная высота. Аномалия высоты

Геодезической высотой H_M точки M земной поверхности называется высота точки над эллипсоидом, отсчитанная по нормали к эллипсоиду. Если бы разность нормальных потенциалов $U_0 - U_M$

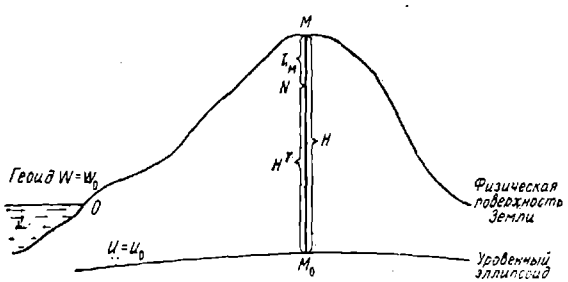


Рис. II.2.4

между точками M_0 и M (рис. II.2.4) была известна, то геодезическая высота могла бы быть определена из соотношения

$$H_M = \frac{U_0 - U_M}{\gamma_m},$$

где γ_m — среднее значение нормальной силы тяжести на отрезке MM_0.

Однако в результате измерений может быть определена разность $W_0 - W_M$ (см. II.2.16), где W_0 — значение потенциала силы тяжести в футштоке (точке 0), а W_M — значение того же потенциала в точке M.

Вследствие отличия реального гравитационного поля от нормального через разность $W_0 - W_M$ определяется не геодезическая

высота, а лишь ее составляющая H^γ, получившая название нормальной высоты (см. рис. II.2.4).

Таким образом, имеем

$$H^\gamma_M = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_m}, \qquad (II.2.31)$$

где

$$\gamma_m = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B_M - \beta_1 \sin^2 2B_M) + \frac{\partial \gamma}{\partial n} \cdot \frac{H^\gamma_M}{2}.$$

Разность между геодезической высотой H_M точки M и ее нормальной высотой H^γ_M, т. е. величина $\zeta_M = H_M - H^\gamma_M$, называется а н о м а л и е й в ы с о т ы. Аномалия высоты ζ_M равна отрезку NM нормали, проведенной к эллипсоиду из точки M (см. рис. II.2.4).

Аномалия высоты определяется через возмущающий потенциал следующим образом:

$$\zeta_M = \frac{T_M}{\gamma_N}, \qquad (II.2.32)$$

где γ_N — значение нормальной силы тяжести в точке N (см. рис. II.2.4).

Таким образом, геодезическая высота получается как сумма двух составляющих

$$H_M = H^\gamma_M + \zeta_M.$$

II.2.14. Квазигеоид

Величина ζ связана с возмущающим потенциалом T Земли и характеризует степень аномальности ее гравитационного поля. Чтобы проиллюстрировать это положение, будем откладывать от поверхности уровенного эллипсоида по нормали к нему аномалии высот ζ, определенные в точках M физической поверхности Земли. В результате получим совокупность точек M^π, образующих некоторую поверхность (см. рис. II.2.3), которую М. С. Молоденский предложил назвать квазигеоидом.

Аномалия высоты ζ может быть названа высотой квазигеоида над поверхностью эллипсоида, а нормальная высота H^γ — высотой точки M физической поверхности Земли, отсчитанной по нормали к эллипсоиду, над поверхностью квазигеоида.

Квазигеоид не является уровенной поверхностью силы тяжести. Отступления $\Delta\zeta$ по высоте квазигеоида от геоида могут быть вычислены по формуле

$$\Delta\zeta = \zeta' - \zeta = H^\gamma - H^g = \frac{\gamma_m - g_m}{g_m} H^\gamma,$$

где ζ — высота квазигеоида (аномалия высоты), ζ' — высота геоида, g_m и γ_m — средние значения действительной и нормальной

силы тяжести для точки M (см. рис. II.2.3). Как показывают подсчеты по приведенной выше формуле, отступления $\Delta\zeta$ на равнинах составляют несколько сантиметров, а в горах могут достичь максимальной величины порядка 2 м. Поскольку на поверхности океана разности потенциалов $\int g\,dh$ равны нулю, то и нормальные, и ортометрические высоты также будут равны нулю, и, как следствие, $\Delta\zeta = 0$. Это означает, что на океанах геоид совпадает с квазигеоидом.

Таким образом, квазигеоид только на материках, да и то незначительно, отступает от уровенной поверхности силы тяжести, принимаемой за «уровень моря» (геоид).

Но поскольку положение геоида под материками не может быть точно определено, то за «уровень моря» приходится принимать поверхность квазигеоида, относительно которого отсчитываются нормальные высоты, изображаемые на топографических картах.

Поверхность квазигеоида является сложной, она образует «волны» относительно эллипсоида, высоты которых ζ по абсолютной величине не превышают 100 м.

II.2.15. Аномалии силы тяжести

Отличие действительного гравитационного поля от нормального проявляется также в аномалиях силы тяжести.

Аномалией силы тяжести называется разность между действительным значением силы тяжести, полученным из наблюдений, и ее нормальным (теоретическим) значением. Если значения действительной силы тяжести и нормальной отнесены к одной и той же точке, то аномалию называют «чистой», если же эти значения относятся к разным точкам пространства, то аномалию называют «смешанной». В зависимости от поправок (редукций), вводимых либо в измеренную, либо в нормальную силу тяжести, различают разные виды аномалий.

При вычислении аномалий в свободном воздухе в измеренное значение силы тяжести g никаких поправок не вводят, вводят лишь поправку за высоту в значение нормальной силы тяжести:

$$(g-\gamma)_{\text{св. в}} = g-(\gamma_0+\Delta\gamma),$$

где γ_0 — нормальная сила тяжести на эллипсоиде, $\Delta\gamma = -0{,}30855 \times (1 + 0{,}00071\cos 2B)\,H + 0{,}0723H^2\cdot 10^{-6}$ мгал — редукция в свободном воздухе. В этом случае аномалия будет «чистой». Если вместо геодезической высоты взять нормальную высоту H^γ, то аномалия будет «смешанной», так как наблюденная сила тяжести относится к точке M земной поверхности, а нормальная сила тяжести — к точке N (см. рис. II.2.4). Поскольку в теории фигуры Земли обычно используются смешанные аномалии, то в дальнейшем под аномалией в свободном воздухе будем понимать смешанную аномалию

$$(g-\gamma)_{\text{св. в}} = g_M - \gamma_N.$$

Аномалии в свободном воздухе на земной поверхности изменяются по сложному закону и потому линейное интерполирование их приводит к неудовлетворительному результату. Вследствие

этого как построение, так и использование карт аномалий в свободном воздухе, особенно для горных районов, встречает большие трудности.

Основной причиной, вызывающей сложный, неправильный характер изменения аномалий в свободном воздухе, является влияние топографических масс (т. е. масс, возвышающихся над уровнем моря) на значение измеренной силы тяжести g. Известно, что в пределах небольших участков, порядка трапеции $1^{\circ} \times 1^{\circ}$, коэффициент зависимости аномалии от высоты в горных районах близок к 0,10 мгал/1 м.

Обычно в горных районах сила тяжести измеряется в долинах, а на труднодоступных горных вершинах измерений не производят. Естественно, что формальное линейное интерполирование значений аномалий силы тяжести между пунктами, лежащими в долинах и расположенными по обе стороны горного хребта, заведомо неправильно.

В Советском Союзе разработан метод так называемого косвенного интерполирования аномалий в свободном воздухе с использованием другого вида аномалий — топографических аномалий. Для получения топографических аномалий из наблюденного значения силы тяжести исключается влияние притягивающих масс, расположенных между уровнем моря и физической поверхностью Земли. Эти массы называются топографическими. С необходимостью устранения возмущающего эффекта топографических масс из результатов наблюдений силы тяжести приходится встречаться и при разведке полезных ископаемых, а также при изучении внутреннего строения Земли.

Аномалии силы тяжести, из которых устранен возмущающий эффект топографических масс, называются топографическими. Поправку за влияние топографических масс будем называть топографической поправкой (редукцией) или, иначе, поправкой (редукцией) за топографию Δg. Она равна составляющей притяжения топографических масс Земли на направление силы тяжести в данной точке земной поверхности M.

Составляющие силы притяжения F_x, F_y и F_z вычисляются по формулам (II.2.4). Если ось z совместить с направлением силы тяжести g в данной точке M, то

$$\Delta g = F_z = -f \int_{\tau} \frac{\delta \, d\tau}{r^2} \cos(r, z),$$

где r — радиус-вектор от данной точки M, в которой вычисляется топографическая поправка Δg до элементарного объема $d\tau$ в текущей точке, (r, z) — угол между радиусом-вектором и направлением силы тяжести в точке M, τ — полный объем топографических масс.

Если при вычислении топографической поправки учитывается влияние всех топографических масс Земли, то полученная таким образом поправка носит название полной топографической редукции ($\Delta g_{\text{п. т. р}}$). После введения в значение силы тяжести в данной точке M полной топографической редукции получается значение силы тяжести, освобожденное от влияния всех топографических масс Земли. Величина ($g_M - \Delta g_{\text{п. т. р}} - \gamma_N$) называется аномалией в полной топографической редукции. Однако далеко не во всех случаях

приходится учитывать влияние топографических масс всей Земли. Необходимо иметь в виду, что этот учет очень сложен, требует много труда и времени, а влияние далеких топографических масс незначительно и почти одинаково на все пункты небольшого района. Поэтому оказывается вполне достаточным вычислять влияние не всех топографических масс, а лишь в пределах некоторой области. В этом случае поправка называется неполной топографической редукцией ($\Delta g_{\text{н. т.р.}}$), а величина ($g_M - \Delta g_{\text{н. т. р}} - \gamma_N$) — аномалией в неполной топографической редукции — $(g-\gamma)_{\text{н. т. р.}}$

Неполная топографическая редукция вычисляется по формуле

$$\Delta g_{\text{н. т. р}} = 2\pi f \delta H_0^{\gamma} - \Delta g_{\text{р}},$$

где δ — плотность топографических масс, H_0^{γ} — нормальная высота исследуемой точки, $\Delta g_{\text{р}}$ — поправка на рельеф.

Величина $2\pi f \delta H_0^{\gamma} = 0{,}0418\delta H_0^{\gamma}$ представляет собой притяжение плоской пластины бесконечного простирания (пластины Буге) и называется редукцией Буге.

Поправка за рельеф $\Delta g_{\text{р}}$ учитывает отступления физической поверхности Земли от горизонтальной плоскости $H = H_0^{\gamma} = \text{const}$, проходящей через исследуемую точку. После введения поправки за рельеф в значение наблюденной силы тяжести мы получаем такое значение силы тяжести, которое было бы в исследуемой точке, если бы физическая поверхность Земли в пределах выбранной области была строго горизонтальной. Иными словами, исправленное поправкой за рельеф значение силы тяжести $g + \Delta g_{\text{р}}$ соответствует притяжению однородной пластины толщиной H_0^{γ}.

Поскольку притяжение плоского материального слоя не зависит от расстояния точки до слоя при условии, что это расстояние мало по сравнению с протяженностью слоя, то можно сказать, что введение поправки за рельеф соответствует конденсации топографических масс на поверхности $H = H_0^{\gamma} = \text{const}$.

Для определения численной величины поправки за рельеф ($\Delta g_{\text{р}}$) всю местность вокруг точки наблюдения разбивают на небольшие ячейки (трапеции) при помощи системы концентрических окружностей и радиально расходящихся лучей. При определении размеров радиусов кольцевых зон, а также числа лучей исходят из того, чтобы внутри каждой ячейки высоту h над уровнем точки наблюдения можно было считать величиной постоянной.

Поправка за рельеф получается как сумма влияний отдельных ячеек

$$\Delta g_{\text{р}} = \frac{0{,}0418}{n}\delta \sum \left(\sqrt{r_i^2+h^2} - \sqrt{r_{i+1}^2+h^2} + r_{i+1} - r_i\right),$$

где n — число лучей, δ — плотность горных пород, $h = H^{\gamma} - H_0^{\gamma}$ — средняя высота ячейки над уровнем точки наблюдения, r_i — радиус внутренней зоны, r_{i+1} — радиус внешней зоны. Здесь поправка получается в миллигалах, если r и h выражены в метрах. Имеются специальные таблицы, по которым эта поправка вычисляется *.

* П. И. Лукавченко. Таблицы и номограммы для вычисления поправок силы тяжести за рельеф местности при съемке с гравиметрами. М., Гостоптехиздат, 1951.

Если в наблюденное значение силы тяжести вводится только редукция Буге, то величина

$$\left(g_M - 2\pi f \delta H^{\gamma}_M - \gamma_N\right) = (g-\gamma)_{\text{Б}}$$

называется аномалией Буге.

Если в наблюденное значение силы тяжести вводится только поправка за рельеф, то величина

$$(g_M + \Delta g_{\text{р}} - \gamma_N) = (g-\gamma)_{\Phi}$$

называется аномалией Фая.

II.2.16. Косвенная интерполяция аномалий

Топографические аномалии используются для так называемой косвенной интерполяции аномалий в свободном воздухе и аномалий Фая.

Косвенная интерполяция аномалий в свободном воздухе с применением аномалий Буге может быть произведена следующим образом. В пунктах, в которых известны значения силы тяжести, вычисляют аномалии Буге. Затем путем линейной интерполяции определяют аномалии Буге в промежуточных пунктах, где отсутствуют гравиметрические наблюдения. Обратный переход от аномалий Буге к аномалиям в свободном воздухе в этих пунктах совершается при помощи соотношения

$$(g-\gamma) = (g-\gamma)_{\text{Б}} + 2\pi f \delta H^{\gamma}.$$

В горных районах, где поле аномалий Буге становится сложным косвенная интерполяция аномалий в свободном воздухе может быть выполнена с помощью аномалий в неполной топографической редукции. Процесс вычислений аналогичен описанному выше.

Косвенная интерполяция аномалий Фая выполняется через аномалии в неполной топографической редукции, с использованием соотношения

$$(g-\gamma)_{\Phi} = (g-\gamma)_{\text{н. т. р}} + 2\pi f \delta H^{\gamma}.$$

По значениям аномалий силы тяжести в отдельных точках составляют гравиметрические карты изоаномал (изоаномалами называются линии, соединяющие точки с одним и тем же значением аномалии). Наиболее распространены карты с аномалиями в свободном воздухе, Буге. Обычно основой любой гравиметрической карты служит топографическая карта соответствующего масштаба. При вычислении высот квазигеоида и уклонений отвеса применяются гравиметрические карты 1 : 100 000, 1 : 200 000, 1 : 300 000, 1 : 1 000 000 и более мелких масштабов.

При исследованиях гравитационного поля Земли и ее фигуры возникает задача определения средних аномалий силы тяжести в свободном воздухе или аномалий Фая для больших площадей по дискретным и зачастую неравномерно распределенным гравиметрическим наблюдениям.

При получении средних аномалий силы тяжести для бо́льших площадей в качестве исходных данных используются средние аномалии для меньших площадей. Минимальной областью, для которой средняя аномалия определяется непосредственно по значениям аномалий в гравиметрических пунктах или по гравиметрическим картам, является трапеция размером $1^\circ \times 1^\circ$. При этом необходимо учитывать зависимость аномалий силы тяжести от рельефа местности.

Проблемой определения зависимости аномалий силы тяжести от высоты при выводе средних значений аномалий для больших площадей занимались многие исследователи. При исследованиях этой проблемы в ЦНИИГАиК определение средних аномалий в свободном воздухе по аномалиям в гравиметрических пунктах для трапеций размером $1^\circ \times 1^\circ$ производилось методом косвенной интерполяции через аномалии Буге; определение средних аномалий Фая для тех же трапеций производилось методом косвенной интерполяции через аномалии в неполной топографической редукции.

Переход к трапециям бо́льших размеров осуществлялся в три этапа: 1) переход от аномалий трапеций $1^\circ \times 1^\circ$ к аномалиям трапеций $2^\circ \times 2^\circ$; 2) переход от аномалий трапеций $2^\circ \times 2^\circ$ к аномалиям трапеций $4^\circ \times 4^\circ$; 3) переход от аномалий трапеций $4^\circ \times 4^\circ$ к аномалиям трапеций $10^\circ \times 10^\circ$.

Вычисление средних аномалий в свободном воздухе для материковых трапеций на 1, 2 и 3 этапах осреднения производилось по формуле

$$\overline{(g-\gamma)} = (g-\gamma)_{\text{ср}} + k_i (\overline{H}^{\gamma} - H^{\gamma}_{\text{ср}}), \qquad \text{(II.2.33)}$$

где $(g-\gamma)_{\text{ср}}$, $H^{\gamma}_{\text{ср}}$ — среднее значение аномалии в свободном воздухе и средняя высота в трапециях, имеющих гравиметрические наблюдения; $\overline{H}^{\gamma}$ — средняя высота всей трапеции; k_i — коэффициент зависимости аномалии в свободном воздухе от высоты на i-ом этапе осреднения.

Средние аномалии для морских трапеций вычислялись по формуле

$$\overline{(g-\gamma)} = (g-\gamma)_{\text{ср}} + b_i (\overline{P} - P_{\text{ср}}), \qquad \text{(II.2.34)}$$

где $\overline{P}$ и $P_{\text{ср}}$ — соответствующие глубины, а b_i — коэффициент зависимости аномалии в свободном воздухе от глубины на i-ом этапе осреднения.

Коэффициенты k_i и b_i вычислялись по способу наименьших квадратов. Так, например, при переходе от трапеций $1^\circ \times 1^\circ$ к трапециям $2^\circ \times 2^\circ$ применялись формулы

$$k_2 = \frac{[\Delta g h]}{[hh]}, \quad b_2 = \frac{[\Delta g P]}{[PP]}, \qquad \text{(II.2.35)}$$

где Δg — значение аномалии в трапеции $1^\circ \times 1^\circ$, а h и P — отклонение высоты или глубины гравиметрически изученной трапеции $1^\circ \times 1^\circ$ от высоты или глубины трапеции $2^\circ \times 2^\circ$, полученной как среднее из высот или глубин трапеций $1^\circ \times 1^\circ$, имеющих гравиметрические наблюдения.

Аналогичные формулы применялись и на других этапах осреднения.

Для вычисления коэффициентов k или b использовались районы, достаточно хорошо изученные в гравиметрическом отношении, с большим диапазоном изменения высоты или глубины.

При вычислении средних аномалий Фая применяли формулы, аналогичные формулам (II.2.33), (II.2.34), (II.2.35), заменяя в них $(g-\gamma)$ на $(g-\gamma)_\Phi$ и коэффициент k на k'. Полученные результаты приведены в табл. II.2.1.

Таблица II.2.1

Среднее значение коэффициентов	Для трапеций 1° × 1°	Для трапеций 2° × 2°	Для трапеций 4° × 4°	Для трапеций 10° × 10°
k	0,094	0,054	0,026	0,0124
k'	0,111	0,059	0,032	0,0165

Проведенные в ЦНИИГАиК исследования * показывают, что если для небольших трапеций площадью порядка 1° × 1° хороший результат дает интерполирование через топографические аномалии, то при переходе к трапециям бо́льших размеров зависимость аномалии от рельефа заметно ослабевает.

II.2.17. Строение Земли. Сопоставление данных наблюдений с гидростатической теорией

При изучении внутреннего строения Земли в настоящее время приходится использовать косвенные данные (гравиметрии, сейсмологии и др.), поскольку непосредственные экспериментальные материалы отсутствуют.

С достаточным приближением можно считать, что Земля состоит из бесконечного множества концентрических сферических слоев, плотность которых возрастает с увеличением глубины. Отсюда следует, что закон изменения плотности должен иметь вид

$$\delta = f(r), \tag{II.2.36}$$

где r — расстояние от центра Земли.

Распределение плотностей внутри Земли должно удовлетворять известным значениям массы M и момента инерции C Земли относительно оси вращения.

---

* В. А. Таранов. Зависимость аномалии силы тяжести от высоты при выводе средних гравиметрических характеристик больших площадей. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 145. М., Геодезиздат, 1962.

Общую массу Земли можно рассматривать как сумму масс составляющих ее концентрических слоев. Если плотность одного из слоев будет $\delta = f(r)$, а толщина dr, то масса такого слоя

$$dM = 4\pi\delta r^2\, dr = 4\pi f(r)\, r^2\, dr.$$

Общая масса Земли

$$M = 4\pi \int_0^R f(r)\, r^2\, dr, \qquad \text{(II.2.37)}$$

где R — средний радиус Земли.

Принимая объем Земли $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, можно определить среднюю плотность Земли

$$\delta_m = \frac{M}{V} = \frac{3}{R^3} \int_0^R f(r)\, r^2\, dr. \qquad \text{(II.2.38)}$$

Момент инерции C определяется соотношением

$$C = \frac{8}{3}\pi \int_0^R f(r)\, r^4\, dr. \qquad \text{(II.2.39)}$$

Условия (II.2.37), (II.2.38) и (II.2.39) не дают возможности однозначно определить функцию $f(r)$. Задача обычно решается методом подбора, при котором стараются подобрать такую модель Земли, которая в наибольшей степени согласовалась бы со всеми данными наблюдений.

В настоящее время на основании результатов сейсмических наблюдений принята гипотеза прерывного распределения плотностей в недрах Земли.

Наиболее резко выраженные границы раздела плотностей на глубинах 10—70 км и 2900 км позволяют разделить Землю на три главные зоны: земную кору, оболочку (иначе называемую мантией) и ядро. В свою очередь внутри каждой из этих зон намечаются границы, где физические свойства вещества меняются скачком.

Таблица II.2.2

Оболочка		Интервал глубин, км	Интервал плотности, г/см³
Кора	(A)	0—33	2,7—3,0
Мантия	(B)	33—400	3,32—3,65
	(C)	400—1000	3,65—4,68
	(D)	1000—2900	4,68—5,69
Ядро	(E)	2900—5000	9,40—11,5
	(*F*)	5000—5100	11,5—12,0
	(*G*)	5100—6371	12,0—12,3

Моделью Земли, наилучшим образом отвечающей данным наблюдений является модель «А» Гутенберга-Буллена. Основные характеристики для оболочек этой модели приведены в табл. II.2.2.

Предположив распределение плотности внутри Земли известным, можно вычислить силу тяжести и давление внутри Земли.

Если Землю рассматривать как шар, состоящий из концентрических слоев, и пренебречь центробежной силой, то можно силу тяжести на расстоянии r_0 от центра Земли отождествить с силой притяжения всех слоев, находящихся глубже ($r \leqslant r_0$), поскольку притяжение однородных слоев на внутреннюю точку равно нулю. В таком случае

$$g = \frac{fm}{r_0^2},$$

где m — масса, заключенная внутри сферы радиуса r_0. Аналогично (II.2.37) найдем, что

$$m = 4\pi \int_0^{r_0} f(r)\, r^2\, dr,$$

откуда

$$g = f\,\frac{4\pi}{r_0^2} \int_0^{r_0} f(r)\, r^2\, dr.$$

Вычислим давление p внутри Земли. Уравнение гидростатического равновесия имеет вид

$$dp = \delta g\, dr, \qquad \text{(II.2.40)}$$

где g — ускорение силы тяжести, δ — плотность. После интегрирования получим давление как функцию расстояния r_0 от центра Земли

$$p = \int_{r_0}^{R} g f(r)\, dr.$$

Из полученных формул следует, что значения силы тяжести и давления внутри Земли определяются принятым законом изменения плотности. На рис. II.2.5 кривые *1* и *2* показывают изменение g и p внутри Земли при принятом законе изменения плотности, соответствующем модели «А» Гутенберга-Буллена.

Для того чтобы ответить на вопрос: находится ли Земля в состоянии гидростатического равновесия, следует сравнить гравитационное поле Земли с тем полем, которое создавалось бы Землей, если бы она находилась в состоянии равновесия под действием силы тяжести.

Перепишем уравнение гидростатического равновесия (II.2.40) в виде

$$dp = \delta\, dW.$$

Отсюда следует, что уровенные поверхности в случае гидростатического равновесия являются также поверхностями равных давлений и равных плотностей. При отсутствии вращения эти поверхности имеют сферическую форму; под влиянием же центробежной силы, возникающей при вращении, уровенные поверхности приобретают сжатие, зависящее от угловой скорости вращения ω и от закона изменения плотности δ по глубине. Если ω невелико, как это имеет место в случае Земли, то и уклонения уровенных поверхностей от сферы будут также небольшими.

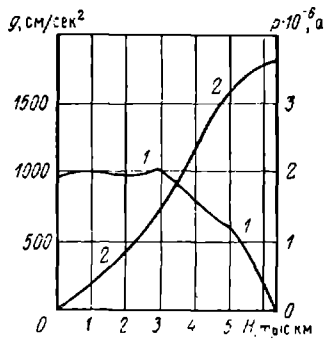


Рис. II.2.5

Предположим, что неоднородная жидкая планета, вращающаяся с небольшой скоростью ω, состоит из бесчисленного множества сфероидальных слоев малого сжатия, имеющих общий центр и общую ось вращения. Каждый слой однороден (плотность его $\delta' = \text{const}$), но от слоя к слою плотность может меняться по произвольному закону, т. е.

$$\delta' = f(r'),$$

где r' — расстояние слоя от центра планеты.

Сжатие α' внутренних слоев меняется непрерывно, оставаясь малой величиной, второй и высшими степенями которой можно пренебречь. Будем считать, что сжатие α' каждого внутреннего слоя также является некоторой функцией r':

$$\alpha' = \varphi(r').$$

При этих предположениях Клеро вывел уравнение, которое выражает собой условие равновесия любого слоя неоднородной жидкой планеты, находящейся в жестком вращении. Это уравнение получено Клеро с точностью до малых величин первого порядка и называется «первичным уравнением» Клеро.

После некоторых преобразований применим «первичное уравнение» Клеро к внешней поверхности планеты, т. е. напишем условие равновесия жидкой массы в целом:

$$\left(\alpha_0 - \frac{q}{2}\right)\frac{\delta_m}{3} = \frac{1}{5R^5}A, \qquad \text{(II.2.41)}$$

где α_0 — сжатие внешней поверхности планеты, находящейся в состоянии гидростатического равновесия; q — отношение центробежной силы на экваторе к силе тяжести, $q = 1/288$; δ_m — средняя плотность планеты; A — коэффициент, зависящий от внутреннего распределения плотностей слоев δ' и их сжатий α',

$$A = \int_0^R \delta' \frac{d}{dr'}\left(r'^5\alpha'\right)dr'.$$

Вычислим гидростатическое сжатие α_0 для случая однородной Земли и для случая, когда неоднородность доведена до крайнего предела и вся масса Земли сосредоточена в ее центре. Первый случай был рассмотрен Ньютоном, второй — Гюйгенсом.

В первом случае

$$\delta = \delta_m = \text{const}, \qquad A = \int_0^R \delta' \frac{d}{dr'} (r'^5 \alpha') \, dr' = \delta_m R^5 \alpha_0$$

и по (II.2.41) получаем

$$\alpha_0 = \frac{5}{4} q = 1 : 231.$$

Определим плотность во втором случае. Для этого выделим около центра сферу сколь угодно малого радиуса r и будем считать, что вся масса Земли M сосредоточена внутри этой сферы. Тогда плотность в этой сфере можно считать величиной постоянной и равной

$$\delta' = \frac{3M}{4\pi r^3}.$$

Тогда

$$A = \int_0^R \delta' \frac{d}{dr'} (r'^5 \alpha') \, dr' = \frac{3M}{4\pi r^3} \int_0^r \frac{d}{dr'} (r'^5 \alpha') \, dr' = \frac{3}{4} \frac{Mr^2 \alpha}{\pi}.$$

При $r \to 0$ последнее выражение обращается в нуль и из (II.2.41) получаем

$$\alpha_0 = \frac{q}{2} = 1 : 577.$$

Истинное сжатие Земли находится между этими крайними пределами; оно ближе к ньютоновскому пределу потому, что строение Земли гораздо ближе к случаю, рассмотренному Ньютоном, чем к случаю Гюйгенса.

Знание истинного закона $\delta' = f(r')$ позволило бы вычислить истинное гидростатическое сжатие α'. Но этот закон неизвестен. Приходится вычислять гидростатическое сжатие без знания закона изменения плотности. В этом случае необходимо использовать связь между гидростатическим сжатием α_0 и некоторым коэффициентом η_0, введенным Радо.

Согласно определению Радо,

$$\eta = \frac{d \ln \alpha}{d \ln r} = \frac{r}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr}.$$

Связь между α_0 и η_0 выражается формулой

$$\eta_0 = \frac{5q}{2\alpha_0} - 2. \qquad \text{(II.2.42)}$$

В свою очередь параметр η_0 связан с моментом инерции C Земли относительно полярной оси соотношением

$$\frac{C}{Ma^2}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{5}\sqrt{1+\eta_0}\right). \qquad (II.2.43)$$

Если известна величина C/Ma^2, то, используя (II.2.43) совместно с (II.2.42), можно найти сжатие, которое имела бы Земля, находящаяся в состоянии гидростатического равновесия.

Величину C/Ma^2 находят из соотношения

$$\frac{C}{Ma^2}=\frac{I_2}{H}, \qquad (II.2.44)$$

где I_2 — вторая зональная гармоника потенциала силы притяжения Земли, определяемая из наблюдений искусственных спутников Земли,

$$I_2=\frac{C-A_m}{Ma^2},$$

H — постоянная прецессии, иначе называемая динамическим сжатием Земли и определяемая из астрономических наблюдений,

$$H=\frac{C-A_m}{C}.$$

Приняв $H = 0{,}00327237$, $I_2 = 1082{,}86$, получим по (II.2.44)

$$\frac{C}{Ma^2}=0{,}3309.$$

Если с этим значением величины C/Ma^2 по формулам (II.2.43) и (II.2.42) вычислить гидростатическое сжатие α_0, то получим

$$\alpha_0=1:299{,}8.$$

Отличие фактического сжатия α от значения α_0 представляет собой крупную аномальную особенность гравитационного поля Земли.

г. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

II.2.18. Постановка задачи

Современная теория фигуры Земли получила строгое решение в трудах советских ученых, главным образом М. С. Молоденского.

Проблема определения фигуры Земли в ее современной постановке заключается в следующем. Задается фигура относимости, относительно которой определяются координаты точек земной поверхности. При изучении фигуры Земли в целом за такую фигуру относимости принимается общий земной эллипсоид. Его параметры (a, α, M, ω) должны быть известны. Предполагается, что проведена мировая гравиметрическая съемка и, следовательно, значение силы тяжести известно в каждой точке физической поверхности Земли. Кроме того, для каждой точки известны ее приближенные геодезические координаты (координаты, данные в местной системе, относительно референц-эллипсоида) и прира-

дение потенциала относительно исходного пункта (одного и того же для всей Земли). Требуется определить геодезические координаты произвольной точки M земной поверхности (см. рис. II.2.4) относительно общего земного эллипсоида: широту B, долготу L и высоту H. Используя приближенные значения этих координат $\overline{B}$, $\overline{L}$, и $\overline{H}$ напишем соотношения

$$B_M = \overline{B}_M + \delta B,$$

$$L_M = \overline{L}_M + \delta L,$$

$$H_M = \overline{H}_M + \delta H.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению небольших поправок δB, δL, δH. Для этого необходимо определить возмущающий потенциал T.

II.2.19. Определение возмущающего потенциала Земли

Возмущающий потенциал находится в результате решения третьей краевой задачи теории потенциала. В точках физической поверхности Земли, по исследованиям М. С. Молоденского, возмущающий потенциал должен удовлетворять условию:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_M + \left(\frac{2T}{\rho}\right)_M = -g_M + \gamma_N,$$

где g_M — наблюденное значение силы тяжести в точке M (см. рис. II.2.4), γ_N — нормальное значение силы тяжести в точке N, ρ_M — радиус-вектор точки M, $\rho_M = R + H^\gamma_M$; здесь R — средний радиус Земли.

Однако при решении этой задачи возникает принципиальная трудность.

В обычных краевых задачах поверхность, на которой дается то или другое условие, должна быть известна. В данном случае граничной поверхностью является физическая поверхность Земли, и она сама подлежит определению. Задачу приходится решать методом приближений.

Вместо неизвестной поверхности Земли М. С. Молоденский предложил использовать так называемую поверхность Земли в первом приближении, к которой и относят краевое условие, составленное для физической поверхности Земли.

Поверхность Земли в первом приближении строят путем откладывания нормальных высот H^γ от поверхности референц-эллипсоида.

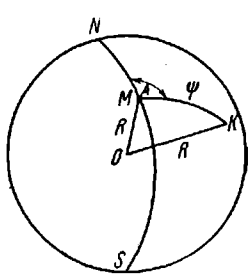


Рис. II.2.6.

Решение в первом приближении, полученное М. С. Молоденским для общего земного эллипсоида, имеет вид

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\omega} (g - \gamma + \delta g)\, S(\psi)\, d\omega, \qquad (II.2.45)$$

где интеграл берется по поверхности всей Земли, принимаемой за сферу, $(g-\gamma)$ — аномалия в свободном воздухе, ψ — дуга большого круга от текущей точки K до данной точки M, в которой определяется возмущающий потенциал T (рис. II.2.6), $S(\psi)$ — функция Стокса,

$$S(\psi)=\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2}-6\sin\frac{\psi}{2}+1-5\cos\psi-3\cos\psi\times$$

$$\times\ \ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right).$$

Поправка δg в аномалию в свободном воздухе вычисляется по формуле

$$\delta g=R^2\iint\limits_{\omega}\frac{h\chi^{(0)}}{r_0^3}\,d\omega, \qquad \text{(II.2.46)}$$

где $h=H^{\gamma}-H_0^{\gamma}$ — разность нормальных высот текущей K и данной M точек;

$$r_0=2R\sin\frac{\psi}{2};$$

$\chi^{(0)}$ — вспомогательная функция

$$\chi^{(0)}=\frac{(g-\gamma)}{2\pi}+\frac{3}{16\pi^2}\iint\limits_{\omega}(g-\gamma)\,S(\psi)\,d\omega.$$

II.2.20. Формулы для вычисления высот квазигеоида и составляющих уклонений отвеса

Если в (II.2.32) подставить значение возмущающего потенциала (II.2.45), то получим формулу М. С. Молоденского (первого приближения) для высоты квазигеоида (аномалии высоты):

$$\zeta=\frac{R}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\omega}(g-\gamma+\delta g)\,S(\psi)\,d\omega. \qquad \text{(II.2.47)}$$

При помощи соотношения (II.2.30) получим формулы М. С. Молоденского (первого приближения) для составляющих гравиметрического уклонения отвеса

$$\xi=-\frac{1}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\omega}(g-\gamma+\delta g)\frac{dS}{d\psi}\cos A\,d\omega-\left(g-\gamma+\frac{2\gamma\zeta}{R}\right)\frac{dH}{R\,dB}, \qquad \text{(II.2.48)}$$

$$\eta=-\frac{1}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\omega}(g-\gamma+\delta g)\frac{dS}{d\psi}\sin A\,d\omega-$$

$$-\left(g-\gamma+\frac{2\gamma\zeta}{R}\right)\frac{dH}{R\cos B\,dL}, \qquad \text{(II.2.49)}$$

где A — азимут направления на текущую точку K (см. рис. II.2.6).

Учитывая, что методика вычислений по формулам строгой теории для реальных условий пока недостаточно отработана, на практике широкое применение нашли формулы Стокса и Венинг-Мейнеса, которые можно рассматривать в качестве нулевого приближения к формулам М. С. Молоденского.

Формула Стокса для вычисления высоты квазигеоида (аномалии высоты) имеет вид

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint\limits_{\omega} (g - \gamma) S(\psi)\, d\omega. \qquad (II.2.50)$$

Формулы Венинг-Мейнеса для составляющих гравиметрического уклонения отвеса обычно представляются в виде

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (g - \gamma) Q(\psi) \cos A \, dA \, d\psi \\ \eta &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (g - \gamma) Q(\psi) \sin A \, dA \, d\psi \end{aligned}\right\}, \qquad (II.2.51)$$

где

$$Q(\psi) = \frac{206\,265''}{2\gamma} \cos^2\frac{\psi}{2} \left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} + 12 \sin\frac{\psi}{2} - 32 \sin^2\frac{\psi}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{1 + \sin\frac{\psi}{2}} - 12 \sin^2\frac{\psi}{2} \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2} \right) \right] - \text{функция}$$

Венинг-Мейнеса.

Однако формулы нулевого приближения дают удовлетворительную точность только для пунктов, расположенных на равнине. Так, например, уклонения отвеса по формулам нулевого приближения в равнинных районах получаются со средней квадратической ошибкой $\pm$ 0,3—0,5″, тогда как в горах — с ошибкой $\pm$ 1,0—1,4″.

Чтобы получить в горных районах такую же точность, как и в равнинных, необходимо тем или иным способом исключить из аномалий силы тяжести влияние топографических масс и все вычисления (высот квазигеоида и уклонений отвеса) производить в поле остаточных аномалий. Затем необходимо восстановить влияние исключенных масс непосредственно на высоты квазигеоида и уклонения отвеса. Таким образом, высоты квазигеоида и уклонения отвеса будут находиться как сумма двух слагаемых — влияния топографических масс и влияния аномальных масс, которое вычисляется по формулам Стокса и Венинг-Мейнеса. Наиболее удобны

для вычислений формулы, предложенные Л. П. Пеллиненом *, которые и приводятся ниже:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint\limits_{\omega} [(g-\gamma)_{\text{н. т. р}} + 2\pi f \delta H^{\gamma}]\, S(\psi)\, d\omega + \Delta\zeta_{\text{р}}, \quad \text{(II.2.52)}$$

$$\xi = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} [(g-\gamma)_{\text{н. т. р}} + 2\pi f \delta H^{\gamma}]\, Q(\psi) \cos A\, dA\, d\psi + \Delta\xi_{\text{р}}, \quad \text{(II.2.53)}$$

$$\eta = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} [(g-\gamma)_{\text{н. т. р}} + 2\pi f \delta H^{\gamma}]\, Q(\psi) \sin A\, dA\, d\psi + \Delta\eta_{\text{р}}, \quad \text{(II.2.54)}$$

где приняты следующие обозначения:
$S(\psi)$ и $Q(\psi)$ — функции Стокса и Венинг-Мейнеса.

Стоящие в квадратных скобках выражения представляют собой аномалии Фая, вычисляемые методом косвенной интерполяции через аномалии в неполной топографической редукции. Высоты квазигеоида и уклонения отвеса, вычисленные при помощи аномалий Фая, соответствуют конденсации топографических масс на поверхность $H = H_0^{\gamma} = \text{const}$, проходящую через исследуемую точку. $\Delta\zeta_{\text{р}}$, $\Delta\xi_{\text{р}}$ и $\Delta\eta_{\text{р}}$ — поправки в высоту квазигеоида и в составляющие уклонения отвеса, являющиеся разностью влияний топографических масс на ζ, ξ и η при их действительном расположении и конденсации на поверхности $H = H_0^{\gamma} = \text{const}$. Эти поправки вычисляются по формулам

$$\Delta\zeta_{\text{р}} = \frac{f\delta R^2}{\gamma} \iint\limits_{\omega} \left(\ln \frac{r+h}{r_0} - \frac{h}{r_0}\right) d\omega, \quad \text{(II.2.55)}$$

$$\Delta\xi_{\text{р}} = \frac{\rho'' f \delta R^2}{\gamma} \iint\limits_{\omega} \frac{h}{r_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \cos A\, d\omega, \quad \text{(II.2.56)}$$

$$\Delta\eta_{\text{р}} = \frac{\rho'' f \delta R^2}{\gamma} \iint\limits_{\omega} \frac{h}{r_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \sin A\, d\omega, \quad \text{(II.2.57)}$$

где δ — плотность топографических масс, $h = H^{\gamma} - H_0^{\gamma}$, r — расстояние между исследуемой точкой и текущей точкой физической поверхности, r_0 — расстояние между их проекциями на отсчетную поверхность.

По оценкам Л. П. Пеллинена, член $\Delta\zeta_{\text{р}}$ не превышает 0,5 м, величины $\Delta\xi_{\text{р}}$ и $\Delta\eta_{\text{р}}$ в горах могут достигать нескольких секунд. Для вычислений поправок $\Delta\xi_{\text{р}}$ и $\Delta\eta_{\text{р}}$ имеются удобные таблицы, составленные Е. М. Орловой. **

* Л. П. Пеллинен. О вычислении уклонений отвеса и высот квазигеоида в горах. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 176, М., «Недра», 1969.

** Е. М. Орлова. Таблицы для учета нелинейности влияния высот топографического массива на уклонения отвеса. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 157, М., «Недра», 1965.

II.2.21. Определение точных геодезических координат относительно общего земного эллипсоида

После нахождения величин ζ, ξ и η могут быть определены поправки в приближенные геодезические координаты: δB, δL и δH.

Исправляя полученными поправками δB, δL и δH приближенные геодезические координаты, получаем точные геодезические координаты B, L, H, которые определяют положение любого пункта триангуляции в единой мировой системе.

В самом деле, если от поверхности общего земного эллипсоида по нормали в каком-либо пункте M (направление нормали определяется координатами B_M и L_M) отложить геодезическую высоту H_M, то положение пункта M относительно общего земного эллипсоида будет определено. Если этот процесс продолжить для всех пунктов мировой триангуляции, то тем самым будет определено положение всех пунктов относительно общего земного эллипсоида.

Д. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ОТНОСИТЕЛЬНО РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДА

II.2.22. Необходимость местной гравиметрической съемки

При изучении отдельных частей (районов) Земли в масштабе отдельного государства, группы государств или континента в качестве координатной поверхности принимается поверхность референц-эллипсоида. Референц-эллипсоидом называется эллипсоид вращения известных размеров и известным образом ориентированный в теле Земли.

Геодезические координаты относительно референц-эллипсоида любого пункта триангуляции вычисляются по формулам

$$\overline{B} = \overline{B}_0 + \Delta B,$$

$$\overline{L} = \overline{L}_0 + \Delta L,$$

$$\overline{H} = \overline{H}_0 + \Delta H,$$

где $\overline{B}_0$, $\overline{L}_0$, $\overline{H}_0$ — геодезические координаты исходного пункта триангуляции, ΔB, ΔL — приращения широты и долготы, получаемые в результате решения прямой геодезической задачи на эллипсоиде, ΔH — приращение геодезической высоты относительно референц-эллипсоида.

ΔH может быть представлена в виде

$$\Delta H = \Delta H^{\nu} + \Delta\zeta,$$

где ΔH^{ν} — приращение нормальной высоты, $\Delta\zeta$ — приращение высоты квазигеоида относительно референц-эллипсоида.

Приращения нормальных высот находятся по результатам геометрического нивелирования, сопровождаемого измерениями силы тяжести на реперах. Превышения квазигеоида $\Delta\zeta$ определяются методом астрономо-гравиметрического нивелирования,

Прежде чем решать прямо геодезическую задачу, необходимо все измеренные на физической поверхности Земли направления и базисы редуцировать на поверхность референц-эллипсоида. Для этого необходимо знать астрономо-геодезическое уклонение отвеса в каждом пункте триангуляции (угол между направлением отвесной линии и нормалью к референц-эллипсоиду), а также высоту $\overline{H}$ пункта над поверхностью референц-эллипсоида. Компоненты ξ_{ag}, η_{ag} астрономо-геодезического уклонения отвеса в плоскостях меридиана и первого вертикала вычисляют по формулам

$$\left.\begin{aligned} \xi_{ag} &= \varphi - \overline{B} \\ \eta_{ag} &= (\lambda - \overline{L})\cos B \end{aligned}\right\}, \qquad (II.2.58)$$

где φ и λ — астрономические координаты данного пункта.

Уклонение отвеса в плоскости, имеющей азимут A, определяется формулой

$$\vartheta_{ag} = \xi_{ag}\cos A + \eta_{ag}\sin A. \qquad (II.2.59)$$

Однако астрономо-геодезические уклонения отвеса по формулам (II.2.58) могут быть вычислены не на каждом пункте триангуляции, а только на тех, в которых определены астрономические координаты φ и λ. В государственной геодезической сети триангуляции 1 класса СССР такие пункты находятся друг от друга на расстояниях порядка 70—100 км. Во всех остальных пунктах астрономо-геодезические уклонения отвеса вычисляют методом интерполяции, используя при этом гравиметрические уклонения отвеса, определяемые через аномалии силы тяжести.

Таким образом, чтобы вычислить приращения координат (ΔB, ΔL, ΔH), необходимо наличие гравиметрической съемки, по не мировой (как в случае определения общей фигуры Земли), а только местной (т. е. в пределах некоторой ограниченной области).

Местная гравиметрическая съемка проводится для решения следующих задач:

1) для вычисления поправок в измеренные превышения с целью получения разностей нормальных высот;

2) для проведения астрономо-гравиметрического нивелирования;

3) для вычисления интерполированных уклонений отвеса в каждом пункте триангуляции;

4) для получения геодезических координат астрономических пунктов, не являющихся пунктами триангуляции.

II.2.23. Вычисление разностей нормальных высот

Рабочая формула для вычисления разностей нормальных высот имеет вид

$$\Delta H^{\gamma}_{AB} = \Delta h_{AB} + \frac{(g-\gamma)_m}{\gamma_m}\Delta h_{AB} - \frac{\gamma_0^B - \gamma_0^A}{\gamma_m} H^{\text{изм}}_{\text{ср}},$$

где $\Delta H^{\gamma}_{AB} = H^{\gamma}_B - H^{\gamma}_A$; $\Delta h_{AB} = H^B_{\text{изм}} - H^A_{\text{изм}}$ — измеренное превышение репера B над репером A, $(g-\gamma)_m = \dfrac{(g-\gamma)_A + (g-\gamma)_B}{2}$;

γ_0^B и γ_0^A — значения нормальной силы тяжести в точках B и A,

$H_{ср}^{изм} = \dfrac{H_B^{изм} + H_A^{изм}}{2}$ — среднее значение измерений высоты, округленное до целого метра (измеренная высота определяется как сумма измеренных превышений), γ_m — приближенное значение нормальной силы тяжести, принимаемое постоянным для всей территории страны и равным 980 000 мгал.

II.2.24. Вычисление превышений квазигеоида

Формула, определяющая превышения квазигеоида между пунктами A и B, имеет вид

$$-(\zeta^B - \zeta^A) = -\Delta\zeta_{аг} = \int_A^B \vartheta_{аг}\, dl + \int_A^B \frac{g-\gamma}{\gamma_m}\, dh. \qquad (II.2.60)$$

Здесь интегрирование производится вдоль звена триангуляции между пунктами A и B, $(g-\gamma)$ — аномалия в свободном воздухе, $\vartheta_{аг}$ — астрономо-геодезическое уклонение отвеса в направлении линии AB, вычисляемое по формуле (II.2.59).

Формула (II.2.60) принципиально решает вопрос об определении превышений квазигеоида. Первый член правой части является главным, второй же — малой поправкой за непараллельность уровенных поверхностей. Главную трудность при вычислении превышений квазигеоида представляет интеграл $\int_A^B \vartheta_{аг}\, dl$. Для его вычисления требуется знать в каждой точке линии AB нивелирования астрономо-геодезические уклонения отвеса.

При астрономическом нивелировании предполагается линейное изменение составляющей уклонения отвеса $\vartheta_{аг}$ между пунктами триангуляции, в которых произведены астрономические определения. В таком случае

$$\int_A^B \vartheta_{аг}\, dl = l\left(\vartheta_{аг}^B + \vartheta_{аг}^A\right),$$

где

$$l = \frac{AB}{2}.$$

Поскольку в действительности уклонения отвеса меняются по более сложному закону, астрономическое нивелирование приводит к неудовлетворительным результатам.

В Советском Союзе применяется метод астрономо-гравиметрического нивелирования, разработанный М. С. Молоденским. В качестве исходных данных для определения превышения квазигеоида между пунктами триангуляции A и B необходимо иметь значения $\xi_{аг}^A$, $\eta_{аг}^A$, $\xi_{аг}^B$, $\eta_{аг}^B$ и гравиметрическую съемку некоторой области Σ, внутри которой находится звено триангуляции AB.

Формула для определения превышений квазигеоида методом астрономо-гравиметрического нивелирования имеет вид

$$\zeta^B-\zeta^A=-\left[\vartheta^A_{ar}+\vartheta^B_{ar}\right]l+\left\{\left[\zeta^B\left(\sum\right)-\zeta^A\left(\sum\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\vartheta\left(A,\ \sum\right)+\vartheta\left(B,\ \sum\right)\right]l\right\} \qquad (II.2.61)$$

где ϑ^A_{ar} и ϑ^B_{ar} — астрономо-геодезические уклонения отвеса в астрономических пунктах A и B в направлении BA; l — половина расстояния между пунктами A и B; $\vartheta\ (A,\ \Sigma)$ и $\vartheta\ (B,\ \Sigma)$ — гравиметрические уклонения отвеса в пунктах A и B, обусловленные влиянием аномалий силы тяжести области Σ; $\zeta^B\ (\Sigma)$, $\zeta^A(\Sigma)$ — высоты квазигеоида в пунктах B и A, обусловленные влиянием той же области Σ, вычисленные по формуле Стокса; Σ — область учитываемых аномалий, радиус которой принимается равным $3—4l$.

Первый член формулы (II.2.61) представляет собой результат астрономического нивелирования, второй член — гравиметрическую поправку к астрономическому нивелированию, обусловленную нелинейностью изменения уклонений отвеса между астрономическими пунктами.

Если гравиметрические уклонения отвеса, входящие в формулу (II.2.61), вычислять по формуле Венинг-Мейнеса, а высоты квазигеоида — по формуле Стокса, то зону интегрирования необходимо принять общей для обоих пунктов. Это условие соблюдается при применении эллиптической палетки для вычисления гравиметрической поправки.

В статье О. М. Остача * было показано, что можно вычислять гравиметрическую поправку, учитывая аномалии силы тяжести в круговых областях радиуса R_0, равного $3—4l$, вокруг каждого из астропунктов. В этом случае вместо $\zeta\ (\Sigma)$ следует вычислять $\Delta\zeta\ (\Sigma)$ по формуле

$$\Delta\zeta\left(\sum\right)=\frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\psi_0}(g-\gamma)\left[S\left(\psi\right)-S\left(\psi_0\right)\right]\sin\psi\,dA\,d\psi, \qquad (II.2.62)$$

где $S\ (\psi)$ — функция Стокса, $S\ (\psi_0)$ — значение этой функции при $\psi=\psi_0$.

Формулу (II.2.61) удобнее представить в виде

$$\zeta^B-\zeta^A=-\left\{\left[\vartheta^A_{ar}-\vartheta\left(A,\ \sum\right)\right]+\left[\vartheta^B_{ar}-\vartheta\left(B,\ \sum\right)\right]\right\}l+$$
$$+\Delta\zeta^B\left(\sum\right)-\Delta\zeta^A\left(\sum\right), \qquad (II.2.63)$$

где $\vartheta\ (A,\ \Sigma)$ и $\vartheta\ (B,\ \Sigma)$ — гравиметрические уклонения отвеса, вычисленные с учетом аномалий в пределах зоны радиуса ψ_0 вокруг каждого астропункта, величины $\Delta\zeta^B\ (\Sigma)$ и $\Delta\zeta^A\ (\Sigma)$ вычисляются с учетом аномалий той же зоны, радиус зоны интегрирования ψ_0 равен примерно 2—3°.

---

* О. М. Остач. К методике астрономо-гравиметрического нивелирования. Сб. рефератов ЦНИИГАиК, вып. 6, М., 1970.

Рабочая формула для вычисления превышений квазигеоида (в метрах) имеет вид

$$\zeta^B - \zeta^A = -0'',00449\,[(\Delta\xi''_A + \Delta\xi''_B)\,\Delta B' + (\Delta\eta''_A + \Delta\eta''_B)\cos B_m\,\Delta L'] + \\ + \Delta\zeta^B\,(\sum) + \Delta\zeta^A\,(\sum),$$

где $\Delta B' = B_B - B_A$; $\Delta L' = L_B - L_A$ (в минутах дуги); $B_m = 1/2\,(B_A + B_B)$; $\Delta\xi''_A$, $\Delta\xi''_B$, $\Delta\eta''_A$, $\Delta\eta''_B$ — разности слагающих астрономо-геодезических и гравиметрических уклонений отвеса в меридиане и первом вертикале для астропунктов A и B, выраженные в секундах; $\Delta\xi_A$ и $\Delta\xi_B$ необходимо предварительно исправить поправкой за искривление силовой линии нормального поля

$$\Delta\xi = \varphi - B - 0,''171H^{\nu}\sin 2B - \xi.$$

По разностям уклонений отвеса между соседними астрономическими пунктами вычисляют $m''_{\Delta\vartheta}$ — среднюю квадратическую ошибку вывода разности астрономо-геодезических и гравиметрических уклонений отвеса. Затем находят так называемую километровую ошибку астрономо-гравиметрического нивелирования

$$\varepsilon'' = m''_{\Delta\vartheta}\sqrt{2l},$$

где $2l$ — среднее расстояние между астрономическими пунктами.

Для обеспечения необходимой точности астрономо-гравиметрического нивелирования необходимо, чтобы соблюдалось условие

$$\varepsilon'' < 5''.$$

II.2.25. Вычисление гравиметрических уклонений отвеса и высот квазигеоида *

Для вычисления гравиметрических уклонений отвеса, как и высот квазигеоида, применяются круговые палетки, рассчитанные В. Ф. Еремеевым. Палетки изготовляют на прозрачной основе, на которую наносят кольцевые зоны, разбитые радиусами, проведенными через равные промежутки, на криволинейные трапеции. Численное интегрирование при помощи палеток заключается в том, что, совместив центр палетки с определяемым пунктом и ориентируя ее по меридиану, определяют среднее по площади значение аномалии в свободном воздухе для каждого отделения палетки и умножают на коэффициент, соответствующий влиянию этого отделения на величину ζ, ξ и η.

---

* Методика вычислений дается в соответствии с Наставлением по вычислению гравиметрических уклонений отвеса и высот квазигеоида, составленным Е. М. Орловой, 1972.

Рабочие формулы имеют вид

$$\xi(\Sigma) = \sum_i \sum_k (g-\gamma)_{ik} a_{ik},$$

$$\eta(\Sigma) = \sum_i \sum_k (g-\gamma)_{ik} a'_{ik},$$

$$\Delta\zeta(\Sigma) = \sum_i \sum_k (g-\gamma)_{ik} b_{ik},$$

где Σ — область учитываемых аномалий, i — число кольцевых зон, на которые разбита область Σ, k — число трапеций в зоне, $(g-\gamma)_{ik}$ — среднее значение аномалии в свободном воздухе, полученное методом косвенной интерполяции, в трапеции ik, a_{ik}, a'_i, b_{ik} — соответствующие коэффициенты.

Если принять, что радиус области Σ ψ_0 равен примерно 2—3°, то это будет соответствовать учету тринадцати зон палеток Еремеева (радиус зоны XIII равен 305,4 км).

Радиусы концентрических зон приведены в табл. II.2.3.

Таблица II.2.3

№ зон	Радиусы зон, км	№ зон	Радиусы зон, км
	5,0		
I		VIII	
	7,3		102,6
II		IX	
	10,7		128,0
III		X	
	15,7		159,6
IV		XI	
	22,8		198,6
V		XII	
	33,3		246,7
VI		XIII	
	48,5		305,4
VII			
	70,6		

В настоящее время влияние зон VII—XIII, т. е. от 48,5 до 305,4 км, вычисляется на ЭВМ по аномалиям в свободном воздухе, осредненным для элементарных площадок размером 10′ × 15′.

Влияние зон от 0 до 48,5 км вычисляют вручную, проводя численное интегрирование по гравиметрическим и гипсометрическим картам с помощью палетки. В этой палетке имеется шесть кольцевых зон (зоны I—VI) равного влияния, разделенных на 16 секторов.

Влияние аномалий этих зон на величины $\Delta\zeta\ (\Sigma)$, $\xi\ (\Sigma)$, $\eta\ (\Sigma)$ подсчитывают по формуле

$$\Delta\zeta_{\text{I-VI}} = 0{,}00014 \sum_{k=1}^{16} (g-\gamma)_{\text{I},\,k} + 0{,}00021 \sum_{k=1}^{16} (g-\gamma)_{\text{II},\,k} +$$

$$+ 0{,}00030 \sum_{k=1}^{16} (g-\gamma)_{\text{III},\,k} + 0{,}00044 \sum_{k=1}^{16} (g-\gamma)_{\text{IV},\,k} +$$

$$+ 0{,}00062 \sum_{k=1}^{16} (g-\gamma)_{\text{V},\,k} + 0{,}00085 \sum_{k=1}^{16} (g-\gamma)_{\text{VI},\,k},$$

если аномалии даны в миллигалах, то $\Delta\zeta\ (\Sigma)$ получается в метрах.

$$\xi_{\text{I-VI}} = -0'',005 \sum_{i=\text{I}}^{\text{VI}} \sum_{k=1}^{16} (g-\gamma)_{ik} \cos A_k,$$

$$\eta_{\text{I-VI}} = -0'',005 \sum_{i=\text{I}}^{\text{VI}} \sum_{k=1}^{16} (g-\gamma)_{ik} \sin A_k,$$

где

$$A_k = \frac{\pi k}{8}; \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 16; \quad i = \text{I},\ \text{II},\ \text{III},\ \text{IV},\ \text{V},\ \text{VI}.$$

Наибольшие трудности вызывает учет влияния центральной зоны радиусом 5 км. В зависимости от точности имеющейся гравиметрической съемки и сложности рельефа в окрестностях астропункта применяют палетки с более или менее подробной разбивкой.

Влияние нулевой зоны (радиуса r_0) на уклонения отвеса подсчитывают по аномалиям и высотам, снятым в 8 точках, расположенных на окружности произвольно выбранного радиуса ρ_0, и 8 точках на окружности радиуса $r_{\text{ср}} = (\rho_0 + r_0)/2$. При выводе формулы для вычисления влияния нулевой зоны радиуса r_0 на уклонения отвеса в интервале от 0 до ρ_0 применен метод градиентов, в интервале от ρ_0 до r_0 — формула численного интегрирования Гаусса с одной ординатой:

$$\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\end{Bmatrix}_{0-r_0} = -\frac{\rho''}{8\gamma} \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k\,(\rho_0) \begin{Bmatrix}\cos A_k\\ \sin A_k\end{Bmatrix} -$$

$$-\frac{\rho''}{8\gamma} \frac{(r_0-\rho_0)}{r_{\text{ср}}} \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k\,(r_{\text{ср}}) \begin{Bmatrix}\cos A_k\\ \sin A_k\end{Bmatrix},$$

где Δg_k (ρ_0) — аномалия в свободном воздухе в точке с номером k на окружности радиуса ρ_0; Δg_k ($r_{ср}$) — аномалия в аналогичной точке на окружности радиуса $r_{ср} = (\rho_0 + r_0)/2$; $A_k = \pi k/4$, $k = 1, 2, 3, \ldots, 8$.

Рассмотрим случай, когда в центральной зоне (радиусом 5 км) палетки выделены 4 кольцевые зоны (A, B, C и D) такого же влияния на уклонения отвеса, как зоны I—VI. Радиусы их даны в табл. II.2.4.

Таблица II.2.4

Зона	Радиус зон, км
	5,000
A	
	3,419
B	
	2,338
C	
	1,599
D	
	1,094

В этом случае имеем радиус нулевой зоны $r_0 = 1{,}094$ км, $\rho_0 = 0{,}300$ км, $r_{ср} = 0{,}697$ км,

Влияние нулевой зоны подсчитывают по формуле

$$\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\end{Bmatrix}_{0-r_0} = -0'',02632 \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k(\rho_0) \begin{Bmatrix}\cos A_k\\ \sin A_k\end{Bmatrix} - 0'',02998 \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k(r_{ср}) \begin{Bmatrix}\cos A_k\\ \sin A_k\end{Bmatrix}. \quad (II.2.64)$$

Если центральную зону разбить на другое число кольцевых зон (3, 2 или 1), то коэффициенты формулы (II.2.64) можно сохранить при соответствующем подборе значения ρ_0, а именно: поставить условие $\rho_0 = 0{,}2742\, r_0$. Радиус нулевой зоны r_0 всегда равен внутреннему радиусу последней кольцевой зоны. Так, если центральная зона разбита только на три зоны (A, B и C) $r_0 = 1{,}599$ км, если на две (A и B), то $r_0 = 2{,}338$ км и если на одну (A), то $r_0 = 3{,}419$ км.

Влияние на $\Delta\zeta$ (Σ) нулевой зоны радиуса r_0, где численное интегрирование проводится по точкам, зависит от ее радиуса r_0, а также от выбора радиуса ρ_0:

$$\Delta\zeta_{0-r_0} = \frac{\rho}{8\gamma} \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k(\rho_0) + \frac{r_0 - \rho_0}{8\gamma} \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k(r_{ср}),$$

где Δg_k (ρ_0) — аномалия в свободном воздухе в точке с номером k, расположенной на окружности радиуса ρ_0; Δg_k ($r_{ср}$) — то же, на окружности радиуса $r_{ср} = (\rho_0 + r_0)/2$.

Так, для палетки с зонами A, B, C, D $r_0 = 1{,}094$ км, $\rho_0 = 0{,}300$ км, $r_{ср} = 0{,}697$ км,

$$\Delta\zeta_{0-r_0} = 0{,}00004 \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k(\rho_0) + 0{,}00010 \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k(r_{ср}).$$

II.2.26. Интерполирование астрономо-геодезических уклонений отвеса

В 1937 г. М. С. Молоденский разработал метод, который позволяет на основании сравнительно редкой сети астрономических пунктов и местной гравиметрической съемки определить астрономо-геодезические уклонения отвеса на каждом пункте триангуляции.

Если радиус области Σ учитываемых аномалий примерно в 1,5—2 раза больше расстояния между астрономическими пунктами, то разности астрономо-геодезических и гравиметрических уклонений отвеса будут меняться от пункта к пункту плавно и их можно линейно интерполировать на промежуточные пункты. Так, например, внутри некоторой небольшой области σ, ограниченной астропунктами A, B, C и D (рис. II.1.7), можно принять

$$\xi_{аг} - \xi\left(\sum\right) = a\varphi + b\lambda + c,$$

$$\eta_{аг} - \eta\left(\sum\right) = \alpha\varphi + \beta\lambda + \gamma,$$

где φ и λ — координаты точки, находящейся внутри области σ; a, b, c, α, β, γ — коэффициенты.

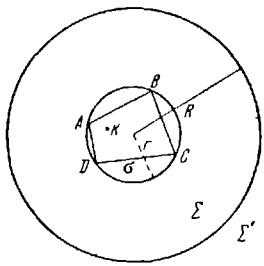


Рис. II.2.7

Коэффициенты для данной области σ находят по способу наименьших квадратов при наличии не менее трех пунктов, не лежащих на одной прямой, для которых известны и астрономо-геодезические, и гравиметрические уклонения отвеса, поскольку каждый такой пункт, например A, позволяет составить уравнения типа

$$a\varphi^A + b\lambda^A + c = \xi^A_{аг} - \xi^A\left(\sum\right),$$

$$\alpha\varphi^A + \beta\lambda^A + \gamma = \eta^A_{аг} - \eta^A\left(\sum\right),$$

где индексом A обозначены величины, относящиеся к пункту A.

Если для данной области σ известны коэффициенты a, b, c, α, β, γ, то для любого пункта этой области (например K), вычислив гравиметрические уклонения отвеса $\xi^K(\Sigma)$ и $\eta^K(\Sigma)$, можно получить интерполированные уклонения отвеса по формулам

$$\xi^K_{инт} = \xi^K\left(\sum\right) + a\varphi^K + b\lambda^K + c,$$

$$\eta^K_{инт} = \eta^K\left(\sum\right) + \alpha\varphi^K + \beta\lambda^K + \gamma.$$

С помощью интерполированных уклонений отвеса можно определить геодезические координаты пунктов, не входящих в сеть триангуляции, при условии, что на этих пунктах сделаны астрономические определения:

$$\overline{B} = \varphi - \xi_{инт},$$

$$\overline{L} = \lambda - \eta_{инт} \sec \overline{B}.$$

Е. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

II.2.27. Классификация методов

Для определения силы тяжести в принципе могут быть использованы различные физические явления, которые зависят от силы тяжести: падение тел, качание маятника, растяжение пружины под действием груза, поднятие жидкости в капиллярном сосуде, колебания струны и др.

Известные методы измерений силы тяжести можно разделить на две группы: динамические и статические. При динамических методах наблюдается движение тела, а непосредственно измеряемой величиной является промежуток времени, в течение которого тело перемещается из одного фиксированного положения в другое.

При статических методах наблюдается положение равновесия тела, при этом непосредственно измеряемой величиной является линейное или угловое смещение тела при переходе из одного положения равновесия в другое под влиянием изменения силы тяжести.

Определения силы тяжести могут быть абсолютными и относительными.

При абсолютных определениях измеряют полное значение силы тяжести g в каком-либо пункте.

При относительных определениях измеряется разность Δg значений силы тяжести между двумя пунктами.

К динамическим методам относятся:

1) измерение времени падения тела;

2) измерение периода колебания свободного маятника, совершающего колебания под действием силы тяжести;

3) измерение периода колебания маятника, совершающего колебания под действием силы тяжести и упругой пластины;

4) измерение частоты колебания струны;

5) измерение скорости вытекания жидкости через узкое отверстие.

К статическим методам можно отнести:

1) гипсометрический — сравнение результатов измерений давления атмосферы при помощи ртутного барометра и гипсотермометра;

2) барометрический — измерение высоты столбика ртути, находящейся в равновесии под действием упругой силы газа и силы тяжести;

3) измерение смещения некоторой массы при переходе из одного состояния равновесия в другое под действием изменения силы тяжести.

Динамические методы применяются как при абсолютных, так и при относительных определениях силы тяжести. Статические методы могут применяться только для относительных определений.

II.2.28. Абсолютные определения силы тяжести

При абсолютных определениях силы тяжести наибольшего внимания заслуживают следующие методы: баллистические, т. е. методы наблюдений свободно падающих тел, и маятниковые. При маятниковых наблюдениях в настоящее время обычно используются оборотные маятники, но иногда находят применение (Фин-

ляндия) и нитяные маятники, близкие по своей форме к математическому маятнику.

Основным критерием при оценке качества того или иного метода является минимальное количество источников систематических ошибок и ясность всех физических явлений, происходящих во время наблюдений. В этом отношении баллистические методы имеют преимущество перед другими, так как падающее тело не имеет связи с другими телами и его движение совершается практически под действием одной лишь силы земного притяжения.

В основе баллистических методов, применяемых для абсолютных определений силы тяжести g, лежит известный закон прямолинейного равномерно ускоренного движения свободно падающего тела

$$h = h_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}, \qquad (II.2.65)$$

где h_0, v_0 — путь и скорость тела в начале счета времени, h — путь, пройденный телом за промежуток времени t; g — ускорение силы тяжести.

Регистрируя на шкале значения отрезков пути h_i, соответствующие моментам времени t_i, можно составить систему уравнений вида (II.2.65), решение которой по способу наименьших квадратов даст искомое неизвестное g.

Современные достижения оптико-электронной техники позволяют получить высокую относительную точность (порядка 10^{-9}) при измерениях малых интервалов пути и времени.

Среди баллистических методов, получивших практическое применение, могут быть названы метод совмещенного свободного падения тела в вакуумной камере с несвободным падением самой камеры и метод свободного падения тела в вакууме. Наилучшие результаты за последние годы (1967—1971 гг.) были достигнуты в Международном бюро мер и весов (Севр, Франция) под руководством проф. А. Сакума. Здесь для регистрации свободного движения использовался лазерный интерферометр. Подбрасываемое тело представляло собой трехгранную призму (триэдр), имеющую массу 430 г и высоту 10 см. Эта призма, служившая зеркалом интерферометра, подбрасывалась катапультой вверх на высоту около 1 м, а затем совершала свободное падение. В своем движении она пересекала уровни «двух станций», отличающиеся по высоте на 40 см.

При измерениях фиксировались два положения призмы в каждой из двух горизонтальных плоскостей S_1 и S_2 и соответствующие им два интервала времени $T_1 \approx 0{,}2$ сек и $T_2 \approx 0{,}6$ сек. После внесения в результаты измерений необходимых поправок значение силы тяжести вычислялось по формуле

$$g = \frac{8H}{T_2^2 - T_1^2}.$$

Метод, примененный проф. А. Сакума, позволяет получить более высокую точность по сравнению с методом наблюдений просто свободного падения тела при одинаковой высоте поднятия тела, так как симметричные наблюдения позволяют исключить значительную часть систематических ошибок.

Точность определений силы тяжести, выполненных в Севре многократно в период 1969—1971 гг., характеризуется ошибками в пределах ± 2— ± 10 мкм·гал (0,2—1,0·10⁻⁸g), а изменения абсолютного значения g за тот же период времени оказались в диапазоне ± 0,02 мгал (2·10⁻⁸g). Предполагается, что в ближайшие годы подобные приборы, установленные в нескольких пунктах мировой сети, позволят выполнить многие важные исследования по изучению деформаций фигуры Земли и земной коры, вековых и сезонных изменений силы тяжести, вариаций силы тяжести вследствие движения полюсов Земли и многие другие.

При определении силы тяжести при помощи маятниковых наблюдений используется формула Гюйгенса для случая бесконечно малых колебаний, устанавливающая зависимость между периодом S колебания маятника, его длиной l и ускорением силы тяжести g:

$$S=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (II.2.66)$$

Маятник, применяемый при гравиметрических наблюдениях, представляет собой твердое тело, совершающее периодические колебания около горизонтальной оси. Если считать, что ось качания маятника неподвижна и колебания совершаются исключительно под влиянием силы тяжести, то на основании формулы (II.2.66) полное значение силы тяжести в данном пункте

$$g=\frac{\pi^2 l}{S^2}.$$

Для этого необходимо определить из наблюдений период S колебания маятника и измерить его длину l.

Длиной физического маятника l (называемой приведенной длиной физического маятника) называется расстояние между осью подвеса и центром качания. Эти две точки называются взаимными. Для отыскания центра качания применяются так называемые оборотные маятники. Оборотный маятник имеет две параллельные оси качаний, проходящие через взаимные точки. Эти оси являются ребрами призм, на которых поочередно качается оборотный маятник. Если при качании маятника на каждой из призм периоды окажутся одинаковыми, то приведенная длина маятника получается путем непосредственного измерения расстояния между ребрами призм.

При определении силы тяжести методом наблюдений оборотных маятников в наблюденное значение силы тяжести g приходится вносить целый ряд поправок для исключения различных погрешностей. Важнейшими источниками погрешностей являются: 1) колебания температуры во время наблюдений, 2) удлинение стержня маятника при помещении его в вакуум, 3) сокачание штатива, 4) влияние амплитуды, 5) отсутствие полного вакуума в вакуумной камере, 6) влияние суточного хода часов, 7) влияние деформаций призм и подушек, на которых совершаются колебания маятника, и др. Точность этих определений весьма высока. Так, одно из последних абсолютных определений силы тяжести при помощи оборотных маятников, проведенных в Потсдаме под руководством

проф. Рейхендера в 1955—1970 гг., характеризуются ошибкой ± 0,3 мгал.

Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме абсолютных определений силы тяжести ведутся во многих странах мира (СССР, США, Франции, ГДР, Японии, Италии, Англии, ФРГ, Швеции, Финляндии, Австралии и др.). В настоящее время исходным пунктом для гравиметрических измерений во всем мире является Потсдам, где в начале XX века под руководством Гельмерта было выполнено лучшее для того времени абсолютное определение силы тяжести.

XIV Генеральная Ассамблея Международного Геодезического и Геофизического Союза (Люцерн, 1967 г.) рекомендовала принимать уточненное значение абсолютной силы тяжести для Потсдама, равное 981,260 гал вместо прежнего значения 981,274 гал.

В результате совместного уравнивания лучших абсолютных определений силы тяжести, выполненных баллистическим методом, маятниковых и гравиметровых наблюдений (в общей сложности порядка 25 000) создана мировая опорная сеть, состоящая из 1997 пунктов. Сила тяжести в любом из этих пунктов определена с ошибкой менее 0,2 мгал. Эта опорная сеть на XV Генеральной ассамблее МГГС (Москва, 1971 г.) была принята в качестве Международной опорной гравиметрической сети 1971 г. (IGSN-71) и рекомендована для дальнейшего развития и совершенствования.

II.2.29. Относительные определения силы тяжести

Относительные определения силы тяжести могут производиться как при помощи маятников, так и при помощи специальных приборов, предназначенных для относительных определений силы тяжести, называемых гравиметрами. Существует очень большое число различных типов этих приборов. При работе с одними из них могут применяться статические способы наблюдений, тогда как другие сконструированы так, что возможно применение только динамических способов. Большинство гравиметров основано на принципе компенсации силы тяжести противодействующей упругой силой и по существу могут рассматриваться как высокочувствительные пружинные весы. Приборы этого типа получили название статических гравиметров.

В статических гравиметрах (чаще называемых просто гравиметрами) в качестве противодействующей силы используется упругая сила либо газа, либо пружины или крутильной нити. Соответственно этому гравиметры подразделяются на газовые и механические. Последние в зависимости от материала, из которого изготовлена упругая система, подразделяются на металлические и кварцевые.

По характеру действия упругой системы различают гравиметры с поступательным и с вращательным перемещением массы.

Гравиметры с вращательным перемещением массы бывают астазированные и неастазированные. Астазированной называется упругая система, находящаяся в положении равновесия, близком к неустойчивому. При астазировании повышается чувствительность упругой системы, благодаря чему малые изменения силы тяжести вызывают сравнительно большие отклонения рычага от положения равновесия.

По способу регистрации деформации упругой системы гравиметры бывают: 1) с оптическим устройством; 2) с электроемкостным устройством, в котором перемещения упругой системы измеряются изменениями емкости конденсатора; 3) с фотоэлектрическим устройством, основанным на использовании электрического тока в фотоэлементах.

Большинство современных гравиметров относится к группе астазированных с большой и нелинейно изменяющейся чувствительностью упругих систем. Для регистрации показаний этих приборов применяется так называемый нулевой метод, при котором непосредственно измеряемой величиной является вспомогательное усилие или механическое перемещение, прилагаемое к упругой системе, компенсирующее изменение веса постоянной массы гравиметра. При нулевом методе регистрации упругая система при помощи специального компенсационного устройства на всех пунктах приводится в постоянное «нулевое» (или исходное) положение. Компенсационное устройство состоит обычно из вертикально подвешенной винтовой пружины с очень малой упругой постоянной. Натяжение этой пружины определяется положением измерительного винта, снабженного крутильной головкой с делениями; эти деления соответствуют изменениям силы тяжести.

Применение в гравиметрах пружин или иных упругих тел основано на законе Гука, по которому деформация упругого тела пропорциональна приложенной силе. Однако упругие тела подчиняются закону Гука лишь при сравнительно малых напряжениях. Известно, что существует некоторый предел, называемый пределом упругости, для нагрузки упругого тела, за которым появляется так называемая остаточная (в отличие от упругой, подчиняющейся закону Гука) деформация, приводящая к нарушению закона Гука. Путем специального режима термической и механической обработки материала предел упругости можно повысить в несколько раз. Так, применение плавленого кварца и элинвара — особого сплава стали, никеля и хрома позволили значительно повысить стабильность упругих систем. Однако и эти материалы не в полной мере удовлетворяют требованиям постоянства упругих свойств, что приводит к явлению, которое носит название смещения нульпункта (drift). Вследствие этого показания гравиметра, находящегося в одном и том же пункте, непрерывно меняются, хотя сила тяжести и остается постоянной. Работать с таким прибором можно только при условии, что изменения нульпункта невелики и пропорциональны во времени. В таком случае поправки, вводимые в отсчеты гравиметра, за изменение нульпункта будут достаточно надежны. Для ослабления ошибок за нелинейное изменение нульпункта полевые рейсы с гравиметрами весьма непродолжительны и имеют обычно длительность не более 6—8 часов.

Принцип относительных маятниковых определений основывается на предположении, что длина маятника l при наблюдениях на исходном и на определяемом пунктах остается неизменной.

В этом случае

$$\Delta g = -2g_1 \frac{\Delta S}{S_1},$$

где g_1 и S_1 — значения силы тяжести и периода колебания маятника в исходном пункте; ΔS — разность периодов колебаний

маятника между определяемым и исходным пунктами. Полагая приближенно $g_1 = 980$ гал и $S_1 = 0{,}5$ сек, получим $-2g_1/S_1 = -0{,}4 \cdot 10^7$ мгал/сек, т. е. ошибка в периоде S колебания маятника, равная 10^{-7} сек, соответствует ошибке определения Δg, равной 0,4 мгал. Для уменьшения влияния случайных изменений длины маятника l в современных маятниковых приборах наблюдают не один, а несколько маятников (от двух до шести). Наконец, чтобы убедиться в отсутствии существенных изменений в длинах маятников, после наблюдений на определяемых пунктах возвращаются на исходный (опорный) пункт, где вновь определяют периоды всех маятников. Усовершенствование маятниковых приборов и методов наблюдений с ними позволило в последние годы значительно повысить точность относительных маятниковых определений. Этому в значительной мере способствовало применение в маятниковых приборах маятников, изготовленных из плавленого кварца, обладающих значительными преимуществами по сравнению с обычными металлическими маятниками. Дело в том, что кварц обеспечивает в высокой степени стабильность приведенной длины маятника и малую чувствительность к изменениям температуры. В современных маятниковых приборах широко используются достижения фотоэлектронной техники и средств автоматизации.

В Советском Союзе в этом отношении достигнуты большие успехи. В ЦНИИГАиК в последние годы систематически проводились работы по созданию высокоточного маятникового прибора, что привело к созданию опытного вакуумного маятникового прибора, (ОВМ ЦНИИГАиК), по своим достоинствам превосходящего лучшие зарубежные образцы. Наблюдения с группой этих приборов позволили выполнить гравиметрические связи пунктов опорной гравиметрической сети Советского Союза и Международного гравиметрического полигона социалистических стран с ошибками в пределах $\pm 0{,}05$—$0{,}06$ мгал, а по уравнительным вычислениям замкнутой сети полигонов ошибка связей составила всего $\pm 0{,}03$ мгал *. Эти результаты превышают современные достижения в других странах мира **.

Преимущество относительного метода перед абсолютным состоит в том, что влияние некоторых ошибок можно в значительной степени ослабить или полностью исключить, если наблюдения во всех пунктах выполнять, по возможности, в одинаковых условиях.

Относительные определения силы тяжести в настоящее время могут производиться на суше, море и в воздухе. Измерение силы тяжести на море, и особенно в воздухе, представляет собой более сложную задачу, чем измерение на земле. Приходится учитывать особенности условий измерения силы тяжести, заключающиеся в том, что при морских (воздушных) наблюдениях гравиметрические приборы находятся на подвижном основании вследствие волнений моря (воздушной среды) и движений самого судна

---

* П. Ф. Шокин, Б. П. Шимбирев. Развитие гравиметрии и теории фигуры Земли. МИИГАиК. Известия вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка». Вып. 6, 1972.

** Ю. Д. Буланже Отчет XV Генеральной Ассамблее Международного Геодезического и Геофизического Союза о работах, выполненных в Советском Союзе в 1967—1970 гг. в области геодезии и гравиметрии. Секция геодезии Советского геофизического комитета АН СССР, М., 1971.

(самолета). К ускорению силы тяжести g в этом случае добавляются переменные возмущающие ускорения.

Возмущающие ускорения раскладываются на вертикальную и горизонтальную составляющие. Если обозначить горизонтальные составляющие возмущающего ускорения через $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$, а вертикальную составляющую через z, то для результирующего ускорения G получим

$$G = [(g+\ddot{z})^2+\ddot{x}^2+\ddot{y}^2]^{1/2} = g\left[1+2\frac{\ddot{z}}{g}+\frac{\ddot{z}^2}{g^2}+\frac{\ddot{x}^2}{g^2}+\frac{\ddot{y}^2}{g^2}\right]^{1/2}.$$

Считая, что возмущающие ускорения малы по сравнению с g, разложим полученное выражение в ряд, удерживая члены с квадратами возмущающих ускорений. Получим

$$G = g+\ddot{z}+\frac{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}{2g}.$$

Введя обозначение

$$\ddot{x}^2+\ddot{y}^2 = h^2,$$

получим

$$G-g = \ddot{z}+\frac{h^2}{2g}. \qquad \text{(II.2.67)}$$

В полученное выражение для поправки за возмущающие ускорения входят два члена: член первой степени, представляющий собой поправку за вертикальную составляющую ускорений, и член второго порядка — поправка Броуна, учитывающая влияние горизонтальной составляющей ускорений. При вычислении поправки пользуются значениями осредненными в определенном интервале времени, а результаты влияния вертикальных и горизонтальных ускорений учитываются совершенно раздельно. Среднее значение поправки, учитывающей влияние вертикальных ускорений за интервал времени T, равно

$$\overline{\ddot{z}} = \frac{1}{T}\int_0^T \ddot{z}\,dt = \frac{\dot{z}_T-\dot{z}_0}{T}. \qquad \text{(II.2.68)}$$

При измерениях силы тяжести на море вертикальные ускорения судна могут резко изменяться, но в изменениях скорости $\dot{z}$ не наблюдается больших скачков, величина $\dot{z}$ меняется плавно, а потому числитель формулы (II.2.68) будет небольшим. Вся величина поправки $\overline{\ddot{z}}$ будет малой в том случае, если интервал времени T сделать достаточно большим по сравнению с периодом вертикальных ускорений.

На поверхности воды периоды вертикальных ускорений имеют значения порядка 6—10 сек, а под водой (в подводной лодке) достигают 90—100 сек. Поэтому для одного измерения на надводном

судне продолжительность наблюдений достаточна в 5 минут, а на подводной лодке требуется около 30 мин.

Для вычисления поправки за влияние горизонтальной составляющей ускорений принимается, что горизонтальные ускорения подчиняются закону простой гармонической функции $h = h_0 \sin \omega t$. Тогда для среднего значения за один период колебаний получим

$$\bar{h}^2 = h_0^2 \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt = \frac{h_0^2}{2}.$$

Подставив это значение в (II.2.67), получим значение поправки за влияние горизонтальной составляющей ускорений (поправки Броуна) в виде

$$\Delta g_{\text{Б}} = \frac{h_0^2}{4g}. \qquad \text{(II.2.69)}$$

При определениях силы тяжести на подвижном основании необходимо либо вводить значение поправки Броуна в измеренное значение силы тяжести G, для чего требуется измерять горизонтальные составляющие ускорений h, либо автоматически исключать это влияние при помощи специально разработанной аппаратуры.

Для более полного исключения влияния горизонтальных ускорений на показания гравиметрических приборов при наблюдениях на подвижном основании могут использоваться либо карданный подвес с очень большим периодом собственных колебаний, либо гиростабилизированная платформа.

При определении силы тяжести на движущемся объекте в результаты наблюдений необходимо вводить еще одну поправку — так называемую поправку Этвеша. Необходимость введения этой поправки вызывается тем обстоятельством, что при движении объекта, на котором установлен гравиметрический прибор, скорость движения объекта складывается с траекторной скоростью Земли, что ведет к изменению центробежной силы, и следовательно, к изменению измеряемой силы тяжести.

В общем виде поправка за эффект Этвеша вычисляется по формуле:

$$\Delta g_{\text{E}} = \left(1 + \frac{h}{R_\varphi}\right)\left(2\omega v \sin \alpha \cos \varphi + \frac{v^2}{R_\varphi}\right), \qquad \text{(II.2.70)}$$

где h — высота объекта над уровнем моря; R_φ — радиус параллели на широте φ; ω — угловая скорость вращения Земли; v — линейная скорость движения объекта; α — азимут движения.

Член h/R_φ в формуле (II.2.70) очень мал, при высотах h, равных 20 км, он имеет порядок сжатия Земли. Поэтому учитывать его необходимо лишь при больших значениях высоты полета h.

При измерениях силы тяжести на самолете центробежный член v^2/R_φ поправки Этвеша должен обязательно учитываться. Если самолет летит со скоростью звука, то величина этого члена в поправке Этвеша превышает 1500 мгал.

При определениях силы тяжести на море при малых скоростях судна центробежным членом поправки Этвеша обычно пренебрегают. В этом случае поправка за эффект Этвеша имеет вид

$$\Delta g_E = 2\omega v \sin\alpha \cos\varphi.$$

Если скорость движения судна выражать в км/час, а поправку в миллигалах, то

$$\Delta g_E = 4{,}05 v \sin\alpha \cos\varphi.$$

Знак поправки Этвеша определяется значением азимута движения α. При движении судна с запада на восток ($0 < \alpha < 180°$), т. е. в том же направлении, в каком вращается Земля, поправка положительна. При противоположном курсе ($180° < \alpha < 360°$) поправка отрицательна. Точность морских определений силы тяжести может быть оценена следующим образом: вблизи берегов эта величина составляет 1—3 мгал, а в открытом море — 5—10 мгал. Следует отметить следующие обстоятельства, ограничивающие точность гравиметрических определений на море: недостаточная надежность определения координат и скорости движения судна, а также вектора скорости морских течений.

Первые попытки измерения силы тяжести в воздухе были предприняты в СССР (1957 г.) и в США (1958 г.). В настоящее время ведутся экспериментальные исследования и разрабатываются вопросы совершенствования методики в области аэрогравиметрических измерений: точность определения силы тяжести в воздухе характеризуется величиной порядка 10 мгал.

Фирмой «Белл» (США) был создан лунный гравиметр, с помощью которого в 1969 г. было измерено абсолютное значение силы тяжести в месте посадки космического корабля «Аполлон-11». Для пункта наблюдений ($\varphi = 0° 41'$, $\lambda = 23° 26'$ E) было получено $g = 162\,852 \pm 30$ мгал. Позднее определения силы тяжести производились в местах посадки космических кораблей «Аполлон-12» и «Аполлон-14».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молоденский М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии. Тр. ЦНИИГАиК. Вып. 42. Геодезиздат, 1945. 106 с.

2. Бровар В. В., Магницкий В. А., Шимбирев Б. П. Теория фигуры Земли. М., Геодезиздат, 1961. 256 с.

3. Магницкий В. А. Внутреннее строение и физика Земли. М., «Недра», 1965. 378 с.

4. Шокин П. Ф. Гравиметрия. М., Геодезиздат, 1960, 315 с.

II.3. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АСТРОНОМИЯ

А. П. Колупаев, А. Н. Кузнецов

А. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

II.3.1. Некоторые обозначения, принятые в геодезической астрономии

φ — географическая широта места на земной поверхности, отсчитываемая по географическому меридиану в обе стороны от земного экватора (от 0 до 90°) со знаком плюс к северному полюсу и со знаком минус к южному полюсу Земли;

λ — географическая долгота места на земной поверхности, отсчитываемая по экватору в обе стороны от гринвичского меридиана (от 0 до 12 ч) со знаком плюс к востоку и со знаком минус к западу;

a — астрономический азимут направления на земной предмет, отсчитываемый по дуге истинного горизонта (от 0 до 360°) от точки севера в направлении на восток, юг, запад;

α — прямое восхождение светила, отсчитываемое по дуге небесного экватора от точки весеннего равноденствия против хода часовой стрелки, если смотреть на экватор с северного полюса мира (от 0 до 24 ч);

δ — склонение светила, отсчитываемое по кругу склонения от небесного экватора от 0 до $+90°$ к северному полюсу мира и от 0 до $-90°$ к южному полюсу мира;

Δ — полярное расстояние светила, равное дополнению до $90°$ склонения светила;

t — часовой угол светила, отсчитываемый по дуге небесного экватора в направлении суточного вращения небесной сферы от верхней точки экватора к западу (от 0 до 24 ч);

z — зенитное расстояние светила, отсчитываемое по кругу высот от зенита (от 0 до 180°);

h — высота светила, равная дополнению зенитного расстояния до 90°;

A — азимут светила, отсчитываемый от точки юга по дуге истинного горизонта (от 0 до 360°) в направлении на запад, север, восток;

q — параллактический угол светила, отсчитываемый от направления «светило — полюс мира» до направления «светило —

зенит» по ходу часовой стрелки, если смотреть на небесную сферу снаружи (от 0 до 360°);

s — местное звездное время;

s_0 — звездное время в среднюю местную полночь;

S — гринвичское звездное время;

S_0 — звездное время (истинное) в среднюю гринвичскую полночь;

$t_\odot$ — часовой угол истинного Солнца;

m — среднее солнечное время, где за начало суток принята средняя полночь;

E — уравнение времени плюс 12^h, равное разности между истинным и средним солнечным (гражданским) временем;

T_0 — всемирное время;

T — эфемеридное время;

ΔT — поправка за переход от всемирного времени к эфемеридному;

T_n — поясное время пояса n;

D_n — декретное время пояса n;

μ — коэффициент перевода среднего времени в звездное;

ν — коэффициент перевода звездного времени в среднее;

$v(E)$, $v(\delta)$ и $v(\alpha)$ — часовые изменения уравнения времени, склонения и прямого восхождения Солнца в заданный момент;

v_{0-E}, $v_{0-\delta}$ и $v_{0-\alpha}$ — часовые изменения уравнения времени, склонения и прямого восхождения в табличный момент, предшествующий заданному;

v_{1-E}, $v_{1-\delta}$ и $v_{1-\alpha}$ — часовые изменения уравнения времени, склонения и прямого восхождения в табличный последующий момент;

E_0, δ_0 и α_0 — уравнение времени плюс 12^h, склонение и прямое восхождение в табличный момент, предшествующий заданному;

u — поправка часов относительно местного времени;

U — поправка часов относительно гринвичского времени;

$\omega_{h\,(10^m)}$ — ход часов часовой или десятиминутный;

ρ — астрономическая рефракция;

ρ_0 — средняя астрономическая рефракция;

A и B — коэффициенты астрономической рефракции для учета температуры наружного воздуха и давления атмосферы;

p — параллакс светила;

$p_\odot$ — горизонтальный параллакс Солнца;

τ — цена деления уровня;

R — цена оборота барабана окулярного микрометра;

Mz — место зенита на вертикальном лимбе;

N — место меридиана (место севера) на горизонтальном лимбе.

II.3.2. Формула для интерполирования с часовыми изменениями и со вторыми разностями

а. Интерполирование с часовыми изменениями

$$f(x)=f(x)_0+hv=f(x)_0+h\left[v_0+\frac{h}{48}(v_1-v_0)\right],$$

где h — приращение аргумента в долях табличного промежутка.

б. Формула Бесселя интерполирования со вторыми разностями

$$f(x)=f(x)_0+h\Delta'_{1/2}+B\Delta''_{1/2},$$

где

$$B=\frac{h}{2}(h-1);$$

$\Delta'_{1/2}$ — первая разность между последующим и предыдущим значениями функции относительно заданного аргумента интерполирования; $\Delta''_{1/2}$ — среднее из вторых разностей для предыдущего и последующего табличных аргументов интерполирования.

II.3.3. Перевод времени

$$m=T_0+\lambda=T_n+\lambda-n=(s-s_0)-\nu(s-s_0)=$$
$$=(s-S_0)-\nu(s-S_0)+\nu\lambda=t_\odot-E_m+\mu\Delta T;$$

$$T_n=T_0+n;$$

$$D_n=T_n+1^h;\quad s_0=S_0-\mu\lambda;$$

$$t_\odot=m+E_t-\mu\Delta T;$$

$$E_{m,t}=E_0+h_{m,t}v(E);$$

$$h_m=(m-\lambda+\Delta T)_h;$$

$$h_t=(t_\odot-\lambda-E_0+\Delta T)_h;$$

$$v=v_0+\frac{Dh}{48};$$

$$D=v_1-v_0;$$

$$s=s_0+m+m_0\mu;$$

$$T_*=T_0+\Delta T;$$

$$\mu=0{,}002738;$$

$$\nu=0{,}002730.$$

II.3.4. Явления суточного вращения небесной сферы

Прохождение светил через меридиан. В верхней кульминации к югу от зенита

$$z=\varphi-\delta;$$

$$A=0^\circ;$$

$$s=\alpha.$$

В верхней кульминации к северу от зенита

$$z = \delta - \varphi;$$

$$A = 180^\circ;$$

$$s = \alpha.$$

В нижней кульминации

$$z = 180^\circ - (\delta + \varphi);$$

$$A = 180^\circ;$$

$$s = \alpha + 12^h.$$

Прохождение светил через первый вертикал. Условия прохождения светила через первый вертикал

$$0 < \delta < \varphi.$$

Вычисление эфемерид:

$$\cos z = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi};$$

$$A_W = 90^\circ; \quad A_E = 270^\circ;$$

$$\cos t = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi};$$

$$s_W = \alpha + t; \quad s_E = \alpha - t,$$

где t — табличный часовой угол в первой четверти.

Светила в элонгациях:

$$\cos z = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta};$$

$$\sin A' = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi};$$

$$\cos t = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \delta};$$

откуда для западной элонгации

$$A_W = 180^\circ - A'; \quad s_W = \alpha + t,$$

а для восточной элонгации

$$A_E = 180^\circ + A'; \quad s_E = \alpha - t.$$

Восход и заход светил. Условие восхода и захода светила

$$|\delta| \leqslant (90^\circ - \varphi).$$

Время восхода и захода

$$\cos t = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi,$$

откуда для восхода светила

$$s_E = \alpha - t,$$

а для захода светила

$$s_W = \alpha + t.$$

При учете рефракции ρ видимого радиуса R и параллакса p светила (или чего-либо одного из них)

$$\cos t = \operatorname{cosec}\varphi \operatorname{cosec}\delta\,[\cos(90^\circ + \rho + R - p) - \sin\varphi \sin\delta].$$

Азимуты светила в моменты восхода и захода

$$\cos A' = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi},$$

для восхода светила

$$A_E = 360^\circ - A',$$

а для захода светила

$$A_W = A'.$$

При учете рефракции, радиуса и параллакса

$$\sin A' = \frac{\cos\delta \sin t}{\sin(90^\circ + \rho + R - p)}.$$

II.3.5. Соотношения между элементами параллактического треугольника

Параллактический треугольник (рис. II.3.1).
Основные формулы:

$$\sin z \sin q = \cos\varphi \sin t;$$

$$\cos\delta \sin q = \cos\varphi \sin A;$$

$$\sin z \sin A = \cos\delta \sin t;$$

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t;$$

$$\sin\delta = \sin\varphi \cos z - \cos\varphi \sin z \cos A;$$

$$\sin z \cos A = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t;$$

$$\cos\delta \cos t = \cos\varphi \cos z + \sin\varphi \sin z \cos A;$$

$$\sin z \cos q = \sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t;$$

$$\cos\delta\cos q=\sin\varphi\sin z+\cos\varphi\cos z\cos A;$$

$$\cos\varphi\operatorname{tg}\delta=\sin\varphi\cos t+\cos A\sin t;$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=-\frac{M}{\cos(p+\delta)};$$

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\frac{M}{\sin(p-z)};$$

$$\operatorname{tg}\frac{q}{2}=-\frac{M}{\cos(p+\varphi)},$$

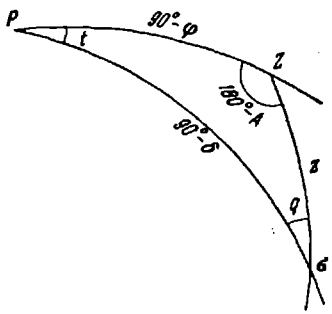


Рис. II.3.1

где

$$M=\sqrt{\frac{\cos(p+\delta)\cos(p+\varphi)\sin(p-z)}{\sin p}};$$

$$p=90^{\circ}-\frac{1}{2}(\varphi+\delta-z).$$

Параллактический угол

$$\cos q=\frac{\sin\varphi-\sin\delta\cos z}{\cos\delta\sin z}=\sin\varphi\sin A\sin t+\cos A\cos t;$$

$$\operatorname{tg}q=\frac{\sin t}{\operatorname{tg}\varphi\cos\delta-\sin\delta\cos t}=\frac{\sin A}{\operatorname{tg}\varphi\sin z+\cos z\cos A};$$

$$\operatorname{tg}q=\frac{\sin M\operatorname{tg}t}{\cos(\delta+M)}=\frac{\cos N\operatorname{tg}A}{\cos(z-N)},$$

где

$$\operatorname{tg}M=\operatorname{ctg}\varphi\cos t;$$

$$\operatorname{tg}N=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos A};$$

$$dq=-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}q\,d\varphi+\operatorname{ctg}t\operatorname{tg}q\,dt-\operatorname{ctg}z\operatorname{tg}q\,dz;$$

$$dq=-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}q\,d\varphi+\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}q\,d\delta+\operatorname{ctg}A\operatorname{tg}q\,dA.$$

Зенитное расстояние

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - M)}{\cos A};$$

$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos t};$$

$$\cos z = \cos(\varphi - \delta) - 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{1}{2} t;$$

$$\sin(N - z) = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \sin N;$$

$$\operatorname{tg} N = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos A}.$$

При малом значении азимута

$$z = \varphi - \delta + \frac{1}{2} \frac{A^2}{\rho} \frac{\cos \varphi \sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta}.$$

При большом значении склонения

$$z = 90^\circ - \varphi + \Delta \cos t + \frac{\Delta^2}{2\rho} \operatorname{tg} \varphi \sin^2 t;$$

$$dz = \cos A \, d\varphi - \cos q \, d\delta + \cos \delta \sin q \, dt;$$

$$dz = \frac{\cos t}{\cos q} d\varphi - \frac{d\delta}{\cos q} + \sin z \operatorname{tg} q \, dA.$$

Часовой угол

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin A}{\cos \varphi \operatorname{ctg} z + \sin \varphi \cos A};$$

$$\cos t = \operatorname{ctg}(\varphi - M) \operatorname{tg} \delta;$$

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg} z \cos A;$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin M}{\cos(\varphi - M)} \operatorname{tg} A;$$

$$\sin(P - t) = \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \delta \sin P;$$

$$\operatorname{tg} P = -\sin \varphi \operatorname{tg} A;$$

$$\cos t = \frac{\cos z}{\cos \varphi \cos \delta} - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta;$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin(S - \varphi) \sin(s - \delta)}{\cos S \cos(S - z)}};$$

$$S = \frac{1}{2}(\varphi + \delta + z);$$

$$dt = \frac{\cos z \operatorname{tg} q}{\cos \varphi} d\varphi - \frac{\operatorname{tg} q}{\cos \delta} d\delta + \frac{\sin z}{\cos \delta \cos q} dA;$$

$$dt = -\frac{d\varphi}{\cos \varphi \operatorname{tg} A} + \frac{\cos q}{\cos \varphi \sin A} d\delta + \frac{dz}{\cos \varphi \sin A};$$

$$dt = -\frac{d\varphi}{\cos \varphi \operatorname{tg} A} + \frac{d\delta}{\cos \delta \operatorname{tg} q} + \frac{dz}{\cos \delta \sin q}.$$

При малом азимуте

$$t^s = 4 \frac{\sin (\varphi - \delta)}{\cos \delta} A'.$$

Азимут

$$\cos A = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} z - \frac{\sin \delta}{\cos \varphi \sin z};$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (S - \varphi) \cos (S - z)}{\cos S \sin (S - \delta)}};$$

$$S = \frac{1}{2} (\varphi + \delta + z);$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\cos M \operatorname{tg} t}{\sin (\varphi - M)};$$

$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos t};$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - q) = \frac{\sin \frac{1}{2} (\varphi + \delta)}{\cos \frac{1}{2} (\varphi - \delta)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} t;$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + q) = \frac{\cos \frac{1}{2} (\varphi + \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\varphi - \delta)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} t;$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin t}{\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \operatorname{tg} \delta} = \frac{\operatorname{ctg} \delta \sec \varphi \sin t}{1 - \operatorname{ctg} \delta \operatorname{tg} \varphi \cos t}.$$

Азимут Полярной с точностью до 0,1′

$$A = -\Delta \sec \varphi \sin t - \frac{\Delta^2}{2\rho} \sec \varphi \operatorname{tg} \varphi \sin 2t;$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\cos \delta \cos q}{\sin z} = \frac{\cos q \sin A}{\sin t} = \sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{ctg} z \cos A =$$

$$= \sin A (\sin \varphi \sin A - \operatorname{ctg} t \cos A);$$

$$\frac{dA}{d\varphi} = \sin A \operatorname{ctg} z;$$

$$\frac{dA}{d\delta}=\frac{\sin q}{\sin z}=\frac{\cos\varphi\sin t}{\sin^2 z}=\frac{\cos\varphi\sin A}{\cos\delta\sin z};$$

$$dA=\frac{\cos t}{\sin z\sin q}\,d\varphi+\frac{d\delta}{\sin z\sin q}+\frac{dz}{\sin z\operatorname{tg} q}.$$

Для азимута Полярной

$$dA=\left[\frac{\Delta}{\rho}\sec\varphi\cos t+\frac{\Delta^2}{\rho^2}\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi\cos 2t\right]d\alpha+$$

$$+\left[\sec\varphi\sin t+\frac{\Delta}{\rho}\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi\sin 2t\right]d\delta-$$

$$-\frac{\Delta}{\rho}\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi\sin t\,d\varphi;$$

$$\frac{d^2A}{dt^2}=-\frac{\cos\varphi\sin A}{\sin^2 z}(\sin\delta\sin z+2\cos A\cos\varphi).$$

II.3.6. Роль астрономических определений в геодезических работах, их точность

Астрономические широты, долготы и азимуты в системе государственной геодезической сети выполняют следующую роль:

1) служат для установления исходных данных государственной геодезической сети;

2) обеспечивают ориентировку государственной геодезической сети и служат контролем угловых измерений в триангуляции;

3) доставляют данные для редуцирования геодезических наблюдений на выбранный референц-эллипсоид;

4) являются составной частью астрономо-гравиметрического нивелирования, которое вместе с геодезией и гравиметрией служит для установления размеров Земли как планеты, и целям изучения фигуры геоида;

5) дают опорную сеть для топографических съемок мелкого масштаба;

6) доставляют материал для уравновешивания обособленных геодезических сетей.

На пунктах государственной геодезической сети астрономические определения производятся с одинаковой точностью. Средняя квадратическая ошибка определения широты пункта не должна превышать $\pm 0{,}3''$. Средняя квадратическая ошибка определения долготы пункта по уклонениям отдельных ее значений от среднего арифметического не должна превышать $\pm 0{,}020^s$. Средняя квадратическая ошибка определения личной разности по уклонениям отдельных значений долгот от среднего арифметического не должна превышать $\pm 0{,}015^s$. Среднее квадратическое колебание личной разности при наблюдениях с применением контактного микрометра принимается равным $\pm 0{,}016^s$. Полная средняя квадратическая ошибка определения долготы пункта не должна превышать $\pm 0{,}03^s$. Средняя квадратическая ошибка определения астрономического азимута по уклонениям отдельных его значений по приемам от среднего арифметического не должна превышать $\pm 0{,}5''$.

II.3.7. Выбор способа и инструментов для наблюдения по определению астрономических широт, долгот и азимутов

Широту определяют одним из следующих способов: Талькотта (по наблюдениям на постоянных нитях и в произвольных малых часовых углах), Певцова, по близмеридианным зенитным расстояниям северных и южных звезд (по наблюдениям при одном положении круга инструмента) и равных высот (Мазаева).

Определение времени для долготы производят по способу Цингера, Деллена или по способу равных высот (Мазаева).

Азимут направления на земной предмет определяют по часовому углу Полярной. Определение геодезического азимута непосредственно из астрономических наблюдений звезд в меридиане и вблизи меридиана на больших зенитных расстояниях находит все большее применение в геодезическом производстве.

Все перечисленные способы раздельного определения времени и широты считаются равноценными по точности. Выбор того или иного способа зависит от наличия соответствующих инструментов и ожидаемых на месте работы особенностей в условиях наблюдения.

В северных широтах в условиях незаходящего солнца, где полевым астрономическим инструментом можно наблюдать звезды только ярче 3,5 величины, широту определяют по близмеридианным зенитным расстояниям северных и южных звезд. Наблюдения производят инструментом с вертикальным лимбом, точность отсчета которого около 1—2″.

В средних и южных широтах широту определяют в основном по способу Талькотта. На постоянных нитях наблюдают при наличии инструмента с простым окулярным микрометром. Если же широту определяют при помощи инструмента с контактным, микрометром (в процессе определения времени), то наблюдают в произвольных малых часовых углах. Наблюдения производят инструментами типа АУ 2″/10″ или У-5″.

Способ Певцова применяют в тех случаях, когда астрономическим инструментом почему-либо нельзя определить широту по способу Талькотта. Если нельзя наблюдать звезды слабее 4,0—4,5 величины то широту также определяют по способу Певцова.

По способу Цингера определяют время на всей территории Советского Союза, за исключением мест, лежащих к северу от семидесятой параллели. Наблюдения производят инструментами типа АУ 2″/10″, снабженными контактными микрометрами.

Способ Деллена применяют для работы севернее семидесятой параллели. Однако бывает выгодно определять время по способу Деллена и несколько южнее, если приходится наблюдать в условиях незаходящего солнца. Для работы этим способом применяют инструменты типа АУ 2″/10″ с контактным микрометром.

Определение геодезического азимута непосредственно из астрономических наблюдений дает более надежные результаты по сравнению с раздельным определением азимута Лапласа, особенно в высоких широтах. Этот способ становится экономически выгодным на пунктах, где не требуется иметь астрономических широт и долг

гот. Азимут определяют инструментом типа АУ 2″/10″ с контактным микрометром.

Астрономический азимут определяют по часовому углу Полярной инструментом типа АУ 2″/10″ с простым окулярным микрометром.

В зависимости от задания (определение широт, долгот и азимутов или только широт и долгот), условий передвижения и высоты тригонометрических знаков астрономическое подразделение снабжается одним или двумя инструментами для наблюдения. При наличии в подразделении двух инструментов один из них помещается наверху тригонометрического знака и служит для определения азимута земного предмета, а другой — внизу на столбе и служит для определения времени и широты. При такой организации работы определение астропункта заканчивается почти в два раза быстрее.

Для точных астрономических определений широт, долгот и азимутов могут быть также использованы универсальные оптические инструменты Вильд Т-4 и ДКМ-3А. Для приближенных наблюдений применяют оптические теодолиты Т2 и Theo-010.

II.3.8. Фотоэлектрическая регистрация моментов прохождения звезд

Способ фотоэлектрической регистрации моментов прохождений звезд основан на замене глаза наблюдателя чувствительным световым приемником — фотоумножителем. В фокальной плоскости вместо сетки нитей устанавливается равнопромежуточная визирная решетка, состоящая из прямоугольных отверстий (щелей) и ширм между ними. За визирной решеткой, в непосредственной близости от нее, располагается катод фотоумножителя. При наблюдении звезды световой поток падает на катод фотоумножителя лишь при прохождении его через прямоугольные отверстия визирной решетки и потому становится прерывистым. При помощи фотоумножителя прерывистый световой поток преобразуется в прерывистый фототок и усиливается для приведения в действие прибора, регистрирующего момент появления в каждом отверстии визирной решетки изображения звезды и момент ее исчезновения.

Для наведения трубы инструмента с фотоэлектрической установкой на звезду используется труба-искатель, которая жестко укрепляется на ламповом конце горизонтальной оси инструмента. Положение сетки нитей трубы-искателя согласуется с положением визирной решетки главной трубы, визирные оси труб должны быть параллельны.

Применение способа фотоэлектрической регистрации моментов происхождения звезд освобождает результаты наблюдений от влияния личных ошибок наблюдателей и обеспечивает получение моментов наблюдений с высокой точностью. Трудности применения этого способа состоят в том, что световые потоки от звезд, проходящие через объектив полевого астрономического инструмента, весьма малы и требуют усиления.

При фотоэлектрической регистрации моментов прохождений звезд следует учитывать запаздывание фототока при прохождении его через входную цепь и усилитель.

II.3.9. Хронографы

Для записи моментов наблюдения в полевых условиях применяют маркопечатающие, цифропечатающие и пишущие хронографы, обеспечивающие запись моментов наблюдения со средней квадратической ошибкой, не превышающей $\pm 0{,}01^s$.

В макропечатающих хронографах оттиск марок производится через печатную ленту от пишущих машинок и при этом без влияния геометрического параллакса марок, так как рабочая марка является общей для отметок секунд хронометра и контактного микрометра.

В цифропечатающих хронографах на ленте в момент контакта от микрометра отпечатываются секунды, десятые и сотые доли секунды. Цифропечатающие барабаны вращаются синхронно и синфазно с показаниями хронометра, для чего применена контактно-следящая система фазирования.

В производстве применяются пишущие хронографы типа Гиппа с камертонным регулятором скорости и типа Гартнера с центробежным регулятором.

Недостатками этих типов хронографов являются необходимость расшифровывать ленту после работы, сложность обслуживания в процессе наблюдения и невозможность работы при низких температурах.

Прибор ЦНИИГАиК предназначен для расшифровки хронографической ленты с записью отметок на одной прямой линии. Прибор выражает в долях интервала между смежными отметками секунд на ленте расстояние от отметки контакта хронометра до отметки контакта микрометра. Если на ленте расстояние между отметками двух смежных секунд не менее 18 мм, то прибор обеспечивает получение отсчета момента контактирования со средней квадратической ошибкой, не превышающей $\pm 0{,}008^s$.

II.3.10. Импульсная приставка для приема секундных сигналов

При выполнении полевых астрономических определений для приема секундных сигналов точного времени, кроме радиоприемника, обеспечивающего уверенный прием удаленных радиостанций на длинных и коротких волнах, необходимо располагать импульсной приставкой, хронографом типа ХПМ-3 и хронометром.

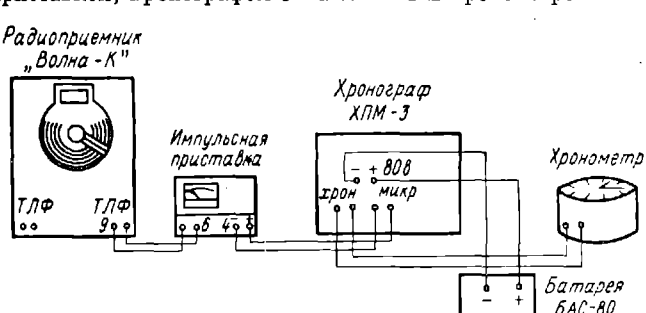


Рис. II.3.4

Примерная блок-схема для приема секундных сигналов времени приведена на рис. II.3.4.

Вместе с секундными сигналами точного времени на ленте хронографа записываются показания хронометра, что позволяет определять показание хронометра в средний момент передачи секундных сигналов и всемирное время в этот момент.

Во время записи секундных сигналов необходимо отмечать на ленте минутные радиосигналы, регистрируя этим начало каждой серии секундных сигналов.

В. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШИРОТ, ДОЛГОТ И АЗИМУТОВ НА ПУНКТАХ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

II.3.11. Определение времени по способу Цингера с применением контактного микрометра

Подготовка к наблюдениям. Для подбора пар применяются Рабочие эфемериды пар Цингера, откуда выбирают на период наблюдения пары с зенитными расстояниями звезд от 20 до 50° и азимутами от 65 до 115°. В широтах от 60 до 70° допускается наблюдение пар с зенитными расстояниями от 18 до 55° и азимутами от 60 до 120°.

По прибытии на астрономический пункт выполняют все необходимые поверки и юстировки инструмента, определяют ширину контакта микрометра и мертвый ход, приводят нить микрометра в горизонтальное положение ($\pm 5'$), совмещают середину координатного биссектора с серединой опознавательного контакта ($1—2''$), устанавливают инструмент в меридиане ($3—5'$) и тщательно нивелируют его при помощи талькоттовского уровня.

Методика наблюдения. Инструмент устанавливают по эфемеридным зенитному расстоянию пары звезд и азимуту первой звезды пары, скрепляют талькоттовский уровень с трубой, выводят пузырек уровня элевационным винтом примерно на середину и откидывают вилку.

Подвижную нить микрометра устанавливают на расстоянии около 1,5 оборота микрометренного винта от нульпункта гребенки навстречу ожидаемому появлению в поле зрения трубы изображения звезды. С приближением изображения звезды к координатному биссектору отсчитывают талькоттовский уровень, вертикальную координатную нить вращением азимутального микрометренного винта инструмента наводят на звезду и удерживают на ней непрерывным вращением этого винта, пока изображение звезды не достигнет координатного биссектора. Затем дают сигнал пуска хронографа.

С момента вступления звезды на подвижную нить микрометра последнюю удерживают на звезде, вращая обеими руками маховички ручного привода на протяжении приблизительно трех оборотов микрометренного винта. Биссектирование звезды прекращают за пол-оборота до второго координатного биссектора, после чего отсчитывают талькоттовский уровень.

Оператор у хронографа ждет появления на хронографической ленте отметки начала счета минуты по показаниям рабочего хронометра, записывает ее на ленте, а затем останавливает хронограф.

После наблюдения первой звезды пары электромагниты хронографа переключают так, что перо, записывающее контакты микрометра, будет записывать контакты хронометра, или наоборот.

Сохраняя неизменным положение трубы по высоте, алидаду инструмента устанавливают по эфемеридному значению азимута второй звезды пары.

Аналогично производят наблюдения второй звезды пары. При переходе от наблюдений одной пары Цингера к другой соблюдают чередование наблюдений первой звезды пары (*EW*, *WE* и т. д. или в обратном порядке).

Искусство наблюдения состоит в умении плавно вращать микрометренный винт за маховички ручного привода и достаточно точно удерживать подвижную нить на изображении звезды.

Вычисление поправки хронометра. В обработку включают для каждой пары по 10 отметок соответственных контактов, расположенных на двух смежных оборотах микрометренного винта, симметричных относительно нульпункта микрометра. Расшифровку ленты производят до $0{,}01^s$.

Поправки хронометра вычисляют с применением Астрономического ежегодника и таблиц логарифмов по следующим формулам:

$$u = \alpha - \frac{1}{2}(T_W + T_E) + r + \sum;$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_E + \alpha_W);$$

$$r = n - m;$$

$$\lg m = \lg m_0 - 2\sigma(m_0);$$

$$\lg n = \lg n_0 + \sigma(n_0) - 3\sigma(m_0);$$

$$\lg m_0 = \lg \varepsilon^s + 2\sigma(\varepsilon^s) + \lg(\operatorname{tg}\delta \operatorname{ctg} t);$$

$$\lg n_0 = \lg \varepsilon^s + 2\sigma(\varepsilon^s) + \lg(\operatorname{cosec} t \operatorname{tg}\varphi);$$

$$\delta = \frac{1}{2}(\delta_E + \delta_W);$$

$$\varepsilon^s = \frac{1}{30}(\delta_W - \delta_E);$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\alpha_E - \alpha_W);$$

$$t = \beta + \frac{1}{2}(T_W - T_E);$$

$$\sigma(x_0) = \frac{Mx_0^2}{6\rho^2};$$

$$\delta u = (i_W - i_E)\frac{\tau''}{60}\sec\varphi \operatorname{cosec} A_W;$$

$$\delta\gamma = (\pm \text{Шк} - \text{Мх})^{об} \frac{R^s}{2} \sec\varphi \operatorname{cosec} A_W;$$

$$\delta\alpha = 0^s,021 \cos z;$$

$$\sum = \delta u + \delta\gamma + \delta\alpha.$$

В этих формулах приняты следующие обозначения: $\delta\alpha$ — поправка за суточную аберрацию; i_W и i_E — наклонности трубы в полуделениях уровня при наблюдениях W и E звезды пары; Шк и Мх — ширина контакта и мертвый ход контактного микрометра; л и п — отсчеты левого и правого концов пузырька талькоттовского уровня.

Если при наблюдениях нуль делений шкалы ампулы талькоттовского уровня (или меньшая надпись на шкале) находился вблизи объектива, то

$$i_W - i_E = (\text{л} + \text{п})_W - (\text{л} + \text{п})_E,$$

а если вдали от объектива, то

$$i_W - i_E = (\text{л} + \text{п})_E - (\text{л} + \text{п})_W.$$

Если в данном экземпляре хронографа рабочая отметка получается на хронографической ленте в момент замыкания электроцепи, то перед Шк ставят знак плюс. При работе хронографа на размыкание перед Шк ставят знак минус. Это правило относится к контактному микрометру, у которого размыкание электроцепи производится выступами контактного барабана.

Для определения долготы с весом единица в двухчасовом интервале времени между приемами двух соседних радиостанций наблюдают 6—10 пар Цингера.

II.3.12. Определение широты по способу Талькотта

Подготовка к наблюдениям. Для производства наблюдений заранее составляют рабочие эфемериды пар Талькотта.

Пары Талькотта должны удовлетворять следующим условиям: среднее зенитное расстояние пары звезд не должно превышать 50°; разность зенитных расстояний для звезд пары не должна превышать 16′; разность прямых восхождений звезд пары должна лежать в пределах $3—15^m$; яркость звезд должна быть не ниже 6,0 величины.

Общая программа пар Талькотта на пункте должна быть подобрана так, чтобы сумма разностей зенитных расстояний звезд не превышала $\pm 30'$.

При подготовке к наблюдениям место зенита устанавливают с точностью до 1′. Для наблюдений на постоянных нитях определяют расстояния боковых вертикальных нитей от средней. Инструмент устанавливают в меридиане по заранее определенному азимуту марки с точностью до 1′.

Для определения широты астропункта инструментом АУ 2″/10″ следует наблюдать не менее 10 пар, а инструментом У-5″ — не менее 16 пар.

Определение широты по наблюдениям на постоянных нитях. За 2—3 мин до эфемеридного момента прохождения в меридиане первой звезды пары устанавливают трубу инструмента на отсчет z_0 или $360^\circ - z_0$ по вертикальному кругу, а алидаду инструмента по отсчетам горизонтального лимба устанавливают в меридиане, направляя трубу в ту его часть, где ожидается первая звезда пары. Оправу талькоттовского уровня скрепляют с трубой, откидывают вилку и пузырек уровня приводят элевационным винтом на середину шкалы.

Когда изображение звезды достигнет в поле зрения трубы установленного опытным путем места, отсчитывают талькоттовский уровень. Подвижную нить микрометра ввинчиванием наводят на звезду в то время, когда она будет пересекать обусловленные для нее вертикальные нити сетки, и отсчитывают каждый раз по барабану микрометра, беря число оборотов по гребенке.

В конце отсчитывают талькоттовский уровень и алидаду поворачивают по азимуту точно на 180°. Когда вторая звезда пары появится в поле зрения трубы, ее наблюдают так же, как и первую звезду пары.

Широту вычисляют по следующим формулам:

1) если северная звезда наблюдалась в верхней кульминации, то

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta_S + \delta_N) \pm \left[(m_S - m_N)\frac{R}{2} + (i_S - i_N)\frac{\tau}{4} + \Delta\rho\right] + k;$$

2) если северная звезда наблюдалась в нижней кульминации, то

$$\varphi = 90^\circ + \frac{1}{2}(\delta_S - \delta_N) \pm \left[(m_S - m_N)\frac{R}{2} + (i_S - i_N)\frac{\tau}{4} + \Delta\rho\right] + k.$$

В этих формулах δ_S и δ_N — видимые склонения южной и северной звезд пары с учетом короткопериодических членов нутации; m_S и m_N — средние из отсчетов окулярного микрометра при наблюдениях южной и северной звезд пары, выраженные в долях оборота счетного барабана; $\Delta\rho$ — поправка за рефракцию; k — поправка за кривизну параллели.

Перед квадратными скобками берут знак плюс, если при увеличении z отсчеты по барабану микрометра возрастают, и знак минус, когда они убывают.

Разность наклонностей вычисляют по следующим формулам.

А. Отсчеты по барабану микрометра возрастают при увеличении зенитного расстояния:

а) нуль делений шкалы уровня вблизи объектива

$$i_S - i_N = (\text{л} + \text{п})_S - (\text{л} + \text{п})_N;$$

б) нуль делений шкалы уровня вдали от объектива

$$i_S - i_N = (\text{л} + \text{п})_N - (\text{л} + \text{п})_S.$$

Б. Отсчеты по барабану микрометра убывают при увеличении зенитного расстояния: знаки перед разностями наклонностей, вычисленными по предыдущим формулам, меняются на обратные.

Поправку за рефракцию вычисляют по формуле

$$\Delta\rho = 0''.0175\,\Delta z \sec^2 z_0,$$

где Δz — полуразность зенитных расстояний звезд пары в минутах дуги, вычисленная по формуле

$$\Delta z = (m_S - m_N)\frac{R}{2}.$$

Поправку за кривизну параллели вычисляют по формуле

$$k = F_S \operatorname{tg}\delta_S + F_N \operatorname{tg}\delta_N,$$

где

$$F_S = \frac{\sum (f_l)_S^2}{20\rho''};$$

$$F_N = \frac{\sum (f_l)_N^2}{20\rho''}.$$

При наличии «Каталога 1967 звезд» среднее склонение звезды на начало ближайшего к наблюдениям года t вычисляют по формуле

$$\delta_t = \delta_{1950} + VA_\delta\,(t - 1950) + VS_\delta\,\frac{(t-1950)^2}{200}.$$

Приближенное прямое восхождение звезды вычисляют по формуле

$$\alpha_t = \alpha_{1950} + VA_\alpha\,(t - 1950).$$

Пользуясь «Каталогом геодезических звезд» (КГЗ-2), среднее склонение звезды на начало года, ближайшего к наблюдениям $t = 1975 + T$, вычисляют по формуле

$$\delta_t = \delta_{1975.0+T} = \delta_{1975.0} + \mathrm{I}_\delta T + \mathrm{II}_\delta T^2 + \mathrm{III}_\delta T^3,$$

где T выражено в тропических столетиях.

Для приближенного прямого восхождения $\alpha_{1975.0+T}$ может служить формула

$$\alpha_{1975.0+T} = \alpha_{1975.0} + \mathrm{I}_\alpha T.$$

Если северная звезда пары наблюдалась в верхней кульминации, то

$$\frac{1}{2}(\delta_S + \delta_N) = \delta_0 + (A + A')\,a_0' + (B + B')\,b_0' +$$

$$+ Cc_0' + Dd_0' + \tau\mu_{0,\delta}$$

где

$$\delta_0 = \frac{1}{2}(\delta_{N,\,t} + \delta_{S,\,t});$$

$$a'_0 = \frac{1}{2}(a'_1 + a'_2);$$

$$b'_0 = \frac{1}{2}(b'_1 + b'_2);$$

$$c'_0 = \frac{1}{2}(c'_1 + c'_2);$$

$$d'_0 = \frac{1}{2}(d'_1 + d'_2);$$

$$\mu_{0,\,\delta} = \frac{1}{2}(\mu_{1,\,\delta} + \mu_{2,\,\delta}).$$

Если северная звезда пары наблюдалась в нижней кульминации, то

$$\delta_0 = 90^\circ + \frac{1}{2}(\delta_{S,\,t} - \delta_{N,\,t});$$

$$a'_0 = \frac{1}{2}(a'_S - a'_N);$$

$$b'_0 = \frac{1}{2}(b'_S - b'_N);$$

$$c'_0 = \frac{1}{2}(c'_S - c'_N);$$

$$d'_0 = \frac{1}{2}(d'_S - d'_N);$$

$$\mu_{0,\,\delta} = \frac{1}{2}(\mu_{S,\,\delta} - \mu_{N,\,\delta}).$$

Редукционные величины первого рода $A + A'$, $B + B'$, C и D интерполируют из Астрономического ежегодника с интерполяционным множителем

$$n = \frac{1}{24^h}(\alpha_0 - \lambda)_h,$$

где для северной звезды в верхней кульминации

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha_{S,\,t} + \alpha_{N,\,t}),$$

а для северной звезды в нижней кульминации

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha_{S,t} + \alpha_{N,t} \pm 12^h).$$

Определение широты по наблюдениям звезд в произвольных малых часовых углах. Особо тщательно устанавливают подвижную нить в горизонтальное положение. Перед наблюдениями определяют поправку хронометра до $0{,}1^s$ и его ход.

По достижении звездой рабочей части поля зрения трубы отсчитывают талькоттовский уровень. Подвижную нить наводят на звезду в момент любого секундного удара хронометра, отсчитывают по барабану микрометра и момент наведения отмечают по показаниям хронометра. Таких наведений делают пять, причем желательно два-три наведения сделать до прохождения звездой средней вертикальной нити. Наведения начинают не очень близко от края поля зрения, стремясь равномерно распределить их во времени.

Широту вычисляют по тем же формулам, что и при наблюдениях на постоянных нитях, за исключением поправки за кривизну параллели, которую вычисляют по формуле

$$k = \frac{1}{2}(k_S + k_N);$$

$$k_{S,N} = \frac{15^2\,[t_i^s]^2}{20\rho''} \sin 2\delta_{S,N},$$

где

$$t_i = T_i - (\alpha - u).$$

Для северных звезд в нижней кульминации вместо δ_N берут $(180^\circ - \delta_N)$.

По «Каталогу геодезических звезд» (КГЗ-2) среднее прямое восхождение на начало ближайшего к наблюдениям года $t = 1975{,}0 + T$ вычисляют по формуле

$$\alpha_t = \alpha_{1975,\,0+T} = \alpha_{1975,\,0} + \mathrm{I}_\alpha T + \mathrm{II}_\alpha T^2 + \mathrm{III}_\alpha T^3,$$

где T выражено в тропических столетиях. К системе FK4 $\alpha_{\text{КГЗ}}$ приводится по формуле

$$\alpha_{\text{FK4}} = \alpha_{\text{КГЗ}} + R_{\text{FK4}} + (10\,\Delta R_{\text{FK4}})\,10T.$$

Видимое прямое восхождение вычисляют по формуле

$$\alpha = \alpha_t + \frac{a}{n''}(A + A') + (B + B')\,b + Cc + Dd + \tau\mu_\alpha.$$

Окончательное вычисление широты пункта и оценка точности производятся путем уравнительных вычислений. В уравнения погрешностей по каждой паре входят неизвестными поправки к приближенной широте и приближенному значению цены оборота окулярного микрометра.

II.3.13. Определение долготы

Программа определения долготы.

1. Прием сигналов времени первой радиостанции.
2. Определение группы поправок хронометра.
3. Прием сигналов времени второй радиостанции.

Каждый вечер рекомендуется определять по два значения долготы.

Определение времени для вывода долготы с весом единица должно выполняться способом Цингера не менее чем из шести пар. Если будет произведено наблюдение пяти пар Цингера, то долготе придается вес 0,8, а если четыре пары, то 0,5.

Окончательное значение долготы пункта должно быть выведено не менее чем из трех вечеров наблюдений с весом не менее шести. Личную разность определяют перед началом и по окончании полевого сезона на одном из основных астрономических пунктов. Каждое определение личной разности состоит из результатов не менее чем четырех вечеров наблюдений с весом восемь.

Вычисление долготы. Окончательную долготу астропункта вычисляют по формуле

$$\lambda = \frac{1}{P}(p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \ldots + p_n\lambda_n) + \partial\lambda + \Delta\lambda_c + \Delta\lambda_p,$$

где $P = \sum p_i$ — сумма весов определения долготы;

$$\lambda_i = s - S + \Delta\,(\text{пут});$$

$$s = X_0 + u_{0\text{-ср}};$$

$$X_0 = \frac{1}{2}[(X' - v') + (X'' - v'')];$$

X' и X'' — показания хронометра в средние моменты приема радиосигналов времени первой и второй радиостанций; v' и v'' — поправки за время распространения радиоволн от первой и второй радиостанций;

$$S = \frac{1}{2}(S' + S'');$$

$$u_{0\text{-ср}} = \frac{1}{n}\sum(u_i + \omega_{10}{}^m\tau_{0-i}) =$$

$$= u_0 + \omega_{10}{}^m\,\frac{(X_0 - T_{\text{ср}})_m}{10};$$

$$u_0 = \frac{1}{n}\sum u_i;$$

$$\omega_{10}{}^m = \frac{1}{\tau}(U'' - U');$$

$$\tau_{0-i} = \frac{(X_0 - T_i)_m}{10};$$

$$\tau = \frac{(X'' - X')_m}{10};$$

$$U' = S' - (X' - v');$$

$$U'' = S'' - (X'' - v'');$$

$$S' = S_0 + T_0' + \mu T_0';$$

$$S'' = S_0 + T_0'' + \mu T_0'';$$

T_0' и T_0'' — моменты середины подачи радиосигналов времени первой и второй радиостанций (во всемирном времени) по данным бюллетеня «Эталонное время»; Δ (nut) — поправка за короткопериодические члены нутации, вычисляемая для способа Цингера по формуле

$$\Delta (\text{nut}) = f' + g' \frac{1}{15} \operatorname{tg} \varphi \sin (T_{\text{ср}} + G'),$$

где g' и G' — короткопериодические редукционные величины, выбираемые из Астрономического ежегодника на средний момент определения поправок часов $T_{\text{ср}}$, а f' — редукционная величина, выбираемая на 0^h эфемеридного времени;

$$\partial\lambda = \frac{1}{2} (\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2);$$

где $\Delta\lambda_1$ и $\Delta\lambda_2$ — значения первой и второй личной разности, вычисленные по формуле

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{изв}} - \lambda_{\text{набл}};$$

$\Delta\lambda_c$ — поправка за приведение к центру тригонометрического знака; $\Delta\lambda_p$ — поправка за приведение к среднему полюсу, вычисленная по формуле

$$\lambda_0 = \lambda - \Delta\lambda_p;$$

$$\Delta\lambda_p = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{15} (x \sin \lambda_0 + y \cos \lambda_0).$$

Оценка точности определения долготы. Среднюю квадратическую ошибку определения долготы астропункта вычисляют по формуле

$$M_\lambda = \sqrt{M_{\lambda'}^2 + M_{\partial\lambda}^2 + M_{\delta\lambda}^2},$$

где $M_{\lambda'}$ — средняя квадратическая ошибка определения долготы астропункта по внутренней сходимости отдельных значений долгот,

$$M_{\lambda'} = \frac{m_\lambda}{\sqrt{P}};$$

$$m_\lambda = \sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-1}};$$

$M_{\partial\lambda}$ — средняя квадратическая ошибка определения поправки за личную разность,

$$M_{\partial\lambda}=\frac{1}{2}\sqrt{M^2_{\Delta\lambda_1}+M^2_{\Delta\lambda_2}};$$

$$M_{\Delta\lambda}=\frac{m_{\Delta\lambda}}{\sqrt{P}};$$

$$m_{\Delta\lambda}=\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-1}};$$

$M_{\partial\lambda}$ — среднее квадратическое колебание поправки за личную разность.

Для наблюдений с контактным микрометром принято

$$M_{\delta\lambda}=0{,}016^s.$$

II.3.14. Определение азимута по часовому углу Полярной

Подготовка к наблюдениям. Инструмент выставляют на столб не позднее двух часов до наблюдения; поверяют накладной уровень; фокусируют окуляр на четкую видимость сетки нитей; проверяют вертикальность установки подвижной нити; испытывают регулировку вертикальной оси; устанавливают микроскопы-микрометры горизонтального лимба на четкую видимость подвижных нитей и делений лимба; устанавливают минимальный угол между микроскопами; устанавливают малый рен и определяют его (на первом полевом астропункте); выправляют и определяют вновь коллимационную ошибку; исправляют место зенита; устанавливают инструмент в меридиане с ошибкой не более 2—3′; тщательно нивелируют горизонтальную ось инструмента; устанавливают поверительную трубу и выставляют марку-миру.

Методика наблюдения. Производят прием первой передачи сигналов времени. Определение азимута со столика тригонометрического знака заключается в следующем.

КП (или КЛ)

1. Поворачивают алидаду горизонтального круга на 30—40° в направлении против хода (по ходу) часовой стрелки и грубым вращением по ходу (против хода) часовой стрелки наводят трубу инструмента на земной предмет, причем окончательное наведение подвижной нитью (установленной вблизи нульпункта гребенки) делают ввинчиванием наводящего винта алидады. После этого четыре раза подряд одновременно (по команде) наводят подвижные нити окулярного микрометра главной и поверительной трубы на объект визирования с отсчетами каждый раз по барабанам микрометров. В завершение визирования на земной предмет отсчитывают по обоим микроскопам горизонтального лимба, наводя на младший и старший штрихи по одному разу.

2. Устанавливают трубу на зенитное расстояние Полярной и грубым вращением по ходу (против хода) часовой стрелки устанавливают трубу в направлении на Полярную. Ввинчиванием наводящего винта алидады подводят изображение Полярной к подвижной нити, установленной вблизи нульпункта гребенки. Ввинчиванием

наводящего винта по высоте подводят изображение Полярной к средней горизонтальной нити.

Отсчитывают накладной уровень, повернувшись лицом к Полярной, и записывают отсчет сначала по левому, а затем по правому концу пузырька. Перекладывают уровень на 180°. Три раза подряд наводят подвижную нить окулярного микрометра главной трубы на Полярную, отсчитывая каждый раз по барабану микрометра и взяв показания хронометра. Наведение делают в любое целое число секунд хронометра по его секундному удару. Одновременно с наблюдениями Полярной визируют поверительной трубой на марку-миру, отсчитывая каждый раз по барабану микрометра.

Вторично отсчитывают накладной уровень, а затем отсчитывают по обоим микроскопам горизонтальный лимб.

3. Поворачивают алидаду на 30—40° против хода (по ходу) часовой стрелки и снова трубу наводят на Полярную. Далее наблюдают Полярную в таком же порядке, что и в первый раз.

4. Вращением алидады по ходу (против хода) часовой стрелки трубу инструмента направляют снова на земной предмет и наблюдают его в таком же порядке, что и в первый раз.

КЛ (или КП)

Трубу переводят через зенит и все перечисленные в пунктах 1, 2, 3 и 4 действия повторяют при другом положении круга, только изменив на обратное направление вращения алидады.

Указанные действия составляют прием определения азимута. При переходе к следующему приему переставляют лимб на угол 10° 5′.

В конце наблюдения группы приемов (2—4 часа) производят прием второй передачи сигналов времени.

Методика наблюдения с астростолба отличается только тем, что накладной уровень перекладывают один раз в полуприеме по завершении первого наблюдения Полярной, причем перекладку делают после отсчета горизонтального лимба.

Разность направлений на земной предмет в полуприеме не должна превышать 4″, колебание двойной коллимационной ошибки в приеме по отсчетам на земной предмет не должно выходить за пределы 6″, а колебание нульпункта уровня — за пределы трех полуделений.

Все приемы, удовлетворяющие указанным требованиям, вычисляют в поле до десятых долей секунды. Расхождения отдельных значений азимута должны находиться в пределах 6″. Величина коллимационной ошибки, выведенная по наблюдениям земного предмета, должна согласовываться с выводом по Полярной в пределах до 5″. Если полученные приемы не удовлетворяют этим условиям, то на симметричных установках лимба наблюдают дополнительную программу, состоящую из 3—4 приемов. В обработку включают все приемы, за исключением явно ошибочных.

Вычисление азимута. Поправки за окулярный микрометр главной и поверительной трубы (инструменты типа АУ 2″/10″ и У-5″) равны $+\mu$ ($M-10$) при барабане микрометра справа и $-\mu \times$ ($M-10$) при барабане микрометра слева, где μ — цена деления барабана окулярного микрометра.

Поправку за окулярный микрометр главной трубы в направление на Полярную вычисляют по формуле

$$\Delta M = \pm \mu\,(M - 10)\,\operatorname{cosec} z,$$

где $z = 90^\circ - \varphi + \mathrm{I} + \mathrm{II}$ — зенитное расстояние Полярной в средний момент ее наблюдения в полуприеме.

Поправку за наклон горизонтальной оси в направление на Полярную вычисляют по формуле

$$\Delta b = b\,\frac{\tau}{2}\operatorname{ctg} z,$$

где b — наклон горизонтальной оси инструмента в полуделениях накладного уровня.

Наклон оси вычисляют по формуле

$$b = x - {}_0\,(\text{л} + \text{п});$$

$$x = \frac{1}{2}\,[{}_0\,(\text{л} + \text{п}) + (\text{л} + \text{п})_0],$$

где x — нульпункт уровня.

По известной долготе пункта λ поправку хронометра для среднего момента наблюдения приеме $T_{\text{ср}}$ вычисляют по формулам

$$u = u' + \omega_h\,(T_{\text{ср}} - X')_h;$$

$$\omega_h = \frac{u'' - u'}{X'' + X'};$$

$$u' = S_0 + T'_0 + T'_0\mu + \lambda - X';$$

$$u'' = S_0 + T''_0 + T''_0\mu + \lambda - X'.$$

Видимые координаты Полярной вычисляют с интерполяционным множителем

$$n = T_{\text{ср}} + u_0 - (\alpha + \lambda).$$

Азимут направления на земной предмет вычисляют с применением таблиц логарифмов по следующим формулам:

$$a = P - N;$$

$$P = \frac{1}{2}\,[L + (R \pm 180^\circ)];$$

$$N = N' + c_N q - \delta A;$$

$$N' = \frac{1}{2}\,[(N_L)_{\text{ср}} + (N_R)_{\text{ср}}];$$

$$(N_L)_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\,[(N_L)_1 + (N_L)_2];$$

$$(N_R)_{\text{ср}} = \frac{1}{2}[(N_R)_1 + (N_R)_2];$$

$$(N_L)_{1,2} = (L)_{1,2} + A_{L-1,2};$$

$$(N_R)_{1,2} = (R)_{1,2} + A_{R-1,2};$$

$$c_N = \frac{1}{p}[(N_L)_{\text{ср}} - (N_R)_{\text{ср}}];$$

$$c_{\text{з. п}} = \frac{1}{2}[L - (R \pm 180°)];$$

$$\delta A = 0,''16 p \cos \varphi;$$

$$p = \operatorname{cosec} z_R + \operatorname{cosec} z_L;$$

$$q = \frac{1}{2}(\operatorname{cosec} z_R - \operatorname{cosec} z_L);$$

$$\lg \operatorname{tg} A = \lg (m \sin t) + \nu;$$

$$t = T - (\alpha + u);$$

$$m = \operatorname{ctg} \delta \sec \varphi;$$

$$\nu = \lg \frac{1}{1-n};$$

$$n = \operatorname{ctg} \delta \operatorname{tg} \varphi \cos t,$$

где L и R — средние в полуприемах направления на земной предмет, исправленные поправками за микрометр; (L) и (R) — направления в полуприемах на Полярную при первом и втором визировании, исправленные поправками за микрометр и уровень; δA — поправка за суточную аберрацию; c_N и $c_{\text{з. п}}$ — коллимационные ошибки по наблюдениям Полярной и земного предмета.

Оценку точности определения азимута производят по формуле

$$M = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{n(n-1)}},$$

где n — число приемов; δ_i — уклонения значений азимута по отдельным приемам от его среднего значения.

II.3.15. Определение геодезического азимута непосредственно из наблюдений звезд в меридиане

Определение геодезического азимута непосредственно по наблюдений звезд в меридиане состоит из определения лично-инструментальной разности наблюдателя, выполняемого на основном пункте, и определения геодезического азимута на полевом пункте.

Определение лично-инструментальной разности. Лично-инструментальную разность определяют на одном из основных пунктов до и после полевых наблюдений.

Инструмент исследуется по программе, предусмотренной для азимутальных наблюдений.

Лично-инструментальная разность $\Delta T'$ определяется по формуле $\Delta T' = u - u_0$, где u — поправка хронометра, определенная из наблюдения прохождений звезд в меридиане: u_0 — поправка хронометра, полученная по результатам приема сигналов времени с использованием астрономической долготы пункта. Обе поправки приведены к одному моменту.

Для определения лично-инструментальной разности инструменты устанавливают в меридиане с точностью 1—2′.

Лично-инструментальную разность определяют из наблюдения пар южных и северных звезд в меридиане на зенитных расстояниях 50—75° с интервалами времени между кульминациями звезд от 8 до 16 мин.

Эфемериды вычисляют по формулам, указанным в II.3.4.

Полное определение лично-инструментальной разности на исходном пункте выполняют в течение 4—5 вечеров с весом 8.

Для определения лично-инструментальной разности с весом 1 выполняется следующая программа: 1) прием сигналов времени; 2) наблюдение 4—5 пар звезд; 3) прием сигналов времени.

Промежуток между приемами сигналов времени составляет два часа. В течение вечера наблюдений может быть выполнено определение лично-инструментальной разности с весом 2.

Каждую звезду наблюдают при двух положениях круга.

При первом положении круга звезду наблюдают до прохождения через меридиан в угловом удалении от него, равном Δa, при втором положении — после прохождения через меридиан в том же удалении от него Δa. В средних широтах Δa выбирается в пределах 20—30′ и должна быть постоянной для всех звезд, что позволяет исключить влияние ошибок делений лимба без его перестановки.

Наблюдения каждой звезды выполняются в следующем порядке.

Трубу инструмента устанавливают по зенитному расстоянию и азимуту для наблюдения северной звезды.

За 5—6 мин до момента кульминации отсчитывают накладной уровень на горизонтальной оси и переставляют его; отсчитывают горизонтальные круги по обоим микроскопам и регистрируют с помощью контактного микрометра прохождение звезды на трех центральных оборотах винта контактного микрометра. Повторно отсчитывают накладной уровень.

Переключают перья хронографа.

Переводят трубу инструмента через зенит и устанавливают ее по зенитному расстоянию и азимуту для наблюдения той же звезды. Отсчитывают накладной уровень и переставляют его; регистрируют прохождение звезды на тех же трех центральных оборотах винта контактного микрометра. Затем отсчитывают накладной уровень и горизонтальный круг.

Наблюдения второй звезды пары выполняются в том же порядке.

При наблюдении обеих звезд в паре отсчеты микроскопов выполняют относительно одних и тех же делений горизонтального круга.

По результатам наблюдения каждой пары звезд определяют одно значение поправки хронометра u.

Полное определение лично-инструментальной разности выполняют с весом 8 в течение 4—5 вечеров.

Для обработки наблюдений служат следующие формулы:

$$u = \frac{(\alpha_S - T_S) A_N - (\alpha_N - T_N) A_S}{A_N - A_S},$$

где α — прямое восхождение звезды в средний момент наблюдения с учетом влияния короткопериодических членов нутации и суточной аберрации; $A = \sin z \sec \delta$;

$$T_S = T'_S + B'_S b_{S_{ср}} + \frac{R}{2} (Мх \pm Шк) \sec \delta_S +$$

$$+ \omega^h (T'_S - X_{ср}) + \Delta a_1^s A_S + u_0;$$

$$T_N = T'_N + B'_N b_{N_{ср}} + \frac{R}{2} (Мх \pm Шк) \sec \delta_N + \omega^h (T'_N - X_{ср}) + u_0;$$

здесь T' — средний момент наблюдения звезды по результатам измерения ленты хронографа;

$$B' = \cos z \sec \delta \frac{\tau}{4}; \quad b_{ср} = \frac{1}{2} (b_L + b_R);$$

$$b_{L,R} = {}_0(л + п) - (л + п)_0;$$

$\frac{R}{2} (Мх \pm Шк) \sec \delta$ — поправка за влияние ширины контакта u мертвого хода винта контактного микрометра;

$\Delta a_1^s A_S$ — приведение момента T'_S наблюдения южной звезды к вертикалу северной звезды;

$$\Delta a_1^s = \frac{1}{15} \left[\frac{1}{2} (L + R)_N - \frac{1}{2} (L + R)_S \right];$$

$\omega^h (T' - X_{ср})$ — приведение поправки хронометра u к среднему моменту показания хронометра $X_{ср} = \frac{1}{2} (X' + X'')$; X', X'' — показания хронометра в моменты приема первой и второй передачи сигналов времени;

$$u_0 = \frac{1}{2} (u'_0 + u''_0);$$

$$\omega^h = \frac{u''_0 - u'_0}{(X'' - X')^h};$$

$$u'_0 = S_0 + T'_0 + T'_0 \mu + \lambda - (X' - v');$$

$$u''_0 = S_0 + T''_0 + T''_0 \mu + \lambda - (X'' - v'');$$

λ — астрономическая долгота основного пункта;

$$\Delta T' = u - u_0;$$

$$\Delta T = \Delta T' + \Delta + \Delta_\lambda;$$

Δ — поправка за влияние неправильностей цапф;
Δ_λ — поправка за движение полюса.

Определение геодезического азимута. Для определения геодезического азимута земного предмета на пункте наблюдают прохождения звезд в меридиане и измеряют горизонтальные углы между каждой звездой и земным предметом. Звезды наблюдаются на зенитных расстояниях от 50 до 70° при двух положениях инструмента; при первом положении — до прохождения и при втором положении после прохождения через меридиан в удалениях от меридиана, равных Δa. В средних широтах Δa для южных звезд можно принять равной 30′ и для северных — 20′; Δa также можно рассчитать по формуле

$$\Delta a = \frac{30'}{\sin z \sec \delta}.$$

Число южных и северных звезд должно быть одинаковым и должно соблюдаться условие, по которому $1/18 \sum \cos a \operatorname{ctg} z \leqslant \leqslant 0{,}1$.

Для определения геодезического азимута выполняют 18 приемов с перестановкой горизонтального круга через 10° 5′ после каждого приема.

Прием определения азимута состоит из следующих операций.

1. Наблюдение земного предмета. Наводят три раза подвижную нить контактного микрометра на земной предмет с отсчетами по барабану микрометра при первом положении инструмента и отсчитывают горизонтальный круг. Затем аналогично наблюдают земной предмет при втором положении инструмента.

2. Наблюдение звезды. Устанавливают трубу по зенитному расстоянию и азимуту для наблюдения звезды. Отсчитывают накладной уровень; перекладывают его на оси; затем отсчитывают горизонтальный круг; выполняют регистрацию прохождения звезды на протяжении трех центральных оборотов винта контактного микрометра. Повторно отсчитывают накладной уровень.

Переключают перья хронографа.

Переводят трубу инструмента через зенит и устанавливают на зенитное расстояние той же звезды. Отсчитывают накладной уровень и перекладывают его; выполняют регистрацию прохождения звезды на тех же трех оборотах винта контактного микрометра; отсчитывают накладной уровень и горизонтальный круг.

3. Наблюдение земного предмета. Выполняют как в п. 1.

При наблюдении со столбика сигнала используется поверительная труба.

Каждый вечер до и после наблюдений, а также через каждые 2 часа принимают сигналы времени.

Геодезический азимут a_p звезды вычисляют по формуле

$$a_\Gamma = \frac{T + u - \alpha}{\sin z \sec \delta},$$

где

$$T = T' + B' b_{\text{ср}} + \frac{R}{2}(\text{Мх} \pm \text{Шк}) \sec \delta + \Delta T + \omega^h (T' - X_{\text{ср}});$$

$$B' = \cos z \sec \delta \frac{\tau}{4}; \quad b_{\text{ср}} = \frac{1}{2}(b_L + b_R); \quad b_{L,R} = {}_0(\text{л} + \text{п}) - (\text{л} + \text{п})_0;$$

$$u = \frac{1}{2}(u' + u'') \text{ в момент } X_{\text{ср}} = \frac{1}{2}(X' + X'');$$

$$u' = S_0 + T'_0 + T'_0\mu + L - (X' - v'); \quad u'' = S_0 + T''_0 + T''_0\mu + L - (X'' - v'');$$

$$\omega^h = \frac{u'' - u'}{(X'' - X')^h};$$

ΔT — азимутальная лично-инструментальная разность; $\omega^h (T' - X_{\text{ср}})$ — поправка за ход хронометра; L — геодезическая долгота пункта наблюдения.

В остальном обозначения те же, что и для вычисления азимутальной лично-инструментальной разности.

Результаты каждого приема определения геодезического азимута позволяют составить уравнения ошибок вида

$$\Delta A_\Gamma - \eta \cos a \operatorname{ctg} z + l = v;$$

$$l = A_0 - Q - a_\Gamma,$$

где A_0 — приближенный азимут земного предмета, отличающийся от A_Γ не более чем на 10″; Q — измеренный горизонтальный угол между звездой и земным предметом, исправленный поправкой за влияние неправильностей цапф; η — составляющая уклонения отвесной линии в первом вертикале на пункте наблюдения; z — зенитное расстояние звезды.

Неизвестные ΔA_Γ и η определяют по способу наименьших квадратов

$$A_\Gamma = A_0 + \Delta A_\Gamma.$$

Геодезический азимут A_Γ исправляют поправкой за движение полюса

$$P_{\Delta A_\Gamma} = n - \frac{[\cos a \operatorname{ctg} z]^2}{[(\cos a \operatorname{ctg} z)^2]};$$

$$P_\eta = [(\cos a \operatorname{ctg} z)^2] - \frac{[\cos a \operatorname{ctg} z]^2}{n};$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}; \quad M_{\Delta A_\Gamma} = \frac{m}{\sqrt{P_{\Delta A_p}}}; \quad M_\eta = \frac{m}{\sqrt{P_\eta}}.$$

Достоинством указанного выше способа определения геодезического азимута непосредственно из астрономических наблюдений является то, что точность его определения практически одинакова во всех широтах. Есть пункты 1 класса, на которых определение астрономических широт и долгот вызывается лишь необходимостью определения геодезического азимута избранного направления. С применением изложенного выше способа определения геодезического азимута необходимость определения астрономических широт и долгот на таких пунктах отпадает. В результате объем астрономических работ на таких пунктах сокращается не меньше чем в 2 раза.

11.3.16. Определение геодезического азимута из многократных наблюдений ярких звезд вблизи меридиана

Способ определения геодезического азимута из многократных наблюдений ярких звезд вблизи меридиана разработан в 1971 г. в ЦНИИГАиК В. Г. Львовым и предназначен для применения в высоких широтах.

Определение геодезического азимута указанным способом состоит из определения азимутальной лично-инструментальной разности до и после полевых работ на одном из основных пунктов и астрономических определений геодезического азимута на полевом пункте.

Определение азимутальной лично-инструментальной разности. Определение азимутальной лично-инструментальной разности состоит из наблюдения прохождений пар звезд через один и тот же вертикал, близкий к меридиану, с отступлением от него не более чем на 4°. В пару входят южная звезда и северная звезда с зенитными расстояниями 40—70°. Звезды наблюдаются при двух положениях инструмента. Южная звезда наблюдается в промежутке между наблюдениями северной звезды в первом и втором положениях.

При составлении эфемерид по аргументу S и φ_0 для интервала наблюдений первоначально подбирают северные звезды, а затем к каждой из них подбирают одну или несколько южных звезд, удовлетворяющих условиям

$$\alpha_S = \alpha_N \pm 12^h \pm 12^m; \quad z = 40 - 70°.$$

Затем вычисляют момент s, когда обе звезды каждой пары находятся в одном вертикале, по формуле

$$s = \alpha_N + \Delta s \pm 12^h,$$

где

$$\Delta s = \Delta\alpha \frac{v_S}{\Delta v}; \quad \Delta a = \Delta s v_N;$$

$$\Delta\alpha = \alpha_S - \alpha_N \pm 12^h; \quad \Delta v = v_S - v_N;$$

$$v = 15 \cos\delta \cos q \operatorname{cosec} z;$$

v — азимутальная скорость движения звезды.

По формуле $A = 180° + \Delta a$ определяют азимут северной части общего вертикала пары звезд.

Для симметричного наблюдения звезд пары относительно момента прохождения их через общий вертикал вычисляют углы упреждения ΔA

$$2\Delta A_N = v_N\,(6 \div 9)^m; \quad 2\Delta A_S = v_S 2^m$$

и установочные азимуты

$$A_N = A - \Delta A; \quad A_S = A \pm 180^\circ + \Delta A;$$

$$z_S = \varphi_0 - \delta_S; \quad z_N = 180^\circ - (\varphi_0 + \delta_N).$$

Эфемериды составляют в порядке возрастания средних моментов наблюдения s.

Для определения азимутальной лично-инструментальной разности наблюдают 32—40 пар звезд в течение четырех вечеров наблюдений между приемами сигналов времени с двухчасовым интервалом.

Среднее из азимутальных разностей по наблюдениям всех пар звезд является поправкой за азимутальную лично-инструментальную разность. При вычислении геодезических азимутов используют среднее из начального и заключительного значения личпо-инструментальной разности.

Наблюдения пары звезд выполняют в следующем порядке. Инструмент устанавливают по зенитному расстоянию и азимуту для наблюдения северной звезды. Отсчитывают накладной или алидадный уровень. Регистрируют прохождение северной звезды на трех центральных оборотах винта вблизи горизонтальной нити. Вторично отсчитывают уровень. Переводят трубу через зенит, устанавливают ее по зенитному расстоянию для наблюдения южной звезды, которую наблюдают аналогично сначала при одном, а затем при другом положении инструмента; переводят трубу через зенит и наблюдают северную звезду пары при втором положении инструмента так же, как и при первом. Для исключения остаточного влияния наклона вертикальной подвижной нити контактного микрометра регистрация прохождений каждой звезды выполняется при симметричном расположении ее относительно горизонтальной нити при первом и втором положениях инструмента.

Звездное время наблюдения звезд вычисляют по формуле

$$S_l = T_l + u_{\text{ср}} + \Delta u_l + \beta_l + \delta y_l,$$

где T_l — средний момент наблюдения звезды при КЛ и КП;

$$u_{\text{ср}} = \frac{1}{2}(u' + u'') \text{ в момент } X_{\text{ср}} = \frac{1}{2}(X' + X'');$$

$$u' = S_0 + T_0' + T_0'\mu + \lambda_0 - (X' - v');$$

$$u'' = S_0 + T_0'' + T_0''\mu + \lambda_0 - (X'' - v''); \quad \omega_{10^m} = \frac{u'' - u'}{(X'' - X')^{10^m}};$$

λ_0 — астрономическая долгота основного пункта; Δu_l — поправка за ход хронометра,

$$\Delta u_l = \omega_{10^m} (T_l - X_{\text{ср}})^{10^m};$$

$$\beta_l = \left[\frac{1}{2} (\text{Мх} + \text{Шк}) \pm \frac{№}{S} 0{,}021 \cos \varphi_0 + \delta i \right] \sec \delta_l;$$

$$\delta y_l = b \frac{\tau}{4} \operatorname{ctg} z; \quad b = {}_0[(\text{л} + \text{п})_{\text{ср}}] - [(\text{л} + \text{п})_{\text{ср}}]_0;$$

δy_l — поправка за ускорение в движение звезды по азимуту,

$$\delta y_l = \gamma \left(\frac{\Delta T}{100} \right)^2 \sin 2A_S;$$

$$\Delta T = (T_{\text{КЛ}} - T_{\text{КП}}) \text{ в секундах времени;}$$

коэффициент γ можно выбрать из табл. 9 [6].

Для вычисления азимутов звезд пары служит формула

$$\operatorname{tg} A_l^* = \frac{\sin t_l}{\sin \varphi_0 \cos t_l - \cos \varphi_0 \operatorname{tg} \delta_l};$$

координаты звезд исправляют поправками за влияние короткопериодических членов нутации.

Азимутальную лично-инструментальную разность $\Delta T_l'$ вычисляют по формуле

$$\Delta T_i' = \frac{A_N^* - A_S^* \pm 180^\circ}{v_S - v_N},$$

в которой v_S и v_N — азимутальные скорости движения звезд пары. $\Delta T_i'$ исправляется поправками за сводные моменты и движение полюса; все полученные $\Delta T_i'$ осредняют и получают $\Delta T'$. Окончательные значения лично-инструментальной разности ΔT определяют по формуле

$$\Delta T = \Delta T' + \delta y_{\text{ц}},$$

где $\delta y_{\text{ц}}$ — поправка за влияние неправильностей цапф.

Для оценки точности определения ΔT служат формулы

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}; \quad M = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

M не должна быть больше $0{,}02^s$.

Определение геодезического азимута. Программа определения геодезического азимута состоит из 18 приемов и выполняется не менее чем за 3 вечера наблюдений. Наблюдают южные и северные звезды в нижней кульминации ярче 2,5 величины вблизи меридиана с отступлением от него для южных звезд до $\pm 12^\circ$ и для северных до $\pm 8^\circ$ на зенитных расстояниях 50—80°. В этом случае каждая

звезда может наблюдаться до полутора часов, в течение которых можно выполнить 4 приема определения азимута. Число наблюдений южных и северных звезд должно быть одинаковым. От приема к приему лимб переставляется на 10° 5′.

Средняя квадратическая ошибка определения геодезического азимута по результатам наблюдений на пункте по внутренней сходимости с учетом ошибки определения лично-инструментальной разности и ее колебания, принимаемого равным $\pm 0{,}020^s$, не должна превышать $\pm 0{,}7''$. Расхождение прямого и обратного геодезического азимута не должно превышать 2,5.

Для звезд ярче 2,5 величины составляют эфемериды по аргументу местного звездного времени $S_н$ начала наблюдений, которое должно быть на 35—40 минут меньше времени их кульминации.

Эфемеридные зенитные расстояния и азимуты вычисляются по формулам

$$z_S = z_S^m + \Delta z_S; \quad z_N = z_N^m - \Delta z_N;$$

$$A_S = 0° \pm \Delta A_S; \quad A_N = 180° \pm \Delta A_N;$$

$$\Delta z_l = |\Delta S| v_z; \quad \Delta A_l = |\Delta S| v_a;$$

$$\Delta S_l = S_l - S_m,$$

где z^m и S_m — меридиональное зенитное расстояние и время кульминации звезды; v_z и v_a — скорости движения звезды по высоте и азимуту.

Прием определения геодезического азимута состоит из следующих операций.

1. Наблюдения на земной предмет при первом (КЛ или КП) положении инструмента. Перед наблюдением алидаду поворачивают против хода часовой стрелки на 30—40° от направления на земной предмет и затем вращением алидады по ходу часовой стрелки подводят изображение земного предмета к нульпункту. Затем одновременно делают три наведения подвижными нитями микрометров главной и поверительной труб на земной предмет и миру. Отсчитывают горизонтальный круг.

2. Переводят трубу через зенит. Поворачивают алидаду на 180° по ходу часовой стрелки и наблюдают земной предмет как в п. 1.

3. Устанавливают инструмент по эфемеридам для наблюдения звезды и приводят ее изображение в центр поля зрения. Поворачивают алидаду на 30—40° по ходу часовой стрелки. Когда пузырек уровня успокоится, отсчитывают уровень. Отсчитывают горизонтальный круг. Подвижную нить контактного микрометра перемещают из нульпункта на 1,5 оборота навстречу движению звезды. Регистрируют прохождение звезды на трех центральных оборотах винта контактного микрометра. Прохождение звезды наблюдают вблизи горизонтальной нити сетки или симметрично относительно ее. Если при одном положении звезда проходит несколько выше горизонтальной нити, то при другом положении инструмента для исключения влияния наклона вертикальной нити контактного микрометра звезда наблюдается на столько же ниже горизонтальной нити. До и после регистрации моментов прохождения звезды

отсчитывают накладной уровень. Если универсальный инструмент имеет уровень при алидаде горизонтального круга, то наклон горизонтальной оси определяют по его показаниям.

4. Трубу переводят через зенит и наблюдают ту же звезду при втором положении с той лишь разницей, что горизонтальный круг отсчитывают после регистрации звезды.

5. Наблюдают земной предмет как в п. 1.

При обработке результатов наблюдений выводят окончательные значения отсчетов кругов на земной предмет и звезду и вычисляют горизонтальный угол Q между ними.

Определяют поправку хронометра $u_{ср} = 1/2\ (u' + u'')$ в средний момент приема сигналов времени двух смежных передач $X_{ср} = 1/2\ (X' + X'')$ относительно звездного времени на местном геодезическом меридиане, для чего используют геодезическую долготу пункта наблюдения. Одновременно вычисляют десятиминутный ход хронометра ω_{10}^m. Подсчитывают средние моменты наблюдения звезд

$$T = \frac{1}{2}\,(T_{КЛ} + T_{КП}) \text{ и } \Delta T = |\,T_{КЛ} - T_{КП}\,| \text{ в секундах времени.}$$

Из АЕ или FK4 на момент наблюдений выбирают видимые α и δ звезд, исправляют их поправками за влияние короткопериодических членов нутации и вычисляют звездное время наблюдения звезд пары S_i и часовые углы t_i

$$S_i = T_i + u_{ср} + \Delta u_i + \beta_i;\quad t_i = S_i - \alpha_i;$$

$$\Delta u_i = (T_i - X_{ср})^{10^m}\omega_{10}^m;$$

$$\beta_i = \left[\frac{1}{2}\,(Мх + Шк) \underset{S}{\overset{N}{\pm}} 0{,}021 \cos\varphi + \delta i\right] \sec\delta_i.$$

Пользуясь таблицами натуральных значений тригонометрических функций, вычисляют (в камеральных условиях до $0{,}01''$) азимуты звезд

$$\operatorname{tg} A_i^* = \frac{\sin t_i}{\sin B \cos t_i - \cos B \operatorname{tg}\delta_i}$$

(B — геодезическая широта пункта наблюдения) и затем азимут земного предмета

$$A_i' = A_i^* + Q_i + \delta y_i + \delta ц_i,$$

где δy_i — поправка за ускорение в движении звезды по азимуту,

$$\delta y_i = -k\left(\frac{\Delta T}{100}\right)^2 \sin 2A^*;\ k = 1'',36\,\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2 z}\left(1 + \frac{\sin z \sin\delta}{2\cos\varphi\cos A^*}\right);$$

$\delta ц_i$ — поправка за влияние неправильностей цапф.

Вычисляют свободные члены уравнений погрешностей

$$l_i = A_0 - A_i;\ A_0 = \frac{1}{n}\sum A_i.$$

Если на пункте наблюдения $|\xi| = |\varphi - B| \leqslant 3''$, то уравнения погрешностей составляют в виде

$$\Delta A + \eta \operatorname{ctg} z \cos A_i^* + l_i = v_i.$$

Если $|\xi| > 3''$, то уравнения погрешностей имеют следующий вид:

$$\Delta A + \eta \operatorname{ctg} z \cos A_i^* - \xi \operatorname{ctg} z \sin A_i^* + l_i = v_i.$$

Составляют нормальные уравнения и из решения системы нормальных уравнений находят ΔA и η или ΔA, η и ξ.

Оценку точности искомых неизвестных производят по формулам

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-k}} \quad (k - \text{число неизвестных});$$

$$M_{\Delta A} = \frac{m}{\sqrt{p_{\Delta A}}}; \quad M_\eta = \frac{m}{\sqrt{p_\eta}}; \quad M_\xi = \frac{m}{\sqrt{p_\xi}}.$$

Окончательное значение геодезического азимута вычисляют по формуле

$$A = A_0 + \Delta A + 15'' (\Delta T + \text{св}) \sin B + C + r + \Delta_{xy} \pm 180^g,$$

где ΔT — азимутальная лично-инструментальная разность; св — поправка за свободные моменты; c, r — поправки за центрировку и редукцию; Δ_{xy} — поправка за движение полюса,

$$\Delta_{xy} = -(x \sin \lambda + y \cos \lambda) \sec \varphi + (x \sin \lambda + y \cos \lambda) \operatorname{tg} \varphi \cos \delta_{\text{ср}} \operatorname{csc} z_{\text{ср}};$$

B — геодезическая широта пункта.

II.3.17. Приведение астрономических широт, долгот и азимутов к центру тригонометрического знака

Долгота. Для приведения долготы к центру тригонометрического знака измеряют азимут направления a с центра инструмента на центр тригонометрического знака с ошибкой, не превосходящей $\pm 0{,}5'$. Азимут отсчитывают от точки севера через восток от 0 до 360^g. Далее измеряют приведенное к горизонту расстояние l между центром инструмента и центром тригонометрического знака с точностью до 1 см.

Поправку за центрировку вычисляют по формулам

$$\Delta\lambda_c^s = \frac{l \sin a}{15 \cdot \text{II}} = \frac{1}{15} [2]\, l \sec \varphi \sin a,$$

где II — длина дуги параллели в $1''$ в метрах на данной широте; величину [2] выбираем из Геодезических таблиц по аргументу φ.

Широта. Для приведения широты к центру тригонометрического знака измеряют приведенное к горизонту расстояние l между точкой стояния инструмента и центром тригонометрического знака с точностью до 1 см и азимут a направления с центра инструмента на центр тригонометрического знака (от точки севера через восток от 0 до 360°) с точностью до $0{,}5'$.

Поправку за приведение широты к центру тригонометрического знака вычисляют по одной из следующих формул:

$$\Delta\varphi_c = \frac{l \cos a}{\mathrm{I}};$$

$$\lg \Delta\varphi_c = [1] + \lg (l \cos a);$$

$$\varphi = \varphi' + \Delta\varphi_c,$$

где I — длина дуги меридиана в 1″ в метрах на данной широте; $[1] = \lg (\rho''/M_0)$ — величина, выбираемая из Геодезических таблиц по аргументу φ; M_0 — радиус кривизны дуги меридиана.

Азимут. Приведенный к центрам тригонометрических знаков азимут вычисляют по формуле

$$a = a' + \Delta c + \Delta r + \Delta\gamma,$$

где Δc — поправка за центрировку; Δr — поправка за редукцию; $\Delta\gamma$ — поправка за сближение меридианов.

Поправку за центрировку вычисляют по формуле

$$\Delta c = \frac{l}{s} \rho \sin \theta,$$

где l — горизонтальное проложение между точкой стояния инструмента и центром тригонометрического знака, известное с точностью до 1 мм; s — расстояние между тригонометрическими знаками, данное с точностью до 1 м; θ — угол при центре инструмента между направлениями на центр тригонометрического знака, с которого определяют азимут, и на центр тригонометрического знака, измеренный с точностью до 0,1′.

Поправку за редукцию вычисляют по формуле

$$\Delta r = \frac{l_1}{s} \rho \sin \theta_1,$$

где l_1 — горизонтальное проложение между центром тригонометрического знака, на который наблюдают, и точкой стояния гелиотропа (фонаря), измеренное с точностью до 1 мм; θ_1 — угол при точке стояния гелиотропа (фонаря) между направлениями на центр тригонометрического знака, на который определяют азимут, и на центр тригонометрического знака, с которого производятся наблюдения по определению азимута (с точностью до 0,1°).

При наблюдениях с тригонометрического знака элементы центрировки и редукции определяют по два раза: в начале наблюдения и по окончании их.

Поправку за сближение меридианов вычисляют по одной из следующих формул:

$$\Delta\gamma = [2]\, l \sin a \operatorname{tg} \varphi = \frac{l \sin a \sin \varphi}{\mathrm{II}},$$

где a — азимут с точки стояния инструмента на центр тригонометрического знака, с которого производилось определение азимута (от точки севера к востоку от 0 до 360°), измеренный с точностью до 0,1′; φ — широта места наблюдения (с точностью до 0,1′).

II.3.18. Определение широты по зенитному расстоянию Полярной

Для определения широты с точностью до 1′ по зенитному расстоянию Полярной нужно знать поправку хронометра u_0 с точностью до 1^m.

Перед наблюдениями хорошо нивелируют инструмент и определяют место зенита на вертикальном лимбе с точностью до 0,1′.

Наблюдения производят при кругах право и лево, наводя на Полярную по два раза при каждом круге. Перед наведением берут счет секунд с хронометра и, продолжая считать в уме, в момент удара хронометра в какую-либо целую секунду наводят на Полярную горизонтальную нить трубы инструмента, действуя микрометренным винтом по высоте. Отмечают показания хронометра в момент наведения на Полярную, а также отсчитывают вертикальный круг по обоим микроскопам, предварительно приведя на середину пузырек уровня при алидаде вертикального круга.

Вслед за первым делают подобным же образом второе наведение на Полярную.

Дальше переводят трубу инструмента через зенит и такие же наблюдения повторяют при другом положении круга инструмента.

В конце приема наблюдения по анероиду отсчитывают атмосферное давление и по термометру-праще — температуру наружного воздуха.

При обработке журнала наблюдения вычисляют средние по кругам отсчеты по вертикальному лимбу и соответствующие им средние отсчеты хронометра.

Широту по наблюдениям при каждом положении круга инструмента вычисляют по формуле

$$\varphi = 90^\circ - z + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

Зенитное расстояние z для инструмента типа АУ 2″/10″ и У-5″ вычисляют по формуле

$$z = L_{\text{ср}} - Mz + \rho = Mz - R_{\text{ср}} + \rho,$$

где

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 (A + B).$$

Величину

$$\mathrm{I} = -\Delta \cos t,$$

где

$$t = s - \alpha = T_{\text{ср}} + u_0 - \alpha,$$

выбирают из таблицы I Астрономического ежегодника по аргументу местного звездного времени s.

Величину

$$\mathrm{II} = -\frac{15}{\rho''} \Delta'' \, \Delta\alpha^s \sin t + \Delta\delta'' \cos t$$

выбирают из таблицы II Астрономического ежегодника по аргументам s и высоте

$$h=90^{\circ}-z_{\text{ср}}.$$

Величину

$$\text{III}=\frac{\Delta^2}{2\rho}\sin^2 t\,\operatorname{tg}\varphi$$

выбирают из таблицы III Астрономического ежегодника по аргументам s и дате наблюдения.

За окончательное значение широты по приему берут среднее из вычислений широты по наблюдениям при двух положениях круга инструмента.

II.3.19. Определение широты по зенитному расстоянию Солнца

Если поправка хронометра будет известна с точностью до 10^s, то для получения широты с точностью до $30''$ можно наблюдать Солнце за 1 ч до прохождения или через 1 ч после прохождения им меридиана.

С точностью до 2^m звездное время в местный истинный полдень равно прямому восхождению Солнца в 0^h эфемеридного времени на дату наблюдения. По декретному времени Солнце проходит меридиан в момент

$$D_n=24^h-(E_0+\lambda)+(n+1).$$

Перед началом наблюдения нивелируют инструмент и определяют место зенита на вертикальном лимбе. На окуляр надевают стеклянный густой светофильтр.

Широту определяют в следующем порядке.

КП (или КЛ)

1. Наблюдают Солнце в первом его положении (или во втором).
2. Наблюдают Солнце во втором его положении (или в первом).

КЛ (или КП)

3. Наблюдают Солнце в первом его положении (или во втором).
4. Наблюдают Солнце во втором его положении (или в первом).

В середине наблюдения отсчитывают термометр и барометр. Такие наблюдения составляют один прием определения широты.

В первом положении Солнца наблюдают касание горизонтальной нити сетки его нижним краем, а во втором положении — его верхним краем. Вертикальная нить в эти моменты проходит через центр изображения Солнца.

Наблюдения Солнца заключаются в следующем.

Действуя одновременно двумя микрометренными винтами (для передвижения трубы инструмента по высоте и азимуту), устанавливают изображение Солнца в поле зрения трубы так, чтобы горизонтальная нить находилась впереди направления его движения, а вертикальная в это время проходила через центр изображения

Солнца. Затем прекращают вращение микрометренного винта по высоте и, продолжая действовать азимутальным микрометренным винтом, удерживают центр изображения Солнца на вертикальной нити. В момент касания нужным краем Солнца (верхним или нижним) горизонтальной нити берут отсчет по хронометру, затем отсчитывают вертикальный лимб по обоим микроскопам. При отсчетах лимба следят, чтобы пузырек уровня при вертикальном круге находился на середине шкалы ампулы.

Для астрономических инструментов типа АУ 2″/10″ и У-5″ зенитное расстояние Солнца по средним в полуприемах отсчетам вертикального лимба вычисляют по формулам

$$z = L_{\text{ср}} - \text{Mz} + \rho - p = \text{Mz} - R_{\text{ср}} + \rho - p;$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 (A + B);$$

$$p = p_{\odot} \sin z',$$

где можно приближенно принять $p_{\odot} = 9''$.

Широту вычисляют по наблюдениям при каждом положении круга по формулам

$$\varphi_{L,\,R} = m_{L,\,R} + n_{L,\,R};$$

$$\operatorname{tg} m = \frac{\operatorname{tg} \delta_{\odot}}{\cos t_{\odot}};$$

$$\cos n = \frac{\cos z \sin m}{\sin \delta_{\odot}};$$

$$T'_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (T_{L_1} + T_{L_2});$$

$$T''_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (T_{R_1} + T_{R_2});$$

$$\varphi = \frac{1}{2} (\varphi_L + \varphi_R).$$

Если при наблюдениях применялся звездный хронометр, поправка которого известна относительно звездного времени, то

$$t_{\odot} = T_{\text{ср}} + u - \alpha_{\odot}.$$

Если же применялся средний хронометр и его поправка известна относительно среднего солнечного времени, то

$$t_{\odot} = T_{\text{ср}} + u + E.$$

Видимое прямое восхождение и склонение Солнца интерполируют из Астрономического ежегодника по формулам

$$\alpha_{\odot} = \alpha_0 + h v_{\alpha};$$

$$\delta_{\odot} = \delta_0 + h v_{\delta};$$

$$v_{\alpha} = v_0 + \frac{hD}{48};$$

$$D = v_1 - v_0;$$

$$v_0 = 9,^s856 - v_E.$$

При наблюдениях на звездный хронометр, когда u известна относительно звездного времени,

$$h = [(S - S_0) - \nu (S - S_0) + \Delta T]_h;$$

$$S = T_{ср} + u - \lambda.$$

Если же наблюдения производились на средний хронометр и его поправка известна также относительно среднего времени, то

$$h = (T_{ср} + u - \lambda + \Delta T)_h.$$

П.3.20. Определение времени по зенитному расстоянию Солнца

Поправку часов определяют утром и вечером, начиная наблюдения не раньше чем за 1,5 ч до прохождения Солнцем первого вертикала и заканчивая их не позднее чем 1,5 ч спустя после прохождения. На зенитных расстояниях больше 85° наблюдать Солнце не рекомендуется.

Приближенно звездное время прохождения Солнцем первого вертикала можно вычислить по формуле

$$s = \alpha'_0 + t_{\odot};$$

$t_{\odot} = 24^h - t'$ — для утренних наблюдений; $t_{\odot} = t'$ — для вечерних наблюдений;

$$\cos t' = \operatorname{tg} \delta_{\odot} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Наблюдения по определению поправки хронометра по зенитному расстоянию Солнца производят по изложенной выше методике определения широты по зенитному расстоянию Солнца.

Вычисление поправки часов относительно звездного времени производят по следующим формулам:

$$u = \frac{1}{2}(s_L + s_R) - \frac{1}{2}(T'_{ср} + T''_{ср});$$

$$s_{L,R} = \alpha_{\odot} + t_{L,R};$$

$$\sin^2\frac{t'}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(z+z_m)\sin\frac{1}{2}(z-z_m)}{\cos\varphi\cos\delta_\odot};$$

$$z_m=\varphi-\delta_\odot;$$

$$z=L_{\text{ср}}-\text{Mz}+\rho-p=\text{Mz}-R_{\text{ср}}+\rho-p;$$

$t_{L,\,R}=24^h-t'$ — для утренних наблюдений;

$t_{L\ R}=t'$ — для вечерних наблюдений;

$$\delta_\odot=\delta_0+h'v_\delta;$$

$$v_\delta=v_0+\frac{h'D}{48};$$

$$D=v_1-v_0;$$

$$h'=[(S-S_0)-\nu(S-S_0)+\Delta T]_h;$$

$$S=T_{\text{ср}}+u_0-\lambda;$$

$$\alpha_\odot=\alpha_0+h''v_\alpha,$$

$$v_\alpha=v_0+\frac{h''D}{48};$$

$$D=v_1-v_0;$$

$$v_0=9{,}^s856-v_E;$$

$$h''=(t_{L,\,R}-\lambda-E_0+\Delta T)_h.$$

II.3.21. Определение азимута по зенитному расстоянию Солнца

Если азимут направления на земной предмет нужно определить с точностью до 1′, то для вычисления азимута Солнца нужно знать широту места наблюдения с точностью до 1′ и поправку хронометра с точностью до 3^m (для интерполирования из Астрономического ежегодника видимых мест Солнца).

Инструмент перед наблюдением тщательно выверяют, центрируют, нивелируют, определяют место зенита, надевают на окуляр густой светофильтр. Во время наблюдения следует, чтобы пузырек уровня накладного и при вертикальном круге находились на середине. Для учета астрономической рефракции измеряют температуру наружного воздуха с точностью до 2—3° и давление атмосферы до 2—3 мм рт. ст.

Азимут определяют в следующем порядке.

КП (или КЛ)

1. Визируют на земной предмет и отсчитывают горизонтальный лимб.

2. Визируют на Солнце в первом его положении; отмечают по часам момент визирования; отсчитывают по обоим микроскопам по вертикальному и горизонтальному лимбам.

3. Визируют на Солнце во втором его положении; берут отсчеты по часам, а также по вертикальному и горизонтальному лимбам.

КЛ (или КП)

4. Визируют на Солнце в первом его положении; берут отсчеты по часам, а также по горизонтальному и вертикальному лимбам.

5. Визируют на Солнце во втором его положении; отсчитывают часы, а также берут отсчеты по горизонтальному и вертикальному лимбам.

6. Визируют на земной предмет и отсчитывают по горизонтальному лимбу.

Указанные действия составляют один прием. Для определения азимута направления наблюдают два-три таких приема.

В первом положении Солнца наблюдают одновременное касание изображения правого края Солнца вертикальной нити в поле зрения трубы, а нижнего края Солнца — горизонтальной нити. Во втором положении Солнца наблюдают одновременное касание изображения левого края Солнца вертикальной нити в поле зрения трубы, а верхнего края Солнца — горизонтальной нити.

Визирование на Солнце заключается в следующем. Действуя одновременно двумя микрометренными винтами (по высоте и азимуту), изображение Солнца устанавливают в поле зрения трубы так, чтобы горизонтальная нить находилась впереди направления его движения, а вертикальная нить касалась нужного края Солнца. Затем прекращают вращение трубы по высоте и, продолжая действовать азимутальным микрометренным винтом, непрерывно касаются вертикальной нитью нужного края изображения Солнца. Касание изображения Солнца горизонтальной нити фиксируют по показаниям хронометра. Счет секунд по хронометру удерживают в уме.

В журнале наблюдения подсчитывают средние из отсчетов по горизонтальному лимбу при наведениях на земной предмет (при круге право и круге лево инструмента) по формуле

$$N=\frac{1}{2}[L+(R\pm 180^\circ)];$$

вычисляют средний отсчет по горизонтальному лимбу при визировании на Солнце

$$M=\frac{1}{4}[L_1+L_2+(R_1\pm 180^\circ)+(R_2\pm 180^\circ)],$$

а также вычисляют среднее показание хронометра по формуле

$$T_{ср}=\frac{1}{4}(T_1+T_2+T_3+T_4).$$

Азимут направления на земной предмет вычисляют по формуле

$$a = Q + A,$$

где

$$Q = N - M;$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-z)\sin(p-\Phi)}{\sin p \sin(p-\Delta)}};$$

$$p = \frac{1}{2}(\Delta + \Phi + z);$$

$$\Delta = 90^\circ - \delta_\odot;$$

$$\varphi = 90^\circ - \varphi;$$

$$z = P - Mz + \rho;$$

$$P = \frac{1}{4}[L'_s + L''_s + (360^\circ - R'_s) + (360^\circ - R''_s)];$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_0(A + B);$$

$$\delta_\odot = \delta_0 + hv_\delta;$$

$$v_\delta = v_0 + \frac{hD}{48};$$

$$D = v_1 - v_0;$$

$$h = [(S - S_0) - \nu(S - S_0) + \Delta T]_h;$$

$$S = T_{ср} + u - \lambda.$$

Азимут Солнца принимают со знаком плюс для утренних и со знаком минус для вечерних наблюдений.

II.3.22. Определение азимута по часовому углу Полярной

Для определения азимута направления на земной предмет с точностью до 1′ нужно знать поправку часов с точностью до 1^m и широту места наблюдения с точностью до 5′.

Земной предмет, азимут которого определяется, должен находиться от инструмента на таком расстоянии, чтобы при визировании не пришлось изменять фокусировку трубы при переходе от наблюдения земного предмета к наблюдениям Полярной.

Перед определением азимута инструмент нужно тщательно выверить, обратив особое внимание на установление перпендикулярности горизонтальной оси вращения инструмента к его вертикальной оси. Затем инструмент нивелируют и центрируют над точкой стояния.

Рекомендуется следующая методика наблюдения.

КП (или КЛ)

1. Визируют на земной предмет средней вертикальной нитью и отсчитывают по горизонтальному лимбу.

2. Визируют на Полярную той же вертикальной нитью, отмечая момент визирования по хронометру, поправка которого известна с необходимой точностью; отсчитывают по обоим микроскопам горизонтального лимба.

КЛ (или КП)

3. Визируют на Полярную; отсчитывают по хронометру и по горизонтальному лимбу.

4. Визируют на земной предмет и отсчитывают по горизонтальному лимбу.

Указанные действия составляют один прием определения азимута. Во избежание грубых просчетов лимб между приемами переставляют на произвольный угол.

Вычисляют азимут со средним по приему моментом наблюдения Полярной по следующим формулам:

$$a = Q - A;$$

$$Q = N - M;$$

$$N = \frac{1}{2}[L + (R \pm 180°)];$$

$$M = \frac{1}{2}[L_п + (R_п \pm 180°)];$$

$$A = \Delta \sec \varphi \sin (t + \delta t^s);$$

$$\delta t^s = \Delta^s \operatorname{tg} \varphi \sin t;$$

$$\Delta = 90° - \delta;$$

$$t = T_{ср} - (\alpha - u);$$

$$T_{ср} = \frac{1}{2}(T_L + T_R).$$

Вычисления можно вести с применением как арифмометра так и таблиц логарифмов.

II.3.23. Определение азимута по способу Красовского

Азимут определяют по наблюдениям Полярной и вспомогательной звезды. С начала года и по август в качестве вспомогательной звезды берут δ Кассиопеи, а с июня и по конец года — звезду ζ Большой Медведицы (Мицар).

Инструмент перед работой хорошо выверяют; приводят к минимальному значению коллимационную ошибку; устанавливают горизонтальную ось вращения перпендикулярно к вертикальной оси вращения инструмента; инструмент хорошо центрируют и нивелируют.

Наблюдения состоят из визирования крестом нитей на земной предмет и на звезды при отсчитывании по горизонтальному лимбу.

При каждом положении круга инструмента вспомогательную звезду наблюдают симметрично по времени (с точностью до 10 сек) относительно первого и второго наблюдений Полярной, для чего пользуются карманными часами.

Наблюдения производят в следующем порядке.

КП (или КЛ)

1. Визируют на земной предмет и отсчитывают по горизонтальному лимбу.
2. Визируют на Полярную, отсчитывая момент визирования по часам (с точностью до 5 сек); отсчитывают по горизонтальному лимбу.
3. Визируют на вспомогательную звезду, отсчитывая момент визирования по часам; отсчитывают по горизонтальному лимбу.
4. Вторично визируют на Полярную в заранее подсчитанный момент по показаниям часов; записывают показания часов в момент визирования (для контроля); отсчитывают по горизонтальному лимбу.

КЛ (или КП)

Начинают наблюдения с визирования на Полярную и повторяют их в порядке, обратном порядку при первом положении круга инструмента.

Такие наблюдения составляют один прием.

В журнале наблюдения для каждого полуприема вычисляют средние из отсчетов по горизонтальному лимбу из наблюдений Полярной и находят углы: Q — горизонтальный угол как разность направлений на вспомогательную звезду и на Полярную, Q_1 — горизонтальный угол как разность направлений на земной предмет и на Полярную.

Азимут вычисляют методом приближений. Для первого приближения в летних наблюдениях для Полярной принимают $A_{N,0} = 1^\circ$, а в зимних $A_{N,0} = 0^\circ$. Второе приближение дает для южных и средних широт (до 60° северной широты) азимут Полярной с ошибкой, не превышающей 0,2′. В широтах выше 60° обычно вычисление ведут тремя приближениями.

Вычисления выполняют по следующим формулам:

$$A_\sigma = A_{N,0} + Q;$$

$$k = \frac{\cos\varphi}{\cos\delta_\sigma};$$

$$\sin q_\sigma = k \sin A_\sigma;$$

$$k_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta_\sigma + \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\delta_\sigma - \varphi)};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{t_\sigma}{2} = -k_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A_\sigma + q_\sigma).$$

$$t = t_\sigma + (\alpha_\sigma - \alpha);$$

$$\zeta = 90^\circ - \varphi - \Delta \cos t;$$

$$\operatorname{tg} A_N = -\frac{\Delta \sin t}{\rho \sin \zeta};$$

$$a = A_N + Q_1.$$

Из двух значений азимута, полученных по наблюдениям при положениях инструмента круг право и круг лево, берут среднее.

Углы q_σ и $t_\sigma/2$ берут в пределах первой четверти со своим знаком, полученным при вычислениях по приведенным выше формулам. Азимут Полярной A_N может лежать в первой или четвертой четвертях, что устанавливается по знаку $\operatorname{tg} A_N$.

При наличии Астрономического ежегодника азимут Полярной для первого приближения можно выбрать из Таблиц высот и азимутов Полярной по аргументу s (местное звездное время). Если s известно с точностью до 10^m, то окончательный азимут вычисляют с первого же приближения для наблюдений, выполненных в любое время года и под любыми широтами.

Местное звездное время по показаниям карманных часов, идущих по декретному времени пояса n, можно вычислить по приближенной формуле

$$s = S_0 + \lambda + D_n - (n + 1).$$

II.3.24. Определение долготы

Имея поправку хронометра u и показания его X в средний момент приема радиосигналов времени какой-либо радиостанции, близкой по времени к наблюдениям поправки часов, можно вычислить приближенную долготу места наблюдения по формуле

$$\lambda = (X + u) - (S_0 + T_0 + \mu T_0).$$

Если же известна долгота места наблюдения, то при наличии приема радиосигналов времени поправку часов вычисляют по формуле

$$u = S_0 + T_0 + \mu T_0 + \lambda - X.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллев Н. А. Полевая фотоэлектрическая установка ПФУ-5Т для астрономических определений. «Геодезия и картография» 1968, № 8, с. 22—26.

2. Каталог 2967 звезд со склонениями от -10° до $+90^\circ$, Эпоха 1975. О (КГЗ-2). Тр. ЦНИИГАиК, вып. 179, 1968, 214 с.

3. Колупаев А. П., Мауерер В. Г., Старостин А. М. Практическое руководство по геодезической астрономии. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 148, 1962, 316 с.

4. Кузнецов А. Н. Геодезическая астрономия. М., «Недра», 1966, 370 с.

5. Львов В. Г. Определение геодезического азимута из многократных наблюдений ярких звезд вблизи меридиана. «Геодезия и картография», 1971, № 11, с. 13—20.

6. Наставление по определению геодезического азимута из многократных наблюдений ярких звезд вблизи меридиана. ЦНИИГАиК, 1971, 34 с.

7. Старостин А. М. Определение геодезического азимута из наблюдений звезд в меридиане. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 147, 1962, с. 35—55.

8. Таблицы по геодезической астрономии. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 163, 1963, 236 с.

9. Уралов С. С. Общая теория методов геодезической астрономии. М., «Недра», 1973, 272 с.

II.4. СФЕРОИДИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Г. В. Багратуни

II.4.1. Определения

Сфероидическая геодезия изучает геометрию земного эллипсоида и изображение значительных частей его поверхности по математическим законам на шаре и на плоскости для целей обработки результатов геодезических измерений.

Эллипсоид, определенным образом ориентированный в теле Земли, на поверхность которого проектируют результаты геодезических измерений и на котором вычисляют координаты пунктов геодезических сетей, называется референц-эллипсоидом. Поэтому часто поверхность референц-эллипсоида называют поверхностью относимости.

Эллипсоид Красовского, принятый в СССР (1942 г.) в качестве референц-эллипсоида, получен из обработки геодезических, гравиметрических и астрономических материалов по СССР, США, Западной Европе и Индии. Сжатие эллипсоида Красовского (1 : 298,3) наилучшим образом удовлетворяет результатам наблюдений искусственных спутников как СССР, так и США.

Поверхность, всюду ортогональная к направлениям силы тяжести, называется уровенной поверхностью. Уровенная поверхность, совпадающая с поверхностью мирового океана в состоянии полного покоя водных масс и продолженная под материки, называется основной уровенной поверхностью Земли. Геометрическая фигура, ограниченная этой поверхностью, называется геоидом. Поверхность геоида и основная уровенная поверхность как геометрические поверхности совпадают. Поверхность геоида не имеет складок и ребер, она всюду замкнута, только кривизна ее меняется не математически. Поэтому вычисления на этой поверхности строго математически невыполнимы.

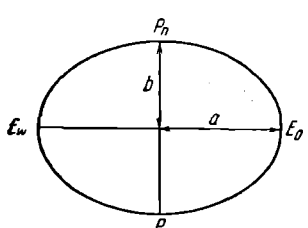


Рис. II.4.1

II.4.2. Земной эллипсоид

Параметры эллипсоида (рис. II.4.1)

a — большая, или экваториальная, полуось;

b — малая, или полярная, полуось;

$$\alpha = \frac{a-b}{a}$$ — полярное сжатие;

$$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$ — квадрат первого эксцентриситета;

$$e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$$ — квадрат второго эксцентриситета;

$e^2 = 2\alpha - \alpha^2$ или приближенно $e^2 = 2\alpha$;

$$e^2 = \frac{e'^2}{1+e'^2};$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2};$$

$$b = a\sqrt{1-e^2}.$$

Параметры эллипсоида Красовского

$a = 6\,378\,245\,000$ м $\quad \lg a = 6.804701197$

$b = 6\,356\,863{,}019$ м $\quad \lg b = 6.803242853$

$\alpha = 0{,}0033523299 \quad \lg \alpha = 7.525346747_{-10}$

$e^2 = 0{,}0066934216 \quad \lg e^2 = 7.825648182_{-10}$

$e'^2 = 0{,}0067385254 \quad \lg e'^2 = 7.828564871_{-10}$

На западе наибольшее распространение имеют параметры эллипсоидов Бесселя и Хейфорда.

Параметры эллипсоида Бесселя

$a = 6\,377\,397{,}155$ м $\quad \lg a = 6.8046434637$

$b = 6\,356\,078{,}963$ м $\quad \lg b = 6.803189289$

$\alpha = 0{,}0033427732 \quad \lg \alpha = 7.524106909_{-10}$

$e^2 = 0{,}0066743722 \quad \lg e^2 = 7.824410424_{-10}$

$e'^2 = 0{,}0067192188 \quad \lg e'^2 = 7.827318783_{-10}$

Параметры эллипсоида Хейфорда

$a = 6\,378\,388{,}000$ м $\quad \lg a = 6.804710934$

$b = 6\,356\,911{,}946$ м $\quad \lg b = 6.803246196$

$$\alpha = 0{,}00336700337 \quad \lg \alpha = 7.527243551_{-10}$$
$$e^2 = 0{,}0067226700 \quad \lg e^2 = 7.827541795_{-10}$$
$$e'^2 = 0{,}0067681702 \quad \lg e'^2 = 7.830471271_{-10}$$

Параметрические линии и системы координат эллипсоида. Параметрическими линиями эллипсоида называются меридианы и параллели. Меридиан — геометрическое место точек равных долгот; параллель — геометрическое место точек равных широт.

Геодезическая широта B — острый угол между нормалью и плоскостью экватора (рис. II-4.2). Геодезическая долгота L — двугранный угол между плоскостями первого меридиана (меридиан Гринвича) и меридиана данной точки.

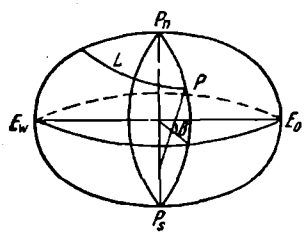


Рис. II.4.2

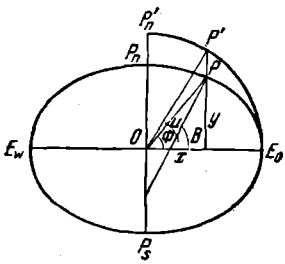


Рис. II.4.3

Геоцентрическая широта Φ — угол между радиусом-вектором и плоскостью экватора; приведенная широта u — угол между плоскостью экватора и линией, соединяющей точку пересечения ординаты y с окружностью радиуса a с центром эллипсоида (рис. II.4.3).

$$\operatorname{tg} \Phi = (1 - e^2) \operatorname{tg} B,$$

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B,$$

$$x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{a \cos B}{W},$$

$$y = \frac{a (1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{a (1 - e^2) \sin B}{W},$$

$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$ — первая функция геодезической широты.

Пространственная система прямоугольных координат с началом в центре эллипсоида (рис. II.4.4):

$$X = x \cos L \text{ или } X = a \cos u \cos L = \frac{a \cos B \cos L}{W},$$

$$Y = x \sin L \text{ или } Y = a \cos u \sin L = \frac{a \cos B \sin L}{W},$$

$$Z = y \text{ или } Z = b \sin u = \frac{b \sqrt{1 - e^2} \sin B}{W}.$$

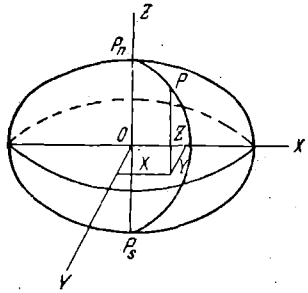


Рис. II.4.4

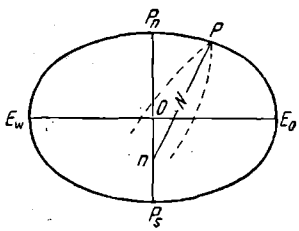


Рис. II.4.5

Радиусы кривизны (рис. II.4.5).

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$$ — радиус кривизны меридиана;

$$N = \frac{a}{W}$$ — радиус кривизны первого вертикала;

$$R = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2}$$ — средний радиус кривизны;

$R_\alpha = MN : (N\cos^2 A + M\sin^2 A)$ — радиус кривизны нормального сечения;

$r = N\cos B = x$ — радиус кривизны параллели;

$c = a : \sqrt{1-e^2} = a\sqrt{1+e^2}$ — полярный радиус кривизны.

Обозначено:

$V = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B}$ — вторая функция геодезической широты;

$$V = W\cdot\sqrt{1+e'^2} = W : \sqrt{1-e^2};\ M = \frac{c}{V^3};$$

$$N = \frac{c}{V};\quad R = \frac{c}{V^2};$$

$$r = \frac{c\cos B}{V};\quad NM^{-1} = V^2,\ N > M.$$

Величины ρ''/M = (1) и ρ''/N = (2) называются соответственно первой и второй геодезической величиной.

$$\lg V = 0.0007297842 + 0.00072917139\cos 2B -$$
$$- 0.00000061213\cos 4B + 0.00000000069\cos 6B.$$

Дуга меридиана

$$s = \int_0^B M\,dB = a(1-e^2)\left\{ A\,\frac{B^\circ}{\rho^\circ} - \frac{B}{2}\sin 2B + \right.$$

$$\left. + \frac{C}{4}\sin 4B - \frac{D}{6}\sin 6B + \ldots \right\}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= 1{,}00505177 \\ B &= 0{,}00506238 \\ C &= 0{,}00001062 \\ D &= 0{,}00000002 \end{aligned}\right\}$$ для эллипсоида Красовского.

$$s = 6\,367\,558{,}49587\,\frac{B^\circ}{\rho^\circ} - 16\,036{,}48027\sin 2B +$$

$$+ 16{,}828067\sin 4B - 0{,}021975\sin 6B$$

Длина дуги s с точностью до миллиметров дается через каждую минуту широты в «Таблицах для вычисления плоских конформных координат Гаусса в пределах широт от 30 до 80°» (М., Геодезиздат, 1958).

В таблицах Д. А. Ларина меридианные дуги, отсчитанные от экватора, обозначены через X. Дуга между двумя пунктами будет

$$s = X_2 - X_1.$$

Для $s \leqslant 50$—60 км действует формула

$$s = M_m\,\frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} = (1)_m\,(B_2 - B_1)'',$$

где B_1 и B_2 — широты данных пунктов.

Дуга параллели

$$s' = \frac{r\,l''}{\rho''} = \frac{N\cos B}{\rho''}\,l'',$$

где l — разность долгот данных пунктов.

В таблицах Д. А. Ларина через каждую минуту широты даются величины

$$b_1 = \frac{N\cos B}{\rho''},$$

а дуга параллели вычисляется по формуле

$$s' = b_1 l''.$$

Площадь и рамки трапеций. Полная поверхность земного эллипсоида

$$\Pi = 4\pi b^2\left\{ 1 + \frac{2}{3}\,e^2 + \frac{3}{5}\,e^4 + \frac{4}{7}\,e^6 + \ldots \right\},$$

$\Pi = 510083035{,}4$ км^2 (по размерам эллипсоида Красовского).

Площадь пояса от широты B_1 до B_2

$$P = 4\pi b^2 \left\{ A' \sin \frac{1}{2}(B_2 - B_1) \cos B_m - B' \sin \frac{3}{2}(B_2 - B_1) \cos 3B_m + \right.$$

$$\left. + C' \sin \frac{5}{2}(B_2 - B_1) \cos 5B_m - \ldots \right\}.$$

Площадь трапеции миллионного листа карты

$$P_{1\,000\,000} = \frac{\pi b^2}{15} \{ A' \sin 2^\circ \cos B_m - B' \sin 6^\circ \cos 3B_m +$$

$$+ C' \sin 10^\circ \cos 5B_m - \ldots \}.$$

Площадь трапеции карты масштаба 1 : 100 000

$$P_{100000} = \frac{\pi b^2}{180} \{ A' \sin 10' \cos B_m - B' \sin 30' \cos 3B_m +$$

$$+ C' \sin 50' \cos 5B_m - \ldots \}.$$

$\pi b^2 = 124\,061\,094{,}3$ км^2
$A' = 1{,}00336361$
$B' = 0{,}00112403$
$C' = 0{,}00000170$

} по размерам эллипсоида Красовского.

Размеры трапеции (рис. II.4.6)

$$a_1 = N_1 \cos B_1 \frac{l''}{\rho''},$$

$$a_2 = N_2 \cos B_2 \frac{l''}{\rho''},$$

$$c = M_m \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''},$$

$$d = \sqrt{a_2 a_1 + c^2}.$$

Величины a_1, a_2, c, d и P для различных масштабов карт можно найти в «Таблицах координат Гаусса — Крюгера», составленных под руководством проф. А. М. Вировца.

Стрелка провеса рамки трапеции рассчитывается по формуле

$$h = N_m \frac{l''^2}{16\rho''^2} \sin 2B_m,$$

где B_m — средняя широта северной и южной рамок; N_m — радиус первого вертикала для B_m.

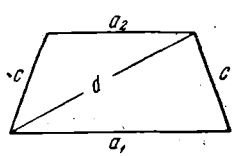


Рис. II.4.6

II.4.3. Кривые на поверхности земного эллипсоида

Нормальные сечения, расхождение взаимных нормальных сечений. Нормали точек поверхности эллипсоида, имеющих разные широты, пересекаются с осью вращения в разных точках. Вследствие этого нормальная плоскость, проходящая через нормаль n_1P_1 и точку P_2, не совпадает с нормальной плоскостью, проходящей через нормаль n_2P_2 и точку P_1 (рис. II.4.7). В пересечении этих плоскостей с поверхностью получаются две кривые a и b, которые называются взаимными нормальными сечениями.

Нормальные сечения — плоские кривые. Если допустить в триангуляции, что отвесная линия и нормаль к эллипсоиду в данной точке совпадают, то углы можно считать измеренными между

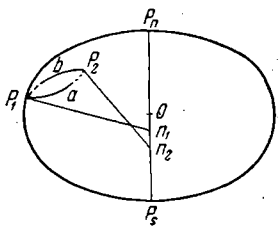


Рис. II.4.7

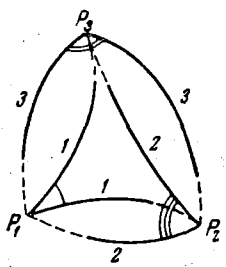


Рис. II.4.8

нормальными сечениями. Так как между двумя точками на эллипсоиде проходят два нормальных сечения, то при наблюдении треугольников получаются шестиугольные незамкнутые фигуры (рис. II.4.8).

Угол между взаимными нормальными сечениями

$$\Delta = \frac{e^2 s^2}{4N_m^2} \rho'' \cos^2 B_m \sin 2\alpha.$$

При $s = 30$ км, $B_m = 60°$ и $\alpha = 50^g$ $\Delta = 0{,}003''$,

при $s = 100$ км, $B_m = 60^g$ и $\alpha = 50°$ $\Delta = 0{,}032''$,

при $s = 150$ км, $B_m = 60°$ и $\alpha = 50°$ $\Delta = 0{,}057''$.

Неучет угла между взаимными нормальными сечениями может привести в звене триангуляции при передаче азимута α к ошибке порядка $0{,}1''$.

Несовпадение взаимных нормальных сечений называется **двойственностью** нормальных сечений. Чтобы получить замкнутые однозначные фигуры, триангуляционные пункты соединяют **геодезическими линиями**, которые, будучи кратчайшими расстояниями между двумя пунктами, образуют

замкнутые фигуры. Геодезические линии проходят между взаимными нормальными сечениями, располагаясь ближе к прямому сечению. Расположение геодезической линии в отношении нормальных сечений в общем случае показано на рис. II.4.9.

Угол между геодезической линией и нормальным сечением δ равен одной трети угла между взаимными нормальными сечениями, т. е.

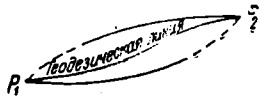


Рис. II.4.9

$$\delta = \frac{\Delta}{3}.$$

В каждое измеренное в триангуляции направление вводят поправку

$$\delta = \frac{e^2 s^2}{12 N_m^2} \rho'' \cos^2 B_m \sin 2\alpha.$$

Геодезические линии на поверхности играют роль прямых на плоскости. Основное уравнение геодезической линии

$$r \sin A = \text{const},$$

где r — радиус параллели; A — азимут геодезической линии в данной точке.

Геодезическую линию определяют еще как кривую, в каждой точке которой главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности.

Разность длин дуг геодезической линии и нормального сечения между двумя точками — весьма малая величина

$$s - s_0 = \frac{e^4 s^5}{360 N^4} \cos^4 B_m \sin^2 2\alpha$$

и при любых точных расчетах и теоретических выкладках не учитывается.

При $s = 600$ км

$$s - s_0 = \left(\frac{1}{1400}\right) \text{мм}.$$

II.4.4. Решение малых сфероидических треугольников

Треугольники, измеряемые в триангуляции, имеют сравнительно небольшие размеры, без заметных искажений развертываются на сфере соответственно выбранному радиусу. Следовательно, решение сфероидических треугольников малого изгиба сводится к решению им соответствующих сферических треугольников. Базисы в триангуляции измеряются в единицах длины и поэтому из решения треугольников надо также получить стороны в тех же единицах длины.

Существует несколько способов решения малых сферических треугольников, когда стороны получаются в единицах длины. Главнейшие из них — теорема Лежандра и способ аддитаментов.

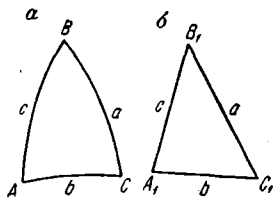


Рис. П.4.10

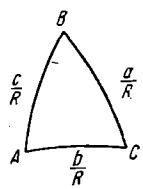


Рис. П.4.11

Теорема Лежандра. Малый сферический треугольник можно решить как плоский, если каждый его угол уменьшить на треть его избытка (рис. II.4.10, *а*, *б*)

$$A_1 = A - \frac{\varepsilon}{3},$$

$$B_1 = B - \frac{\varepsilon}{3},$$

$$C_1 = C - \frac{\varepsilon}{3},$$

где ε — сферический избыток треугольника ABC, A_1, B_1 и C_1 — приведенные плоские углы.

$$\varepsilon'' = \frac{ab \sin C_1 \rho''}{2R^2} = \frac{ac \sin B_1 \rho''}{2R^2} = \frac{bc \sin A_1 \rho''}{2R^2}.$$

Способ аддитаментов. При решении по способу аддитаментов стороны треугольника выражаются в частях радиуса (рис. II.4.11)

$$\lg b = \lg a \frac{\sin B}{\sin A} + A_b - A_a.$$

$A_a = \lg \frac{a}{R} \Big| \sin \frac{a}{R}$, $A_b = \lg \frac{b}{R} \Big| \sin \frac{b}{R}$ называются аддитаментами.

Теорема Лежандра и способ аддитаментов пригодны для треугольников, стороны которых не превышают 150—200 км. Треугольники с бóльшими длинами сторон решаются по более сложным формулам, где учитываются сфероидичность треугольника и поправочные члены к теореме Лежандра

$$A_1 = A - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''}{60} K (m^2 - a^2) - \frac{\varepsilon''}{12} \left(\frac{K_A - K}{K} \right),$$

$$B_1 = B - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''}{60} K (m^2 - b^2) - \frac{\varepsilon''}{12} \left(\frac{K_B - K}{K} \right),$$

$$C_1 = C - \frac{\varepsilon''}{3} - \frac{\varepsilon''}{60} K (m^2 - c^2) - \frac{\varepsilon''}{12} \left(\frac{K_C - K}{K} \right),$$

где K_A, K_B, K_C — Гауссовы кривизны вершин треугольника ABC;

$$K=\frac{K_A+K_B+K_C}{3};\quad m^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3};\quad \varepsilon''=\Delta K\rho'';$$

Δ — поверхность треугольника ABC.

Приведенные выше формулы пригодны для треугольников со сторонами до 500—600 км.

Если вершины треугольника ABC соединяются хордами, длины которых обозначены соответственно через a, b и c, то решение хордового треугольника ведется по формулам

$$\bar{b}=\bar{a}\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{4}\right)},$$

$$\bar{c}=\bar{a}\frac{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{4}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{4}\right)},$$

где ε — по-прежнему сферический избыток треугольника ABC, причем

$$\bar{a}=a-\frac{a^3}{24R^2},$$

R — средний радиус кривизны соответствующей вершины треугольника.

II.4.5. Вычисление геодезических координат пунктов государственной опорной сети

В современной практике геодезических работ в СССР геодезические координаты вычисляются для пунктов триангуляции 1 класса; триангуляция остальных классов и полигонометрические сети обрабатываются на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера с вычислением плоских прямоугольных координат пунктов.

Вычисление геодезических координат является практической и научной задачей и выполняется с большой тщательностью. Широты и долготы пунктов вычисляются с точностью до 0,0001″, а азимуты — до 0,001″. Чтобы обеспечить указанную точность, необходимо вычисления вести с удержанием восьмого десятичного знака.

Вычисление геодезических координат часто называют главной геодезической задачей. При этом различают: *прямую геодезическую задачу*, когда по координатам заданного пункта, длине и азимуту геодезической линии вычисляют координаты текущего пункта и обратный азимут; *обратную геодезическую задачу*, когда по координатам двух пунктов вычисляют расстояние между ними по геодезической линии и азимуты ее в конечных пунктах.

Для решения прямой геодезической задачи при расстояниях между пунктами до 120—130 км в СССР применяются главным образом формулы Шрейбера — Изотова, которые имеют вид

$$B_2 = B_1 + b_0'' - d'',$$

$$L_2 = L_1 + l'',$$

$$A_2 = A_1 \pm 180^\circ + t'' - \varepsilon'',$$

$$u = s\cos A_1, \quad v = s\sin A_1,$$

$$\beta'' = (1)_1 u, \quad \gamma'' = (2)_0 v,$$

$$\lg b_0'' = \lg \beta'' - (4)_1 u + (5)_1 v^2 + (6)_1 u^2,$$

$$\lg c'' = \lg \gamma'' - \frac{1}{2}(5)_1 u^2,$$

$$\lambda'' = c'' \sec B_0, \quad \tau'' = c'' \operatorname{tg} B_0,$$

$$\delta'' = (3)_0 \tau'' c'', \quad \varepsilon'' = \frac{b_0'' c''}{2\rho''}, \quad \nu = \frac{10^8 \mu}{6\rho''^2},$$

$$\lg l'' = \lg \lambda'' - 2\nu\tau''^2 + (9)_0 \lambda''^4,$$

$$\lg t'' = \lg \tau'' - \nu\tau''^2 - \nu\lambda''^2 + (7)_0 \lambda''^2,$$

$$\lg d'' = \lg \delta'' - \nu\tau''^2 - \frac{1}{2}\nu\tau''^2 + (8)_0 \lambda''^2.$$

В этих формулах в соответствии с рис. II.4.12: b_0 — разность широт вспомогательной C (B_0) и данной P_1 (B_1) точек; d — разность широт вспомогательной и искомой; l — разность долгот P_1 и P_2; t — геодезическое сближение меридианов; ε — сферический избыток прямоугольного сферического треугольника P_1CP_2.

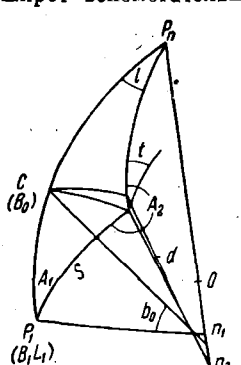


Рис. II.4.12

Логарифмы величин

$$(1)_1 = \frac{\rho''}{M_1}, \quad (4)_1 = \frac{3\cdot 10^8 \mu e'^2 \sin 2B_1}{4N_1},$$

$$(5)_1 = \frac{10^8 \mu}{3M_1 N_1}$$

выбирают из «Таблиц для вычисления геодезических координат» по аргументу широты данного пункта P_1, а логарифмы величин

$$(2)_0 = \frac{\rho''}{N_0}, \quad (3)_0 = \frac{N_0}{2\rho'' M_0}$$

— по аргументу B_0 широты вспомогательной точки C. Величины $(6)_1 u^2$, $(7)_0 \lambda''^2$, $(8)\lambda''^2$, $(9)_0 \lambda^4$ выбирают из тех же таблиц по логарифму u и λ.

Для расстояний порядка 25—30 км формулы Шрейбера — Изотова могут быть упрощены, а именно их можно применить в виде

$$\lg b_0'' = \lg \beta'' - (4)_1 u + (5)_1 v^2,$$

$$\lg l'' = \lg \lambda'' - 2\nu\tau''^2,$$

$$\lg t'' = \lg \tau'' - \nu\tau''^2 - \nu\lambda''^2,$$

$$\lg d'' = \lg \delta'' - \nu\tau''^2 - \frac{1}{2}\nu\lambda''^2.$$

Прямая геодезическая задача может решаться по формулам «со средними аргументами» или формулам Гаусса

$$B_2 = B_1 + b'', \quad L_2 = L_1 + l'', \quad A_2 = A_1 \pm 180° + a'',$$

$$\lg b'' = \lg \beta_m'' + \frac{1}{4}\nu l''^2 \sin^2 B_m + \frac{1}{2}\nu l''^2,$$

$$\lg l'' = \lg \lambda_m'' + \frac{1}{4}\nu l''^2 \sin^2 B_m - \frac{1}{4}\nu b''^2,$$

$$\lg a'' = \lg \tau_m'' + \frac{1}{4}\nu l''^2 \sin^2 B_m + \frac{1}{2}\nu l''^2 \cos^2 B_m + \frac{1}{2}\nu b''^2,$$

$$\beta_m'' = (1)_m s \cos A_m, \quad \lambda_m'' = (2)_m s \sin A_m \sec B_m,$$

$$\tau_m'' = (2)_m s \sin A_m \operatorname{tg} B_m,$$

$$B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2), \quad A_m = \frac{1}{2}(A_1 + A_2 \pm 180)°.$$

В общем случае B_m и A_m неизвестны, поэтому задача решается методом последовательных приближений. Логарифмы величин $(1)_m$ и $(2)_m$ выбирают из геодезических таблиц по аргументу B_m, поправочные члены вида $\nu l''^2$, $\nu b''^2$ — по $\lg l''$ и $\lg b''$.

Для решения обратной геодезической задачи, т. е. нахождения s, A_1, A_2 по B_1, B_2, L_1, L_2 наиболее целесообразны обращенные формулы Гаусса в виде

$$\lg s = \lg P - \lg \sin A_m = \lg Q - \lg \cos A_m,$$

$$A_1 = A_m - \frac{1}{2}a, \quad A_2 = A_m + \frac{1}{2}a \pm 180°,$$

$$\lg \operatorname{tg} A_m = \lg P - \lg Q,$$

$$\lg P = \lg s \sin A_m = \lg \frac{l \cos B_m}{(2)_m} + \Delta\lg (s \sin A_m),$$

$$\lg Q = \lg s \cos A_m = \lg \frac{b}{(1)_m} + \Delta\lg (s \sin A_m),$$

$$\lg a = \lg l \sin B_m + \Delta\lg a,$$

$$\Delta \lg (s \cos A_m) = -\frac{1}{2} \nu l^2 - \frac{1}{4} \nu l^2 \sin^2 B_m,$$

$$\Delta \lg (s \sin A_m) = \frac{1}{4} \nu b^2 - \frac{1}{4} \nu l^2 \sin^2 B_m,$$

$$\Delta \lg a = \frac{3}{4} \nu b^2 + \frac{1}{2} \nu l^2 \cos^2 B_m.$$

Из решения обратной задачи s получаются с точностью до 1 см, азимуты — до 0,01″—0,04″.

II.4.6. Решение геодезических задач на большие расстояния

Прямая задача. Даны B_1, L_1, s и A_1, определяются B_2, L_2 и A_2 (рис. II.4.13).

Метод Бесселя. По этому методу сначала переходят на вспомогательную сферу, где геодезические широты соответствуют приведенным (рис. II.4.14), задачу решают на сфере и затем от сферических элементов переходят к эллипсоидальным.

Рис. II.4.13

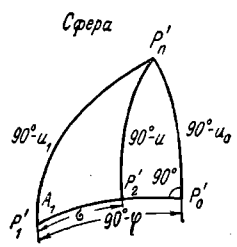


Рис. II.4.14

Порядок решения задачи.

1. Вычисление приведенной широты u_1 по формуле

$$\operatorname{tg} u_1 = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B_1.$$

2. Вычисление вспомогательных сферических элементов

$$\cos u_0 = \cos u_1 \sin A_1,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} u_1 \sec A_1.$$

3. Вычисление табличного аргумента

$$k = e' \sin u_0.$$

4. Извлечение из таблиц Н. А. Урмаева по $\lg k$ величин $\lg \alpha$, $\lg \beta$, $\lg \gamma$, $\lg \alpha'$ и $\lg \beta'$.

5. Вычисление приближениями сферического расстояния

$$\sigma = \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin \sigma \cos (2\varphi + \sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos (4\varphi + 2\sigma) + \ldots,$$

где b — малая полуось эллипсоида.

6. Решение вспомогательного сферического треугольника $P_1' P' P_2'$ по его элементам u_1, A_1 и σ для нахождения u_2, A_2 и ω.

7. Вычисление разности геодезических долгот

$$l = \omega - \cos u_0 \{\alpha' \sigma + \beta' \sin \sigma \cos (2\varphi + \sigma) + \ldots\}.$$

8. Вычисление широты второго пункта

$$\operatorname{tg} B_2 = \frac{\operatorname{tg} u_2}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Обратная задача. Даны B_1, B_2, L_1 и L_2, определяют s, A_1 и A_2.

Порядок решения задачи.

1. Переход от геодезических широт к приведенным.

2. Вычисление приближениями разности долгот на сфере

$$\omega = l + \cos u_0 \{\alpha' \sigma + \beta' \sin \sigma \cos (2\varphi + \sigma) + \ldots\}.$$

В большинстве случаев можно вычислить ω по приближенной формуле

$$\omega = l + 667 k_0 \sin l \cos B_1 \cos B_2,$$

где для расстояний

до 6000 км	$k_0 = 1$,
от 6000 до 8000 км	$k_0 = 1{,}5$,
» 8000 » 10 000 »	$k_0 = 2{,}0$,
» 10 000 » 12 000 »	$k_0 = 2{,}5$,
» 12 000 » 13 000 »	$k_0 = 3{,}0$.

3. Решение вспомогательного сферического треугольника по его элементам u_1, u_2 и ω для определения σ, A_1, A_2.

4. Вычисление вспомогательных величин u_0, φ и k.

5. Извлечение из таблиц $\lg \alpha$, $\lg \beta$.

6. Вычисления расстояния по дуге геодезической линии между пунктами P_1 и P_2

$$s = \frac{b}{\alpha} \{\sigma - \beta \sin \sigma \cos (2\varphi + \sigma) - \gamma \sin 2\sigma \cos (4\varphi + 2\sigma) + \ldots\}.$$

Метод Бесселя для решения прямой и обратной геодезических задач пригоден при любых расстояниях между пунктами.

II.4.7. Решение геодезических задач в пространстве

Пространственная система координат. В тех случаях, когда геодезические объекты находятся в пространстве на значительной высоте над поверхностью земли, целесообразно геодезические задачи решать в системе пространственных прямоугольных координат с началом в центре референц-эллипсоида. В этом случае ось z направляется по оси вращения эллипсоида на север; ось x располагается в плоскости первого меридиана, а ось y — в плоскости меридиана с долготой $L = 90°$.

Уравнение эллипсоида вращения в канонической форме в пространственной системе координат с полуосями a и b имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \qquad (II.4.1)$$

Это же уравнение в векторной форме в геодезических координатах запишется в виде

$$r=\left[N\cos B\cos L,\ N\cos B\sin L,\ \frac{b^2}{a^2}N\sin B\right]. \qquad (II.4.2)$$

Векторное уравнение справедливо для точек, лежащих на поверхности эллипсоида, где $H = 0$. Допустим, что точка имеет высоту H над эллипсоидом по нормали N, тогда в уравнении (II.42) вместо N следует подразумевать $N + H$. Следовательно,

$$r=\left[(N+H)\cos B\cos L,\ (N+H)\cos B\sin L,\ \left(\frac{b^2}{a^2}N+H\right)\sin B\right]. \qquad (II.4.3)$$

Из сравнения (II.41) и (II.43) получаем следующие связи между (x, y, z) и (B, L, H):

$$\left.\begin{aligned} x&=(N+H)\cos B\cos L\\ y&=(N+H)\cos B\sin L\\ z&=\left(\frac{b^2}{a^2}N+H\right)\sin B \end{aligned}\right\}. \qquad (II.4.4)$$

Определение геодезических координат по пространственным. Из двух первых уравнений системы (II.4.4)

$$\operatorname{tg} L=\frac{y}{x}. \qquad (II.4.5)$$

Путем преобразования третьего равенства (II.4.4) имеем

$$\operatorname{tg} B=\frac{z}{d}+e^2\frac{N}{d}\sin B, \qquad (II.4.6)$$

где $$d=\sqrt{x^2+y^2}=(N+H)\cos B.$$

Формула (II.4.6) применима для вычисления B приближениями. Чтобы ускорить и сократить число приближений, целесообразно первое приближение выполнить по формуле

$$\operatorname{tg}(B)=\frac{z}{d}\left(1+\frac{e^2N}{\sqrt{d^2+z^2}}\right).$$

Имея d и z, B, можно найти H

$$H=d\cos B+z\sin B-N(1-e^2\sin^2 B). \qquad (II.4.7)$$

Формулы (II.4.5), (II.4.6) и (II.4.7) решают задачу обратного перехода: по данным прямоугольным координатам (x, y, z) находим (B, L, H). Для контроля вычислений можно использовать соотношение

$$H=\frac{x}{\cos B\cos L}-N=\frac{y}{\cos B\sin L}-N=\frac{z}{\sin B}-\frac{b_2}{a^2}N.$$

Расстояние и азимут направления (обратная геодезическая задача). Если даны две точки в пространстве со своими прямоугольными координатами $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$, то квадрат расстояния между ними, обозначенный через s^2, равен

$$s^2=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2 \qquad (II.4.8)$$

или, подставляя вместо прямоугольных координат геодезические по (II.4.4), получим

$$s^2=4N_1N_2\sin^2\frac{\psi}{2}\left(1+\frac{H_1}{N_1}\right)\left(1+\frac{H_2}{N_2}\right)+(\Delta N+\Delta H)^2-k\varepsilon^2-$$
$$-2\varepsilon(H_2\sin B_2-H_1\sin B_1), \qquad (II.4.9)$$

где

$$\cos\psi=\sin B_1\sin B_2+\cos B_1\cos B_2\cos(L_2-L_1),$$
$$\varepsilon=e^2(N_2\sin B_2-N_1\sin B_1),$$
$$\Delta N=N_2-N_1,\ \Delta H=H_2-H_1,\ k=\frac{\nu}{e^4},\ \nu=\frac{a^4-b^4}{a^4}.$$

Для получения азимута направления, совпадающего с азимутом нормального сечения, в плоскости которого лежит данное направление, целесообразно преобразовать координатную систему. Начало координат новой системы совпадает с первой точкой; ось x' направлена по касательной к меридиану начальной точки, ось y' направлена по касательной к первому вертикалу точки, а ось z' — по нормали.

Связь между новой и старой системами координат выражается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x'&=(z_2-z_1)\cos B_1-(x_2-x_1)\sin B_1\\ y'&=y\\ z'&=(x_2-x_1)\cos B_1+(z_2-z_1)\sin B_1\end{aligned}\right\}. \qquad (II.4.10)$$

В системе координат (x', y', z')

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'}{x'} \qquad (II.4.11)$$

или

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x'}{y'}, \qquad (II.4.11')$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{(z_2 - z_1)\cos B_1 - (x_2 - x_1)\sin B_1}{y_2}. \qquad (II.4.12)$$

Через систему координат (B, L, H)

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{(N_2 + H_2)\sin(B_2 - B_1) + (N_1 + H_1)\cos B_2 \sin B_1 (1 - \cos)(L_2 - L_{11}) - \varepsilon \cos B_1}{(N_2 + H_2)\cos B_2 \sin(L_2 - L_1)},$$

или

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{\sin(B_2 - B_1)}{\cos B_2 \sin(L_2 - L_1)} + \sin B_1 \operatorname{tg}\frac{(L_2 - L_1)}{2} - \frac{\varepsilon \cos B_1}{(N_2 + H_2)\cos B_2 \sin(L_2 - L_1)}.$$

Выражение для $\operatorname{ctg}\alpha_2$ получится из предыдущего путем перемены индексов

$$\operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{\sin(B_2 - B_1)}{\cos B_1 \sin(L_2 - L_1)} - \sin B_2 \operatorname{tg}\frac{(L_2 - L_1)}{2} - \frac{\varepsilon \cos B_2}{(N_1 + H_1)\cos B_1 \sin(L_2 - L_1)}.$$

Прямая геодезическая задача. По данным геодезическим координатам B_1, L_1, H_1 первой точки и полярным координатам r, A_{12}, z_{12} второй точки вычисляют геодезические координаты B_2, L_2 и H_2 этой точки.

Для решения поставленной задачи целесообразно несколько преобразовать вспомогательную систему координат, принятую для решения обратной геодезической задачи, а именно: ось x' располагают в плоскости меридиана первой точки в направлении оси вращения эллипсоида; ось y' — под прямым углом к оси x', а ось z' — по направлению нормали.

В принятой системе координат координаты второй точки через полярные выразятся формулами

$$\left.\begin{aligned} x_2' &= r \sin z_{12} \cos A_{12} \\ y_2' &= r \sin z_{12} \sin A_{12} \\ z_2' &= r \cos z_{12} \end{aligned}\right\}. \qquad (II.4.13)$$

Новую прямоугольную систему координат подвергнем следующим изменениям: координату z' увеличим на $N_1 + H_1$, систему повернем вокруг оси oy' так, чтобы ось oz' совпадала с осью вращения эллипсоида, а начало координат — с центром эллипсоида.

С учетом этих преобразований связь между системой (x_2', y_2', z_2') и (x_2, y_2, z_2) выражается соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= (z_2' + N_1 + H_1)\cos B_1 - x_2' \sin B_1 \\ y_2 &= y_2' \\ z_2' &= (z_2' + N_1 + H_1)\sin B_1 + x_2' \cos B_1 - e^2 N_1 \sin B_1 \end{aligned}\right\}. \quad (II.4.14)$$

Подставляя значения x_2', y_2', z_2' из (II.4.13) в (II.4.14), получим (x_2, y_2, z_2) через полярные координаты r, z_{12} и A_{12} и геодезические координаты первой точки. Имеем

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= (r\cos z_{12} + N_1 + H_1)\cos B_1 - r\sin z_{12}\cos A_{12}\sin B_1 \\ y_2 &= r\sin z_{12}\sin A_{12} \\ z_2 &= (r\cos z_{12} + N_1 + H_1)\sin B_1 + r\sin z_{12}\cos A_{12} - \\ &\quad - e^2 N_1 \sin B_1 \end{aligned}\right\}. \quad (II.4.15)$$

Полученные по (II.4.15) координаты (x_2, y_2, z_2) отличаются от пространственных координат (II.4.4) тем, что в системе (II.4.15) ось x лежит в плоскости меридиана первой точки, тогда как в системе (II.4.4) она расположена в плоскости первого меридиана. Поэтому в системе (II.4.4) при переходе от прямоугольных координат к геодезическим в данном случае следует под L подразумевать $(L_2 - L_1)$. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(L_2 - L_1) &= \frac{y_2}{x_2} \\ \operatorname{tg} B_2 &= \frac{z_2}{d} + e^2 \frac{N_2}{d}\sin B_2 \end{aligned}\right\}, \quad (II.4.16)$$

$$H_2 = d\cos B_2 + z_2 \sin B_2 - N_2(1 - e^2 \sin^2 B_2); \quad (II.4.17)$$

$$d = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Вычисление B_2 ведется приближениями, причем для первого приближения рекомендуется выражение

$$\operatorname{tg}(B_2) = \frac{z_2}{d}\left(1 + \frac{e^2 N_1}{\sqrt{d^2 + z_2^2}}\right).$$

Формулы (II.4.16), (II.4.17) и (II.4.18) вполне решают прямую геодезическую задачу в пространстве, если даны полярные геодезические координаты и геодезические координаты первой точки.

II.4.8. Плоские прямоугольные координаты в конформной проекции Гаусса — Крюгера

Проекция референц-эллипсоида на плоскость, принятую для переноса и обработки результатов геодезических измерений, называется геодезической проекцией. Основные требования, которые предъявляются к выбору геодезических проекций, сводятся к следующим.

1. Проекция должна быть конформной, т. е. сохранять подобие оригинала и проекции в самых малых частях. Отсюда

следует, что в таких проекциях можно изображать только небольшие части земной поверхности.

2. Искажение в проекции должно быть возможно малым и удобоучитываемым.

3. Так как процесс перехода от эллипсоида к плоскости повторяется от начала до конца в каждом случае применения, то формулы перехода должны быть простыми и удобными для табулирования и вычисления.

Поскольку искажения во всякой проекции неизбежны, то первое и последнее требования являются определяющими при выборе проекции, особенно для стран, имеющих большую территорию.

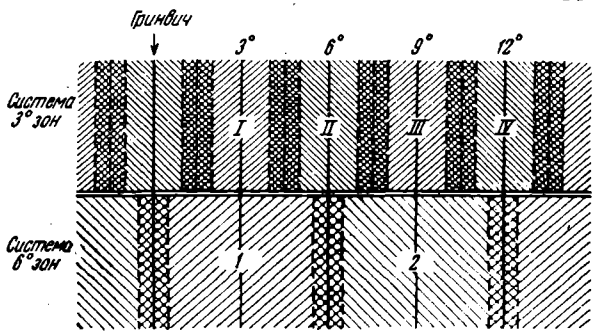


Рис. II.4.15

Проекция Гаусса — Крюгера вполне удовлетворяет основным требованиям, указанным выше. Хотя в этой проекции искажения не малы, но они легко учитываются, а переход от эллипсоида на плоскость и наоборот совершается по весьма удобным формулам с помощью таблиц.

Проекция Гаусса — Крюгера определяется условиями:

1. Проекция конформна, т. е. масштаб изображения постоянен в данной точке и зависит только от координат пункта.

2. Осевой, или центральный, меридиан зоны изображается на плоскости прямой линией и принимается за ось абсцисс, причем за начало координат в каждой зоне выбирают точку пересечения осевого меридиана с изображением земного экватора на плоскости. Ось ординат совпадает с изображением экватора.

3. Масштаб изображения на осевом меридиане равен единице, т. е. для точек осевого меридиана абсциссы равны дугам меридиана, отсчитанным от экватора.

Для практического применения проекции территорию страны разбивают меридианами на координатные зоны. В СССР приняты две системы координатных зон: шестиградусные и трехградусные (рис. II.4.15). Осевые меридианы шестиградусных зон совпадают с центральными меридианами листов карты масштаба 1 : 1 000 000, и порядковый номер зоны определяется по формуле

$$n = N - 30,$$

где N — номер колонны листа карты.

Долготы осевых меридианов шестиградусных зон определяются по формуле

$$L_0 = 6n - 3,$$

трехградусных — по формуле

$$L = 3k,$$

где k — номер соответствующей трехградусной зоны.

В пределах территории СССР абсциссы координат Гаусса — Крюгера положительные, ординаты положительные к востоку, отрицательные к западу от осевого меридиана. Чтобы избежать

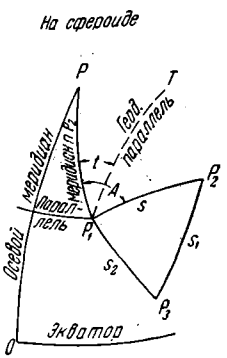


Рис. II.4.16

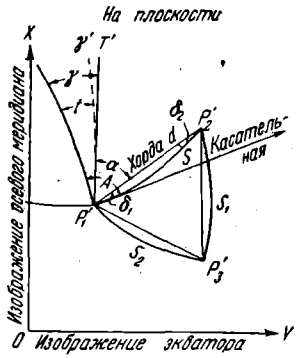


Рис. II.4.17

отрицательных ординат, точкам осевого меридиана условно приписывают ординаты в 500 000 м с обязательным указанием впереди номера соответствующей зоны.

Порядок переноса геодезической сети с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера складывается из следующих действий.

1. От геодезических координат данного пункта B и L переходят к прямоугольным координатам x, y на плоскости, одновременно вычисляют сближение меридианов на плоскости γ.

2. От длины геодезической линии и азимута в данном пункте переходят к длине и дирекционному углу хорды изображения геодезической линии на плоскости.

3. От углов между геодезическими линиями переходят к углам между хордами.

После выполнения этих действий считается, что геодезическая сеть спроектирована с эллипсоида на плоскость. Получив сеть на плоскости, ее уравнивают по способу наименьших квадратов и вычисляют плоские координаты всех ее вершин.

Основные обозначения и величины, употребляемые при переходе от эллипсоида на плоскость, показаны на рис. II.4.16 и II.4.17.

Угол между хордой и линией, параллельной осевому меридиану, называется дирекционным углом и обозначается через α; он отсчитывается по ходу часовой стрелки от параллельной осевому меридиану линии до хорды. Угол между изображением

меридиана на плоскости и линией, параллельной осевому меридиану, называется **сближением меридиана на плоскости**, или **Гауссовым сближением меридиана**, и обозначается через γ.

Угол между хордой и изображением геодезической линии на плоскости называется **поправкой за кривизну изображения геодезической линии на плоскости** и обозначается через δ.

Связь между азимутом и дирекционным углом определяется формулой (см. рис. II.4.17)

$$\alpha = A - \gamma - \delta.$$

Вычисление α выполняется с точностью до 0,001″.

Прямая задача проекции Гаусса — Крюгера. Под прямой задачей проекции Гаусса — Крюгера подразумевается вычисление прямоугольных плоских координат, сближения меридианов на плоскости и масштаба изображения по геодезическим координатам данного пункта, т. е. дано B и L, определяются x, y, γ и m.

Для нелогарифмического вычисления по таблицам Д. А. Ларина применяются формулы

$$x = X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 + \ldots,$$

$$y = b_1 l + b_3 l^3 + b_5 l^5 + \ldots,$$

$$\gamma = c_1 l + c_3 l^3 + c_5 l^5 + \ldots,$$

$$m = 1 + d_2 l^2 + d_4 l^4 + \ldots,$$

где X — длина дуги меридиана от экватора до параллели данной точки — дается в таблицах через каждую минуту широты с точностью до миллиметра; a_2, a_4, a_6, b_1, b_3, b_5, c_1, c_3, d_2 и d_4 — функции широты, которые также даются в таблицах Д. А. Ларина через каждую минуту широты. Эти коэффициенты имеют следующие значения:

$$a_2 = \frac{N}{2} \cos B \sin B,$$

$$a_4 = \frac{N \cos^3 B \sin B}{24} (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4),$$

$$a_6 = \frac{N \cos^5 B \sin B}{720} (61 - 58t^2 + t^4),$$

$$b_1 = N \cos B,$$

$$b_3 = \frac{N \cos^3 B}{6} (1 - t^2 + \eta^2),$$

$$b_5 = \frac{N \cos^5 B}{120} (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2),$$

$$c_1 = \sin B,$$

$$c_3 = \frac{\sin B \cos^2 B}{3} (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4),$$

$$c_5 = \frac{\sin B \cos^4 B}{15}(2 - t^2),$$

$$d_2 = \frac{\cos^2 B}{2}(1 + \eta^2),$$

$$d_4 = \frac{\cos^4 B}{24}(5 - 4t^2).$$

Здесь $t = \operatorname{tg} B$, $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$, l — разность долгот данного пункта и осевого меридиана, выраженная в радианах.

При решении прямой задачи x и y вычисляются до миллиметров, γ — до 0,001″ и m — до восьмого десятичного знака.

Приведенные формулы и таблицы Д. А. Ларина являются наиболее рациональными для решения указанной задачи.

Обратная задача проекции Гаусса — Крюгера. Под обратной задачей проекции Гаусса — Крюгера подразумевается вычисление геодезических координат, сближения меридианов на плоскости и масштаба изображения по прямоугольным координатам данной точки.

Эта задача может быть решена по следующим формулам:

$$B = B_0 + \bar{a}_2 y^2 + \bar{a}_4 y^4 + \bar{a}_6 y^6 + \ldots,$$

$$l = b'_1 y + b'_3 y^3 + b'_5 y^5 + \ldots,$$

$$\gamma = c'_1 y + c'_3 y^3 + c'_5 y^5 + \ldots,$$

$$m = 1 + d'_2 y^2 + d'_4 y^4 + \ldots,$$

где

$$\bar{a}_2 = \frac{t_0 V_0^2}{2N_0^2}\rho'',$$

$$\bar{a}_4 = \frac{t_0}{24N_0}\rho''(5 + 3t_0^2 + 6\eta_0^2 - 6\eta_0^2 t_0^2),$$

$$\bar{a}_6 = \frac{t_0}{720N^2}\rho''(61 + 90t_0^2 + 45t_0^4),$$

$$b'_1 = \frac{\sec B_0}{N_0},$$

$$b'_3 = -\frac{\sec B_0}{6N_0^3}(1 + 2t_0^2 + \eta_0^2),$$

$$b'_5 = \frac{\sec B_0}{120N_0^5}(5 + 28t_0^2 + 24t_0^4 + 6\eta_0^2 + 8\eta_0^2 t_0^2),$$

$$c'_1 = \frac{t_0}{N_0},$$

$$c'_3 = \frac{t_0}{3N_0^3}(1 + t_0^2 - \eta_0^2 - 4\eta_0^4),$$

$$c_5' = \frac{t_0}{15N_0^5}(2 + 5t_0^2 + 3t_0^4 + 2\eta_0^2 + \eta_0^2 t_0^2),$$

$$d_2 = \frac{1}{2R_0^2},$$

$$d_4 = \frac{1}{24R_0^4};$$

в этих выражениях B_0 — широта основания ординаты данного пункта; $t_0 = \operatorname{tg} B_0$, $\eta_0^2 = e'^2 \cos^2 B_0$, $V_0^2 = 1 + \eta_0^2$, N — радиус кривизны первого вертикала; R_0 — средний радиус кривизны. Значок «0» означает, что данная величина является функцией широты основания ординаты.

Редукционная задача проекции Гаусса — Крюгера. Под редукционной задачей проекции Гаусса — Крюгера подразумевается нахождение поправок к длинам и направлениям геодезических сетей при переносе их с эллипсоида на плоскость и наоборот. Эта задача делится на две части: на редукцию длин и на редукцию направлений, т. е. перенос линейных и угловых элементов.

Редукция длин

$$S = s\left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^4}{24R_m^4}\right);$$

здесь S — длина на плоскости; s — длина на эллипсоиде; y_m — средняя ордината; R_m — средний радиус кривизны для средней широты и $\Delta y = y_2 - y_1$. В логарифмическом виде формула для триангуляции 1 класса записывается так:

$$\lg S = \lg s + \frac{1}{6}(\lg m_1 + 4 \lg m_m + \lg m_2),$$

где обозначено

$$\lg m_1 = \mu \frac{y_1^2}{2R_m^2}, \quad \lg m_m = \mu \frac{y_m^2}{2R_m^2},$$

$$\lg m_2 = \mu \frac{y_2^2}{2R_m^2}.$$

Приведенная формула применяется в триангуляции 1 класса; для триангуляции 2 класса и сплошных сетей формула применяется в виде

$$\lg S = \lg s + \frac{\mu}{2}\left(\frac{y_m}{R_m}\right)^2.$$

Для введения поправок в стороны полигонометрических ходов пользуются формулой

$$\Delta S = \frac{S y_m^2}{2R_m^2},$$

где ΔS — поправка; S — длина хода. Величины $y_m^2/2R_m^2$ даются в таблицах по аргументу y_m.

Редукция направлений (рис. II.4.18). Для вычисления редукции направлений служат формулы

$$\delta_1 = \frac{\Delta x}{2R_m^2}\rho''\left(y_m - \frac{\Delta y}{6}\right) - \rho''\frac{\Delta x y_m^3}{6R_m^4} + \frac{t_m \eta_m^2 y_m \Delta y}{R_m^3}\rho'',$$

$$\delta_2 = -\frac{\Delta x}{2R_m^2}\rho''\left(y_m + \frac{\Delta y}{6}\right) + \rho''\frac{\Delta x y_m^3}{6R_m^4} - \frac{t_m \eta_m^2 y_m^2 \Delta y}{R_m^3}\rho''.$$

Дирекционные углы прямого и обратного направлений после получения γ и δ вычисляют по формулам

$$\alpha_1 = A_1 - \gamma_1 - \delta_1, \qquad \alpha_2 = A_2 - \gamma_2 - \delta_2.$$

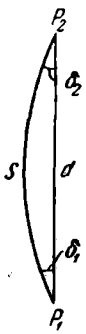


Рис. II.4.18

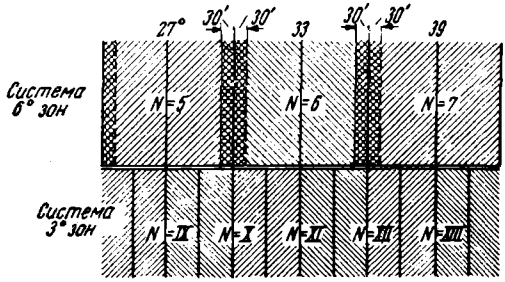


Рис. II.4.19

Для триангуляции 2 класса формулы для редукций направлений применяются в виде

$$\delta_1 = \frac{\Delta x}{2R_m^2}\rho''\left(y_m - \frac{\Delta y}{6}\right),$$

$$\delta_2 = -\frac{\Delta x}{2R_m^2}\rho''\left(y_m + \frac{\Delta y}{6}\right).$$

Для триангуляции 3 класса и сплошных сетей редукции направления вычисляют по формуле

$$\delta = \frac{\Delta x y_m}{2R_m}\rho''.$$

Контролем вычислений редукции служит геометрическое условие, чтобы сумма поправок углов в любой замкнутой фигуре была равна сфероидическому избытку этой фигуры, взятому с обратным знаком.

Перевычисление координат из одной зоны в другую. На практике при применении проекции Гаусса — Крюгера возникает задача — перевычислить координаты, данные в системе одной зоны, в другую зону, соседнюю. При наличии шестиградусной и трехградусной зон приходится перевычислять координаты из шестиградусной зоны в шестиградусную, из шестиградусной в трехградусную и из трехградусной в трехградусную. Чтобы уменьшить случаи перевы-

числения координат, установлена система «перекрытия зон», а именно: западная и восточная зоны взаимно перекрываются на 30′ по долготе. В стыке зон, в полосе «перекрытия», координаты пунктов даются как в западной, так и в восточной системе (рис. II.4.19).

Перевычисления координат выполняют по таблицам. Таких таблиц много, но наиболее универсальны «Таблицы для преобразования прямоугольных координат» (1952 г.) А. М. Вировца и Б. Н. Рабиновича. В них формулы для вычисления имеют вид

$$x_2 = X_0 + a\,\Delta y + b\,\Delta y^2 + c,$$

$$y_2 = \Delta y + a_1\,\Delta y + b_1\,\Delta y^2 + c_1.$$

В таблицах по аргументу x_1 даны: y_0, X_0, a, a_1, b и b_1, по аргументам x_1 и Δy — c и c_1.

С помощью этих таблиц можно перевычислить координаты из одной шестиградусной зоны в другую и из шестиградусной в трехградусную и наоборот.

Таблицы для обработки геодезических сетей в прямоугольных координатах Гаусса — Крюгера. Для практического применения проекции и координат Гаусса — Крюгера в СССР существуют различные таблицы, главнейшие из которых следующие.

1. Ф. Н. Красовский и А. А. Изотов. «Таблицы для вычисления координат Гаусса — Крюгера в пределах широт от 30 до 80°» (1946 г.).

2. «Таблицы для вычисления плоских конформных координат Гаусса в пределах широт от 30 до 80°» (1958 г.), составленные под руководством Д. А. Ларина.

II.4.9. Понятие о других конформных проекциях

Во многих европейских, американских, азиатских и африканских странах применяются другие конформные проекции эллипсоида на плоскость, которые имеют свои ценные свойства. Наиболее распространенными из этих проекций являются конформная коническая проекция Ламберта и стереографическая проекция Руссиля.

Проекция Ламберта применяется в США, Канаде, Франции, Мексике, проекция Руссиля — во Франции, Испании, Бельгии.

Проекция Ламберта удобна для стран, вытянутых по параллели небольшой широтной полосой. Начало координат выбирают в точке O, ось абсцисс направляют на север по осевому меридиану; ось ординат — по касательной к изображению параллели касания (рис. II.4.20). Масштаб по этой параллели принимают равным либо единице, либо 0,999.

Плоские координаты и сближение меридианов на плоскости вычисляют по формулам

$$y = (\rho_0 - d)\sin\gamma, \qquad x = d + y\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}, \qquad \gamma = (L - L_0)\sin B_0,$$

где B_0 — широта параллели касания; L_0 — долгота осевого меридиана, а $\rho_0 = N_0\,\mathrm{ctg}\,B_0$.

Дирекционный угол вычисляют по формуле

$$\alpha = A - \gamma + \delta,$$

где A — геодезический азимут; δ — редукция направления (рис. II.4.21).

Конические проекции сфероида характеризуются сложностью редукционной задачи. В проекции Ламберта редукции в длину и направление вычисляют по весьма сложным формулам. Поэтому эту проекцию целесообразно применять в тех случаях, когда не требуется строгого учета редукций.

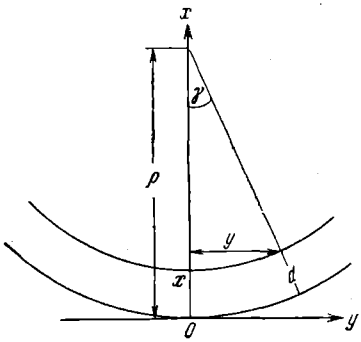


Рис. II.4.20

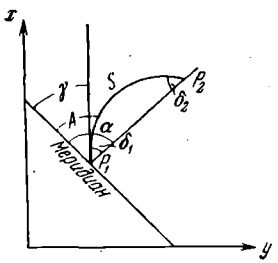


Рис. II.4.21

Проекция Руссиля удобна для стран, имеющих территорию круглого очертания. За начало координат в этой проекции принимают центральную точку изображаемой территории, за ось абсцисс — осевой меридиан. Абсциссы точек осевого меридиана вычисляют по формуле

$$x_0 = 2R_0 \operatorname{tg} \frac{s}{2R_0},$$

где R_0 — средний радиус кривизны начала координат; s — дуга меридиана между параллелью начала координат и параллелью данной точки.

Прямоугольные координаты x и y по геодезическим координатам B и L вычисляют по формулам

$$x_R = a_1 \Delta B + a_2 \Delta B^2 + a_3 l^2 + a_4 \Delta B^3 + \ldots,$$

$$y_R = b_1 l + b_2 \Delta B l + b_3 \Delta B^2 l + b_4 l^3 + \ldots$$

Коэффициенты a_i и b_i при заданном начале координат — постоянные числа, а ΔB и l — разности широт и долгот от начала координат и осевого меридиана. Эти формулы называются формулами с постоянными коэффициентами.

Если совместить начало координат Гаусса — Крюгера с началом координат Руссиля, то зависимость координат выразится формулами

$$x_R = x_g + \frac{x_g^3}{12R_0^2} - \frac{x_g y_g^2}{4R_0^2} + \ldots,$$

$$y_R = y_g + \frac{y_g x_g^2}{4R_0^2} - \frac{y_g^3}{12R_0^2} + \ldots,$$

где x_g, y_g — координаты Гаусса — Крюгера; R_0 — средний радиус кривизны в начале координат.

Величины редукций в длины и направления в проекции Руссиля меньше, чем в проекции Гаусса — Крюгера.

Например:

	проекция Гаусса — Крюгера	проекция Руссиля
Редукция длин	$\frac{sy_m^2}{2R_0^2}$	$\frac{s(y_m^2+x_m^2)}{4R_0^2}$
Редукция направления	$\frac{\Delta x y_m \rho''}{2R_0^2}$	$\frac{(x_2y_1-x_1y_2)\rho''}{4R_0^2}$.

Таким образом, искажение длин в целом в проекции Руссиля несколько меньше, чем в проекции Гаусса — Крюгера; редукция в направлении в проекции Руссиля примерно в два раза меньше редукции в проекции Гаусса — Крюгера. Однако проекция Руссиля пригодна для ограниченных территорий округлых очертаний, тогда как проекция Гаусса — Крюгера может применяться для всего земного шара.

II.4.10. Дифференциальные формулы

Формулы, по которым вычисляются поправки к геодезическим координатам за изменения исходных данных, как, например, начальных координат, азимутов, длины геодезической линии и параметров принятого референц-эллипсоида, называются дифференциальными формулами. Различают дифференциальные формулы первого и второго рода, причем первые учитывают изменения геодезических координат, азимутов и геодезических линий, вторые — параметров эллипсоида.

Дифференциальные формулы первого рода. Если изменились B_1 на dB_1, L_1 на dL_1, A_1 на dA_1 и s на ds, то изменения координат второго пункта вычисляют по формулам

$$dB_2 = dB_1 + b\frac{ds}{s} - b\frac{\operatorname{tg} B_m}{2\rho''}dA_1,$$

$$dL_2 = dL_1 + l\frac{ds}{s} + l\frac{\operatorname{tg} B_m\, dB_1}{2\rho''} + l\frac{\operatorname{ctg} A_m}{2\rho''}dA_1,$$

$$dA_2 = t\frac{ds}{s} + t\frac{dB_1}{\sin 2B_m\rho''} + t\frac{\operatorname{ctg} A_m}{2\rho''}dA_1,$$

где b, l и t — разности широт, долгот и азимутов. Эти формулы пригодны для расстояний порядка 25—30 км, т. е. для триангуляции 1 класса. Вычисления по этим формулам следует вести с удержанием четырех-пяти десятичных знаков.

Дифференциальные формулы второго рода. Если изменились параметры принятого референц-эллипсоида, например a на da и α на $d\alpha$, то поправки к геодезическим координатам вычисляют по формулам

$$\delta B_2 = -b\left\{\frac{da}{a} - (2-3\sin^2 B_m)\,d\alpha\right\},$$

$$\delta L_2 = -l\left\{\frac{da}{a} + \sin^2 B_m\, d\alpha\right\}, \qquad \delta A_2 = -t\left\{\frac{da}{a} + \sin^2 B_m\, d\alpha\right\}.$$

Эти формулы точны до величин $e^2 b$, $e^2 l$, $e^2 l$, где e^2 — квадрат эксцентриситета эллипсоида, и пригодны для триангуляции 1 класса, если ее стороны не превышают 25—30 км. Вычисление ведется по этим формулам с удержанием четырех-пяти десятичных знаков.

Если геодезические координаты конечного пункта изменились на величины dB_2 и dL_2, то изменения геодезической линии и ее азимутов в конечных пунктах вычисляют по формулам

$$ds = M_2 \cos A_2\, dB_2 - N_2 \cos B_2 \sin A_2\, dL_2,$$

$$s\, dA_1 = M_2 \sin A_2\, dB_2 - N_2 \cos B_2 \cos A_2\, dL_2,$$

$$s\, dA_2 = M_2 \sin A_2\, dB_2 + N_2 \cos B_2 \cos A_2\, dL_2.$$

Аналогичные формулы получаются в случае, если изменились геодезические координаты первого пункта; в этом случае меняются индексы 2 на 1.

Если допустить, что одновременно изменились B_1 на dB_1, B_2 на dB_2, L_1 на dL_1 и L_2 на dL_2, то изменения геодезической линии и ее азимутов в этих пунктах выразятся формулами

$$ds = -M_1 \cos A_1\, dB_1 - M_2 \cos A_2\, dB_2 - N_2 \cos B_2 \sin A_2\, (dL_2 - dL_1),$$

$$s\, dA_1 = M_1 \sin A_1\, dB_1 + M_2 \sin A_2\, dB_2 - N_2 \cos B_2 \sin A_2\, (dL_2 - dL_1),$$

$$dA_2 = M_1 \sin A_1\, dA_1 + M_2 \sin A_2\, dB_2 + N_2 \cos B_2 \cos A_2\, (dL_2 - dL_1),$$

где M — меридианный радиус кривизны; N — радиус кривизны первого вертикала.

При вычислениях dB и dL должны быть выражены в радианах. Вышеприведенные формулы приближенные, в них вместо приведенной длины геодезической линии всюду принята сама длина геодезической линии. Разность этих длин — малая величина третьего порядка. Следовательно, эти формулы применимы для триангуляции 1 класса, если ее стороны не превышают 25—30 км.

II.4.11. Уклонение отвесной линии

В каждой точке земной поверхности угол между отвесной линией и нормалью к поверхности референц-эллипсоида называется астрономо-геодезическим **уклонением отвесной линии**. Проекции этого угла на плоскости меридиана и первого вертикала называются компонентами уклонения отвесной линии в меридиане и первом вертикале. Чтобы определить уклонение отвесной линии в данной точке в главных плоскостях (меридиан и первый вертикал), нужно знать астрономические и геодезические координаты этого пункта.

Уклонение отвесной линии в меридиане вычисляют по формуле

$$\xi = \varphi - B - 0{,}17 H_{\text{км}} \sin 2B,$$

где φ — астрономическая широта.

Уклонения в первом вертикале вычисляют по формуле

$$\eta = (\lambda - L) \cos \varphi,$$

где λ — астрономическая долгота.

Уклонение отвесной линии

$$u=\sqrt{\xi^2+\eta^2}=\sqrt{(\varphi-B)^2+[(\lambda-L)\cos\varphi]^2}\,.$$

Влияние уклонения отвесной линии на астрономический азимут определяется формулой

$$\alpha-A=(\lambda-L)\sin\varphi+\frac{\xi\sin A-\eta\cos A}{\operatorname{tg} z},$$

где A — геодезический азимут; z — зенитное расстояние геодезического пункта; α — астрономический азимут.

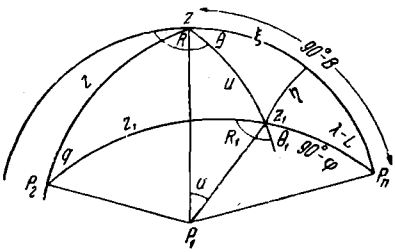


Рис. II.4.22

Из этого уравнения можно получить формулу для вычисления геодезического азимута

$$A=\alpha-(\lambda-L)\sin\varphi+\frac{\eta\cos A-\xi\sin A}{\operatorname{tg} z}.$$

Полученный из этого уравнения геодезический азимут называется азимутом Лапласа, а уравнение — уравнением Лапласа. Второй член уравнения Лапласа мал в равнинной местности и, как правило, его при вычислении азимута Лапласа не учитывают, применяя формулу в виде

$$A=\alpha-(\lambda-L)\sin\varphi.$$

Это уравнение имеет очень важное значение для геодезических работ, оно дает возможность перейти от астрономических азимутов к геодезическим.

Лапласовы азимуты получаются независимо друг от друга и предназначены для контроля угловых измерений в триангуляции; они используются при уравнивании астрономо-геодезических сетей.

Геодезическое зенитное расстояние определяется формулой (рис. II.4.22)

$$Z=z+\xi\cos A+\eta\sin A,$$

где Z — геодезическое зенитное расстояние; z — астрономическое зенитное расстояние.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багратуни Г. В. Курс сфероидической геодезии. М., Геодезиздат, 1962. 247 с.

2. Гельмерт Ф. Р. Математические теории высшей геодезии. М., Геодезиздат, 1962. 403 с.

3. Закатов П. С. Курс высшей геодезии. Изд. 2. М., Геодезиздат, 1962. 498 с.

4. Красовский Ф. Н. Руководство по высшей геодезии. Ч. II. М., Геодезиздат, 1942. 550 с.

5. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. М., «Недра», 1969. 304 с.

6. Урмаев Н. А. Сфероидическая геодезия. М., РИО ВТС, 1955. 168 с.

Раздел III

ОСНОВНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

III.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ О ТРИАНГУЛЯЦИИ И ТРИЛАТЕРАЦИИ

З. С. Хаимов

А. ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СЕТЬ СССР

III.1.1. Общие сведения. Классификация сетей

Геодезическая сеть представляет собой совокупность пунктов на земной поверхности, для которых известны плановое положение в избранной системе координат и отметки в принятой системе высот. Эти пункты располагают на местности по заранее составленному плану и отмечают специальными опознавательными знаками.

Основными методами создания плановых геодезических сетей являются триангуляция, полигонометрия, трилатерация. Для создания карт масштаба мельче 1 : 100 000, особенно в необжитых местах (Арктика, Антарктида и др.), может быть использован астрономический метод. Для обеспечения съемок масштаба 1 : 25 000 и мельче успешно применяются радиогеодезические методы создания опорных сетей, а для различных специальных целей (связи материков, островов и др.) — методы «космической геодезии» с использованием искусственных спутников Земли.

При создании высотных геодезических сетей основными являются методы геометрического, тригонометрического и барометрического нивелирования.

Геодезические сети СССР подразделяются на [9]:

1) государственную геодезическую сеть;
2) геодезические сети сгущения;
3) съемочные сети.

Государственная геодезическая сеть СССР служит для выполнения научных и научно-технических задач. Она является главной геодезической основой топографических съемок всех масштабов и должна удовлетворять различным требованиям народного хозяйства и обороны страны.

Государственная геодезическая сеть СССР состоит из:

а) сетей триангуляции, полигонометрии и трилатерации 1, 2, 3 и 4 классов, различающихся между собой точностью измерения углов и линий, длиной сторон и порядком их развития;

б) нивелирных сетей I, II, III, IV классов.

Здесь рассматриваются плановые геодезические сети. Схема и развитие высотного обоснования изложены в подразделе III.7.

Общепринятым принципом построения государственной геодезической сети является переход от общего к частному, от высшего класса к низшему. Такой принцип позволяет быстро распространить единую координатную систему на большие расстояния.

Густота пунктов государственной сети регламентируется соответствующими инструкциями и установлена в следующих размерах:

для съемок в масштабе 1 : 25 000 и 1 : 10 000 — 1 пункт на 50—60 км²,

для съемок в масштабе 1 : 5000 — 1 пункт на 20—30 км²;

для съемок в масштабе 1 : 2000 и крупнее — 1 пункт на 5—15 км².

Норма плотности 1 пункт на 50—60 км², как правило, создается построением сетей 1, 2 и 3 классов. В труднодоступных районах указанная густота пунктов может быть уменьшена, но не более чем в 1,5 раза, однако в особо тяжелых районах (болота Западной Сибири, горные массивы, покрытые вечными снегами) плотность пунктов устанавливается в каждом конкретном случае отдельно.

В городах с населением не менее 100 000 жителей и площадью не менее 50 км² 1 пункт должен приходиться в среднем на 5—15 км². В случаях, когда площадь геодезического обоснования не превышает 3000 км², плотность 1 пункт на 20—30 км² разрешается создавать только сетями 3 класса, а плотность 1 пункт на 5—15 км² — только сетями 4 класса с последующей привязкой к сетям высшего класса по мере развития последних. В подобных случаях в сетях 3 и 4 классов измеряют не менее двух базисных сторон с точностью не менее 1 : 200 000 и для ориентирования сети определяют астрономические азимуты.

Площадь P, обеспечиваемая одним пунктом сети, построенной из равносторонних треугольников, может быть приближенно выражена формулой В. Ф. Павлова

$$P = \frac{\sqrt{3}}{2} s^2 = 0{,}87 s^2.$$

Для упрощенных подсчетов можно принимать $P \cong s^2$, где s — длина стороны сети (расстояние между смежными пунктами).

Государственная геодезическая сеть СССР создается в соответствии с Инструкцией о построении государственной геодезической сети СССР [8], основанной на специальном «Положении» 1954—1961 гг. Точность этой сети позволяет уверенно использовать ее для обоснования съемок вплоть до масштаба 1 : 2000 и крупнее. Однако на территории СССР созданы значительные сети и по «Основным положениям» 1939 г., рассчитанные по точности на масштаб съемок 1 : 10 000—1 : 25 000 и мельче. Они перекрывались новой сетью только в том случае, если их точность и плотность пунктов не удовлетворяли требованиям предстоящих работ, при этом густота пунктов доводилась до необходимой плотности вставкой дополнительных пунктов соответствующей точности. Основные характеристики сетей, построенных по «Положению» 1939 г., приведены в табл. III.1.1.

В зависимости от условий местности и экономической целесообразности применяется тот или иной метод создания государ-

Таблица III.1.1

Наименование показателей	По «Положению» 1954–1961 гг.				По «Положению» 1939 г.				
	1 кл.	2 кл.	3 кл.	4 кл.	I кл.	II кл. осн. ряд	II кл. зап. сети	III кл.	IV кл.
Длина звена триангуляции, км	200	—	—	—	200–250	100–120	—	—	—
Средняя длина стороны треугольника, км	20–25	7–20	5–8	2–5	25–30	15–20	13	8	
Обратный вес звена триангуляции	Не более 100 ед. 6-го зн. лог.				Не более 120 ед.				
Относительная ошибка базисной (выходной) стороны $\left(\frac{m_b}{b}\right)$	$\frac{1}{400\,000}$	$\frac{1}{300\,000}$	$\frac{1}{200\,000}$	$\frac{1}{200\,000}$	$\frac{1}{300\,000}$	$\frac{1}{200\,000}$	$\frac{1}{200\,000}$	—	Засечки
Примерная относительная ошибка стороны в слабом месте $\left(\frac{m_s}{s}\right)$	$\frac{1}{150\,000}$	$\frac{1}{300\,000}$	$\frac{1}{120\,000}$	$\frac{1}{70\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$	$\frac{1}{60\,000}$	$\frac{1}{35\,000}$	$\frac{1}{15\,000}$	
Наименьшее значение угла треугольника	40°	20°	20°	20°*	40°	30°	20°	15°	20°
Допустимая невязка треугольника	3″	4″	6″	8″	3″	5″	9″	15″	35″
Средняя квадратическая ошибка угла (по невязкам треугольников)	±0,7″	±1″	±1,5″	±2″	0,7–0,9″	1,2–1,5″	2,0–2,5″	4,0–5,0″	—
Средняя квадратическая ошибка астроопределений:									
а) широты	±0,3″	±0,3″	—	—	±0,2–0,4″	±0,4″	—	—	—
б) долготы	±0^s,03	±0^s,03	—	—	±0^s,03	±0^s 05	—	—	—
в) азимуты	±0,5″	±0,5″	—	—	±0,5″	±1,0″	—	—	—

ственной геодезической сети (триангуляция, полигонометрия, трилатерация или их сочетания). Но до сих пор основным методом построения плановой государственной сети преимущественно остается метод триангуляции. Методы полигонометрии и трилатерации применяются по принципу взаимозаменяемости с триангуляцией соответствующего класса и ведутся по схемам и программам, разрабатываемым в каждом отдельном случае с учетом физико-географических, технико-экономических и других условий района работ.

Триангуляция 1 класса. Триангуляция 1 класса строится в виде астрономо-геодезической сети 1 класса, которая совместно со сплошной гравиметрической съемкой призвана обеспечить решение основных научных задач, связанных с определением формы и размеров Земли, а также с изучением вековых движений и деформаций земной коры. В то же время она является главной основой развития геодезических сетей последующих классов и имеет целью распространение единой системы координат на всю территорию СССР. Построение ее осуществлено с наивысшей точностью, доступной современному приборостроению, и при использовании всех возможностей тщательно продуманной методики измерений. Сеть 1 класса образует систему полигонов из звеньев триангуляции, каждое из которых не превышает 200 км. Периметр полигона порядка 800—1000 км. Звенья (ряды) триангуляции по возможности располагаются вдоль меридианов и параллелей.

Типовой фигурой, из которых построены звенья триангуляции, является треугольник, близкий к равностороннему. Однако использовались и комбинации треугольников, геодезических четырехугольников и центральных систем. В месте пересечения звеньев (их концах) измерены базисные стороны или расположены базисные сети, построенные для определения длины выходной стороны, заменяющей базисную сторону. В этом случае измерен базис длиною не менее 6 км с точностью порядка 1 : 1 000 000. На обоих концах базисных сторон (выходных сторон) определены пункты Лапласа (астрономические определения широт, долгот и азимутов).

В отдельных районах взамен полигонов, образованных звеньями триангуляции 1 класса, построена сплошная сеть триангуляции 1 класса. Базисные стороны и пункты Лапласа в ней определены примерно через 10 сторон.

Остальные характеристики построения астрономо-геодезической сети приведены в табл. III.1.1.

Взамен звеньев триангуляции строились вытянутые звенья полигонометрии 1 класса (максимальное удаление отдельных пунктов от замыкающей не превышает 20 км, а направления сторон уклоняются от направления замыкающей не более чем на 20°), состоящие не больше чем из 10 сторон длиною порядка 20—25 км. Представление о схеме построения астрономо-геодезической сети СССР дает рис. III.1.1.

Для определения высот базисов и линий полигонометрии над поверхностью эллипсоида, а также с целью изучения фигуры Земли и ее гравитационного поля по всем рядам астрономо-геодезической сети СССР проведено астрономо-гравиметрическое нивелирование. Кроме того, в Инструкции [8] выделены ведущие ряды 1 класса, являющиеся основными линиями астрономо-гравиметри-

ческого нивелирования с более частым расположением астропунктов и особым гравиметрическим сгущением вокруг них.

Координаты астрономо-геодезической сети СССР вычисляются в единой «Системе 1942 года», основой которой является референц-эллипсоид Красовского, а исходным пунктом — координаты Пулковской обсерватории.

Триангуляция 2 класса. Триангуляция 2 класса строится в виде сплошных сетей треугольников, заполняющих полигоны

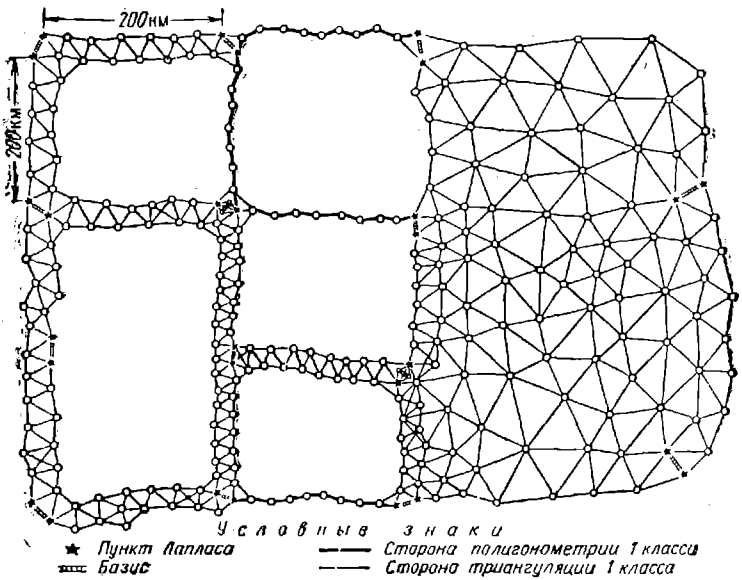


Рис. III.1.1

триангуляции 1 класса. Она является основной опорной сетью, служащей для развития сетей последующего сгущения и геодезического обоснования всех топографических съемок и изысканий инженерных сооружений. Вместе с тем благодаря своей жесткости и высокой точности сеть 2 класса наряду с сетью 1 класса может быть использована и для целей научного исследования. Треугольники сети 2 класса должны по возможности приближаться к равносторонним. В зависимости от физико-географических условий длины сторон сети триангуляции 2 класса колеблются в пределах от 7 до 20 км, причем в каждом отдельном случае выбор длин сторон должен быть экономически обоснован.

Сеть 2 класса надежно связана с сетью 1 класса. Типовые схемы привязки триангуляции показаны на рис. III.1.2. Базисные стороны располагаются не реже чем через 25 треугольников, причем одна базисная сторона должна располагаться примерно в середине полигона 1 класса и на ее концах определены пункты Лапласа.

Другие технические характеристики сети триангуляции 2 класса приведены в табл. III.1.1.

На рис. III.1.3 представлена наиболее типичная схема построения сети триангуляции 2 класса внутри полигона 1 класса со сгущением ее пунктами 3 класса для обеспечения необходимой густоты пунктов: 1 пункт на 50—60 км².

Взамен триангуляции 2 класса допускается построение сети методом полигонометрии, детальная схема которой разрабатывается в каждом конкретном случае.

Триангуляция 3 и 4 классов. Триангуляция 3 и 4 классов является дальнейшим сгущением государственной геодезической сети для целей крупномасштабного картографирования и обоснования строительства инженерных сооружений.

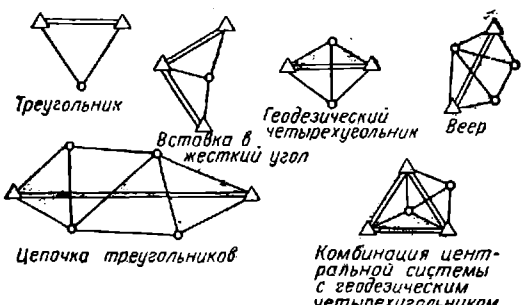


Рис. III.1.2

Триангуляция 3 и 4 классов строится в виде вставок жестких систем или отдельных пунктов в сети старших классов с обязательным измерением всех трех углов треугольников. Типовые схемы построения сетей 3 и 4 классов показаны на рис. III.1.4.

Во всех случаях расстояние между пунктами смежных систем, не связанных измеренными направлениями, должно быть не меньше 4 км в сетях 3 класса и 3 км — в сетях 4 класса. Остальные характеристики этих сетей представлены в табл. III.1.1.

Взамен триангуляции 3 и 4 классов может прокладываться сеть полигонометрии или трилатерации соответствующего класса. Полигонометрические ходы прокладывают в виде систем или одиночных ходов, опирающихся на пункты высшего класса, причем в ходах между узловыми пунктами и узловыми и исходными пунктами должно быть не более двух точек поворота. Наименьшая сторона полигонометрии 3 класса допускается в 3 км, а 4 класса — 2 км. Когда расстояние между пунктами двух ходов полигонометрии 3 класса меньше 4 км, а для 4 класса — меньше 3 км, между ними прокладываются «перемычки».

Пункты сетей всех классов должны иметь отметки, полученные из геометрического или тригонометрического нивелирования.

На пунктах государственной геодезической сети устанавливается по 2 ориентирных пункта на расстоянии от 500 до 1000 м (в лесу не ближе 250 м). В отдельных случаях в качестве одного из ориентирных пунктов может быть принят хорошо видимый

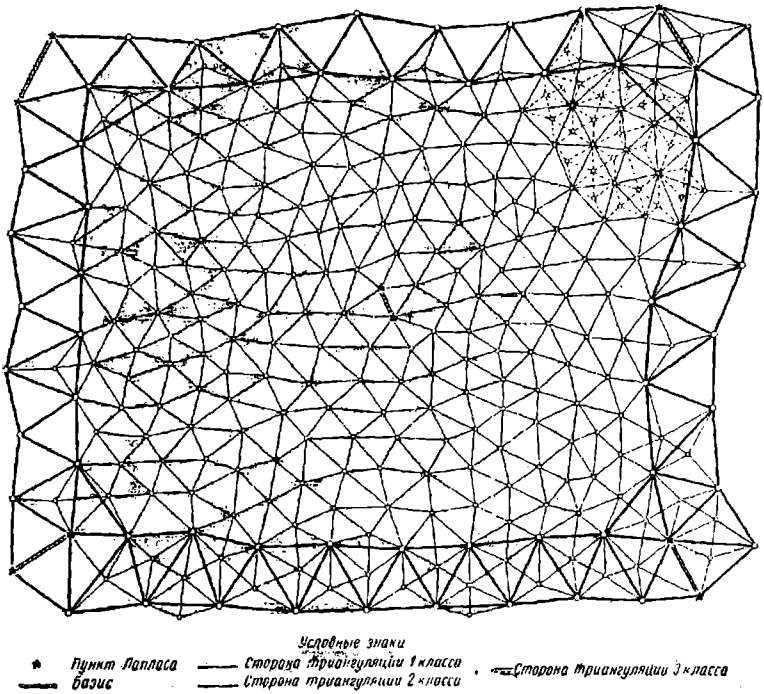


Рис. III.1.3

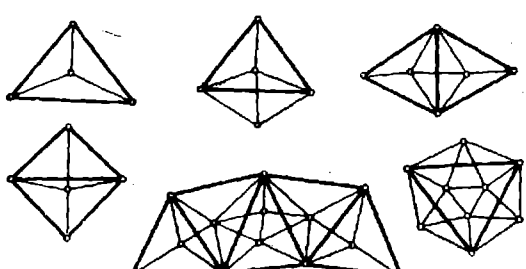


Рис. III.1.4

с земли до основания геодезический знак или постоянный местный предмет (башня, колокольня, мечеть, фабричная труба и т. д.), расположенные на расстоянии не более 2—3 км от данного пункта.

Все пункты государственной геодезической сети, а также ориентирные пункты закрепляются на местности особо надежными и долговременными подземными сооружениями — центрами.

Помимо типовых схем и методов построения геодезических сетей, указанных выше, для обеспечения ряда инженерных работ, требующих особо высокой точности, разрешается строить сети специального назначения по особо разрабатываемым программам. В качестве обоснования различных работ могут также использоваться сети, построенные по методу геодезических засечек проф. А. И. Дурнева [4].

Геодезические сети сгущения. К геодезическим сетям сгущения относят сети, прокладываемые для обоснования топографических съемок масштабов 1 : 5000—1 : 500 и инженерно-геодезических работ.

Геодезические сети сгущения подразделяются на:

а) триангуляцию 1 и 2 разрядов;

б) полигонометрические сети 1 и 2 разрядов (см. подраздел III.5);

в) сети технического нивелирования (см. подраздел III.7).

Триангуляцию 1 и 2 разрядов строят в виде цепочек или сплошной сети треугольников, а также разнообразных засечек.

Длина сторон в триангуляции 1 разряда — от 2 до 5 км; средняя квадратическая ошибка измерений углов, вычисленная по невязкам треугольников, — до 5″. Невязка в треугольниках не должна превышать 20″. Относительная ошибка измерения выходных (базисных) сторон не должна быть более 1 : 50 000, а сторон в наиболее слабом месте — 1 : 20 000.

В триангуляции 2 разряда длина сторон принимается от 0,5 до 3 км. Средняя квадратическая ошибка измерения углов по невязкам треугольников не должна превышать 10″, а невязка в треугольниках — не более 40″, относительная ошибка измерения выходных сторон не должна превышать 1 : 20 000 и сторон в наиболее слабом месте — 1 : 10 000.

Углы в треугольниках сетей 1 и 2 разряда не должны быть меньше 30° в цепочке и 20° — в сплошной сети.

Для всех пунктов геодезической сети сгущения определяются высоты из геометрического или геодезического нивелирования. Все они закрепляются центрами и реперами с расчетом на долговременную сохранность в соответствии с Инструкцией [9].

Съемочные сети. Съемочные сети являются непосредственной основой съемок всех масштабов и разных геодезических работ. Они подразделяются на п л а н о в ы е, прокладываемые в виде теодолитных и мензульных ходов, геометрических сетей или различных засечек; в ы с о т н ы е, создаваемые проложением высотных ходов нивелированием горизонтальным лучом (теодолитом или кипрегелем с уровнем на трубе) или тригонометрическим нивелированием с невязками в ходах и полигонах не более: $5\sqrt{L}$ см — при техническом нивелировании, $10\sqrt{L}$ см — при нивелировании горизонтальным лучом и $20\sqrt{L}$ см — при тригонометрическом нивелировании, где L — длина хода в километрах.

Предельные ошибки положения пунктов уравненного планового обоснования относительно пунктов государственной геодезической сети и сетей сгущения не должны превышать на открытой местности 0,2 мм в масштабе плана и на закрытой — 0,3 мм.

Закрепление пунктов планово-высотного съемочного обоснования производится долговременными знаками в соответствии с [9] и таким образом, чтобы на каждом планшете было, как правило, не менее трех закрепленных точек (с учетом пунктов государственной геодезической сети и сетей сгущения) при съемке в масштабе 1 : 5000 и одной точки — в масштабе 1 : 2000.

Б. ПРЕДВЫЧИСЛЕНИЕ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

III.1.2. Предвычисление и оценка точности триангуляции

Под оценкой точности понимают подсчет ожидаемых средних квадратических ошибок различных элементов проектируемых или фактически полученных ошибок построенных геодезических сетей.

Обычно рассматривают ошибки длин и азимутов сторон, продольные и поперечные сдвиги диагоналей ряда геометрических фигур или «замыкающих» линий ходов, по которым судят о точности передачи координат.

Формулы для оценки точности различных элементов сети, являющихся функциями измеренных величин, находят по способу наименьших квадратов, откуда известно, что средняя квадратическая ошибка функции уравненных величин выражается формулой

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}, \qquad \text{(III.1.1)}$$

где μ — ошибка единицы веса, P_F — вес рассматриваемой функции.

Величина m_F, полученная по (III.1.1.), является точечной оценкой стандарта соответствующей функции. По ней можно определить величину доверительного интервала, с заданной надежностью накрывающего действительное значение искомой функции: $[A \pm t \cdot m_F]$, где A — оценка математического ожидания функции измеренных величин, полученная из уравнивания. В сети, состоящей не менее чем из 15—20 пунктов, значение t с вероятностью 0,95 может быть принято равным 2, с вероятностью 0,99 — равным 2,5 и вероятностью 0,997 — равным 3. В сетях с меньшим числом пунктов величина t определяется по таблицам распределения Стьюдента.

Часто при определении ошибок рассматриваемой функции приходится учитывать еще ошибки исходных данных $m_{исх}$. В этом случае общая ошибка элемента сети m будет выражаться формулой:

$$m = \sqrt{m_{исх}^2 + m_F^2}. \qquad \text{(III.1.2)}$$

За ошибку единицы веса принимается ошибка измеренных величин. При угловых измерениях ею является средняя квадратическая ошибка измеренного угла или направления, при линейных

измерениях — средняя квадратическая ошибка принятой единицы длины линии.

Ошибку единицы веса можно определить из уравнительных вычислений по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{r}}, \qquad \text{(III.1.3)}$$

где v — поправки в измеренные величины из уравнивания; r — число условных уравнений при уравнивании коррелатным способом или число избыточных измерений при уравнивании параметрическим способом.

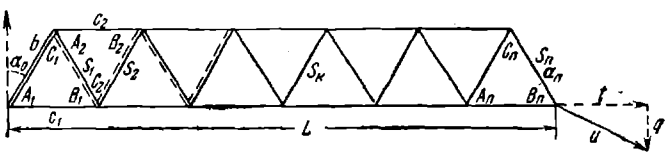


Рис. III.1.5

До уравнивания μ можно определить по невязкам замкнутых фигур, например в триангуляции — по формуле Ферреро

$$\mu = \sqrt{\frac{[ww]}{3n}}, \qquad \text{(III.1.4)}$$

где μ — средняя квадратическая ошибка измеренного угла; w — невязка треугольника; n — число треугольников.

Приближенное значение ошибки единицы веса обычно известно до уравнивания по аналогичным, ранее выполненным работам.

Выбор готовых формул по оценке точности различных элементов сети зависит от того, к каким измеренным величинам относится ошибка единицы веса и как она получена, а также от того, из каких геометрических фигур построена сеть и как будет проводиться ее уравнивание.

Оценка точности элементов простой цепи треугольников, уравненной за условия фигур. Для цепи из n треугольников, изображенной на рис. III.1.5, в которой A_i и B_i — связующие углы; C_i — промежуточные углы; s_i — связующие стороны; c_i — промежуточные стороны; b — базисная сторона (исходная), будем иметь следующее значение ошибок.

Средние квадратические ошибки сторон

При уравнивании по углам относительная средняя квадратическая ошибка длины связующей стороны выражается формулой

$$\frac{m_{s_n}^2}{s_n^2} = \frac{m_b^2}{b^2} + \left(\frac{\mu''}{\rho''}\right)^2 \frac{2}{3} \sum_1^n (\operatorname{ctg}^2 A_i + \operatorname{ctg}^2 B_i + \operatorname{ctg} A_i \operatorname{ctg} B_i), \qquad \text{(III.1.5)}$$

где m_{s_n} — средняя квадратическая ошибка связующей стороны n-го треугольника; m_b — средняя квадратическая ошибка исходной стороны; μ'' — средняя квадратическая ошибка измеренного угла; ρ'' — число секунд в радиане.

Выражение $\frac{2}{3}(\operatorname{ctg}^2 A_i + \operatorname{ctg}^2 B_i + \operatorname{ctg} A_i \operatorname{ctg} B_i)$ называется ошибкой геометрической связи треугольника или «обратным весом» его.

При построении триангуляции наиболее выгодной формой треугольника принимается равносторонняя. Для нее $\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} C = \operatorname{ctg} 60^\circ = 1/\sqrt{3}$, и ошибка геометрической связи равна $\frac{2}{3}$, а формула (III.1.5) принимает вид

$$\frac{m_{s_n}^2}{s_n^2} = \frac{m_b^2}{b^2} + \left(\frac{\mu''}{\rho''}\right)^2 \frac{2}{3} n, \qquad \text{(III.1.6)}$$

где n — число треугольников ряда от исходной до искомой стороны. Полагая, что ошибка исходной стороны очень мала в сравнении с ошибками развиваемой сети и ею можно пренебречь, получим

$$\frac{m_{s_n}}{s_n} = \frac{\mu''}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{3} n}. \qquad \text{(III.1.7)}$$

Из этой формулы видно, что ошибка собственно «передачи» длины стороны (масштаба сети) по ряду триангуляции пропорциональна корню квадратному из числа треугольников ряда.

Для упрощения подсчетов по формуле (III.1.5) принято вместо котангенсов углов отыскивать приращения логарифмов синуса угла при изменении его на $1''$ (δ), исходя из формулы

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\rho'' \delta_A}{M}. \qquad \text{(III.1.8)}$$

В этом случае, а также учитывая известное соотношение

$$\frac{m_s}{s} = \frac{m_{\lg s}}{M}, \qquad \text{(III.1.9)}$$

где $M = 0{,}43429$, переходят к определению ошибки логарифма стороны по формуле

$$m_{\lg s_n}^2 = m_{\lg b}^2 + \frac{2}{3} \mu''^2 \sum_1^n (\delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A \delta_B) = m_{\lg b}^2 + \frac{2}{3} \mu''^2 \sum_1^n R, \qquad \text{(III.1.10)}$$

где $m_{\lg s_n}$ и $m_{\lg b}$ — средние квадратические ошибки логарифмов конечной и исходной сторон триангуляции.

Величины $R = \delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A \delta_B$ табулированы (табл. III.1.2) и выбираются по связующим углам A_i и B_i. Их удобно также определять по палетке К. Л. Проворова *.

* К. Л. Проворов. Кривые ошибок геометрической связи в триангуляции. — Тр. НИИГАиК, т. X. Новосибирск, 1958, с. 47—50.

Величины $R =$

(в единицах шестого

	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°	24°	26°	28°	30°
20º	245	189	153	130	113	100	91				
22	232	177	142	119	103	91	81	74			
24	221	167	134	111	95	83	74	67	61		
26	213	160	126	104	89	77	68	61	56	51	
28	206	153	120	99	83	72	63	57	51	47	43
30°	199	148	115	94	79	68	59	53	48	43	40
35	188	137	106	85	71	60	52	46	41	37	33
40	179	129	99	79	65	54	47	41	36	32	29
45	172	124	93	74	60	50	43	37	32	28	25
50º	167	119	89	70	57	47	39	34	29	26	23
55	162	115	86	67	54	44	37	32	27	24	21
60	159	112	83	64	51	42	35	30	25	22	19
65	155	109	80	62	49	40	33	28	24	21	18
70º	152	106	78	60	48	38	32	27	23	19	17
75	150	104	76	58	46	37	30	25	21	18	16
80	147	102	74	57	45	36	29	24	20	17	15
85	145	100	73	55	43	34	28	23	19	16	14
90°	143	98	71	54	42	33	27	22	19	16	13
95	140	96	70	53	41	32	26	22	18	15	13
100	138	95	68	51	40	31	25	21	17	14	12
105	136	93	67	50	39	30	25	20	17	14	12
110	134	91	65	49	38	30	24	19	16	13	11
115°	132	89	64	48	37	29	23	19	15	13	11
120	129	88	62	46	36	28	22	18	15	12	10
125	127	86	61	45	35	27	22	18	14	12	10
130	125	84	59	44	34	26	21	17	14	12	10
135º	122	82	58	43	33	26	21	17	14	12	10
140	119	80	56	42	32	25	20	17	14	12	10
145	116	77	55	41	32	25	21	17	15	13	11
150	112	75	54	40	32	26	21	18	16	15	13
152º	111	75	53	40	32	26	22	19	17	16	
154	110	74	53	41	33	27	23	21	19		
156	108	74	54	42	34	28	25	22			
158	107	74	54	43	35	30	27				
160	107	74	56	45	38	33					

$\delta_A^2+\delta_B^2+\delta_A\delta_B$
знака логарифма)

35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
33											
27	23										
23	19	16									
20	16	13	11								
18	14	11	9	8							
16	12	10	8	7	5						
14	11	9	7	5	4	4					
13	10	7	6	5	4	3	2				
12	9	7	5	4	3	2	2	1			
11	8	6	4	3	2	2	1	1	1		
10	7	5	4	3	2	1	1	1	0	0	
10	7	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0
9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	0
9	6	4	3	2	1	1	0	0	0	0	
8	6	4	3	2	1	1	0	0	0		
8	5	4	2	2	1	1	0	0			
7	5	3	2	2	1	1	1				
7	5	3	2	2	1	1					
7	5	3	2	2	1						
7	5	4	3	2							
7	5	4	3								
7	5	4									
8	6										
9											

В случае измерения и уравнивания направлений может быть использована приближенная формула

$$m^2_{\lg s} = \frac{4}{3} m''^2 \sum_1^n R = m''^2 \frac{1}{P_s}, \qquad \text{(III.1.11)}$$

где

$$\frac{1}{P_s} = \frac{4}{3} \sum_1^n R, \qquad \text{(III.1.12)}$$

которая получается, если в формуле (III.1.10) не учитывать ошибку исходных данных, а ошибку угла μ'' заменить ошибкой направления m'' по формуле $\mu'' = m'' \sqrt{2}$.

Для подсчета средних квадратических ошибок промежуточных сторон нужно в формулах (III.1.5); (III.1.10); (III.1.11) в последнем треугольнике ряда вместо $\operatorname{ctg} A_l$ или δ_{A_l} принимать $\operatorname{ctg} C_l$ или δ_{C_l}.

Если ряд состоит из геодезических четырехугольников или центральных систем, подсчет ошибки логарифма стороны можно производить по формуле *

$$m^2_{\lg s_n} = m^2_{\lg b} + \frac{4}{3} m''^2 \frac{D-(C-C_0)}{D} \sum R, \qquad \text{(III.1.13)}$$

где D — число направлений в фигуре без двух исходных (по твердой стороне); C — число независимых условий в фигуре; C_0 — число условий в фигуре с отброшенными избыточными диагоналями (при превращении ее в простую цепь треугольников).

В практике при подсчете обратного веса ряда триангуляции обратные веса $1/P_s$ фигур принимают следующими:
для треугольников:

$$\frac{1}{P_s} = \frac{4}{3} R, \qquad \text{(III.1.14)}$$

для геодезических четырехугольников и центральных систем

$$\frac{1}{P_s} = \frac{4}{3} \frac{D-(C-C_0)}{D} R = 1{,}1R \approx R. \qquad \text{(III.1.14')}$$

Средние квадратические ошибки азимутов (дирекционных углов) сторон. На рис. III.1.5 пунктирной линией показана ходовая линия, по которой осуществляется передача азимутов сторон от исходного азимута α_0 к определяемому α_n.

---

* В. А. Магницкий. К вопросу об оценке достоинства геометрического построения триангуляции. — Сб. научно-технических и производственных статей. Вып. XVIII, М., Геодезиздат, 1948. 99 с.

При уравнивании ряда по углам ошибка передачи азимута через n треугольников определяется формулой

$$m''_{\alpha_n} = \mu'' \sqrt{\frac{2}{3} n}, \qquad \text{(III.1.15)}$$

а с учетом ошибки исходного азимута m''_{α_0} — формулой

$$m''_{\alpha_n} = \sqrt{m''^2_{\alpha_0} + \frac{2}{3} \mu''^2 n}, \qquad \text{(III.1.16)}$$

где m''_{α_n} — средняя квадратическая ошибка азимута искомой стороны; μ'' — средняя квадратическая ошибка измеренного угла.

Из формул (III.1.15) и (III.1.16) следует, что обратные веса сторон и азимутов в простой цепи равносторонних треугольников равны между собой:

$$\frac{1}{p_s} = \frac{1}{p_\alpha} = \frac{2}{3} n. \qquad \text{(III.1.17)}$$

При уравнивании цепи треугольников по направлениям могут быть использованы формулы проф. А. А. Изотова:

для связующей стороны

$$m''^2_{\alpha_n} = m''^2_{\alpha_0} + \frac{2n+5}{10} \mu''^2; \qquad \text{(III.1.18)}$$

для промежуточной стороны

$$m''^2_{\alpha_n} = m''^2_{\alpha_0} + \frac{2n}{10} \mu''^2, \qquad \text{(III.1.18')}$$

где μ — средняя квадратическая ошибка измеренного угла.

Продольные и поперечные сдвиги ряда

В результате действия ошибок измерений конечная точка ряда триангуляции смещается вдоль своей оси на величину t (см. рис. III.1.5), называемую продольным сдвигом ряда, и поперек оси на величину q, называемую поперечным сдвигом ряда.

Общий сдвиг конечной точки будет равен

$$u = \sqrt{t^2 + q^2}. \qquad \text{(III.1.19)}$$

Он характеризует полную ошибку в положении точки. При уравнивании ряда триангуляции по углам среднее квадратическое значение продольного сдвига m_L равно

$$m_L = L \sqrt{\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\mu''}{\rho''}\right)^2 \frac{4k^2 \mp 3k + 5}{9k}}, \qquad \text{(III.1.20)}$$

где L — диагональ ряда (расстояние между конечными пунктами ряда); k — число промежуточных сторон в диагонали ряда.

Минус перед $3k$ принимается в случае ряда, состоящего из нечетного числа треугольников, а плюс — при четном их числе.

При уравнивании ряда по направлениям или по углам в случае измерения направлений может быть применена формула проф. А. А. Изотова

$$\frac{m_L}{L}=\sqrt{\left(\frac{m_b}{b}\right)^2+\left(\frac{\mu''}{\rho''}\right)^2\left(\frac{4k^2-3k+5}{9k}-\frac{10k^2-7k-9}{300k^2}\right)}. \tag{III.1.21}$$

Влияние второго члена в круглых скобках повышает точность примерно на 4%. Поэтому в большинстве случаев им можно пренебречь.

Для вычисления поперечного сдвига ряда m_q при уравнивании по направлениям имеем:

при нечетном числе треугольников

$$m_q=\frac{L}{\rho''}\sqrt{m_{\alpha_0}^2+\frac{2}{15}\mu''^2\frac{k^2+k+3}{k}}, \tag{III.1.22}$$

при четном числе треугольников

$$m_q=\frac{L}{\rho''}\sqrt{m_{\alpha_0}^2+\frac{1}{15}\mu''^2\frac{2k^2+5k+5}{k}}. \tag{III.1.23}$$

При уравнивании цепи по углам в случае измерения направлений второй член увеличивает m_q примерно на 15%. В случае уравнивания звена между двумя базисами самым слабым местом будет k-я сторона в середине ряда. Ошибки этой стороны можно вычислять от обоих базисов и из них принимать среднее весовое значение по формуле

$$m_{s_k}=\frac{m_1m_2}{\sqrt{m_1^2+m_2^2}}. \tag{III.1.24}$$

Оценка точности элементов ряда триангуляции, построенного из равносторонних треугольников и уравненного за условия фигур, базисов и азимутов по направлениям. Средняя квадратическая ошибка логарифма сторон

$$m_{\lg s_n}^2=\frac{m_{\lg b}^2}{2}+0{,}4\mu''^2\left\{\frac{8(N-n)n}{N}-\frac{2N+11}{5N+12}\right\}, \tag{III.1.25}$$

где N — общее число треугольников ряда между базисами; n — число треугольников до определяемой стороны; μ'' — средняя квадратическая ошибка измеренного угла.

Практически можно пользоваться (без учета ошибок исходных сторон) формулой

$$m_{\lg s_n}^2=3\mu''^2\frac{(N-n)n}{N}. \tag{III.1.26}$$

Средние квадратические ошибки азимутов (дирекционных углов) сторон

$$m^2_{\alpha_n} = \frac{m^2_{\alpha_0}}{2} + \frac{\mu''^2}{25}\left[(5n+12) - \frac{(5n+6)^2}{5N+12}\right]. \quad \text{(III.1.27)}$$

При уравнивании по углам пользуются формулой

$$m_{\alpha_n} = \sqrt{\frac{m^2_{\alpha_0}}{2} + \frac{2}{3}\mu''^2\,\frac{(N-n)\,n}{N}}\,. \quad \text{(III.1.27')}$$

Средние квадратические значения продольных и поперечных сдвигов

$$m^2_L = \frac{L^2}{2}\left[\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \frac{2k^2-3k+10}{9k}\,\frac{\mu''^2}{\rho''^2}\right], \quad \text{(III.1.28)}$$

$$m_q = \frac{L}{\rho''\sqrt{2}}\sqrt{m^2_{\alpha_0} + \frac{k^2+2k+12}{15k}\,\mu''^2}\,. \quad \text{(III.1.29)}$$

Оценка точности ряда триангуляции, построенного из равносторонних треугольников и уравненного по углам за условия фигур, базисов, азимутов и координат. Для оценки точности элементов прямолинейного ряда триангуляции, проложенного между твердыми исходными пунктами без учета ошибок последних, можно воспользоваться формулами А. Т. Черкозьянова *.

Средняя квадратическая ошибка логарифма связующей стороны

$$m_{\lg s_n} = 1{,}7\mu''\sqrt{\frac{n\,(N-n)}{N} - 3\,\frac{n^2\,(N-n)^2}{N\,(N^2+8)}}\,. \quad \text{(III.1.30)}$$

Средняя квадратическая ошибка азимута (дирекционного угла) стороны

$$m_{\alpha_n} = 0{,}8\mu''\sqrt{\frac{n\,(N-n)}{N} - 3\,\frac{n^2\,(N-n)^2}{N\,(N^2+8)}}\,. \quad \text{(III.1.31)}$$

Средние квадратические значения продольных и поперечных сдвигов в середине ряда триангуляции

$$m_{L/2} = \frac{L}{17}\cdot\frac{\mu''}{\rho''}\sqrt{\frac{N^2+N+75}{N-1}}\,. \quad \text{(III.1.32)}$$

Оценка точности элементов сдвоенной цепи треугольников при уравнивании по углам за условия фигур, полюсов и горизонта.

Средняя квадратическая ошибка логарифма стороны.

---

* См. Оценка точности ряда треугольников между исходными сторонами триангуляции высшего класса, уравненного по углам за координатные условия. — Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 6, 1963, с. 75—90.

На рис. III.1.6 изображен ряд триангуляции, построенный из сдвоенной цепи треугольников, где b, α_0 — исходная сторона и ее азимут; s_n, α_n — определяемая сторона и ее азимут; N' — число всех центральных систем, составляющих ряд; K — число центральных систем, отделяющих оцениваемую сторону от исходной; μ'' — средняя квадратическая ошибка измеренного угла; n — число треугольников, необходимых для определения искомой стороны.

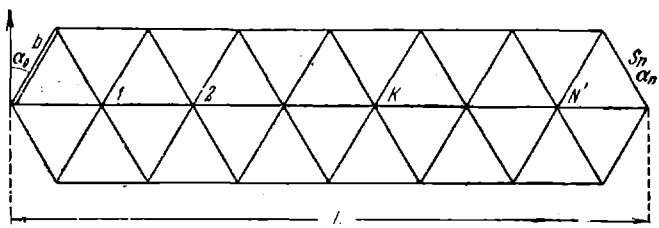


Рис. III.1.6

По формуле А. И. Дурнева имеем

$$m_{\lg s_k} = \sqrt{m^2_{\lg b} + (2K+3)\,\mu''^2\delta_0^2}, \qquad \text{(III.1.33)}$$

где

$$\delta_0^2 = \frac{\sum_1^n R}{3n}; \qquad R = \delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A\delta_B.$$

Средняя квадратическая ошибка азимутов сторон. Формула А. И. Дурнева

$$m_{\alpha_n} = \sqrt{m^2_{\alpha_0} + \frac{2}{3}\mu''^2\left(\frac{4}{3}K+1\right)}. \qquad \text{(III.1.34)}$$

Оценка точности элементов сдвоенной цепи равносторонних треугольников при уравнивании по углам за условия фигур, полюсов, горизонта, базисов и азимутов. По формулам А. В. Заводовского [5]:

Средняя квадратическая ошибка в логарифме стороны K-ой центральной системы

$$m^2_{\lg s_k} = 3\mu''^2\left\{K + 1{,}3 - \frac{(K+1)^2}{N'+1{,}4}\right\}. \qquad \text{(III.1.35)}$$

Средняя квадратическая ошибка азимута стороны K-ой центральной системы

$$m^2_{\alpha} = \mu''^2\left\{0{,}67K + 0{,}75 - \frac{(0{,}67K+0{,}60)^2}{0{,}67N'+1}\right\}. \qquad \text{(III.1.36)}$$

Среднее квадратическое значение продольного сдвига

$$m_L^2 = \frac{\mu''^2 L^2}{\rho''^2}\left\{\frac{2k^2+1{,}24k+2{,}55}{9k} - \frac{k^2+0{,}83k+0{,}17}{6k+2{,}5} - \frac{50k+57}{100k^2}\right\}. \quad \text{(III.1.37)}$$

Среднее квадратическое значение поперечного сдвига*

$$m_q^2 = \frac{\mu''^2 L^2}{\rho''^2}\left\{\frac{(k+2)(k+1)}{12k} - \frac{36k^2+68k+66}{500k} + \frac{322}{250k^2}\right\}, \quad \text{(III.1.37')}$$

где k — число промежуточных сторон, диагональ $L = sk$.

Для определения ошибок логарифма стороны и азимута могут быть применены также формулы К. Л. Проворова [13]

$$\left.\begin{aligned} m''_{\alpha_n} &= \mu'' \sqrt{\frac{\frac{1}{3}\left(n+\frac{5}{4}\right)\left(N-n+\frac{5}{4}\right)-1}{N+\frac{11}{6}}} \\ m_{\lg s_n} &= \frac{10^6 M}{\rho''} m''_{\alpha_n} = 2{,}1 m''_{\alpha_n} \\ m''_{\alpha_n} &= \frac{\rho''}{10^6 M} m_{\lg s_n} = 0{,}47 m_{\lg s_n} \end{aligned}\right\}, \quad \text{(III.1.38)}$$

где N — число треугольников между исходными сторонами; n — число треугольников до определяемой стороны; M — модуль перевых логарифмов.

Как показывают расчеты, точность передачи длин сторон и азимутов в двойной цепи треугольников повышается по сравнению с простой цепью примерно на 30%.

Оценка точности элементов сплошной сети триангуляции, построенной из равносторонних треугольников при уравнивании по углам за условия фигур, горизонтов и полюсов (свободных сетей). Наиболее полные формулы ошибок различных элементов сплошных сетей даны К. Л. Проворовым [13, 14] для ряда триангуляции, выделенного из сети (рис. III.1.7) с N треугольниками между твердыми сторонами (с исходными базисами и азимутами) и n треугольниками от исходной стороны до определяемой.

Средняя квадратическая ошибка логарифма стороны

$$m_{\lg s_n} = 0{,}63\mu'' \sqrt{n-1+10t_{(n)}}. \quad \text{(III.1.39)}$$

---

* Формула для поперечного сдвига выведена при условии, что уравнивание проведено по направлениям.

Средняя квадратическая ошибка азимута стороны

$$m_{\alpha_n} = 0{,}3\mu'' \sqrt{n - 1 + 10t_{(n)}}. \qquad \text{(III.1.40)}$$

В этих формулах $t_{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ для удобства подсчетов величины $t_{(n)}$ табулированы (табл. III.1.3).

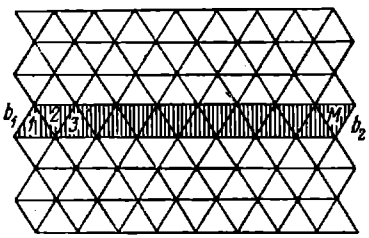


Рис. III.1.7

Таблица III.1.3

Величины $t_{(n)}$

n	$t_{(n)}$	n	$t_{(n)}$
1	0,457	11	0,022
2	0,375	12	0,016
3	0,291	13	0,011
4	0,219	14	0,008
5	0,161	15	0,006
6	0,117	16	0,004
7	0,084	17	0,003
8	0,060	18	0,002
9	0,043	19	0,002
10	0,031	20	0,001

Средние квадратические значения продольных и поперечных сдвигов

$$m_L = m_q = \frac{L}{\rho''} m_T'', \qquad \text{(III.1.41)}$$

где L — диагональ выделенного из сети ряда треугольников; m_T'' — средняя квадратическая ошибка азимута диагонали избранного ряда, равная

$$m_T'' = \mu'' \sqrt{\frac{n^2 - 3n + 50}{45n}}. \qquad \text{(III.1.42)}$$

Суммарная ошибка u положения пункта будет равна

$$u=\sqrt{m_L^2+m_q^2}. \qquad \text{(III.1.43)}$$

Оценка точности сплошной сети триангуляции, построенной из равносторонних треугольников при уравнивании по углам за условия фигур, горизонтов, полюсов, базисов, азимутов.

Средняя квадратическая ошибка логарифма стороны

$$m_{\lg s_n}=\frac{\mu''}{3}\sqrt{N-6{,}5+48t_{N/2}}. \qquad \text{(III.1.44)}$$

Средняя квадратическая ошибка азимута стороны

$$m_{\alpha_n}=0{,}15\mu''\sqrt{N-6{,}5+48t_{N/2}}, \qquad \text{(III.1.45)}$$

где $t_{N/2}$ выбирается из табл. III.1.3 по числу треугольников от исходной стороны до середины ряда.

Средние квадратические значения продольных и поперечных сдвигов

$$m_L=m_q=\frac{L}{\rho''}m_T'', \qquad \text{(III.1.46)}$$

где

$$m_T''=\mu''\sqrt{\frac{n^2-3n+50}{45n}-\frac{n^2-5n+80}{70N}}. \qquad \text{(III.1.47)}$$

Средняя квадратическая ошибка положения пункта

$$u=\frac{L\sqrt{2}}{\rho''}m_T''. \qquad \text{(III.1.48)}$$

Формулы (III.1.41) и (III.1.46) показывают, что продольные и поперечные сдвиги в сплошной сети триангуляции равны между собой.

Оценка точности элементов сплошной сети триангуляции, построенной из треугольников произвольной формы при уравнивании по углам за условия фигур, горизонтов, полюсов, базисов и азимутов. Для среднего квадратического значения продольных m_t и поперечных $m_{q'}$ сдвигов двух смежных пунктов сети К. Л. Проворовым [14] предложены формулы

$$m_t=\frac{s}{\rho''}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\rho''\frac{m_b}{b}\right)^2+\mu''^2\left(\frac{\delta_0}{\delta_{60°}}\right)^2\frac{N+15}{100}}, \qquad \text{(III.1.49)}$$

$$m_{q'}=\frac{s}{\rho''}\sqrt{\frac{1}{2}m_{\alpha_0}^2+\mu''^2\frac{N+15}{100}}, \qquad \text{(III.1.50)}$$

$$u=\sqrt{m_t^2+m_{q'}^2}. \qquad \text{(III.1.51)}$$

В этих формулах m_b и m_{α_0} — средние квадратические ошибки исходных данных; s — длина стороны треугольника; $\delta_0 = \frac{[\delta]}{3n}$ — показатель формы сети, где δ — перемены логарифма синусов углов треугольников при изменении их на $1''$ (у К. Л. Проворова $\delta_0 = 1{,}33$).

Приближенно (для равносторонних треугольников) и без учета ошибок исходных данных можно принимать, что

$$m_t = m_{q'} = \frac{s\mu''}{10\rho''}\sqrt{N+15}. \qquad (III.1.52)$$

III.1.3. Предвычисление и оценка точности трилатерации

Зависимость между ошибками углов и ошибками сторон треугольника. Дифференциальная зависимость между ошибками углов и сторон выражается формулой

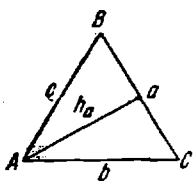


Рис. III.1.8

$$dA'' = \frac{\rho''}{h_a}(d_a - \cos C\, db - \cos B\, dc),$$

где h_a — высота треугольника, опущенная из угла A на противоположную сторону a (рис. III.1.8); dA; da; db; dc — дифференциалы угла и сторон.

Переходя к средним квадратическим ошибкам, получим

$$m_A''^2 = \frac{\rho''^2}{h_a^2}(m_a^2 + \cos^2 C m_b^2 + \cos^2 B m_c^2), \qquad (III.1.53)$$

где m_A — средняя квадратическая ошибка определения угла; m_a, m_b, m_c — средние квадратические ошибки измерения сторон.

Для равносторонних треугольников

$$m_A^2 = \frac{\rho''^2}{3s^2}(4m_a^2 + m_b^2 + m_c^2). \qquad (III.1.54)$$

При равноточном измерении сторон

$$m_A'' = \frac{m_s}{s}\rho''\sqrt{2}, \qquad (III.1.55)$$

и формула (III.1.53) будет иметь вид

$$m_A^2 = m_s^2\frac{\rho''^2}{h_a^2}(1 + \cos^2 B + \cos^2 C), \qquad (III.1.56)$$

где $\frac{\rho''^2}{h_a^2}(1 + \cos^2 B + \cos^2 C)$ называется ошибкой геометрической связи треугольника.

Исходя из формулы (III.1.55), можно подсчитать необходимую точность измерения сторон при заданной ошибке измерения угла.

Наиболее простые формулы для ошибок различных элементов равностороннего ряда трилатерации выведены С. А. Бутлером*.

Оценка точности элементов равностороннего ряда трилатерации. Условные обозначения:

m_{α_0} — средняя квадратическая ошибка азимута исходной стороны; m_{α_n} — средняя квадратическая ошибка азимута конечной стороны; m_{α_k} — средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны K-го треугольника; m_s — средняя квадратическая ошибка измеренной стороны; s — длина стороны; n — число треугольников ряда; k — номер связующей стороны K-го треугольника; m_L — среднее квадратическое значение продольного сдвига; m_q — среднее квадратическое значение поперечного сдвига.

Средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны свободного ряда трилатерации (неуравненного)

$$m^{''^2}_{\alpha_n} = m^2_{\alpha_0} + \frac{4}{3}\frac{m_s^2}{s^2}\rho^{''^2} n. \qquad \text{(III.1.57)}$$

Средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны при уравнивании за условие азимутов

$$m^{''^2}_{\alpha_k} = \frac{m^2_{\alpha_0}}{2} + \frac{4}{3}\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 \rho^{''^2}\frac{k}{n}(n-k). \qquad \text{(III.1.58)}$$

Среднее квадратическое значение продольного и поперечного сдвигов ряда трилатерации, уравненного за условие азимутов,

$$m_L = \frac{m_s}{2}\sqrt{\frac{n^2-1}{n}}, \qquad \text{(III.1.59)}$$

$$m_q = m_s\sqrt{\frac{n-1}{36}(n^2+n+48)}. \qquad \text{(III.1.60)}$$

Кроме этих формул, могут быть применены формулы К. Л. Проворова для определения ошибки взаимного положения несмежных пунктов

$$m_L = m_s\sqrt{\frac{n(2N-n+1)}{2(2N+1)}}, \qquad \text{(III.1.61)}$$

$$m_q = m_s\sqrt{\frac{n(4n^2-3n+26)}{36} - \frac{(2n^2-n-4)^2}{24(2N+1)}}, \qquad \text{(III.1.62)}$$

где N — число треугольников между твердыми сторонами; n — число треугольников до определяемого пункта.

---

* С. А. Бутлер. Уравнивание тригонометрических сетей, определенных длинами сторон. — «Геодезист», 1939, № 9, с. 22—35.

Оценка точности ряда, построенного из правильных геодезических четырехугольников с измеренными сторонами, уравненного за условия фигур. На рис. III.1.9 показан ряд геодезических четырехугольников с измеренными сторонами, где a — исходная сторона; b — продольная сторона. Примем следующие обозначения: $l = b/a$ — продвиг фигуры; n — число четырехугольников; m_a — средняя квадратическая ошибка исходной стороны; m_s — средняя квадратическая ошибка измеренной стороны; m_α — средняя квадратическая ошибка азимута определяемой стороны; m_L; m_q — средние квадратические значения продольных и поперечных сдвигов ряда.

Средняя квадратическая ошибка передачи азимута

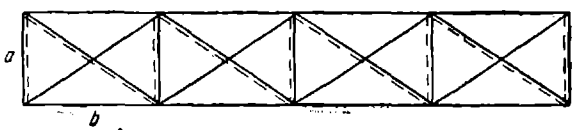


Рис. III.1.9

Если передача азимута осуществляется так, как это показано на рис. III.1.9 пунктиром, то ошибка азимута выразится формулой

$$m_\alpha = \frac{m_a}{a}\rho''\sqrt{2n}. \qquad \text{(III.1.63)}$$

Исследования И. А. Кутузова * показывают, что лучшей фигурой является четырехугольник, по форме близкий к квадрату или ромбу. Допустимо изменение формы четырехугольника до прямоугольника или параллелограмма с углом против малой диагонали не менее 60° и с продвигом l от 0,6 до 1,4.

Среднее квадратическое значение продольного сдвига

$$m_L = m_s\sqrt{nA - B}, \qquad \text{(III.1.64)}$$

где

$$A = 1 - \frac{l^2 D}{(D+1)^2}; \quad B = \frac{l^2}{4t} - \frac{l^2(D^2+1)^2}{D^3(D+1)^2}; \quad D = 4t - \frac{16t^2+1}{64t^3};$$

$$t = 1 + l^2; \quad l = \frac{b}{a}.$$

Значения A и B в зависимости от продвига ряда представлены в табл. III.1.4.

---

* И. А. Кутузов. Накопление погрешностей в рядах триангуляции с измеренными сторонами. — Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», 1957, вып. 2, с. 87—100.

Таблица III.1.4

$l=\frac{b}{a}$	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	4,0
A	0,976	0,952	0,925	0,900	0,878	0,858	0,842	0,829	0,818	0,786	0,771
B	0,008	0,014	0,019	0,022	0,022	0,022	0,021	0,019	0,018	0,010	0,007

Среднее квадратическое значение поперечного сдвига

$$m_q = m_s \sqrt{An^3 - Bn^2 - Cn + E}, \qquad \text{(III.1.65)}$$

где

$$A = 2t - \frac{4}{3}\frac{\Delta^2 D}{(D+1)^2}; \quad B = \frac{D}{D^2-1}; \quad \Delta = 2l^2+3;$$

$$C = 1 - \frac{\Delta^2 D}{3(D+1)^2} - \frac{2\Delta D^2 (D+3)}{(D^2-1)(D+1)^2} + \frac{2D}{D^2-1};$$

$$E = 1 - \frac{D}{D^2-1} + \frac{\Delta^2 D (D^2 - 32D - 69) - 20D^2 (D-1)}{(D^2-1)(D+1)^2} -$$

$$- \frac{\Delta^2 [D(D^2 - 6D - 10) - 30(D^2+1)]}{D^4}.$$

Значения коэффициентов A, B, C и E для различных продвигов приведены в табл. III.1.5.

Таблица III.1.5

l	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
A	+0,1070	+0,2401	+0,4267	+0,6667	+0,9600
B	+0,239	+0,198	+0,160	+0,129	+0,105
C	−0,846	−0,855	−0,898	−0,979	−1,096
E	+2,84	+2,24	+1,76	+1,42	+1,18

Продолжение табл. III.1.5

l	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	4,0
A	+1,3067	+1,7067	+2,1600	+2,6667	+6,0000	+10,6667
B	+0,086	+0,071	+0,059	+0,050	+0,026	+0,015
C	−1,246	−1,429	−1,643	−1,886	−3,526	−5,843
E	+1,02	+0,91	+0,83	+0,77	+0,62	+0,57

Оценка точности сплошной сети трилатерации, построенной из равносторонних треугольников. Из сплошной сети трилатерации

выделяется ряд треугольников, внутри которого находится оцениваемый элемент сети. При этом одна из координатных осей совпадает с направлением диагонали ряда, проходящей по промежуточным сторонам его. В начале ряда находятся исходная сторона и азимут.

Средние квадратические ошибки элементов сети при уравнивании за условия центральных систем и азимутов.

Наиболее просты формулы К. Л. Проворова*, которые дают хорошее приближение для элементов сети, удаленных от исходных данных не менее чем на два треугольника.

Средняя квадратическая ошибка азимута стороны треугольника

$$m''_\alpha = \frac{6}{5}\,\frac{m_s}{s}\,\rho''. \qquad \text{(III.1.66)}$$

Средние квадратические ошибки взаимного положения смежных пунктов:

продольного сдвига

$$m_t = \frac{5}{6}\,m_s$$

поперечного сдвига

$$m_{q'} = \frac{6}{5}\,m_s \qquad \text{(III.1.67)}$$

общая ошибка

$$u = \sqrt{m_t^2 + m_{q'}^2} = \frac{10}{7}\,m_s$$

Средние квадратические ошибки взаимного положения несмежных пунктов (продольные и поперечные сдвиги)

$$m_L = m_s \sqrt{\frac{(N+15)\,(n+11)}{10\,(N+25)}}, \qquad \text{(III.1.68)}$$

$$m_q = m_s \sqrt{\frac{(N+15)\,(5n^2+12n+8)}{30\,(N+25)}}, \qquad \text{(III.1.69)}$$

$$u = m_s \sqrt{\frac{(N+15)\,(5n^2+15n+41)}{30\,(N+25)}}. \qquad \text{(III.1.70)}$$

---

* См. К. Л. Проворов. Точность элементов сети линейной триангуляции. — Тр. НИИГАиК, т. XI. Новосибирск, 1958, стр. 3—21.

Средние квадратические ошибки направления диагонали ряда

$$m''_T = \frac{m_s}{L}\rho'' \sqrt{\frac{(N+15)(5n^2+12n+8)}{30(N+25)}}. \qquad \text{(III.1.71)}$$

Средняя квадратическая ошибка уравненного угла треугольника $m''_{уг}$

$$m''_{уг} = \frac{5}{4}\frac{m_s}{s}\rho''. \qquad \text{(III.1.72)}$$

Средняя квадратическая ошибка m_a любой уравненной стороны a треугольника

$$\frac{m_a}{a} = \frac{5}{6}\frac{m_s}{s}. \qquad \text{(III.1.73)}$$

В этих формулах: m_s/s — относительная ошибка измеренных сторон; m''_T — средняя квадратическая ошибка направления диагонали ряда; L — диагональ ряда; N — число треугольников между твердыми азимутами сторон ряда; n — число треугольников до определяемого элемента; m_t и $m_{q'}$ — то же, что и в (III.1.49) и (III.1.50).

Из расчетов по приведенным формулам следует, что в рядах и сетях трилатерации поперечные сдвиги в несколько раз более продольных; это ведет к неоднородности ошибок ряда и предъявляет повышенные требования к расчету необходимой частоты твердых азимутов. В этом отношении ряды и сети триангуляции выгодно отличаются от рядов и сетей трилатерации.

Оценка точности рядов с измеренными углами и сторонами. В случае измерения в ряде треугольников как сторон, так и углов точность определения отдельных элементов ряда повышается. Ниже приводятся формулы К. А. Лапинга *, в которых:

μ'' — средняя квадратическая ошибка измеренного угла;

m_s — средняя квадратическая ошибка измеренной стороны;

m'_s — средняя квадратическая ошибка уравненного значения стороны;

m_L — среднее квадратическое значение продольного сдвига;

m_q — среднее квадратическое значение поперечного сдвига;

s — сторона треугольника; n — число треугольников звена;

$\rho'' = 206\,265''$,

---

* См. его статьи в журнале «Геодезия и картография», 1957, № 4, с. 17—19 и 1959, № 2, с. 12—14.

а. В ряде измерены все углы и все стороны треугольников:

для связующих сторон

$$m_s'^2 = m_s^2 - \frac{6m_s^4}{9m_s^2 + 2\frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2}$$

для промежуточных сторон

$$m_s'^2 = m_s^2 - \frac{2m_s^4}{3m_s^2 + \frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2}$$

$$m_L^2 = \frac{n+1}{4}m_s^2 + \frac{n}{8}\frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2 - \frac{3\left(m_s^4 + \frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2 m_s^2 + \frac{\mu''^4}{4}\frac{s^4}{\rho''^4}\right)(n-1)}{8\left(3m_s^2 + \frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2\right)}$$

$$m_Q^2 = \frac{3}{4}(n+1)m_s^2 + \frac{n(n^2-1)}{72}\frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2 - \frac{108(n-1)m_s^4 - 34(n-1)\frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2 m_s^2 + (n-1)^3\frac{s^4}{\rho''^4}\mu''^4}{96\left(3m_s^2 + \frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2\right)}$$

(III.1.74)

б. В ряде измерены все углы треугольников и связующие стороны

для связующих сторон

$$m_s'^2 = m_s^2 - \frac{6m_s^4}{9m_s^2 + 2\frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2}$$

для промежуточных сторон

$$m_s'^2 = \frac{m_s^2}{3} + \frac{8n-9}{18n}\frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2$$

$$m_L^2 = \frac{n+1}{4}m_s^2 + \frac{n}{8}\frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2$$

$$m_Q^2 = \frac{3}{4}(n+1)m_s^2 + \frac{n(n^2-1)}{72}\frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2$$

(III.1.75)

в. В ряде измерены все углы и промежуточные стороны вдоль одной диагонали:

для связующих сторон

$$m_s'^2 = m_s^2 + \frac{4n-3}{6n}\left(\frac{s}{\rho''}\mu''\right)^2 - \frac{2\left(3m_s^2 + 2\frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2\right)}{27\left(m_s^2 + \frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2\right)}$$

для непосредственно измеренных промежуточных сторон

$$m_s'^2 = m_s^2 - \frac{2m_s^4}{3\left(m_s^2 + \frac{s^2}{\rho''^2}\mu''^2\right)}$$

для неизмерявшихся промежуточных сторон

$$m_s'^2 = \frac{m_s^2}{3} + \frac{2(n-3)s^2}{3n\rho''^2}\mu''^2$$

$$m_L^2 = \frac{n+1}{2}m_s^2 + \frac{n}{4}\left(\frac{s}{\rho''}\mu''\right)^2$$

$$m_q^2 = \frac{n+1}{72}(n^2-n+18)\left(\frac{s}{\rho''}\mu''\right)^2$$

(III.1.76)

Для определения продольных и поперечных сдвигов могут быть использованы приближенные формулы К. Л. Проворова *, которые до нескольких сантиметров (до 5 см) можно считать одинаковыми для звеньев линейной (триллатерации), угловой и линейно-угловой триангуляций, а также для достаточно прямолинейных звеньев полигонометрии.

Формулы выводились для ряда, состоявшего из равнобедренных треугольников со связующими углами B, при уравнивании по углам. При измерении и уравнивании направлений ощутимо изменяется только средняя квадратическая ошибка поперечного сдвига (до 30%) в тех случаях, когда на пунктах измеряется более двух направлений.

Продольный сдвиг

а. При измерении трех сторон и трех углов треугольника или только трех сторон и промежуточных углов

$$m_L = m_s\sqrt{\frac{n}{5}}. \qquad (III.1.77)$$

б. При измерении в треугольнике всех углов и только связующих сторон или без измерения связующих углов и промежуточных сторон (в полигонометрии):

---

* См. К. Л. Проворов. Сравнение точности угловой, линейной и линейно-угловой триангуляции. — Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка», 1960, вып. 1, с. 57—64.

когда ошибка измерения сторон постоянна, т. е. $m_s = \text{const}$,

$$m_L = m_s \cos B \sqrt{n}, \qquad \text{(III.1.78)}$$

когда ошибка измерения сторон пропорциональна расстоянию, т. е. $\frac{m_s}{s} = \text{const}$,

$$m_L = \frac{m_s}{s} \frac{L}{\sqrt{n}}. \qquad \text{(III.1.79)}$$

в. При измерении только всех углов треугольника

$$m_L = \frac{\mu''}{\rho''} L \operatorname{ctg} B \sqrt{\frac{n}{6}}. \qquad \text{(III.1.80)}$$

Поперечный сдвиг

а. При измерении в треугольнике только всех углов, или при измерении всех сторон и углов, или при измерении всех углов и связующих сторон

$$m_q = \frac{\mu''}{\rho''} L \sqrt{\frac{n}{18}}. \qquad \text{(III.1.81)}$$

б. При измерении всех сторон и только промежуточных углов или при измерении только связующих сторон и промежуточных углов (полигонометрии)

$$m_q = \frac{\mu''}{\rho''} L \sqrt{\frac{n}{12}}. \qquad \text{(III.1.82)}$$

в. При измерении только всех сторон треугольника

$$m_q = \frac{m_s}{6} n \operatorname{ctg} B \sqrt{n\,(9 + 10 \cos 2B)}. \qquad \text{(III.1.83)}$$

Оценка точности рядов трилатерации, построенных радиогеодезическими методами. Для рядов трилатерации, построенных из различных правильных геометрических фигур со сторонами, измеренными радиогеодезическими методами, при уравнивании за условия этих фигур и условие азимутов между конечными сторонами, К. Л. Проворовым рекомендуются следующие формулы для подсчета продольного (m_L) и поперечного (m_q) сдвигов ряда.

1. Для ряда, построенного из N равносторонних треугольников (при N четном),

$$\left.\begin{aligned} m_L &= 0{,}52 m_s \sqrt{N} \\ m_q &= 0{,}17 m_s \sqrt{N\,(N^2 + 2{,}19N + 28{,}83)} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(III.1.84)}$$

2. Для ряда, построенного из N геодезических четырехугольников прямоугольной формы с продвигом l от 0,5 до 2,5

$$\left.\begin{aligned} m_L &= 0{,}70 m_s\,(1 - 0{,}1l)\sqrt{N} \\ m_q &= 0{,}41 m_s l \sqrt{N\,(N^2 - aN + b)} \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(III.1.85)}$$

где коэффициенты a и b в зависимости от продвига l имеют следующие значения (табл. III.1.6).

Таблица III.1.6

l	a	b	l	a	b
0,5	0,79	19,07	2,0	0,07	3,19
1,0	0,23	6,54	2,5	0,04	2,76
1,5	0,11	4,09			

3. Для ряда, построенного из N' сопряженных центральных систем (сдвоенного ряда треугольников),

$$\left.\begin{aligned} m_L &= 0{,}61 m_s \sqrt{N'+2} \\ m_q &= 0{,}25 m_s \sqrt{N'\left(N'^2+7{,}11N'+44{,}71\right)} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(III.1.86)}$$

Исследования показали, что наиболее выгодным, с точки зрения минимального объема измерений и наименьших ошибок, является ряд из геодезических четырехугольников.

В. ПРОЕКТИРОВАНИЕ И РЕКОГНОСЦИРОВКА ГОСУДАРСТВЕННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Построение государственных геодезических сетей осуществляется по заранее разработанным и утвержденным в установленном порядке техническим проектам.

Проектированию геодезических работ обычно предшествует целый комплекс подготовительных мероприятий, имеющих целью обстоятельное изучение территории предстоящих работ как по литературным и картографическим источникам, так и путем непосредственного обследования местности. Схематически этот комплекс мероприятий можно представить так:

1) получение технического предписания или производственного задания на проектирование работ от вышестоящей организации;
2) сбор и изучение необходимого материала;
3) геодезическое обследование района предстоящих работ;
4) составление предварительного технического проекта;
5) проведение рекогносцировки;
6) составление окончательного технического проекта.

В зависимости от конкретных условий и особенностей участка, поставленных задач и наличия технических средств указанная схема может сильно меняться. Так, например, при проведении работ в обжитых и хорошо изученных районах по соседству с участком, сходным по своим физико-географическим условиям с данным, где недавно были выполнены аналогичные работы, геодезическое обследование может быть заменено изучением технических отчетов и других материалов. При проектировании работ по картам крупного масштаба (не мельче 1 : 25 000 — 1 : 10 000) рекогносцировка

приведет лишь к незначительным уточнениям высот и мест расположения пунктов, поэтому надобность в составлении предварительного проекта отпадает; отпадает она при комплексном ведении рекогносцировки и постройки знаков. При планировании предстоящих работ и подготовительных мероприятий все подобные факты должны учитываться.

Основным назначением рекогносцировки является уточнение камерального проекта путем изыскания на местности выгоднейшего варианта построения намеченной сети, а также окончательный выбор местоположения пунктов с установлением конструкции и высот знаков, а также типов подземных центров.

Организация работ и проведение рекогносцировки зависят от конкретных условий и могут выполняться как самостоятельно,

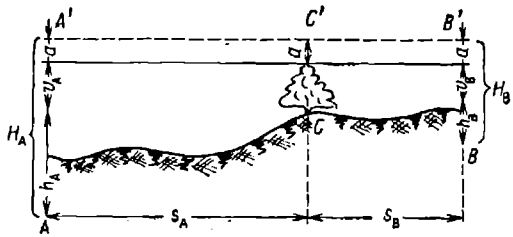


Рис. III.1.10

в составе специализированных рекогносцировочных бригад, так и в комплексе с постройкой знаков, что особенно выгодно в труднодоступных и малообжитых районах.

Руководящими документами при проведении рекогносцировки являются: предварительный проект на участок работ, техпредписание на рекогносцировку, действующее положение о построении государственных геодезических сетей, а также специальные требования по выбору геодезических пунктов, устанавливаемые инструкцией.

С целью улучшения формы фигур сети и снижения высот знаков рекогносцировщику разрешается изменять расположение отдельных пунктов и даже перепроектировать отдельные участки сети. О всех значительных изменениях проекта необходимо докладывать руководству работ.

При выборе мест пунктов, а также определении командных высот в залесенной местности и определении наиболее удобных путей подхода к пунктам полезно использовать аэроснимки масштаба 1 : 40 000 — 1 : 50 000 и репродукцию накидного монтажа в масштабе 1 : 100 000.

Форма и объем отчетной документации по окончании рекогносцировки зависят от характера организации ее: при самостоятельном ведении рекогносцировки составляется подробная объяснительная записка с приложением журналов рекогносцировки и различных схем отрекогносцированного участка сети [3]; при ведении ее в комплексе с постройкой составляют карточки постройки пунктов, представляющие задания рекогносцировщика на постройку пунктов и сведения о выполненной постройке [1], и краткую объяс-

нительную записку с приложением соответствующих графических материалов.

Расчет высот знаков. Определение высот знаков является одной из важнейших задач рекогносцировки. Кроме того, высоты знаков рассчитывают при составлении графических проектов сети по карте.

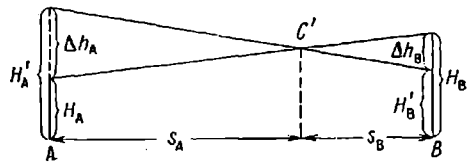


Рис. III.1.11

Проще всего высоты знаков можно рассчитывать по следующим формулам (рис. III.1.10):

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= h_1 + a + v_1 \\ H_2 &= h_2 + a + v_2 \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(III.1.87)}$$

где H_1 и H_2 — высоты первого и второго знаков; h_1 и h_2 — превышения препятствия над основаниями первого и второго знаков со своим знаком (препятствие минус основание знака); a — высота луча над препятствием; v — поправка (в метрах) за кривизну Земли и рефракцию, равная

$$v = \frac{1-k}{2R} s^2, \qquad \text{(III.1.88)}$$

где k — коэффициент рефракции (обычно принимаемый равным 0,14—0,16); R — радиус Земли в километрах; s — расстояние от знака до препятствия в километрах.

Величины v выбирают из специальных таблиц или приближенно вычисляют по формуле

$$v_{(м)} = \frac{s^2_{(км)}}{15}. \qquad \text{(III.1.89)}$$

Величины h определяют либо по карте, либо вычислением по измеренным зенитным расстояниям по формуле

$$h = s \operatorname{ctg} z + v + i - l, \qquad \text{(III.1.90)}$$

где i — высота инструмента; l — высота наблюдаемой точки над землей, либо выбирают из специальных таблиц [3].

Если в створе между пунктами расположено несколько препятствий, то необходимые высоты знаков подсчитывают для каждого препятствия отдельно и из них выбирают те, которые требуют максимального значения высот знаков.

После расчета высот знаков по всем направлениям подбирают выгоднейшую их комбинацию по каждой паре пунктов. Обычно экономически выгоднейшей высотой пары пунктов считается пара с наименьшей суммой высот. Однако на стоимость постройки знаков существенное влияние оказывают стоимость лесоразвозки и другие факторы, которые необходимо учитывать.

Определив выгоднейшую высоту какого-либо знака (лучше всего дальнего от препятствия) или в случае уже построенного знака определенной высоты необходимо откорректировать высоту второго пункта. Пусть, например, рассчитанную по формуле (III.1.87) высоту в пункте A (рис. III.1.11) пришлось изменить на $\Delta h_A = H'_A - H_A$ (новое значение высоты минус прежде рассчитанное). Тогда, пользуясь «правилом коромысла», можно определить изменение Δh_B рассчитанной по (III.1.87) высоты второго знака

$$\Delta h_B = -\Delta h_A \frac{s_B}{s_A}. \qquad \text{(III.1.91)}$$

Окончательное значение высоты знака в пункте B будет

$$H'_B = H_B + \Delta h_B. \qquad \text{(III.1.92)}$$

Для контроля определяют высоту знака графически (часто ограничиваются только графическим определением высот знаков).

Для этого на листе миллиметровой (клетчатой) бумаги (см. рис. III.1.10) проводят горизонтальную прямую и примерно в середине намечают точку C' (препятствие). Затем в определенном масштабе (например, принимая в 1 см — 1 км для горизонтального и в 1 см — 10 м для вертикального масштабов) по расстояниям s наносят точки расположения пунктов A' и B'. От полученных точек по вертикали вниз откладывают величину $a + v + h$ (если h имеет отрицательный знак, то его откладывают от точек $a + v$ по вертикали вверх) и получают основания знаков A и B. Измерив отрезок от основания знаков до горизонтальной прямой, определяют в соответствующем масштабе их высоту, обеспечивающую взаимную видимость пунктов. Если на одном из пунктов имеется уже построенный знак или по другим соображениям для него заранее была определена высота, то ее откладывают от основания знака по вертикали вверх, после чего, приложив линейку к полученной точке и точке C', получают высоту второго знака.

Если первоначальная высота знака получается отрицательной (выше горизонтальной линии, проходящей через C') или при корректировании высот линия пересекает вертикаль ниже точки основания второго знака, то это означает наличие взаимной видимости между пунктами с земли.

Расчет высот знаков очень упрощается применением различных палеток, а также специальных профильных бланков —листов бумаги с нанесенными концентрическими кривыми, изображающими уровенные поверхности (см. [3] и др.).

Если построенных знаков на определяемых пунктах не имеется, то оптимальную высоту для каждой пары пунктов, обеспечивающую наименьшие затраты на постройку сигналов, можно подсчитать по формулам М. И. Коробочкина

$$H'_1 = \frac{b}{s_1^2 + s_2^2} s_2; \qquad H'_2 = \frac{b}{s_1^2 + s_2^2} s_1, \qquad \text{(III.1.93)}$$

где

$$b = H_1 s_2 + H_2 s_1.$$

При проведении трилатерационных работ с использованием радиодальномеров с выносными приемо-передающими станциями на антеннах в 10—25 м обходятся без постройки высоких знаков, что существенно снижает себестоимость геодезических работ, облегчает их проектирование и упрощает рекогносцировку.

Г. ПОСТРОЙКА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗНАКОВ

Геодезические знаки состоят из двух основных частей: подземной части — центра пункта и устанавливаемого над ним наружного сооружения — геодезического сигнала.

Геодезические сигналы служат для обеспечения возможности проведения угловых измерений, свето- и радиодальномерных измерений расстояний и имеют приспособление для постановки инструмента, платформу для наблюдателя и визирное устройство.

Центры геодезических знаков закладывают в землю; они служат для обеспечения неизменного положения собственно геодезического пункта и его сохранности в течение продолжительного времени, а также для обозначения тех неподвижных точек, к которым приводятся все угловые и линейные измерения.

Условия проведения высокоточных геодезических измерений накладывают на сигналы следующие основные требования:

а. Сигнал должен быть устойчивым, т. е. обладать надлежащей сопротивляемостью опрокидыванию его ветром максимальной силы и не подвергаться перекосам под влиянием собственного веса. Это достигается надежным закреплением основных столбов сигнала в котлованах соответственной глубины, а также правильным соотношением между высотой, шириной основания и диаметром основных столбов. Для уменьшения осадки и вдавливания в грунт основные столбы устанавливают на прочные щиты (помосты), уложенные на дно котлованов, или на специальную забутовку (подушки). Глубина котлованов в зависимости от высоты сигнала установлена от 1 до 2,5 м.

б. Сигнал должен обладать значительной жесткостью, т. е. иметь малые упругие деформации частей и быстро восстанавливать свое первоначальное положение по прекращении действия сил, приводивших к его деформациям. Это достигается тщательной подгонкой отдельных деталей сигнала и правильным соотношением их длины и толщины.

Жесткость сигнала должна позволять выполнять наблюдения при ветре небольшой силы (до 4—5 м/сек), при этом вибрация сигнала не должна ощущаться.

в. Сигнал должен быть прочным, т. е. долговечным, с хорошей сопротивляемостью разрушению отдельных частей.

Это обеспечивается соответствующим подбором ассортимента строительного материала и правильным выбором места постройки. Большое значение при этом имеют толщина и крепление деталей. Для предохранения от гниения основные столбы в месте выхода их над земной поверхностью обжигаются или пропитываются специальным раствором, а заготовленный для постройки лесоматериал ошкуривается. Кроме указанных требований, при постройке сигналов должны соблюдаться условия симметричности формы сигнала относительно вертикальной оси, удобства и безопасности

наблюдений, подъема и спуска с него и прежде всего обеспечения видимости по всем запроектированным направлениям при минимальной высоте сооружения.

В зависимости от конструкции, высоты и подставки для угломерного инструмента геодезические сигналы строятся следующих типов: туры, пирамиды, простые сигналы и сложные сигналы.

Туры. В высокогорных и горных (не покрытых лесом) районах с открытым горизонтом и скальными грунтами устанавливают туры, представляющие собой каменные, кирпичные, бетонные или железобетонные столбы, возводимые над маркой, заложенной в скалу. Размеры их таковы: сечение фундамента 0,7 × 0,7 м, выступающей над поверхностью земли части 0,5 × 0,5 м, высота 1,20 м.

В верхнюю грань тура и поверхность фундамента строго над первой маркой закладывают вторую и третью марки.

Визирные приспособления крепят либо на специальных деревянных или металлических пирамидах, устраиваемых над туром, либо непосредственно на марке тура. Туры могут заменяться деревянными или металлическими штативами, устанавливаемыми над маркой центра.

Простые пирамиды. Простые пирамиды строят в открытых, всхолмленных и горных безлесных районах, где видимость на смежные пункты открывается с земли и визирный луч проходит на установленной высоте над препятствием. Они бывают трехгранными и четырехгранными и разделяются на: простые пирамиды, пирамиды со штативом и пирамиды с вехой. Общая высота (до верха визирной цели) простых пирамид и пирамид со штативом колеблется от 5 до 8 м. Сторона основания у них равна $^1/_3$ высоты. Высота штатива над помостом — 1,20 м. У пирамиды-вехи высота визирной цели над стыком основных столбов не должна превышать 5 м. Общая же высота может доходить до 20 м.

Простые сигналы. Простые сигналы состоят из двух строго изолированных друг от друга пирамид: внутренней, являющейся подставкой для инструмента, и наружной, несущей платформу для наблюдателя и визирную цель. Простые сигналы строятся высотой от 4 до 10 м, сторона их основания равна $^1/_5$ высоты до площадки наблюдателя плюс 2,0 м. Наружные пирамиды, как правило, четырехгранные, внутренние — трехгранные. Высота столика для инструмента над площадкой устанавливается в 1,20 м.

Сложные сигналы. Сигналы высотой от 11 до 40 м строятся в виде сложных трехгранных сигналов (до 1959 г. сигналы высотою свыше 13 м строились сложными четырехгранными).

Сложные сигналы представляют собой единую конструкцию, в которой внутренняя (инструментальная) пирамида, несущая столик для инструмента, не изолирована от наружной, а опирается на основные столбы последней на 6 м ниже площадки для наблюдателя. Обшивка граней сложного сигнала может иметь крестообразную или ромбическую форму.

Ширина основания сложных сигналов равняется $^1/_4$ их высоты до площадки наблюдателя плюс 2,0 м. Высота столика для инструмента над площадкой равна 1,20 м. У сигналов с ромбической решеткой граней ширина основания и площадка наблюдателя увеличены на 0,5 м.

При постройке сигнала следует обращать особое внимание на прочность изготовления инструментального столика и внутрен-

ней пирамиды, а также на полную ее изолированность от лестниц и площадки для наблюдателя.

Для астрономических наблюдений устанавливаются специальные столбы из кирпича или камня, скрепленные цементом. В исключительных случаях ставятся деревянные столбы.

Типы закладываемых центров зависят от физико-географических условий района работ, особенно от состава грунта и глубины промерзания почвы. Их изготовляют либо из бетона, либо из металлических труб, заполненных бетонным раствором и надежно защищенных от действия коррозии (в работах прежних лет встречаются центры из кирпичных или каменных кладок на цементном растворе). В бетонные блоки или трубы заделывают специальные чугунные марки, в центре которых находится полусфера с отверстием или крест, обозначающие точку, к которой приводятся все угловые и линейные измерения.

Как правило, в применявшихся до 1973 г. конструкциях центров имелось 2 марки: одна в основании, другая в верхней части центра. В настоящее время почти все типы центров имеют одну марку.

При наличии нескольких марок их оси должны находиться на одной отвесной линии. Если верхние марки не имеют номера, то у бетонных центров при изготовлении на верхней грани ставится порядковый номер.

С 1973 г. установлены новые типы центров и реперов государственной геодезической сети [17], рассчитанные на механизацию земляных работ и возможность централизованного изготовления их, а также на облегчение доступа к ним при привязке расположением верхних частей (марок) на уровне или выше земной поверхности и на обеспечение длительной сохранности знаков усилением элементов их внешнего оформления. В соответствии с этим в настоящее время центры изготавливаются в виде железобетонных пилонов или металлических труб, позволяющих при закладке использовать самоходные буровые установки, а также в виде железобетонных свай, закладываемых при помощи сваезабивных установок.

Конструкция центров определяется физико-географическими особенностями районов страны, на территории которой выделяются следующие зоны:

а) сезонного промерзания грунтов, состоящая из южной, более благоприятной и северной, менее благоприятной для устойчивости знаков зон, граница между которыми проходит по линии Ужгород — Харьков — Актюбинск — Караганда — Семипалатинск — оз. Зайсан;

б) многолетней мерзлоты, включающей южную, менее благоприятную, среднюю и северную, наиболее благоприятную для устойчивости знаков зоны. Граница между южной и средней зонами проходит примерно по линии Воркута — Новый Порт — Хантайка — Сунтар — Олекминск — Алдан — Аян; северная зона определяется глубиной протаивания грунтов до 1,25 м;

в) зона распространения подвижных песков, горных районов, заболоченных грунтов.

По окончании постройки знака со столика сигнала измеряют до минут магнитные азимуты направлений на все соседние пункты, а также высоту сигнала до столика и верха визирной цели, расстоя-

ния до ориентирных пунктов и азимуты на них. Все эти сведения заносят в специальный акт на построенный знак, где указывается также название знака, учреждение, партия, бригада, производившая постройку, тип знака, центра и ориентирного пункта.

По окончании работ по постройке знаков сдаются следующие документы:

1) схема ряда или сети с указанием построенных пунктов и их высот.

Схемы вычерчиваются в масштабе 1 : 500 000 (для 1 класса) или 1 : 300 000 (для сетей 2, 3 и 4 классов) с разграфкой на трапеции масштаба 1 : 100 000;

2) список построенных пунктов (по установленной форме);

3) приемочные акты на построенные знаки и карточки постройки пунктов;

4) акты сдачи знаков местным органам власти под наблюдение за сохранностью;

5) акты перезакладки центров и центрировочные листы;

6) объяснительная записка.

Организация работ строительной бригады зависит от физико-географических условий. Так, например, в районах с развитой транспортной сетью целесообразно изготовление центров и некоторых деталей знаков в централизованном порядке с последующей развозкой их по местам постройки. В Заполярье и труднодоступных районах выгодно штативы и даже простые пирамиды доставлять на место постройки в собранном виде на вертолетах. В таежных районах все части знаков изготавливают на месте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баргер А. Л., Вдовин М. М. и др. Руководство по постройке геодезических знаков. М., «Недра», 1969. 304 с.

2. Данилов В. В. Точная полигонометрия, 2 испр. изд. М., Геодезиздат, 1953. 256 с.

3. Друтман Г. В., Петров Н. А., Фельдман И. А. Справочное пособие по рекогносцировке пунктов триангуляции и полигонометрии. М., Геодезиздат, 1962. 220 с.

4. Дурнев П. И. Новые системы построения геодезических сетей. М., Геодезиздат, 1952. 249 с.

5. Заводовский А. В. Оценка точности элементов сплошной триангуляционной сети 1954 г. (Научные записки Львовского политехнического института. Вып. XVIII. Серия геодезическая, № 2), с. 3—70.

6. Заводовский А. В. Оценка точности линейных триангуляций. (Научные записки Львовского политехнического института. Серия геодезическая, № 5), Львов, 1959.

7. Иванов В. Ф. Составление технических проектов и смет на топографо-геодезические работы. М., Геодезиздат, 1959. 230 с.

8. Инструкция о построении государственной геодезической сети СССР. М., «Недра», 1966. 341 с.

9. Инструкция по топографической съемке в масштабах 1 : 5000, 1 : 2000, 1 : 1000, 1 : 500. М., «Недра», 1973. 176 с.

10. Красовский Ф. Н., Данилов В. В. Руководство по высшей геодезии. Ч. I, вып. 1. М., 1938. 419 с.
11. Основные положения о построении государственной опорной геодезической сети в СССР. М., ГУГК при СНК СССР, 1939. 12 с.
12. Основные положения о построении государственной геодезической сети СССР. М., Геодезиздат, 1961. 19 с.
13. Проворов К. Л. О точности сплошных сетей триангуляции. М., Геодезиздат, 1956. 163 с.
14. Проворов К. Л. О построении сплошных сетей триангуляции. М., Геодезиздат, 1957. 56 с.
15. Фурсов В. И. Геодезические сигналы и их постройка. М., Геодезиздат, 1953. 325 с.
16. Центры геодезических пунктов для территории городов, поселков и промышленных площадок. М., «Недра», 1972. 22 с.
17. Центры и реперы государственной геодезической сети СССР. М., «Недра», 1973. 38 с.

III.2. ВЫСОКОТОЧНЫЕ УГЛОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ТРИАНГУЛЯЦИИ

И. В. Яковлев

III.2.1. Высокоточные угломерные инструменты

Краткие сведения об угломерных инструментах. Согласно ГОСТ 10529—63 в настоящее время изготовляются только оптические теодолиты, которые подразделяются на высокоточные, точные и технические. Высокоточные теодолиты Т05 предназначаются для триангуляции и полигонометрии 1 класса, Т1 — для 2 класса, точные теодолиты Т2 — для сетей 3 и 4 классов. Наряду с этими теодолитами новых конструкций применяются теодолиты ТТ-2/6 в триангуляции и полигонометрии 1 класса, оптические теодолиты ОТ-02 и ОТ-02М — в сетях 2, 3 и 4 классов, теодолиты ОТС, ТБ-1 и другие, им равноценные, — в сетях 3 и 4 классов.

Основные технические характеристики высокоточных и точных угломерных инструментов приведены в табл. III.2.1.

Проверки угломерных инструментов. Принципиальная схема высокоточных угломерных инструментов включает следующие основные части:

1) р а б о ч у ю м е р у (рабочий эталон) — горизонтальный круг (лимб), имеющий деления, нанесенные с высокой степенью точности (сюда же относится и вертикальный круг);

2) о с е в у ю с и с т е м у, т. е. систему приспособлений для ориентирования инструмента относительно отвесной линии в данной точке земной поверхности; в нее входят вертикальная ось инструмента и точный уровень (накладной или при алидаде);

3) в и з и р н о е п р и с п о с о б л е н и е, т. е. зрительную трубу (главную и поверительную);

4) о т с ч е т н о е п р и с п о с о б л е н и е — микроскопы-микрометры или оптический микрометр.

Каждый инструмент, поступающий для производства работ, должен быть тщательно выверен, отъюстирован и исследован.

В задачу п о в е р о к и ю с т и р о в о к входит выявление отступлений от геометрических и оптико-механических требований, положенных в основу конструкции инструмента, и наиболее полное устранение этих отклонений.

И с с л е д о в а н и я предусматривают определение неустранимых отклонений с целью введения соответствующих поправок,

Таблица III.2.1

Основные характеристики инструмента	Инструменты			
	ТТ-2/6	ОТ-02М	Т05	Т1
1	2	3	4	5
Главная труба				
Диаметр объектива, мм	65	60	64	60
Фокусное расстояние, мм	520	348	500	350
Увеличение (крат)	52; 65	24; 30; 40	37; 50; 62	30; 40
Цена деления окулярного микрометра	1″	—	1″	1″
Ширина биссектора микрометра	30″	—	36 и 20″	40″
Наименьшее расстояние визирования, м	5	5	5	5
Поверительная труба				
Диаметр объектива, мм	36	36		
Фокусное расстояние, мм	360	360		
Увеличение (крат)	30	30		
Поле зрения	1°	1°		
Цена деления окулярного микрометра	1, 4″	1, 4″		
Ширина биссектора	35″	35″		
Горизонтальный круг				
Диаметр круга, мм	220	135	180	135
Цена наименьшего деления круга	5′	10′	10′	10′
Отсчетное приспособление				
а) вид микрометра	Винтов. микром.	Оптический микрометр		
б) цена деления барабана	2″	0,5″	1″	1″
Вертикальный круг				
Диаметр круга, мм	160	90	130	90
Цена деления круга	10′	20′	10′	10′

Продолжение табл. III.2.1

Основные характеристики инструмента	Инструменты			
	ТТ-2/6	ОТ-02М	Т0.5	Т1
1	2	3	4	5
Отсчетное приспособление				
а) вид	Шкалов. микром.	Оптический микрометр		
б) цена деления . . .	6″	1″	1″	1″
Цена деления уровня (сек на 2 мм)				
Накладного	2—3	—	4	5
На алидаде горизонтального круга	—	6—7	6—7	7
При алидаде вертикального круга	6—10	10—12	10—12	12
Масса инструмента, кг				
Без упаковки	27,5	10,8	18,8	11
В упаковочных ящиках (футлярах)	44	18,5 *	34	17 *
Масса штатива	—	8	—	8

* С учетом массы центровочной плиты.

уменьшающих влияние этих отклонений на результат; определение постоянных инструмента (цены деления уровней, цены деления окулярных микрометров главной и поверительной труб и т. п.); испытание работы отдельных механизмов и частей инструмента (микрометров, направляющих, микрометренных винтов и т. п.); определение ошибок делений шкал и винтов измерительных приспособлений; установление степени влияния внешних условий на отдельные части и на инструмент в целом и т. д.; наконец, установление пригодности инструмента (по результатам исследований) для производства работ данного класса точности.

Поверки теодолитов с винтовыми микроскопами-микрометрами

Поверки теодолитов выполняют в определенной последовательности. Бо́льшую часть поверок выполняют в предположении, что вертикальная (основная) ось инструмента занимает отвесное положение и сохраняет его неизменным при вращении алидады. Поскольку ориентирование инструмента относительно отвесной линии

осуществляется при помощи уровня, то и поверки начинают с поверки уровня, приведя предварительно, насколько это возможно при невыверенном уровне, вертикальную ось в отвесное положение.

1. *Ось накладного уровня должна находиться в одной плоскости с осью вращения трубы и быть ей параллельной.*

Для выполнения первой части поверки вращением алидады устанавливают уровень по направлению двух подъемных винтов и, действуя ими, приводят пузырек уровня точно на середину. Затем осторожно покачивают уровень в обе стороны на горизонтальной оси трубы и следят за пузырьком. Если пузырек при покачивании уровня не смещается, то первое условие выполнено. В противном случае уровень необходимо исправить боковыми исправительными винтами при нем.

Вторую часть этой поверки (поверку равенства подставок уровня) выполняют таким образом. Подъемными винтами приводят пузырек уровня на середину, фиксируют отсчеты по концам пузырька (достаточно по одному) и затем переставляют уровень на оси трубы на 180°. Разность отсчетов по одному из концов пузырька даст двойную величину неравенства подставок уровня в делениях его. Исправления производят перемещением пузырька уровня на одну половину дуги отклонения вертикальными исправительными винтами при уровне, а на вторую половину — подъемными винтами инструмента. Если пузырек после перекладывания уровня на оси на 180° смещается от исходного положения на величину не более двух делений, то уровень можно не исправлять, а пользоваться так называемым м е с т о м н у л ь п у н к т а уровня, т. е. средним из отсчетов по концам пузырька, взятым при двух положениях уровня. Практически можно ограничиться средним отсчетом только по одному из концов пузырька и пользоваться им при последующей нивелировке инструмента, фиксируя отклонение пузырька от этого среднего отсчета.

2. *Вращение алидады должно быть правильным, легким и плавным.*

Неравномерное (из-за резко различного трения), тугое или слишком свободное вращение алидады недопустимо и должно быть устранено. Первым признаком неправильного вращения алидады являются периодические изменения показаний уровня (на величину более одного деления, т. е. на 3″ и более) при повороте алидады точно через 360° и соответственно периодические изменения разности отсчетов $M_Б - M_A$ по микроскопам-микрометрам.

Регулирование вращения алидады осуществляют при помощи регулировочного винта-грибка. Если это не приводит к цели, то надо сменить смазку вертикальной оси инструмента.

3. *Ось вращения трубы должна быть перпендикулярна к вертикальной оси вращения инструмента.*

Вращением алидады устанавливают накладной уровень по направлению двух подъемных винтов и, действуя ими, приводят пузырек уровня на середину (в нульпункт). Затем приподнимают уровень, поворачивают алидаду точно на 180° и опускают уровень на ось трубы *. Если пузырек уровня не сместится, то поверка выпол-

* Если первая поверка выполнена точно, то алидаду можно вращать вместе с уровнем, не снимая его с горизонтальной оси; так же можно поступать и при пользовании нульпунктом уровня.

пена. В противном случае для исправления перемещают пузырек уровня на одну половину дуги отклонения его от середины исправительными винтами при подстановке оси вращения трубы, а на вторую половину — подъемными винтами инструмента. Неперпендикулярность осей в инструментах, используемых для угловых измерений в триангуляции 1—2 классов, не должна превышать 5″ (двух делений уровня теодолита ТТ-2/6).

4. *Вращение зрительной трубы вокруг ее оси, осуществляемое при помощи наводящего винта, должно быть правильным.*

Трубу наводят на нитяной отвес и вращают ее около оси при помощи наводящего винта. Если при наклонах трубы в диапазоне изменения зенитных расстояний от 87 до 93° будут замечены отклонения визирной оси от нити отвеса, то при производстве угловых измерений пользоваться наводящим винтом трубы не следует впредь до устранения отмеченного недостатка.

5. *Микроскопы-микрометры должны быть установлены правильно.*

А. При установке биссектора в нульпункт отсчет по барабану микрометра должен быть равен нулю.

Б. Рен микроскопа-микрометра должен быть не более $^1/_2$ наименьшего деления отсчетного барабана. Под реном понимают разность между номинальным n_0 и действительным числом n делений барабана микрометра, укладывающихся в наименьшем делении лимба, т. е.

$$r = n_0 - n.$$

Прежде чем исправить рен, надо приближенно определить его величину. Чтобы не делать лишней работы, обычно перед этой поверкой исследуют правильность работы винта микрометра, где попутно получают приближенное значение репа. Если такое исследование не сделано, то приближенную величину рена определяют таким образом. Один штрих лимба устанавливают в нульпункте микроскопа. Затем биссектор (если их два, то пользуются только одним из них) наводят ввинчиванием винта последовательно сначала на ближайший штрих слева от нульпункта, далее на штрих в нульпункте и, наконец, на штрих справа от нульпункта и каждый раз берут отсчеты по барабану микрометра: a_i, b_i, c_i. Вычитая из последующего отсчета предыдущий, получают два приближенных значения рена

$$r_i = c_i - b_i \text{ и } r_i' = b_i - a_i.$$

Такие определения рена делают на трех-четырех произвольных установках лимба и затем из всех значений r_i и r_i' выводят среднее r_0, которое и принимают за приближенную величину рена.

Если рен окажется больше $^1/_2$ наименьшего деления барабана, то его исправляют: при положительном рене ($r_0 \gtrdot 0$) надо выдвинуть объективную трубку из тубуса микроскопа, а сам тубус поднять в обоймах настолько, чтобы отчетливо были видны деления лимба; при отрицательном недопустимом рене ($r_0 \lessdot 0$) объективную трубу вдвигают внутрь тубуса микроскопа, а весь микроскоп опускают в обоймах до тех пор, пока не будут отчетливо видны штрихи лимба. Рен исправляют последовательными приближениями,

Окончательную величину рена определяют из специальных исследований.

В. Отклонение угла между микроскопами-микрометрами от 180° должно быть не более 20″. Этот малый угол d вычисляют по формуле

$$d = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

где

$$v_1 = M_Б - M_A - 180^\circ,$$

$$v_2 = M_Б^{(180)} - M_A^{(180)} - 180^\circ.$$

Здесь $M_Б$ и M_A — отсчеты по микроскопам $Б$ и A на произвольной установке лимба; $M_Б^{(180)}$ и $M_A^{(180)}$ — отсчеты при той же установке лимба, но при положении алидады, отличающемся от первоначального на 180°.

Если угол $|d| > 20''$, то его необходимо уменьшить. Для этого, вращая алидаду, целесообразно микроскоп A установить на отсчет M_A, а на барабане микроскопа $Б$ установить число секунд, равное отсчету $M'_Б = M_Б - d$. Так как в этом случае биссектор микроскопа $Б$ окажется в стороне от младшего штриха лимба (на угол d), то, придерживая рукой барабан микроскопа-микрометра $Б$ на нужном отсчете $M'_Б$, необходимо повернуть винт этого барабана до тех пор, пока левый биссектор не совместится с младшим штрихом лимба. Затем надо сместить «гребенку» в микрометре так, чтобы отсчет в нульпункте был равен нулю. Для контроля поверку следует повторить на другой установке алидады, отличающейся от первоначальной примерно на 90°.

6. *Визирная ось трубы должна быть перпендикулярна к оси вращения ее.*

В высокоточных угломерных инструментах двойная величина *коллимационной ошибки* не должна превышать 20″ ($2c < 20''$). Исправление производят вращением винта барабана окулярного микрометра при неподвижном положении самого барабана, причем с последующим смещением гребенки микрометра (нуль барабана должен соответствовать положению биссектора в нульпункте гребенки).

7. *Нити биссектора окулярного микрометра должны быть установлены вертикально.*

При тщательно отнивелированном инструменте поверку выполняют путем наведения биссектора микрометра на удаленную точку и вращением трубы в вертикальной плоскости. Нить биссектора при вращении трубы должна оставаться на данной точке, в противном случае исправления производят поворотом коробки микрометра, предварительно открепив стопорный винт.

8. *Место зенита вертикального круга должно быть близким к нулю.*

Место зенита и зенитное расстояние вычисляют по формулам

$$Mz = \frac{1}{2}(КЛ + КП) \pm 180^\circ,$$

$$z = \frac{1}{2}(КЛ - КП) \pm 180^\circ = КЛ - Mz = Mz - КП.$$

Место зенита исправляют при помощи исправительных винтов уровня, установленного при алидаде вертикального круга инструмента.

Поверки оптических теодолитов

Поскольку многие поверки оптического теодолита мало отличаются от соответствующих поверок теодолитов с винтовыми микроскопами-микрометрами, то ниже приводится описание только ряда дополнительных поверок.

Подъемные и микрометренные винты должны иметь плавный ход без люфта и заедания.

Ход подъемных винтов регулируют регулировочными винтами при них. Ход микрометренных (наводящих) винтов регулируют пружинами в гильзах и гайками при этих винтах.

Ось цилиндрического уровня при алидаде горизонтального круга должна быть установлена перпендикулярно к оси вращения инструмента.

Поверку выполняют путем поворота алидады точно на 180°, причем делают ее на двух взаимно перпендикулярных установках алидады.

Правильность вращения алидады проверяют путем поворота алидады точно через 360°. Смещение пузырька уровня в теодолитах типа Т1 и ОТ-02 не должно превышать 0,5 деления. Недопустимое колебание вертикальной оси устраняют только в заводских условиях.

При поверке изображений горизонтального и вертикального кругов необходимо обратить внимание на следующее:

а) индекс оптического микрометра при установке секунд на нуль должен совпадать с совмещенными изображениями диаметрально противоположных штрихов лимба;

б) освещенность поля зрения отсчетного микроскопа должна быть равномерной;

в) линия раздела между верхними и нижними изображениями штрихов лимба должна быть тонкой, прямой и без заметных утолщений;

г) не должно быть перекосов изображений штрихов лимба;

д) изображения штрихов лимба и диска секунд должны быть видны одновременно и резко, без перефокусировки окуляра.

Неперпендикулярность оси вращения трубы к вертикальной оси инструмента в теодолитах типа Т1 и ОТ-02 не должна превышать 5″.

Правильность хода фокусирующей линзы зрительной трубы проверяют по разностям отсчетов, сделанных по горизонтальному кругу при двух положениях вертикального круга на удаленную и на близко расположенную (в 5—6 м) точки. Несовпадение разностей (КЛ—КП) для дальней и ближней точек свидетельствует о неправильном ходе фокусирующей линзы. Исправление производят в мастерской или на заводе.

Место зенита в теодолитах типа Т1 и ОТ-02 должно быть близким к нулю.

Исправляют его посредством регулировочного винта при уровне так, чтобы при наведении зрительной трубы на какую-либо удаленную точку и совмещении концов пузырька уровня сумма

отсчетов по вертикальному кругу при КЛ и КП была равна 180°,

$$Mz = КЛ + КП - 180°,$$

$$z = КП - КЛ + 90°.$$

Исследование угломерных инструментов. В каждом высокоточном инструменте должны быть исследованы:

О с е в а я с и с т е м а вместе с подставкой и уровнем (накладным или при алидаде). Определяют цену деления и качество уровней, исследуют правильность вращения алидадной части, определяют влияние люфта подъемных винтов на результаты угловых измерений.

Г о р и з о н т а л ь н ы й к р у г. Определяют ошибки диаметров и эксцентриситет круга.

В и з и р н о е п р и с п о с о б л е н и е. Исследуют качество оптики главной и поверительной труб, определяют цены оборотов окулярных микрометров, ошибки винта микрометра (ходовые и периодические), правильность хода фокусирующей линзы, правильность вращения трубы вокруг горизонтальной оси (при пользовании наводящим винтом трубы), постоянство коллимационной ошибки, эксцентриситет визирной оси.

О т с ч е т н ы е п р и с п о с о б л е н и я. В винтовых микроскопах-микрометрах определяют ошибки винтовой пары (винта и гайки), «мертвый» ход винта, испытывают правильность работы микрометра, точно определяют значение рена. В оптических микрометрах с качающимися плоскопараллельными пластинками исследуют систематические ошибки микрометра, случайные ошибки совмещения изображений штрихов круга (для горизонтального и вертикального), мертвый ход отсчетного барабана. В микромстрах с оптическими клиньями выполняют эти же исследования, за исключением мертвого хода, который в данном микрометре не имеет места.

Перед выездом на полевые работы выполняют только часть перечисленных исследований инструмента, а именно: правильность работы микрометров и рен, эксцентриситет горизонтального круга, правильность вращения алидадной части, правильность вращения трубы вокруг ее оси, систематические ошибки из-за люфта подъемных винтов, постоянство коллимационной ошибки трубы. Полные же исследования инструмента проводят при получении его с завода, а также после капитального ремонта инструмента.

Ниже приводятся краткие замечания по некоторым видам исследований инструментов.

1. Ошибки диаметров горизонтального круга высокоточных угломерных инструментов могут быть исследованы с целью:

а) введения поправок в каждый измеренный угол или направление; в этом случае разности поправок любой пары диаметров должны быть получены с одинаковыми весами, а сами поправки — для всех диаметров, причем с ошибками не более $\pm 0{,}1''$;

б) установления качества разделения круга и пригодности его для производства высокоточных угловых измерений; в настоящее время круги исследуют обычно через 1—3°, при этом удовлетворительными считают круги, полные ошибки диаметров которых не превышают 1,2 и 1,5″ соответственно для теодолитов типа ТТ-2/6 и Т1 или ОТ-02; при этом в теодолитах ТТ-2/6, в порядке исключения,

допускаются ошибки до 1,4″, но не более чем для двух диаметров;

в) установления характера изменения систематических ошибок делений круга и использования выявленной закономерности изменений их для последующей разработки методов борьбы с влиянием этих ошибок в процессе угловых измерений на пункте;

г) контроля работы делительной машины.

В настоящее время поправки за ошибки диаметров круга не вводят в измеренные углы в триангуляции из-за сложности точного определения их величины и наличия сравнительно простых путей заметного ослабления влияния ошибок диаметров на конечные (уравненные) результаты измерений на станции. Тем не менее техника и качество разделения кругов высокоточных инструментов нуждаются в дальнейшем совершенствовании и повышении точности нанесения делений.

2. Под эксцентриситетом горизонтального круга подразумевают несовпадение центра вращения круга с центром кольца делений на нем. Хотя эксцентриситет круга и не оказывает никакого влияния на результаты измерений (на среднее по диаметрально противоположным штрихам круга), тем не менее рекомендуется, чтобы он не превышал 20″.

3. Под эксцентриситетом алидады подразумевают несовпадение проекции оси вращения алидады на лимб с центром кольца делений на лимбе (при данной конкретной ориентировке круга относительно подставки инструмента). Однако с точки зрения условий изготовления инструмента, в механико-технологическом смысле, под эксцентриситетом алидады понимают несовпадение проекции оси вращения алидады на лимб с центром вращения его.

Наибольшее совместное влияние эксцентриситета лимба и алидады на разность отсчетов по микроскопам будет в том случае, когда центр кольца делений лимба и центр оси вращения алидады будут находиться на одной прямой по разные стороны от центра вращения лимба.

Правильность вращения алидады инструментов с микроскопами-микрометрами испытывают перестановкой ее через 30°, начиная от 0°, на трех следующих один за другим оборотах алидады по ходу часовой стрелки и трех оборотах ее в обратном направлении. В оптических теодолитах с саморегулирующейся системой осей делают по одному прямому и обратному оборотам. При каждой установке алидады фиксируют отсчеты по горизонтальному кругу и показания накладного уровня.

При удовлетворительной регулировке вращения алидадной части разности v отсчетов $M_Б$ и $M_А$ по микроскопам $Б$ и $А$

$$v = M_Б - M_А - 180^\circ$$

должны изменяться по закону синуса: отклонения этих разностей от синусоиды, вычисленной по материалам исследований, у теодолитов ТТ-2/6 не должны превышать 10″; абсолютные же значения разностей v должны быть меньше 40″. Если абсолютные значения превышают 40″, но колебания отдельных значений не выходят из этого предела, то необходимо по окончании исследований исправить угол между микроскопами.

Синусоида вычисляется по формуле

$$v''_A = f'' \sin(M_A - P) + d,$$

где M_A — отсчет по микроскопу A; значения величин f, P и d находят по формулам

$$\operatorname{tg} P = \frac{\sin P}{\cos P} = \frac{-[v \cos M_A]}{[v \sin M_A]},$$

$$f = -\frac{2[v \cos M_A]}{n \sin P} = \frac{2[v \sin M_A]}{n \cos P},$$

$$d = \frac{[v]}{n},$$

здесь d — отклонение угла между микроскопами от 180°; $v = M_Б - M_A - 180^\circ$ — разности отсчетов между микроскопами $Б$ и A; n — число установок алидады в окружности.

Величина f (амплитуда синусоиды) связана с линейным элементом эксцентриситета e и с радиусом R лимба соотношением

$$f'' = \frac{2e}{R} \rho''.$$

При исследовании эксцентриситета алидады (лимба) оптических теодолитов на каждой установке алидады (лимба) сначала совмещают изображения диаметрально противоположных штрихов лимба (отсчет t), а затем изображение штриха алидады (лимба) с неподвижным индексом (отсчет t'). Изменение разностей $v = 2(t - t')$ и характеризует влияние эксцентриситета алидады (лимба). По результатам исследований строят график изменения величин v и вписывают в него синусоиду. Колебания величин v должны быть меньше 40″, а отклонения их от плавной кривой (синусоиды) не должны превышать 15″. Алидаду (лимб) переставляют через 30°.

4. Окончательное определение р е н а отсчетных микроскопов производят на разных установках алидады, равномерно распределенных по всей окружности (обычно через 30°), ослабляя тем самым влияние ошибок диаметров круга на величину рена. Программа и порядок исследований зависят от типа отсчетного микрометра.

Рен винтового микрометра с одним биссектором вычисляют как разность отсчетов при наведении биссектора на старший b и младший a штрихи лимба

$$r = b - a.$$

При наличии двух биссекторов в микроскопе (теодолиты типа ТТ-2/6) рен вычисляют по формуле

$$r = \rho - \sigma,$$

где $\rho = b - a$ (разность отсчетов при наведении правого биссектора на старший штрих и левого бассектора на младший штрих); σ — отличие расстояния Δ между двумя биссекторами от номинального значения его Δ_0, т. е. $\sigma = \Delta - \Delta_0$.

В целях ослабления влияния на рен ошибок винта микрометра, ошибок делений отсчетного барабана и его эксцентричной посадки исследования ведут на различных установках барабана, симметрично распределенных по всей его окружности и по всей рабочей части винта (в пределах одного наименьшего деления лимба и вблизи нульпункта микроскопа).

Если величина рена превышает половину наименьшего деления барабана микрометра (для ТТ-2/6 — 1″), то в результаты измерений вводят поправки

$$\Delta r = \frac{r''}{i} \cdot \frac{a+b}{2}\ \mu,$$

где цена i наименьшего деления лимба и средний отсчет $\frac{a+b}{2}\ \mu$ по микроскопу-микрометру должны быть выражены в одних и тех же единицах (в минутах).

Реном оптического микрометра называют разность номинальной величины полуделения круга и его величины, определенной при помощи микрометра. В оптических теодолитах рен определяют отдельно для верхнего и нижнего изображений круга:

$$r''_{\text{в}} = (a-b)\,\mu + \frac{i}{2},$$

$$r''_{\text{н}} = (a-c)\,\mu + \frac{i}{2},$$

$$r = \frac{1}{2}(r_{\text{в}} + r_{\text{н}}),$$

где i — цена наименьшего деления на лимбе в секундах; μ — цена деления шкалы оптического микрометра в секундах; a — отсчет в делениях по оптическому микрометру около нуля его шкалы при совмещении штрихов лимба A и $(A + 180°)$; b — отсчет в делениях по оптическому микрометру в конце его шкалы при совмещении штрихов лимба A — i и $(A + 180°)$; c — отсчет в делениях по оптическому микрометру также в конце шкалы, но при совмещении штрихов лимба A и $(A + 180° - i)$.

Среднее значение рена $r = \frac{1}{2}(r_{\text{в}} + r_{\text{н}})$ и разности $r_{\text{в}} - r_{\text{н}}$ не должны превышать 0,5″ у теодолитов Т1 и ОТ-02 и 1″ у теодолитов типа Т2. Если величина рена превышает указанные допуски, то его исправляют или в результаты измерений вводят поправку за рен

$$\Delta r'' = \frac{2c}{i}\, r'',$$

где c — отсчет по микрометру при совмещении диаметрально противоположных штрихов лимба, выраженный в минутах; i — номинальная цена наименьшего деления на лимбе в минутах.

5. В удовлетворительных винтовых микроскопах-микрометрах периодические ошибки винта лежат обычно в пределах 0,3—0,8 мкм, ходовые ошибки — в пределах 0,5—1,5 мкм на шесть — восемь оборотов винта. Для исключения ошибок при наблюдениях за мерт-

вый ход винта рекомендуется последнее движение винта при наведении биссектора на штрих (на визирную цель) делать только на ввинчивание его.

Для ослабления влияния ходовых ошибок резьбы винта окулярного микрометра измерение направлений следует вести на одной и той же части винта (барабана), не допуская отклонений отсчетов на барабане окулярного микрометра от нуля более ± 5 делений.

6. В исправных оптических микрометрах средняя квадратическая ошибка одного совмещения штрихов у теодолитов Т1 и ОТ-02 не должна превышать 0,3″ для горизонтального круга и 0,6″ для вертикального круга; у теодолитов типа Т2 эти величины должны быть соответственно меньше 0,5 и 0,6″. Мертвый ход микрометра в теодолитах ОТ-02 не должен превышать 1″.

III.2.2. Источники ошибок при высокоточных угловых измерениях

Личные ошибки. При визуальном методе высокоточных угловых измерений в триангуляции личные ошибки систематического характера возникают главным образом из-за ошибочной оценки положения оси симметрии наблюдаемых предметных целей (визирных цилиндров, штрихов лимба и т. п.). При наблюдениях на световые цели резко различной яркости влияние личных ошибок на измеренный угол может достигать 1,5″ и более. Такие ошибки могут быть заметно уменьшены путем выравнивания яркости целей по всем наблюдаемым направлениям или путем применения окулярной поворотной призмы.

Для ослабления влияния ошибок, возникающих из-за различного освещения штрихов лимба, в высокоточных угломерных инструментах применяют электрическое освещение кругов.

Инструментальные ошибки. При измерении горизонтальных углов в триангуляции предполагается, что вертикальная ось инструмента совпадает с направлением отвесной линии в данной точке, лимб и ось вращения трубы перпендикулярны к вертикальной оси вращения теодолита, визирная ось трубы лежит в плоскости большого круга инструмента и ось вращения алидады проходит через центр лимба, а центр лимба совпадает с центром кольца делений на нем. Отступления от этой геометрической схемы инструмента порождают соответствующие ошибки. В эту группу инструментальных ошибок входят ошибки, возникающие из-за:

1) неперпендикулярности визирной оси к оси вращения трубы (коллимационная ошибка);
2) наклона горизонтальной оси вращения трубы;
3) наклона вертикальной оси вращения инструмента;
4) наклона (негоризонтальности) плоскости лимба;
5) эксцентриситета алидады;
6) эксцентриситета лимба.

Рассмотрим влияние этих ошибок на результаты угловых измерений.

К о л л и м а ц и о н н а я о ш и б к а. Под коллимационной ошибкой зрительной трубы понимают малый угол c, образуемый визирной осью трубы с плоскостью большого круга инструмента. Влияние коллимационной ошибки на направление, измеренное

при одном положении трубы (КП или КЛ), выражается формулами

$$N = \text{КП} + \frac{c}{\sin z}, \quad N \pm 180° = \text{КЛ} - \frac{c}{\sin z},$$

где N — истинное значение направления; КП и КЛ — измеренные значения направления; z — зенитное расстояние визирной цели. Влияние же этой ошибки на угол между точками A и B, измеренный также при одном положении трубы, выражается формулами

$$N_B - N_A = \text{КП}_B - \text{КП}_A + c\left\{\frac{1}{\sin z_B} - \frac{1}{\sin z_A}\right\},$$

$$N_B - N_A = \text{КЛ}_B - \text{КЛ}_A - c\left\{\frac{1}{\sin z_B} - \frac{1}{\sin z_A}\right\}.$$

Из приведенных формул следует, что значения направлений и углов, полученных как среднее из результатов измерений их при двух положениях трубы (КП и КЛ), свободно от влияния коллимационной ошибки. При измерении направлений только при одном положении трубы (только при КП или только при КЛ) в угол войдет ошибка Δc, равная

$$|\Delta c| = c\left\{\frac{1}{\sin z_B} - \frac{1}{\sin z_A}\right\}.$$

При $z_A = z_B$ величина $\Delta c = 0$. При $z_A \neq z_B = 90 \pm 2°$, как это иногда имеет место в триангуляции, и при $2c = 20''$ максимальное остаточное влияние коллимационной ошибки на угол, измеренный при одном положении трубы, составляет около $0{,}01''$.

Значение коллимационной ошибки c вычисляют по формуле

$$c = \frac{\text{КЛ} - \text{КП}}{2} \sin z.$$

При $z = 90°$ получим $2c = \text{КЛ} - \text{КП}$. Значение двойной величины коллимационной ошибки не должно превышать $20''$.

Наклон горизонтальной оси вращения трубы может происходить либо от наклона вертикальной оси инструмента, либо от неравенства подставок трубы, включая и неравенство диаметров цапф. Будем полагать, что наклон горизонтальной оси на угол i обусловлен только неравенством подставок трубы, включая и неравенство диаметров цапф, и что влияние других ошибок равно нулю.

Влияние наклона i горизонтальной оси вращения трубы на направление, измеренное при одном положении трубы, выражается формулами

$$N = \text{КП} + \frac{i}{\operatorname{tg} z}, \quad N \pm 180° = \text{КЛ} - \frac{i}{\operatorname{tg} z},$$

где z — зенитное расстояние наблюдаемой цели.

Влияние же наклона оси трубы на угол между точками A и B, измеренный также при одном положении трубы, выражается формулами

$$N_B - N_A = КП_B - КП_A + i\left\{\frac{1}{\operatorname{tg} z_B} - \frac{1}{\operatorname{tg} z_A}\right\},$$

$$N_B - N_A = КЛ_B - КЛ_A - i\left\{\frac{1}{\operatorname{tg} z_B} - \frac{1}{\operatorname{tg} z_A}\right\}.$$

Из приведенных формул следует, что значение угла, полученное как среднее из результатов измерений при двух положениях трубы (КП и КЛ), свободно от влияния наклона оси трубы. При измерении направлений только при одном положении трубы (только при КП или только при КЛ) в угол войдет ошибка Δi, равная

$$|\Delta i| = i\left\{\frac{1}{\operatorname{tg} z_B} - \frac{1}{\operatorname{tg} z_A}\right\}.$$

При $z_A = z_B$ $\Delta i = 0$; при $i = 5''$ и $z_B = 92°$, $z_A = 88°$, как это иногда имеет место в триангуляции, $\Delta i = 0{,}35''$. Как видно, измерения при наклонной линии визирования надо проводить с осторожностью и так, чтобы при данной установке инструмента одна половина измерений была исполнена при одном положении трубы, а другая — непременно при другом положении ее. При наблюдениях теодолитами типа ТТ-2/6 необходимо в этом случае особенно тщательно нивелировать горизонтальную ось вращения трубы.

Наклон вертикальной оси инструмента на малый угол δ относительно отвесной линии в данной точке вызывает наклон оси вращения трубы на малый угол q, равный

$$q = \delta \sin t,$$

где t — угол, ориентирующий трубу инструмента (визирную цель) относительно вертикальной плоскости, в которой лежит наклоненная на малый угол δ ось вращения инструмента.

Влияние наклона q на направление, измеренное при одном положении трубы (КП или КЛ), выражается формулами

$$N = КП + \frac{q}{\operatorname{tg} z}, \quad N \pm 180° = КЛ + \frac{q}{\operatorname{tg} z},$$

а влияние ее на угол, измеренный между точками A и B также при одном положении трубы, — формулами

$$N_B - N_A = КП_B - КП_A + \frac{q_B}{\operatorname{tg} z_B} - \frac{q_A}{\operatorname{tg} z_A},$$

$$N_B - N_A = КЛ_B - КЛ_A + \frac{q_B}{\operatorname{tg} z_B} - \frac{q_A}{\operatorname{tg} z_A}.$$

Влияние наклона q на угол, полученный как среднее из наблюдений при двух положениях трубы, равно

$$N_B - N_A = \frac{КП_B + КЛ_B}{2} - \frac{КП_A + КЛ_A}{2} + \frac{q_B}{\operatorname{tg} z_B} - \frac{q_A}{\operatorname{tg} z_A}.$$

Таким образом, влияние наклона q оси вращения трубы, являющегося следствием наклона вертикальной оси инструмента, не исключается из результатов измерений. При $q_{max} = 5''$, как это допускается в триангуляции 1—2 классов, и $z = 90° \pm 2°$ значение величины $\frac{q}{\operatorname{tg} z}$ равно $0{,}17''$. При неблагоприятном стечении обстоятельств, например при $z_A = z_B$ и $q_A = -q_B$ или при других сочетаниях этих величин, влияние наклона вертикальной оси на измеренный угол может быть в два раза больше указанной величины. Поэтому при тщательно выверенном теодолите, когда наклон вертикальной оси составляет около $\delta = 5''$, его влиянием на измеренный угол можно пренебречь только в том случае, если зенитные расстояния наблюдаемых целей уклоняются от $90°$ не более чем на $1°$. В остальных случаях, при $z = 90 \pm 1°$ и более, в измеренные направления необходимо вводить соответствующие поправки за наклон вертикальной оси инструмента. Это относится в особенности к горным районам работ и крупным городам, где колебания зенитных расстояний могут быть значительными.

П о п р а в к у Δ в направление за наклон вертикальной оси инструмента вычисляют по формуле

$$\Delta = \frac{I}{\operatorname{tg} z},$$

где $I = q + i$ — общий наклон горизонтальной оси вращения трубы, обусловленный совместным влиянием наклона вертикальной оси инструмента, неравенством подставок трубы и неправильностями вращения алидады, вызывающими дополнительный наклон оси трубы; z — зенитное расстояние наблюдаемой цели.

Общий наклон оси трубы при наведении ее на данное направление определяют при помощи уровня (накладного или при алидаде) и вычисляют по формуле

$$I = b\frac{\tau''}{2},$$

где b — наклон оси, выраженный в полуделениях уровня, а $\tau''/2$ — цена полуделения уровня.

Наклон оси b, определенный при помощи уровня, на котором подпись делений возрастает от одного конца ампулы к другому, вычисляют по формуле

$b = M - (л_1 - п_1)$ (нуль уровня слева от направления: инструмент — визирная цель)

или

$b = (л_2 + п_2) - M$ (нуль уровня справа от направления: инструмент — визирная цель),

где значение M (место нульпункта уровня, выраженное в полуделениях его) вычисляют по формуле

$$M = \frac{(л_1 + п_1) + (л_2 + п_2)}{2}.$$

В этих формулах $л_1$, $п_1$ — отсчеты по уровню, когда нуль ампулы находится слева от направления: инструмент — наблюдаемый пункт, а $л_2$, $п_2$ — отсчеты, когда нуль справа (после перевода трубы через зенит или после перекладки накладного уровня на горизонтальной оси).

В случае иной подписи делений на ампуле уровня наклон оси b вычисляют по другим формулам.

Влияние наклона (негоризонтальности) лимба на измеренное направление выражается формулой

$$(y - x)'' = \frac{\omega''^2}{4\rho''} \sin 2y,$$

где x — отсчет по горизонтально установленному лимбу при наведении трубы на предмет; y — отсчет при том же положении трубы, но при наклоне лимба на малый угол ω относительно горизонта. При $\omega = 60''$ и $\sin 2y = 1$ получим $(y - x) = 0{,}004''$. Неперпендикулярность лимба к оси инструмента больше $2'$ не следует допускать, так как в этом случае будет наблюдаться расфокусировка отсчетных микроскопов.

Эксцентриситет алидады вызывает сдвиг нульпунктов микроскопов и изменение рена. Влияние эксцентриситета алидады на отсчеты по диаметрально противоположным микроскопам A и $Б$ выражается формулами

$$M_A = M'_A + \varepsilon'' \sin (M'_A - P) + \Delta r,$$

$$M_Б = M'_Б - \varepsilon'' \sin (M'_A - P) - \Delta r,$$

где M_A, $M_Б$ — отсчеты по микроскопам, свободные от влияния эксцентриситета; M'_A, $M'_Б$ — фактические отсчеты; $\varepsilon'' = (e/R)\,\rho''$ — так называемый угловой эксцентриситет алидады; e — линейный элемент эксцентриситета (расстояние между центром кольца делений лимба и проекцией на лимб центра вращения алидады); P — угол, ориентирующий линейный элемент эксцентриситета относительно нулевого штриха на лимбе; R — радиус кольца делений лимба; Δr — изменение рена микроскопа, обусловленное влиянием эксцентриситета алидады.

Максимальное значение Δr не превосходит величины $n_0 \frac{\varepsilon''}{\rho''}$, причем погрешность Δr в отсчет по одному микроскопу входит со знаком плюс, а в отсчет по другому микроскопу — со знаком минус. Ошибка в отсчете, обусловленная изменением рена из-за эксцентриситета алидады, пренебрегаемо мала: даже при $\varepsilon = 60''$ она составляет для теодолита ТТ-2/6 всего лишь $0{,}05''$ (при $n_0 = 150$ д).

Из приведенных выражений для M_A и $M_Б$ следует, что при выводе среднего значения из отсчетов по двум диаметрально

противоположным штрихам лимба влияние эксцентриситета на измеренное направление полностью исключается.

Эксцентриситет лимба при выводе среднего отсчета по диаметрально противоположным штрихам круга практически, как уже отмечалось, никакого влияния на измеряемое направление не оказывает, однако при изготовлении инструмента он должен быть доведен до минимума.

Ошибки делений лимба подразделяют на случайные и систематические. Последние делят еще на длиннопериодические, по величине плавно изменяющиеся по всей окружности лимба, и на короткопериодические (внутриградусные) с периодом изменения около 15—30′. Полная ошибка Δ_u градусного деления с номером u, отстоящего от нуля лимба на угол u, состоит из двух слагаемых

$$\Delta_u = \Delta(u) + \delta_u,$$

где $\Delta(u)$ — систематическая (длиннопериодическая) ошибка, а δ_u — случайная ошибка этого же деления.

При современном состоянии делительной техники случайные ошибки штрихов лимба обычно в несколько раз меньше систематических. По техническим условиям на изготовление горизонтальных кругов высокоточных теодолитов полные ошибки диаметров * не должны превышать 1,2 и 1,5″ соответственно у теодолитов ТТ-2/6 и Т1 или ОТ-02, а короткопериодические ошибки должны быть не более 1″.

Систематические ошибки делений обычно представляют в виде периодической функции

$$\Delta(u) = c_0 + c_1 \sin(u + b_1) + c_2 \sin 2(u + b_2) + \\ + c_3 \sin 3(u + b_3) + \ldots + c_n \sin n(u + b_n),$$

где $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — некоторые постоянные для данного лимба величины, определяемые из исследований. Если теодолит имеет p (обычно $p = 2$) равномерно установленных по кругу отсчетных микроскопов и направления на пункты измерены m приемами с перестановкой круга между приемами на один и тот же угол $q = 360°/pm$, то остаточное влияние систематических ошибок делений лимба на измеренное направление будет равно

$$m_\Delta = c_0 + c_{pm} \sin pm(u + b_{pm}) + c_{2\,pm} \sin 2pm(u + b_{2\,pm}) + \ldots$$

Так, например, при двух микроскопах и двенадцати приемах

$$m_\Delta = c_0 + c_{24} \sin 24(u + b_{24}) + c_{48} \sin 48(u + b_{48}) + \ldots$$

По мнению проф. Ф. Н. Красовского, остаточное влияние систематических ошибок диаметров лимба на направление, измеренное 12-ю приемами, составляет не более $\pm 0{,}25''$; в современных теодолитах и того меньше — 0,10—0,15″.

Влияние ошибок визирования и отсчета на измеренный угол уменьшается многократными наблюдениями, а также соответствующим методом измерений.

---

* Под ошибкой диаметра понимают среднее арифметическое из значений ошибок двух диаметрально противоположных штрихов лимба.

Полагают, что средняя квадратическая ошибка отсчета по одному микроскопу-микрометру теодолита ТТ-2/6 составляет $\pm 0{,}35''$, а средняя квадратическая ошибка совмещения штрихов горизонтального круга теодолитов Т1 и ОТ-02 не превышает $\pm 0{,}3''$. Средние квадратические ошибки визирования $m_в$ на цели, аналогичные визирному цилиндру высотой в 1 м и диаметром 0,5 м, видимому на расстоянии 10 км, и цели в виде далеко расположенных шпилей приведены (по С. В. Елисееву) в табл. III.2.2.

Таблица III.2.2

Наименование теодолита	Увеличение трубы	$m''_в$
2-секундный теодолит ТТ-2/6	65	$\pm 0{,}3$
То же	52	0,4
Оптический ОТ-02	40	0,5
То же	27	0,9

В данной таблице указаны значения случайных ошибок визирования. Однако при неблагоприятном стечении обстоятельств может иметь место и п о с т о я н н а я л и ч н а я ошибка при визировании. Ф. Н. Красовский приводит следующую формулу для наибольшей ошибки наведения:

$$\frac{u}{18}+\Delta,$$

где u — угловое расстояние между нитями биссектора (рекомендуемое в 35—40″), а Δ — личная ошибка наблюдателя. Последняя зависит в основном от величины контраста цели и фона, на который проектируется цель, и может быть различной для разных направлений. При наблюдениях на световые цели она нередко искажает измеренный угол на величину до 1,5″.

Различного рода инструментальные ошибки, появление которых связано с вращением алидады и с плавными изменениями температуры воздуха и инструмента в процессе измерений углов (увлекание столика сигнала при вращении инструмента, влияние люфта подъемных винтов, незначительные гнутия частей инструмента и упругие последствия, ход визирных осей трубы и микроскопов и т. п.), могут быть заметно ослаблены, если измерения направлений и углов ведутся по симметричной программе как в смысле симметричного наблюдения направлений во времени внутри каждого отдельного приема, так и в смысле симметричного расположения частей инструмента относительно каждого наблюдаемого направления.

Боковая рефракция света. Одним из основных источников ошибок при высокоточных угловых измерениях в триангуляции является в л и я н и е в н е ш н и х у с л о в и й, главным образом б о к о в о й рефракции. Надо различать качество изображений, колебания их и явление рефракции. Качество изображений зависит от степени замутненности атмосферы мельчайшими частицами пыли или воды и от степени теплообмена между поверхностью

почвы и прилегающим к ней слоем воздуха. Колебания изображений наблюдаемых целей вызываются конвекционными токами воздуха в приземном слое атмосферы; интенсивность колебаний тем больше, чем выше температура поверхности почвы, чем больше разность температур почвы и воздуха и чем ближе к поверхности проходит визирный луч. Угловые измерения в триангуляции разрешается вести только на спокойные и слегка колеблющиеся изображения при хорошей и удовлетворительной видимости наблюдаемых целей. Следует иметь в виду, что визирование выполняется достаточно уверенно только при колебаниях изображений, не выходящих за пределы 2″. Применение окулярного микрометра в этом случае дает хорошие результаты. Поднятие визирного луча над препятствиями местности на несколько метров способствует улучшению качества изображений и уменьшению влияния боковой рефракции местного характера.

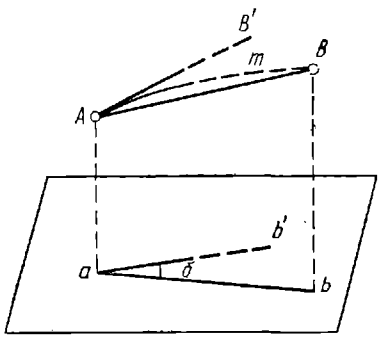


Рис. III.2.1

В силу различной плотности среды световой луч проходит от точки A к точке B среды не по прямой AB, а по сложной кривой двоякой кривизны оптически кратчайшим путем AmB, условно показанным на рис. III.2.1. Наблюдатель, находясь в точке A, увидит изображение предмета B не в направлении AB, а по касательной AB' к последнему элементу световой кривой AmB в точке A. Угол $B'AB$ называется углом рефракции (рефракцией) в точке A. Горизонтальная составляющая его δ называется углом боковой рефракции (боковой рефракцией), а вертикальная составляющая этого угла — углом вертикальной рефракции (вертикальной рефракцией). В то время как при больших расстояниях вертикальная рефракция достигает минуты и более, боковая рефракция не превышает нескольких секунд. Однако наличие боковой рефракции делает точное измерение горизонтальных углов сложной проблемой и, по существу, ограничивает дальнейшее повышение точности этих измерений.

Различают большие (областные) и малые (местные) поля боковой рефракции (поля $\nabla_\Gamma n$ — горизонтального градиента показателя преломления воздуха). Большие поля рефракции обусловлены общим географическим распределением плотности воздуха от экватора к полюсу, в прибрежных зонах морей и океанов, вблизи горных хребтов и т. д. Такие большие поля боковой рефракции по их свойствам близки к однородным ($\nabla_\Gamma n \cong \text{const}$). Влияние их в триангуляции 1 класса на направления длиной 25—30 км составляет в среднем около 0,2″ и носит систематический характер. Ослабляется оно в процессе уравнивания звеньев триангуляции за условия азимутов Лапласа.

Рефракция местного происхождения обусловлена местными аномалиями плотности воздуха на пути визирного луча. При небла-

гоприятном стечении обстоятельств ошибки в углах и азимутах, обусловленные влиянием местных полей рефракции, могут достигать 3—7″ и более. Средняя квадратическая величина влияния местных полей рефракции на точность угловых измерений в триангуляции высших классов составляет в среднем $\pm 0{,}4$--$0{,}6''$, а на точность определения азимутов на пунктах Лапласа — $\pm 0{,}6$—$0{,}8''$.

Вследствие большого разнообразия подстилающей поверхности местная рефракция в сетях триангуляции имеет случайное распределение, хотя по отдельным направлениям она носит характер систематических ошибок.

Боковая рефракция δ зависит от наклонов к горизонту эквипотенциальных поверхностей $n = \text{const}$, где n — показатель преломления воздуха, а следовательно, от метеорологических элементов и градиентов их. Эта зависимость без учета пренебрегаемо малого влияния влажности воздуха (составляющего менее 1% от δ), может быть выражена формулой

$$\delta = \varepsilon + \sigma,$$

где для неоднородного поля ($\nabla_r n \neq \text{const}$)

$$\varepsilon = \frac{0{,}74}{s \sin z} \int_0^s \frac{p}{T^2} \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q)(s - y)\, dy,$$

$$\sigma = \frac{21{,}7}{s \sin z} \int_0^s \frac{p}{T^2} \frac{\partial T}{\partial H} \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q)(s - y)\, dy$$

и для однородного поля ($\nabla_r n = \text{const}$)

$$\varepsilon = 0{,}37 \frac{p}{T^2} \frac{s}{\sin z} \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q),$$

$$\sigma = 10{,}8 \frac{p}{T^2} \frac{s}{\sin z} \frac{\partial T}{\partial H} \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q).$$

В этих выражениях: δ — поправка в измеренное направление за влияние боковой рефракции (в секундах дуги), s — длина визирного луча по хорде, стягивающей концы его (м), y — расстояние по хорде от начальной точки луча до текущей (м), p — давление воздуха (мм), $T = 273{,}2 + T^\circ\,\text{C}$ — абсолютная температура его (в градусах Кельвина), $dT/dH \approx (T_2 - T_1)/(H_2 - H_1)$ — вертикальный градиент температуры воздуха (градус/метр), γ — угол, отсчитываемый от точки зенита до вектора ∇n, направленного в сторону уменьшения $n = n(X, Y, H)$, A и Q — азимуты измеряемого направления и вектора ∇n соответственно, отсчитываемые по ходу часовой стрелки от оси X, направленной на север, к оси Y, направленной на восток, z — зенитное расстояние наблюдаемой цели.

Составляющая σ отражает в первую очередь влияние местных полей боковой рефракции, а составляющая ε — влияние рефракци-

онных полей значительного протяжения. В общем случае, т. е. при $\varepsilon + \sigma \neq 0$ и $A \neq Q$ имеем

$$\delta = 0, \quad \text{если} \quad (\operatorname{tg}\gamma)_s = 0.$$

Однако в подавляющем числе случаев наклоны $\operatorname{tg}\gamma$ на всем пути визирного луча длиною s не равны нулю. Поэтому

$$\varepsilon \to 0, \quad \text{если} \quad (\operatorname{tg}\gamma)_s \to 0,$$

$$\sigma \to 0, \quad \text{если и/или} \quad \left.\frac{\frac{\partial T}{\partial H}}{\operatorname{tg}\gamma}\right|_s \to 0.$$

В триангуляции, как отмечалось выше, $|\sigma| > |\varepsilon|$. Поэтому основное внимание должно быть направлено на существенное ослабление влияний местных полей боковой рефракции (составляющей σ). Заметим, что при $\sigma \to 0$ и $\varepsilon \to 0$.

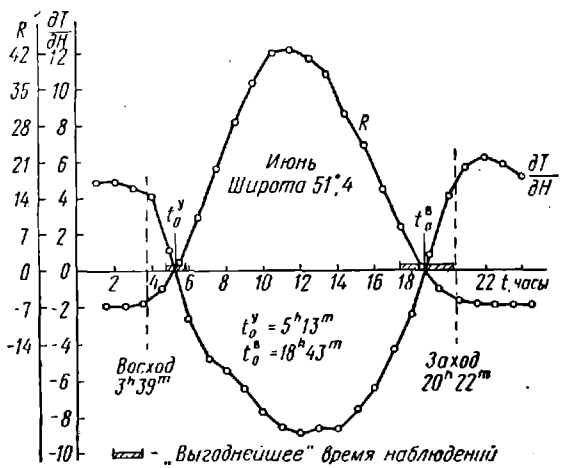


Рис. III.2.2. Суточный ход радиационного баланса R (кал/см² · ч) и вертикальных градиентов температуры воздуха $\frac{\partial T}{\partial H}$ (градус/100 м) на высоте метеобудки в открытой местности (среднее за июнь)

Из физики атмосферы известно, что в нижнем 300-метровом слое атмосферы, в котором ведутся наблюдения пунктов триангуляции, вертикальные градиенты температуры в суточном ходе их дважды в сутки (утром в момент времени t_0^y, наступающий через 1—2 часа после восхода Солнца, и вечером в момент времени $t_0^в$, наступающий за 1—2 часа перед его заходом) переходят через нуль, изменяя в эти моменты времени всякий раз знаки на противоположные (рис. III.2.2).

Под воздействием суточного хода рефракции каждое измеряемое направление (касательная к последнему элементу световой кривой в точке приема света) также испытывает суточный ход (см. рис. III.2.4). В связи с этим возникает задача учета суточного хода измеряемых направлений при высокоточных угловых измерениях и азимутальных определениях с целью приведения (редуцирования) их результатов к определенным физическим условиям, когда влияние боковой рефракции равно или почти равно нулю. Так как на двух-трехчасовом отрезке времени в окрестности моментов t_0, когда обычно измеряются горизонтальные углы в триангуляции, температурные градиенты, а следовательно, и функционально связанная с ними боковая рефракция изменяются во времени практически линейно и, переходя через нуль, изменяют знаки на противоположные, то отсюда вытекает простой и в то же время эффективный способ почти полного исключения влияний местных полей боковой рефракции из результатов наблюдений, впервые экспериментально установленный в работе [5] и теоретически обоснованный в диссертации [6]. Суть его сводится к тому, что в нижнем 300-метровом слое атмосферы горизонтальные направления (углы и азимуты) надо: — *либо измерять симметрично во времени относительно среднего момента t_0 «нулевых» градиентов температуры воздуха на высоте визирного луча, сочетая, по возможности, вечерние и утренние наблюдения и вычисляя среднее из результатов всех измерений*; — *либо редуцировать результаты измерений на моменты времени t_0 в случае асимметричных наблюдений.*

В массовых работах по высокоточным угловым измерениям целесообразно использовать первый путь приведения измеренных направлений и углов к соответствующим моментам наименьших рефракционных влияний — к моментам «изотермии» воздуха t_0, т. е. постановку симметричных во времени наблюдений каждого направления (угла) относительно этих моментов «изотермии», к которым в утренние и вечерние часы приурочены, как известно, наиболее спокойные и четкие изображения визирных целей.

Второй же, аналитический способ приведения результатов высокоточных измерений к соответствующим моментам «изотермии», требующий выполнения ряда условий в процессе наблюдений на каждом пункте, целесообразно использовать при обработке асимметричных измерений, исполняемых в специальных сетях повышенной точности и в первую очередь при определении азимутов на пунктах Лапласа.

Горизонтальные углы (направления) β, измеренные в течение **нескольких** вечеров не менее чем 15—18 приемами каждый на отрезке времени ($t_{\text{нач}} < t_0 < t_{\text{кон}}$) $\leqslant$ 2—3 часа, могут быть редуцированы на средний на пункте момент вечерней «изотермии» воздуха x_0 (t_0), вычисляемый относительно моментов захода Солнца. Редуцирование углов выполняется по формуле

$$\beta_0 = \beta + k\,(x_0 - x),$$

где β — среднее из приемов значение угла, k — часовое изменение этого угла ($|k| = ''/ч$), x — среднее по приемам время наблюдений на пункте, вычисленное относительно моментов захода Солнца, $k\,(x_0 - x) = \delta$ — поправка за асимметрию времени наблюдений или, что то же самое, поправка за влияние рефракции.

Часовые изменения k вычисляют по методу наименьших квадратов из обработки наблюдений в приемах, представляемых по подобию табл. III.2.3. Отметим, что экстраполяция наблюдений на моменты «изотермии» x_0 не допускается и что должны быть предусмотрены меры, позволяющие получить надежные значения часовых изменений углов и моментов времени x_0. Приближенные (многолетние) моменты времени $x_0 \approx x_0'$ даны на рис. III.2.3 и в табл. [6]. Их надо исправить поправками за метеорологические условия и высоту визирного луча над местностью.

Таблица III.2.3

Время наблюдений в приемах $x_l = t_{зах} - t_l$ (до 0,01 ч.)	Результаты наблюдений в приемах $y_l = \alpha_l - u$ (до 0,01″)
x_1	y_1
x_2	y_2
. . .	. . .
x_n	y_n

Практика [6] показала, что в триангуляции 2 класса часовые изменения k углов треугольников колеблются от 0 до $\pm 3''$/ч и равны в среднем $\pm 0{,}7''$/ч; асимметрия времени наблюдений $\Delta x = (x_0 - x)$ на пунктах в разных физико-географических условиях изменяется от 0 до ± 2 ч, а поправки $\delta = k\,(x_0 - x)$ в углы треугольников за рефракцию колеблются от 0 до $\pm 1{,}6''$.

Редуцирование азимутов земных предметов на момент наименьших рефракционных влияний. Азимуты, определяемые на пунктах Лапласа, рекомендуется в целях почти полного исключения влияний на них боковой рефракции редуцировать на момент вечерней «изотермии» воздуха x_0 по формуле

$$\alpha_0 = u + \bar{y}_0,$$

где

$$\bar{y}_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2;$$

здесь u — приближенное значение азимута, округленное до целого десятка секунд, α_0 — значение азимута после редуцирования его на средний на пункте момент времени x_0, когда влияние боковой рефракции практически равно нулю, a_l — коэффициенты, определяемые по методу наименьших квадратов из обработки наблюденных в приемах значений азимута y_i, задаваемых в виде табл. III.2.3, в которой для каждой даты вечерних наблюдений обозначено: $t_{зах}$ — время захода Солнца и t_l — время определений азимута α_i в приемах, выраженное в системе среднего солнечного времени.

В процессе наблюдений азимута должны быть выполнены следующие требования.

1. Определение азимута должно начинаться не позднее чем за 1—2 ч до наступления момента «изотермии» в слое воздуха на высоте визирного луча, азимут которого определяется *, т. е. за

* Моменты «изотермии» t_0 в первом приближении можно определить используя величины x_0' на рис. III.2.5, откуда

$$t_0 \approx t_0' = t_{зах} - x_0'.$$

2—3 ч до захода Солнца на широтах 40—65°, и продолжаться в ночные часы при благоприятных условиях наблюдений земного предмета.

2. На двух-трехчасовом промежутке времени перед заходом Солнца должно быть исполнено не менее 7—8 приемов определений азимута (в целом за все дни наблюдений).

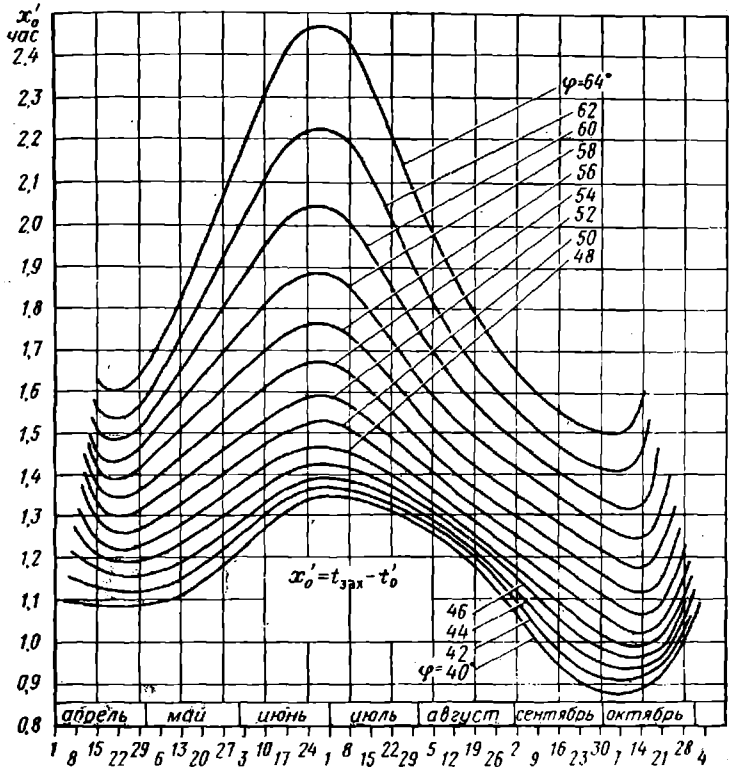


Рис. III.2.3. Время перехода через нуль радиационного баланса и вертикальных градиентов температуры воздуха в суточном ходе их на высоте 2 м над подстилающей поверхностью между широтами 40—64° и долготами 30—130° (время x_0' дано в часах относительно момента захода верхнего края диска Солнца: $t_0' < t_{зах}$)

3. Приемы определений азимута должны быть распределены по времени равномерно на всем отрезке вечерних и ночных часов наблюдений (в целом за все дни работы на астропункте) (рис. III.2.4).

4. Значения азимута в приемах не должны уклоняться более чем на $\pm 2''$ в обе стороны от параболы второго порядка, наилучшим образом аппроксимирующей суточный ход наблюденных значений азимута в приемах (см. рис. III.2.4); разность между

наибольшим и наименьшим значениями азимута в приемах не должна превышать 6′.

5. Повторение (бисирование) не укладывающихся в допуски значений азимута в приемах следует начинать с отработки первого

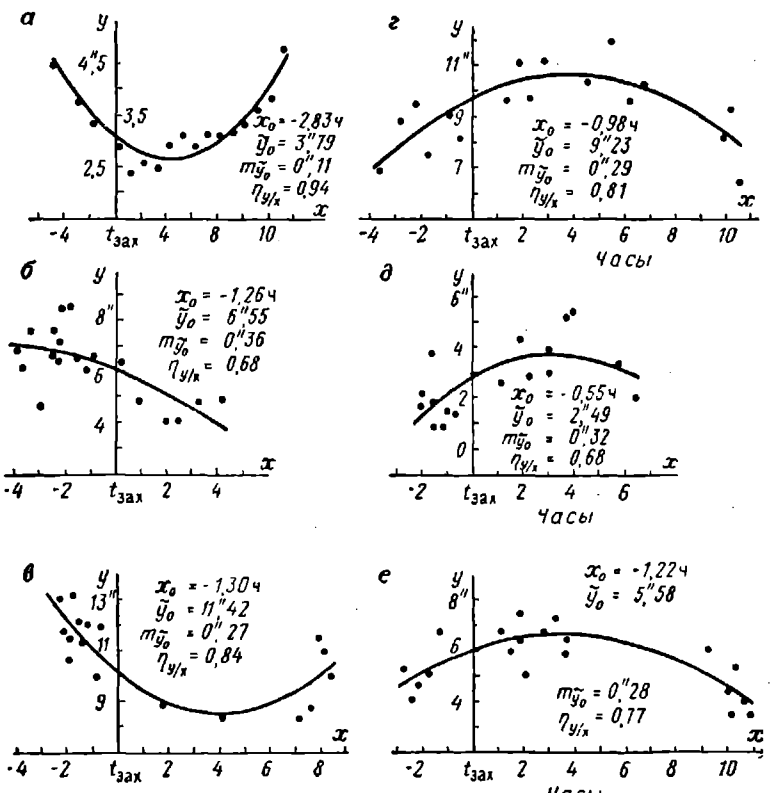


Рис. III.2.4. Аппроксимация суточного хода азимутов земных предметов на пунктах Лапласа (б— е) и горизонтального направления (а) при помощи полинома $\tilde{y}_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 x \frac{2}{t}$. Точками показаны результаты наблюдений в приемах; $m_{\tilde{y}_0}$ — средняя квадратическая ошибка азимута $\tilde{y}_0$, средуцированного на момент x_0; $\eta_{y/x}$ — корреляционное отношение

допуска $\pm 2^g$ и так, чтобы повторный прием по времени наблюдений не уклонялся от основного более чем на ± 2 ч (целые сутки в расчет не принимаются). В последующую обработку включают среднее из основного и повторного приемов (время наблюдений также осредняют), если это среднее значение азимута отклоняется от аппроксимирующей кривой не более чем на $\pm 2^g$; в противном слу-

чае в обработку берут только повторный прием (при соблюдении допуска $\pm 2^{\prime\prime}$).

Отметим, что азимуты, результаты наблюдений которых не удовлетворяют перечисленным выше требованиям, **нельзя** редуцировать на момент наименьших рефракционных влияний. **Экстраполяция** наблюденных значений азимута на момент времени x_0 **не допускается**.

Средний за все дни наблюдений на астропункте момент наименьших рефракционных влияний x_0 вычисляют в часах относительно момента захода Солнца по формуле

$$x_0 = -x_0' + \varepsilon_m' + \varepsilon_h',$$

где

$$x_0' = \frac{\sum n_j x_{0,\,j}'}{\sum n_j}, \quad \varepsilon_m' = \frac{\sum n_j \varepsilon_{m,\,j}'}{\sum n_j},$$

$$\varepsilon_h' = 1{,}30h\,[1 - (0{,}6976 - 0{,}00264\varphi)\,h + 0{,}064h^2].$$

В этих формулах: φ — широта астропункта (в градусах, причем $40 \leqslant \varphi \leqslant 64°$, а долгота его $30 \leqslant \lambda \leqslant 130°$); h — эквивалентная высота визирного луча над местностью (в сотнях метров, причем $0 \leqslant h \leqslant 3$); n_j — число приемов определений азимута в j-ый вечер, включая вечерние и ночные (до и после полуночи) наблюдения; $x_{0,\,j}'$ — многолетний для j-ой даты на широте астропункта момент времени нулевой величины радиационного баланса подстилающей поверхности (на стандартной высоте метеобудки — 2 м над почвой), см. рис. III.2.3 и табл. [6]; $\varepsilon_{m,\,j}'$ — поправка (в часах) за метеоусловия в районе астропункта в j-ую дату наблюдений азимута; ε_h' — поправка (в часах) за высоту визирного луча над местностью.

Поправки $\varepsilon_{m,\,j}'$ вычисляют по формуле

$$\varepsilon_{m,\,j}' = Q\left\{\frac{273{,}2 + T\,^{\circ}\mathrm{C})^4}{273{,}2 + T_0\,^{\circ}\mathrm{C})^4} \cdot \frac{1 - 0{,}026e}{1 - 0{,}026e_0} \cdot \frac{1 - A_0}{1 - A} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1 - 0{,}42n\,(n+1)}{1 - 0{,}42n_0\,(n_0+1)} \cdot \frac{1 - (a + 0{,}38n_0)\,n_0}{1 - (a + 0{,}38n)\,n} - 1 \right\},$$

где для каждой j-ой даты средние суточные значения температуры воздуха T° С, упругости водяного пара e (мм), общей облачности n (в долях единицы) получают из наблюдений на ближайших к астропункту метеостанциях, симметрично расположенных вокруг него в радиусе до 50 км в закрытой местности и до 100 км — в открытых (степных и полупустынных) районах. По данным всех метеостанций вычисляют средние значения. Многолетние средние суточные величины этих же метеоэлементов — T_0°С, e_0, n_0, а также многолетнее альбедо A_0 (в долях единицы), коэффициенты a и Q и величины x_0' выбирают по широте астропункта и дате наблюдений азимута из таблиц [6]. Для определения по таблицам среднего значения альбедо местности A надо зафиксировать в окрестности астропункта вид почвы и растительного покрова. Во многих случаях можно принять $A = A_0$. При отсутствии метеостанций в районе работ метеоэлементы следует измерять непосредственно на астропункте

(на высоте не ниже 2 м над почвой) через каждые три часа и затем выводить средние суточные значения их. Измерения метеоэлементов рекомендуется выполнять в 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 и 22 часа декретного времени, как это принято на метеостанциях.

Пример вычисления поправок ε'_{m_i} (в часах) на астропункте

Широта φ	Дата	Число приемов n_j	$\varkappa'_0$	$\frac{t\,°C}{T_0\,°C}$	$\frac{e}{e_0}$	$\frac{A}{A_0}$	$\frac{n}{n_0}$	σ	Q	ε'_{m_i}
57,9°	26.08. 1968 г.	5	1,45	$\frac{20,8}{15,0}$	$\frac{14,8}{8,3}$	$\frac{0,17}{0,17}$	$\frac{0,10}{0,64}$	0,384	1,35	—0,13

Для определения эквивалентной высоты h визирного луча составляют профиль местности по створу азимута, используя карты масштаба 1 : 100 000. Затем профиль разбивают на отдельные участки ΔS_l по числу наиболее характерных точек излома местности, как показано на рис. III.2.5. Отрезки Δs_l нумеруют по порядку от точки стояния угломерного инструмента до визирной цели на конце линии и затем измеряют их длины в плоскости горизонта (до 0,1 км). Далее намечают середину каждого отрезка Δs_l и измеряют в этой точке текущую высоту h_l визирного луча (в метрах) над земной (подстилающей) поверхностью. В случае, когда длина визирного луча более 20 км, при измерении h_l учитывают влияние кривизны Земли и рефракции. Результаты обработки профиля записывают в таблицу.

Параметры профиля местности (см. рис. III.2.5)

l	Δs_l, км	h_l, м
1	4,3	75
2	1,7	135
3	1,7	81
4	1,5	78
5	1,7	93
6	3,3	24

Длина стороны $Q = 14{,}2$ км

Контроль: $\sum \Delta s_l = 14{,}2$ км

Эквивалентная высота $h = 0{,}84$ сотни метров

Эквивалентную высоту h визирного луча над местностью вычисляют в точке стояния инструмента по формуле

$$h_{(\text{сотни м})} = 0{,}01\,\frac{\sum \Delta s_l \left(1 - \frac{d_l}{s}\right) h_l}{\sum \Delta s_l \left(1 - \frac{d_l}{s}\right)},$$

где

$$d_l = \frac{1}{2}\Delta s_l + \sum_{i=1}^{n} \Delta s_{l-1}$$

$$(l = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

$$2 \leqslant h_l \leqslant 500 \text{ м};$$

при $l = 1$ имеем $\Delta s_{l-1} = \Delta s_0 = 0$.

Обозначения, принятые в этих формулах, ясны из рис. III.2.5. Вычисленную высоту h подставляют затем в формулу для поправки ε'_h.

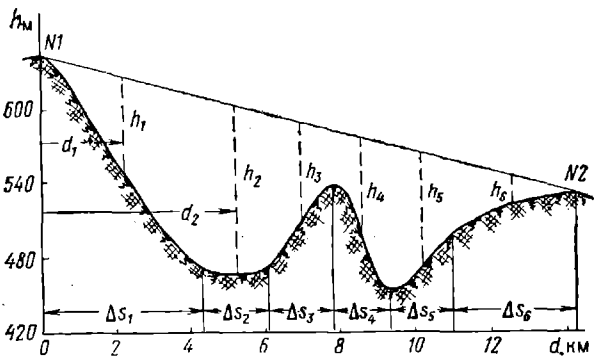


Рис. III.2.5. Профиль местности

Найдя величины x'_0, ε'_m и ε'_h, вычисляют искомый момент времени x_0, на который и редуцируют результаты определений азимута.

Ниже дан пример редуцирования азимута на момент времени x_0, где обозначено: m — средняя квадратическая ошибка определения азимута из одного приема; n — число приемов; σ — среднее квадратическое отклонение азимута от аппроксимирующей кривой; μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса из уравнивания; $\eta_{y/x}$ — корреляционное отношение, характеризующее тесноту стохастической связи величины азимута и времени наблюдений его; m_{α_0} — средняя квадратическая ошибка азимута, средуцированного на момент времени x_0.

Величину влияния рефракции δ на азимут можно найти в первом приближении как разность $\delta = \alpha - \alpha_0$, где α и α_0 — значения азимута до и после редуцирования его на момент времени x_0. Практика [6] показала, что на пунктах Лапласа влияние рефракции на азимуты земных предметов (на среднее из 18 приемов) колеблется от 0 до $\pm 2{,}5''$. Средняя квадратическая величина ее равна в среднем 0,6—0,8″. Благодаря редуцированию азимутов на соответствующие моменты времени x_0 влияние рефракции на азимуты почти полностью исключается, а вес определения их увеличивается.

Редуцирование азимута на момент наименьших рефракционных влияний

$x_0 = -1{,}30$ ч

Дата	Время наблюдений в приемах $x_i = t_i - t_{зах}$	Результаты наблюдений азимута $y_i = \alpha_i - u$	Сглаженные значения азимута y_i
22/VIII 1968 г.	−2,32 ч	13,09	12,62″
	−1,95	10,63	12,16
	−1,60	11,82	11,75
	−1,20	12,05	11,31
	−0,77	11,95	10,87
	+4,05	8,53	8,53
	+8,07	10,98	10,18
	+8,37	10,00	10,43
23/VIII 1968 г.	−2,12	11,80	12,37
	−1,93	11,45	12,14
	−1,80	13,15	11,98
	−1,50	12,09	11,64
26/VIII 1968 г.	+1,72	8,93	8,54
	+4,12	8,62	9,08
	+7,17	8,40	9,52
	+7,52	8,85	9,76
	+7,83	11,43	9,99
28/VIII 1968 г.	−0,90	10,09	11,00

Среднее $\bar{x} = -1{,}82$ ч $\qquad \bar{y} = 10{,}77''$

$c_{11} = +0{,}139007$ $\qquad a_0 = +10{,}1839$ $\qquad m = 1{,}58''$

$c_{12} = +0{,}036915$ $\qquad a_1 = -0{,}8165$ $\qquad \sigma = 0{,}86$

$c_{13} = -0{,}007346$ $\qquad a_2 = +0{,}1011$ $\qquad \mu = 0{,}91$

$c_{22} = +0{,}028408$ $\qquad \eta_{y/x} = 0{,}84$

$c_{23} = -0{,}004322$

$c_{33} = +0{,}000742$ $\qquad n = 18$

Результаты редуцирования азимута на $x_0 = -1{,}30$ ч

$$\bar{y}_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = 11{,}42''$$

$$m_{\alpha_0} = m_{\bar{y}_0} = \mu \sqrt{c_{11} + 2c_{12}x_0 + (c_{22} + 2c_{13})x_0^2 + 2c_{23}x_0^3 + c_{33}x_0^4} = 0{,}27''$$

Вычисление окончательного значения азимута $\alpha_0 = u + \bar{y}_0 + \sum\Delta$:

$$u = 207^\circ\,34'\,00{,}00''$$
$$\bar{y}_0 = \quad 11{,}42$$
$$\sum\Delta = \quad -1{,}24$$
$$\alpha_0 = 207^\circ\,34'\,10{,}18''$$
$$m_{\alpha_0} = 0{,}27''$$

u — приближенное значение азимута, округленное до целого десятка секунд;

$\sum\Delta$ — сумма поправок в азимут, предусмотренных Инструкцией [4].

Обозначения:

$\bar{y}_i$ — аппроксимирующая функция:

$$\bar{y}_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2;$$

c_{ij} — элементы матрицы, обратной матрице коэффициентов нормальных уравнений, из решения которых находятся коэффициенты a_j

Оценочные элементы:

$$m = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}, \qquad v_i = y_i - \bar{y}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{n-1}}, \qquad \delta_i = y_i - \bar{y}_i$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{n-3}} = \sigma\sqrt{\frac{n-1}{n-3}}$$

$$\eta_{y/x} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{m^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum \delta_i^2}{\sum v_i^2}}$$

в среднем в 2,5 раза. Кроме того, в ряде случаев удается избежать повторных перенаблюдений взаимно обратных азимутов, если недопустимые по величине расхождения их обусловлены существенным влиянием рефракции.

Выгоднейшее время измерения горизонтальных углов в триангуляции. Выгоднейшее время наблюдений в триангуляции рассматривают с двух точек зрения: 1) с точки зрения наилучших условий видимости, минимальных колебаний и высокого качества изображений визирных целей; 2) с точки зрения наименьшего влияния местных полей рефракции на результаты измерений. Такие благоприятные для наблюдений условия имеют место вечером и утром, особенно в периоды, близкие к моменту перехода через нуль радиационного баланса подстилающей поверхности, когда в слое воздуха на высоте визирного луча наблюдается состояние, наиболее

близкое к изотермии (см. рис. III.2.2). Продолжительность этого благоприятного для наблюдений отрезка времени зависит от многих факторов и изменяется в вечерние часы от нескольких десятков минут в полупустынных и степных районах в тихую безоблачную жаркую погоду летом до нескольких часов в холодную и ветреную погоду при наблюдениях в горах и северных широтах. Применительно к средним условиям летней погоды начало «выгоднейшего» времени вечерних наблюдений ($t_{нач}$) можно в первом приближении предвычислить по формуле

$$t_{нач} = t_{зах} - 2x'_0,$$

взяв величины x'_0 на рис. III.2.3 и зафиксировав время захода Солнца $t_{зах}$, находясь на сигнале или вычислив его по астрономическому ежегоднику перед выездом на полевые работы. Заканчивать наблюдения рекомендуется примерно за полчаса до захода Солнца. Как уже отмечалось, наблюдения следует вести на спокойные и слегка колеблющиеся изображения визирных целей, когда случайные колебания их не выходят за пределы 2″.

Отметим, что утренний период «выгоднейшего» времени наблюдений несравненно короче, чем вечерний, а иногда и вовсе отсутствует. С увеличением облачности, усилением ветра и общим понижением температуры воздуха этот период времени заметно возрастает по сравнению с таковым при безоблачной тихой и жаркой погоде.

В условиях крупного города наблюдения целесообразно приурочивать к ранней весне и осени, когда температурные контрасты внутри города сравнительно малы, а следовательно, мало и влияние рефракции. В жаркую летнюю погоду (при $T_{ср.сут} \geqslant 20°$) боковая рефракция в условиях крупного города в ее суточном ходе переходит через нулевое значение утром примерно через 2,5 ч после восхода, а вечером — примерно за столько же времени до захода Солнца, изменяя при этом всякий раз знаки на противоположные. Для того чтобы существенно ослабить влияние местных полей рефракции путем постановки симметричных относительно момента «изотермии» измерений направлений, утренние наблюдения в жаркую погоду летом рекомендуется начинать не ранее чем через 1—1,5 ч после восхода Солнца и продолжать их не более полутора часов (при наличии хорошей видимости); вечерние же наблюдения рекомендуется прекращать не позднее чем за полтора часа до захода Солнца, несмотря даже на наличие хорошей видимости.

Ошибки за фазы визирных целей. Явление фаз возникает вследствие неравномерного освещения визирного цилиндра солнечными лучами, составляющими с линией визирования некоторый угол. Вследствие неодинакового восприятия глазом различно освещенных сторон цилиндра наблюдатели ошибочно оценивает положение геометрической оси его, смещая биссектор при наведении трубы в сторону лучше видимой (затемненной на фоне светлого неба) части цилиндра. Для ослабления ошибок за «фазы» применяют специальные малофазные визирные цилиндры с радиально направленными по вертикали пластинами, создающими хорошее теневое затемнение по всей видимой поверхности цилиндра. При наблюдениях на болванку

сигнала ее поверхность делают шероховатой и окрашивают матовой краской. Остаточное влияние ошибок за фазы в этих случаях не превышает, как правило, 0,2—0,4″.

Ошибки из-за кручения и гнутия сигналов. К р у ч е н и е и г н у т и е сигналов происходит под воздействием изменений температуры и влажности воздуха, под влиянием ветра. Гнутия сигнала обычно малы и не оказывают существенного влияния на точность угловых измерений, исполняемых при скорости ветра 2—3 м/сек. Наиболее существенным является кручение верхней части сигнала вокруг вертикальной оси его. Зарегистрированы случаи, когда величина кручения в отдельные периоды суток достигает 25″ за 1 ч и 5″ за 5 мин. В большинстве случаев кручение сигналов происходит неравномерно. Для того чтобы ослабить влияние кручения сигналов на результаты наблюдений, рекомендуется в триангуляции 1—2 классов применять поверительную трубу, а сами измерения располагать симметрично во времени относительно среднего момента наблюдений в приеме.

III.2.3. Методы высокоточных угловых измерений

Элементы общей теории методов угловых измерений в триангуляции 1 и 2 классов. При высокоточных угловых измерениях в триангуляции 1 и 2 классов требуется, чтобы результат уравнивания независимо измеренных величин на станции мог быть представлен в виде ряда равноточных направлений, имеющих на всех пунктах сети, по возможности, один и тот же вес. Это может быть достигнуто только в том случае, если результаты измерений на каждом пункте удовлетворяют требованиям, выражаемым равенством

$$\sum_{i=1}^{r(j,\,l)} \frac{p_j^{(i)} p_l^{(i)}}{\omega_i} = \text{const} = \frac{P}{n}, \qquad (\text{III.2.1})$$

$$(j \neq l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

где j, $l = 1, 2, \ldots, n$ — номера направлений на пункте, возрастающие по ходу часовой стрелки; i — порядковый номер группы направлений в программе наблюдений; программа наблюдений может состоять из r различных групп ($i = 1, 2, \ldots, r$) по k_l направлений в группе ($2 \leqslant k_l \leqslant n$), при этом отдельный угол $j.l$ рассматривается как группа из двух направлений; $r\,(j.l)$ — число разных групп в программе наблюдений, в которых совместно (отдельно или среди других направлений в группе) измеряется данная пара направлений j и l (угол $j.l = l - j$); n — число направлений на пункте; $P = P_j = \text{const}$ — вес уравненного направления на станции ($j = 1, 2, \ldots, n$); $p_j^{(i)}$ и $p_l^{(i)}$ — веса измеренных в i-ой группе соответственно j-го и l-го направлений, образующих угол $j.l$; $\omega_i = p_1^{(i)} + p_2^{(i)} + \ldots + p_k^{(i)}$ — сумма весов всех k_l направлений ($2 \leqslant k_l \leqslant n$), измеренных в i-ой группе.

Веса $p_j^{(i)}$ измеренных направлений j ($j, l = 1, 2, \ldots, n$) в каждой i-ой группе должны вычисляться по формуле

$$p_j^{(i)} = \frac{c}{\sigma_j^2}, \qquad (\text{III.2.2})$$

где c — некоторая постоянная; σ_j — наименьшая несмещенная дисперсия j-го направления в i-ой группе. Однако значение σ_j обычно неизвестно, поэтому в производственных условиях вместо формулы (III.2.2) применяют формулу

$$p_j^{(i)} = m_i, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{III.2.3}$$

где m_i — число приемов измерения направлений в i-ой группе.

Таким образом, в производственных условиях строгое решение задачи заменяется приближенным.

Если измерения на пункте исполнены в соответствии с условиями равенства (III.2.1), но программа измерений такова, что все направления в группе измерены с одинаковыми для данной группы весами

$$p_j^{(i)} = p_l^{(i)} = p_i, \tag{III.2.4}$$

изменяющимися лишь при переходе от одной группы направлений к другой, то равенство (III.2.1) примет вид

$$\sum_{i=1}^{r(j,\,l)} \left(\frac{p_i}{k_i}\right)_{j,\,l} = \text{const} = \frac{P}{n}, \tag{III.2.5}$$

или, что все равно,

$$2 \sum_{i=1}^{r(j,\,l)} \frac{p_{j,\,l}^{(i)}}{k_i} = \text{const} = \frac{P}{n}, \tag{III.2.6}$$

где $p_{j,\,l}^{(i)} = \frac{1}{2} p_i$ — вес измеренного угла $j.l = l—j$ в i-ой группе.

Если при соблюдении условий, выражаемых равенством (III.2.1) программа измерений такова, что имеют место равенства

$$p_j^{(i)} = p_l^{(i)} = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{III.2.4}$$

$$r(j, l) = \text{const} = t \qquad (j \neq l = 1, 2, \ldots, n), \tag{III.2.7}$$

и, следовательно,

$$\frac{p_i}{k_i} = \text{const} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{III.2.8}$$

то равенство (III.2.1) запишется в виде

$$t \frac{p_i}{k_i} = \text{const} = \frac{P}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{III.2.9}$$

или, что все равно, в виде

$$2t \frac{p_{j,\,l}^{(i)}}{k_i} = \text{const} = \frac{P}{n} \quad (j \neq l = 1, 2, \ldots, n). \tag{III.2.10}$$

Если за вес p_l принять число приемов m_l измерения направлений в группе, то все современные методы угловых измерений, рассчитанные на получение ряда одновесных направлений на станции, можно рассматривать как конкретные реализации простейших условий (III.2.4), (III.2.7) и (III.2.9). Сюда войдут: способ направлений (круговых приемов), способ измерения углов во всех комбинациях, разнообразные способы трех направлений (неполных приемов) и т. п.

При соблюдении условий наблюдений, выражаемых равенством (III.2.5) или (III.2.9), уравненные по направлениям углы $[j.l]$ находят по формулам

$$\left.\begin{aligned}
[1.2] &= \frac{2\times 1.2+(1.3-2.3)+(1.4-2.4)+\ldots+(1.n-2.n)}{n}\\
[1.3] &= \frac{2\times 1.3+(1.2+2.3)+(1.4-3.4)+\ldots+(1.n-3.n)}{n}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[1.n] &= \frac{2\times 1.n+(1.2+2.n)+\ldots+(1.n-1+n-1.n)}{n}
\end{aligned}\right\}, \tag{III.2.11}$$

где каждый из углов $j.l$ в правой части формул находят как среднее весовое по формуле

$$j.l=\frac{\sum\limits_{i=1}^{r(j.l)}\left(\frac{p_l}{k_l}j.l_l\right)}{\sum\limits_{i=1}^{r(j.l)}\frac{p_l}{k_i}}, \tag{III.2.12}$$

что соответствует равенству (III.2.5), или по формуле

$$j.l=\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{r(j.l)}j.l_l, \tag{III.2.13}$$

что соответствует равенству (III.2.9).

В формулах (III.2.12) и (III.2.13) значения углов $j.l$ равны разностям значений соответствующих направлений, измеренных в i-ой группе с весами $p_j^{(i)}=p_l^{(i)}=p_l$, т. е.

$$j..l_l=\frac{\sum p_l^{(i)}l_l}{\sum p_l^{(i)}}-\frac{\sum p_j^{(i)}j_l}{\sum p_j^{(i)}}. \tag{III.2.14}$$

Веса P уравненных на станции направлений находят путем умножения на n обеих частей равенства (III.2.1) или равенств (III.2.5) и (III.2.9) соответственно программе наблюдений.

Среднюю квадратическую ошибку уравненного направления вычисляют по формуле

$$M_{\text{н}} = \sqrt{\frac{\sum \frac{p_l}{k_l} \overline{v_i^2}}{\left\{\sum_{i=1}^{r} (k_l - 1) - (n-1)\right\} P}}, \qquad \text{(III.2.15)}$$

если программа наблюдений соответствует равенству (III.2.5), и по формулам

$$M_{\text{н}} = \sqrt{\frac{\sum \overline{v_i^2}}{\left\{\sum_{i=1}^{r} (k_l - 1) - (n-1)\right\} nt}} \qquad \text{(III.2.16)}$$

и

$$M_{\text{н}} = \sqrt{\frac{k \sum \overline{v_i^2}}{nt\,(n-1)\,(nt-k)}}, \qquad \text{(III.2.17)}$$

если программа наблюдений соответствует равенству (III.2.9), причем формула (III.2.16) справедлива для случая разного числа направлений k_l в группах, а формула (III.2.17) — для случая одинакового числа их в группах, т. е. для случая $k_l = \text{const} = k$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$.

В формулах (III.2.15)—(III.2.17) дополнительно обозначено

$$\sum \overline{v_i^2} = \sum v_{j.\,l}^2, \text{ где } v_{j.\,l} = [j.\,l] - j.\,l_l;$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r),\ (j \neq l = 1, 2, \ldots, k_l).$$

Из формул (III.2.16) и (III.2.17) как частные могут быть получены формулы для способа круговых приемов, способа измерений углов во всех комбинациях, неполных приемов и т. д.

Основные принципы высокоточных измерений отдельного угла и направлений. В целях наиболее полного ослабления влияния различных ошибок измерений на вывод среднего значения угла из m приемов наблюдения на пункте надо исполнять так, чтобы:

1) каждое направление измерялось на разных штрихах лимба, равномерно распределенных по всему кругу;

2) в каждом полуприеме было обеспечено полное однообразие всех измерительных операций по каждому наблюдаемому направлению;

3) была достигнута полная симметрия в расположении частей инструмента относительно каждого наблюдаемого направления и симметрия во времени наблюдений в приеме относительно среднего момента измерений в нем;

4) была обеспечена симметрия измерений каждого направления (угла) относительно среднего на высоте визирного луча момента «изотермии» воздуха.

Для высокоточных угловых измерений в триангуляции высших классов целесообразно применять такие методы, в которых программа наблюдений:

1) способствует получению результатов измерений с наивысшей точностью, возможной в массовых работах при существующих измерительных средствах;

2) предусматривает возможность представления результатов измерений и уравнивания их на станции в виде одного ряда одновесных направлений с весами, по возможности одинаковыми на всех пунктах сети;

3) требует, при прочих равных условиях, минимальных затрат труда и времени на измерения и вычисления на станции.

В настоящее время для измерения горизонтальных углов в триангуляции 1—4 классов в СССР применяют главным образом два способа: способ измерения углов во всех комбинациях (способ Шрейбера) и способ круговых приемов (способ Струве). Первый способ применяется в триангуляции 1 и 2 классов, а второй — в триангуляции 2, 3 и 4 классов. Кроме этих методов, в триангуляции 2 класса для наблюдений пунктов с большим числом направлений применяется способ «неполных» приемов и «видоизмененный способ измерения углов в комбинациях».

Способ круговых приемов измерения направлений (способ Струве).

Идея способа. Наиболее простым способом, который позволяет представить результат измерений на станции в виде одного ряда независимых направлений, является способ направлений. Суть этого способа заключается в том, что, оставляя лимб теодолита неподвижным и вращая алидаду по часовой стрелке, наводят зрительную трубу последовательно на все предметы (от первого к последнему) и каждый раз фиксируют при этом отсчеты по лимбу и микрометрам. Указанный комплекс измерений составляет первый полуприем. Затем трубу переводят через зенит и наводят ее на те же предметы, но в обратном порядке (от последнего к первому), вращая алидаду против часовой стрелки и снова фиксируя отсчеты по лимбу и микрометрам. Этот комплекс измерений составляет второй полуприем, а два полуприема — один прием.

Если в конце каждого полуприема трубу повторно наводят на начальное направление и снова берут отсчеты по лимбу и микрометру, т. е. производят «замыкание горизонта», то такой частный случай способа направлений носит название способа круговых приемов (способ Струве).

Программа и порядок наблюдений на станции. Прежде чем приступить к угловым измерениям на пункте, необходимо: защитить инструмент от воздействия солнечных лучей и от ветра, убедиться в устойчивости и прочности столика для инструмента и в том, что внутренняя пирамида сигнала нигде не соприкасается ни с полом площадки для наблюдателя, ни с лестницами. При обнаружении недостатков наблюдатель обязан устранить их. Затем следует составить программу измерений. Для этого надо разыскать все подлежащие наблюдениям пункты и записать на них направления с точностью до одной минуты, приняв направление на хорошо видимый удаленный пункт за начальное. Составить таблицу рабочих установок лимба,

имея в виду, что в способе круговых приемов лимб между приемами переставляется на угол

$$\sigma = \frac{180^\circ}{m} + t \text{ или } \sigma = \frac{180^\circ}{m} + \frac{t}{2},$$

где m — число приемов; t — цена наименьшего деления на лимбе.

Инструмент устанавливают на столике сигнала не менее чем за полчаса до начала измерений, чтобы он принял температуру окружающего воздуха, и затем тщательно выверяют его. С наступлением хорошей видимости и четких изображений наблюдаемых целей приступают к измерению горизонтальных направлений.

При измерении направлений круговыми приемами соблюдают следующие правила:

а) в первом полуприеме алидаду вращают только по ходу часовой стрелки, а во втором — только в обратном направлении; в первом полуприеме трубу немного переводят через предмет (как видно в трубу), а во втором — немного не доводят до него; при этом биссектор по окончании грубого движения окажется влево от предмета, так что окончательные наведения будут всегда производиться только ввинчиванием наводящего винта алидады; перед началом каждого полуприема алидаду вращают несколько раз в сторону движения ее в данном полуприеме;

б) при наблюдениях оптическими инструментами трубу между первым и вторым полуприемами переводят через зенит. При наблюдениях инструментами ТТ-2/6 перекладка трубы в лагерах между полуприемами необязательна. Однако на каждом пункте одна половина числа круговых приемов должна быть исполнена при положении микрометра справа, а другая — при положении микрометра слева.

При наблюдениях теодолитами, снабженными поверительной трубой и окулярным микрометром при главной трубе, порядок измерений дополняется следующим. Каждое наблюдение состоит из трех наведений нитей окулярного микрометра главной трубы на предмет и одновременных с ними трех наведений окулярного микрометра поверительной трубы на специально выставленную марку или на заменяющий ее хорошо видимый и близко расположенный геодезический знак.

В результаты измеренных направлений вводят поправки за показания окулярных микрометров главной и поверительной труб, поправки за рен и за наклон вертикальной оси инструмента (при углах наклона визирного луча в 1° и более).

Поправки за показания окулярного микрометра главной и поверительной труб вычисляют по следующим формулам (при счете оборотов в поле зрения трубы в направлении к барабану микрометра):

1. Для прямой главной трубы

$-\mu(M - 10{,}00)$ — при барабане микрометра справа;

$+\mu\ (M - 10{,}00)$ — при барабане микрометра слева.

2. Для поверительной трубы

$+\mu\ (M - 10{,}00)$ — при барабане микрометра справа.

Здесь μ — цена наименьшего деления окулярного микрометра трубы; M — отсчет по микрометру ($M \leqslant \pm 5$ делений);

10,00 — отсчет в нульпункте, выраженный в целых оборотах микрометра.

Контроль результатов угловых измерений, исполненных по способу круговых приемов, осуществляется в каждом полуприеме по расхождениям между результатами наблюдений на начальное направление в начале и конце полуприема, а в приемах — по колебаниям направлений в отдельных приемах, отсчитываемых от общего нулевого направления. Эти допуски даются в инструкциях. Так, например, в триангуляции 2—4 классов расхождения между результатами наблюдений на начальное направление в начале и конце полуприема не должны превышать 5 и 6″ соответственно для теодолитов типа ТТ-2/6 и ОТ-02, а колебания направлений в отдельных приемах, приведенных к общему нулю, соответственно 4 и 5″.

Уравнивание на станции и оценка точности. При наблюдениях по способу круговых приемов измеренные значения направлений приводят к начальному направлению, придав ему значение 0° 00′ 00,00″, а затем вычисляют средние значения по каждому направлению из m приемов измерений. Уравненные углы $[j.l]$, образованные любой парой направлений j и l, равны разностям средних значений этих направлений

$$[j.\,l]=\frac{\sum_{i=1}^{m} l_i}{m}-\frac{\sum_{i=1}^{m} j_i}{m}; \qquad (j\neq l=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Вес P уравненного направления можно вычислить по формуле $P = nt(p_i/k_i)$, если число приемов измерений m принять за вес p_i. Так как в данном способе $p_i = m$, $k = n$, $t = 1$, то

$$P=nt\frac{p_i}{k_i}=m,$$

т. е. в способе круговых приемов вес уравненного направления равен числу приемов измерений.

Среднюю квадратическую ошибку направления, выведенного из одного приема (ошибку единицы веса), вычисляют по формуле

$$\mu_н=\sqrt{\frac{\sum v^2-\frac{1}{n}\sum[v]^2}{(n-1)(m-1)}},$$

где v — уклонения значений измеренных направлений от их среднего арифметического; n — число направлений на станции; m — число приемов. Для оценки точности результатов измерений чаще применяют приближенную формулу Петерса, согласно которой средняя квадратическая ошибка направления, измеренного одним приемом, равна

$$\mu_н=\frac{1{,}25}{\sqrt{m(m-1)}}\cdot\frac{\sum|v|}{n}=k\frac{\sum|v|}{n},$$

где $\sum |v|$ — сумма абсолютных величин уклонений измеренных направлений от их средних значений, вычисленная по всем направлениям и по всем приемам; m — число приемов; n — число направлений. Значения k при $m = 6; 9; 12; 15$ равны соответственно 0,23; 0,15; 0,11; 0,08.

Среднюю квадратическую ошибку уравненного направления (среднего из m приемов) вычисляют по формуле

$$M_н = \frac{\pm\mu}{\sqrt{m}}.$$

Достоинства способа круговых приемов:

1. Очень простая программа измерений на станции.
2. Значительное ослабление систематических ошибок делений лимба.
3. Высокие технико-экономические показатели наблюдений в случае хорошей видимости по всем наблюдаемым направлениям.

Недостатки:

1. Сравнительно большая продолжительность измерений в приеме (8—12 мин), особенно на пунктах с большим числом направлений.
2. Повышенные требования к жесткости и устойчивости геодезических сигналов.
3. Требование примерно одинаковой видимости по всем наблюдаемым направлениям.
4. Вынужденная разбивка направлений на группы в случае большого числа их на пункте.
5. Разная точность измерений начального и остальных направлений.

От последнего недостатка можно избавиться, если повторные измерения на начальное направление не включать в обработку или же за начальное принять направление на пункт другого класса.

Способ измерения углов во всех комбинациях (способ Шрейбера).

Идея и обоснование способа. Суть этого способа заключается в том, что на пункте с n направлениями измеряют все углы, образующиеся при попарном сочетании направлений из n по 2, т. е. углы

$$\begin{gathered} 1.2\ 1.3\ 1.4\ \ldots\ 1.n \\ 2.3\ 2.4\ \ldots\ 2.n \\ 3.4\ \ldots\ 3.n \\ \ldots \\ (n-1).n \end{gathered}$$

Число таких углов равно

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Применительно к данному способу угловых измерений условие, выражаемое равенством (III.2.1), вырождается в требование

$$p_{j,\,l} = \text{const} = \frac{P}{n} \quad (j \neq l = 1, 2, \ldots, n).$$

Из этой формулы следует, что вес P уравненного на станции направления зависит от числа n направлений на пункте

$$P = np_{j,\,i}.$$

В производственных условиях вес $p_{j,\,i}$ измеренного угла принимают равным числу m приемов измерений, т. е. полагают, что

$$P = mn.$$

При измерении углов в триангуляции 1 класса произведение mn принимают равным 36, а в триангуляции 2 класса — 24. Принятое постоянство произведения mn преследует цель получить все направления в триангуляции данного класса с примерно одинаковыми весами.

В целях обеспечения независимости измерения углов и ослабления влияния ошибок делений круга на результаты наблюдений углы измеряют на разных установках горизонтального круга, причем так, чтобы всякое направление измерялось при одном и том же положении лимба, по возможности только один раз. Это достигается тем, что лимб при измерении одного и того же угла m приемами переставляют между приемами на угол $\sigma = 180°/m$, а между группами не примыкающих друг к другу углов — на угол δ, равный

$$\delta = \frac{\sigma}{n-1} \quad \text{при } n \text{ четном},$$

$$\delta = \frac{\sigma}{n} \quad \text{при } n \text{ нечетном}.$$

Для ослабления влияния короткопериодических ошибок делений лимба к вычисленным значениям σ и δ, которые округляют до целого градуса, прибавляют угол i, равный цене наименьшего деления лимба.

В табл. III.2.4 дается пример расчета установок лимба для случая $n = 4$, $m = 6$, $i = 4'$.

Таблица III.2.4

Углы	Приемы					
	I	II	III	IV	V	VI
1.2	0° 0′	30° 4′	60° 8′	90° 12′	120° 16′	150° 20′
1.3	10 4	40 8	70 12	100 16	130 20	160 24
1.4	20 8	50 12	80 16	110 20	140 24	170 28
2.3	20 8	50 12	80 16	110 20	140 24	170 28
2.4	10 4	40 8	70 12	100 16	130 20	160 24
3.4	0 0	30 4	60 8	90 12	120 16	150 20

Программа и порядок наблюдений на станции. Для составления программы наблюдений на станции.

сначала измеряют с точностью до 1′ углы между начальным направлением и всеми последующими направлениями. Затем рассчитывают таблицу установок лимба для каждого угла указанным выше методом и переходят к таблице так называемых рабочих установок. Для этого расчетные установки для каждого угла $j.\ l$ ($j \geqslant 2$), не связанные с начальным (первым) направлением, приводят к начальному направлению путем прибавления к нему значения измеренного на пункте угла $1.j$ между начальным направлением и левым направлением данного угла $j.l$.

Каждый угол на данной установке лимба измеряют двумя полуприемами. Если труба не переводится через зенит (как у ТТ-2/6), то одна половина программы наблюдений должна быть исполнена при одном положении окулярного микрометра, а вторая — при другом положении его. В первом полуприеме измеряют искомый угол, а во втором — дополнение его до 360°. Алидада в обоих полуприемах вращается в одном и том же направлении. При переходе от приема к приему рекомендуется изменять направление вращения алидады на противоположное. Все подлежащие наблюдениям углы должны быть измерены в разных условиях, т. е. в течение каждого вечера рекомендуется измерять все углы сначала одним приемом, затем эти же углы вторым приемом, третьим и т. д. Не рекомендуется измерять один и тот же угол несколькими приемами подряд.

Результаты измерений отдельных углов на пунктах триангуляции 1 и 2 классов должны находиться в пределах допусков, указанных в табл. III.2.5.

Таблица III.2.5

Инструменты	Расхождения между значениями, выведенными для одного и того же угла из разных приемов *
С микроскопами-микрометрами	Не более 3,0″
Оптические	4,0

* Расхождения между приемами могут допускаться более указанных допусков при условии, что превышение установленного допуска подтверждается ошибками делений круга.

Уравнивание на станции и оценка точности. После вывода средних значений измеренных углов из всех приемов, удовлетворяющих установленным допускам, вычисляют уравненные на станции углы по формулам (III.2.11).

Оценку точности результатов измерений выполняют по формулам:

а) средняя квадратическая ошибка угла из одного приема

$$\mu_y = \sqrt{\frac{2m \sum v^2}{(n-1)(n-2)}},$$

б) средняя квадратическая ошибка уравненного на станции угла

$$M_y = \frac{\mu_y}{\sqrt{\frac{mn}{2}}} = \sqrt{\frac{4\sum v^2}{n(n-1)(n-2)}}.$$

В этих формулах v — уклонение значения уравненного угла от его значения, полученного из измерений m приемами, n — число направлений.

Достоинства способа:

1. Результат уравнивания станции представляется в виде одного ряда направлений.

2. Имеется возможность измерять углы в любой последовательности, выбирая для наблюдений наиболее благоприятные условия видимости, и обеспечить тем самым хорошую однородность и высокую точность собранного полевого материала наблюдений.

3. Короткая продолжительность одного приема (2—4 мин) позволяет выполнить измерение угла при достаточно стабильном состоянии инструмента и внешней среды, вследствие чего точность измерений угла в меньшей степени зависит от качества сигнала, нем при наблюдениях по способу круговых приемов.

4. Благодаря использованию большого числа делений лимба хорошо ослабляется влияние ошибок диаметров круга на результаты измерений.

Недостатки способа:

1. Малое число приемов измерений угла при большом числе направлений на пункте.

2. Быстрое возрастание объема работ по мере увеличения числа направлений на пункте.

Краткие сведения о других способах угловых измерений.

Видоизмененный способ измерения углов в комбинациях. Для наблюдений пунктов триангуляции 2 класса с шестью и бо́льшим числом направлений применяется также способ, предложенный А. Ф. Томилиным, согласно которому на станции с n направлениями независимо измеряют углы

$$1.2\ 2.3\ 3.4, \ldots n.1,$$
$$1.3\ 2.4\ 3.5, \ldots n.2,$$

Число таких углов равно $2n$. Каждый угол измеряют пятью или шестью приемами в зависимости от требуемого веса уравненного на станции угла, образованного смежными направлениями ($P_{l.\,l} \approx \approx 12$ или $P_{l.\,l} \approx 14$ соответственно). Так как в данном методе измеряют не все углы, образующиеся при сочетании направлений из n по 2, а только часть их, то результат уравнивания станции не может быть представлен в виде одного ряда равноточных направлений. При $n = 5$ исчерпываются все комбинации направлений из n по 2 и, следовательно, все сводится к программе способа Шрейбера.

Поправки к измеренным m приемами углам вычисляют по формулам — функциям свободных членов условных уравнений. Эти формулы даны в Инструкции [4].

Способ «неполных приемов». В сетях триангуляции 2 класса на пунктах с семью — девятью направлениями применяют также способ, предложенный Ю. А. Аладжаловым *. Суть этого способа заключается в том, что направления на пункте измеряют отдельными группами по три направления в каждой (без замыкания горизонта), при этом группы направлений подобраны таким образом, что по результатам измерений можно вычислить все углы, образующиеся при попарном сочетании направлений из n по 2. Программы измерений даны в Инструкции [4]. В ряде случаев (при $n = 4, 5, 6$ и 8) в программу измерений, помимо групп из трех направлений, включаются отдельные углы. Число приемов измерений направлений в группах и отдельных углов принимают разным, причем таким, чтобы соблюдалось условие, выражаемое равенством (III.2.5) (вес измерений принимают пропорциональным числу приемов). В ряде случаев это равенство несколько нарушается, что приводит к незначительной разновесности уравненных углов (в пределах 10%).

В данном способе отсутствует какая-либо закономерность образования групп из трех направлений на пунктах с различным числом направлений. Однако в печати опубликованы и такие программы измерений для способа «неполных приемов», которым присуща стройная и легко запоминаемая система в образовании групп из трех направлений. Здесь надо указать на предложения В. Н. Гапшина ** и Н. В. Яковлева ***.

Рассматриваемый способ при прочих равных условиях позволяет уменьшить объем работы на станции в среднем на 25% по сравнению с таковым при измерении углов во всех комбинациях, причем без потери точности результатов измерений.

Обработка результатов измерений на станции заключается в следующем. Выводят средние значения направлений из m приемов в каждой группе и средние значения отдельных углов. По полученным средним вычисляют углы при всевозможных комбинациях направлений попарно. Окончательно уравненные по направлениям углы вычисляют по тем же правилам, как и в способе измерения углов во всех комбинациях.

Средняя квадратическая ошибка уравненного направления может быть вычислена по формуле (III.2.16), которая применительно к данному способу измерений записывается в виде

$$M_н = \sqrt{\frac{3\sum v^2}{n(n-1)(n-3)+rn}},$$

где v — разности между измеренными и уравненными значениями углов; n — число направлений на пункте; r — число отдельно измеряемых углов в программе.

---

* Сборник статей по геодезии, вып. 8 М., Геодезиздат, 1954, с. 3—26.
** Сборник статей по геодезии, вып. 8. М., Геодезиздат, 1954, с. 27—39.
*** Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 4. М., 1959, с. 45.

Для вычисления веса уравненного направления можно воспользоваться формулой (III.2.10). Приняв в ней веса $p_l^{(i)}$ измеренных углов равными числу приемов измерений m_l, получим

$$P = 2n\,\frac{m_l}{k_l},$$

где k_l — число направлений в l-ой группе.

III.2.4. Определение элементов приведения

Графический способ определения элементов приведения. В процессе угловых измерений на пункте проекции оси вращения инструмента J, визирной цели S и центра C подземного знака на горизонтальную плоскость должны совпадать. Однако в действительности такого совпадения нет. Поэтому необходимо определить отрезки e и e_1 соответственно до точек J и S относительно центра C, сориентировать их относительно направлений A, B, ... триангуляции при помощи углов θ^A, θ_B, ... и θ_1^A, θ_1^B, ... (рис. III.2.6) и привести результаты угловых измерений к центру знака.

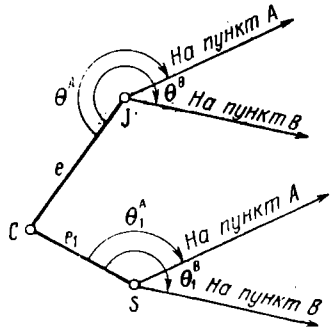


Рис. III.2.6

Элементы центрировки e и θ и редукции e_1 и θ_1 определяют графическим способом на каждом пункте триангуляции. Для этого над центром знака устанавливают легкую мензулу, на горизонтальную поверхность которой прикалывают центрировочный лист и показывают на нем направление на сепер. Затем при помощи теодолита, устанавливаемого на расстоянии, равном примерно высоте сигнала, проектируют на этот лист ось вращения инструмента и геометрическую ось визирного цилиндра при двух положениях вертикального круга с трех установок теодолита так, чтобы проектирующие плоскости пересекались под углом около 120°. Аналогично проектируют и центр знака на этот лист. За проекцию точек J, S и C принимают центр соответствующего треугольника погрешностей, стороны которого не должны превышать: 3 мм при проектировании центра знака, 5 мм при проектировании оси инструмента и 10 мм при проектировании визирной цели. Из точек J и S проводят направления на два пункта триангуляции A и B. Точки J и S соединяют прямой линией с точкой C и измеряют отрезки $e = CJ$ и $e_1 = CS$ с точностью до 1 мм. При помощи большого транспортира в точках J и S измеряют соответственно углы θ и θ_1, отсчитываемые от направления на центр знака до направления на пункт. Контролем правильности проведения направлений на пункты триангуляции служит сходимость углов между ними, полученных графическим методом на центрировочном листе и из измерений при помощи теодолита.

III.2.5. Предварительные вычисления в триангуляции

Состав предварительных вычислений. Предварительные вычисления в триангуляции включают:

1) проверку журналов измерения горизонтальных углов (направлений) и центрировочных листов;

2) составление сводок измерения горизонтальных углов (направлений) и результатов уравнивания наблюдений на станции;

3) составление рабочей схемы триангуляции;

4) предварительное решение треугольников и вычисление их сферических избытков;

5) вычисление поправок в направления за центрировку и редукцию и получение приведенных к центрам знаков направлений;

6) вычисление приближенных прямоугольных координат пунктов;

7) вычисление поправок в направления за кривизну изображения геодезических линий в проекции Гаусса — Крюгера;

8) составление «карточек предварительной обработки» на каждый пункт (согласно указаниям инструкции);

9) вычисление поправок в направления 1 и 2 классов за уклонения отвесных линий и высоту наблюдаемых целей (в горных и высокогорных районах); в триангуляции 1 класса дополнительно вычисляют еще поправки в направления за переход от нормального сечения к геодезической линии на поверхности референц-эллипсоида;

10) составление таблицы направлений, приведенных к центру знака и редуцированных на плоскость в проекции Гаусса — Крюгера;

11) оценку точности угловых измерений в сети;

12) обработку материалов тригонометрического нивелирования и вычисление высот пунктов (см. раздел Справочника III.7).

Составление сводок измерения горизонтальных направлений и углов. В сводку из журналов наблюдений выписывают результаты всех измерений, кроме явно ошибочных, руководствуясь указаниями действующей инструкции. Затем выводят средние из m приемов значения каждого угла (или направления, приведенного к начальному), выполняют уравнивание углов на станции и вычисляют средние квадратические ошибки уравненных направлений и углов.

Уравнивание направлений, измеренных в двух группах с одинаковыми весами. В тех случаях, когда начальные направления в группах разные, надо предварительно все направления обеих групп привести к общему начальному (нулевому) направлению и выписать их в таблицу. Пусть в первой группе измерены направления 1, 2, 3, 4, 5, а во второй — 1, 3, 5, 6, 7 (табл. III.2.6). Уравнивание групп наблюдений выполняют следующим образом. Для направлений, общих для обеих групп, вычисляют средние значения

$$M_1 = 0{,}00^{\circ}, \quad M_3 = \frac{1}{2}(M_3' + M_3''), \quad M_5 = \frac{1}{2}(M_5' + M_5''),$$

которые принимают за окончательно уравненные величины. Для

остальных направлений первой группы вычисляют поправки Δ_1, а для направлений второй группы — поправки Δ_2

$$\Delta_1 = \frac{(M_3 - M_3') + (M_5 - M_5')}{3}, \qquad \Delta_2 = \frac{(M_3 - M_3'') + (M_5 - M_5'')}{3}.$$

В знаменателе стоит число направлений, общих для обеих групп, включая и начальное. Прибавляя поправки Δ_1 к направлениям первой группы, а поправки Δ_2 — к направлениям второй группы, получают уравненные значения их.

Предварительное решение треугольников и вычисление сферических избытков. Предварительное решение треугольников выполняют с целью получения длин сторон, необходимых для вычисления поправок за центрировки и редукции, для вычисления сферических избытков и приближенных координат пунктов триангуляции. Треугольники решают по теореме синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = D,$$

откуда, приняв сторону a за исходную, находят

$$b = D \sin B, \qquad c = D \sin C.$$

За исходные принимают базисные или выходные стороны, а также стороны триангуляции высшего класса или ранее уравненной. Треугольники решают раздельно по каждому классу триангуляции по углам, округленным до $1''$.

Одновременно вычисляют сферические избытки треугольников по одной из следующих формул:

$$\varepsilon'' = fab \sin C = fac \sin B = fbc \sin A,$$

где величину $f = \rho''/2R^2$ выбирают из геодезических таблиц или из табл. III.2.7 после умножения приведенных в ней величин на три.

Для территории СССР величина коэффициента f для вычислений в триангуляции 2—4 классов может быть принята в среднем равной 0,00253, если длины сторон треугольников выражены в километрах. Сферические избытки вычисляют до $0{,}01''$ в триангуляции 1 и 2 классов и до $0{,}1''$ в триангуляции 3 и 4 классов.

Приведение измеренных направлений к центрам знаков. Поправки за центрировку инструмента c'' и редукцию визирной цели r'' вычисляют по формулам

$$c'' = \frac{e \sin (M + 0)}{D} \rho'',$$

$$r'' = \frac{e_1 \sin (M_1 + \theta_1)}{D} \rho'',$$

где e, θ и e_1, θ_1 — элементы центрировки и редукции; M — значение измеренного направления, для которого вычисляют поправки; D — длина стороны триангуляции по этому направлению; $\rho'' = 206\,265$.

Для контроля вычислений поправок можно применить номограммы и таблицы величин $(a) = -20{,}6265 \sin (M + \theta)$.

Таблица III.2.6

Уравнивание наблюдений в группах

№ направлений i	Наблюдения первой группы M_i'	Поправки Δ_1	Наблюдения второй группы M_i''	Поправки Δ_2	Уравненные направления M_i
1	0° 00′ 00,00″	—	0° 00′ 00,00″	—	0° 00′ 00,00″
2	67 42 56,95	+0,03″			67 42 56,98
3	92 51 50,42	—	92 51 50,90	—	92 51 50,66
4	151 01 19,57	+0,03			151 01 19,60
5	213 39 53,10	—	213 39 52,78	—	213 39 52,94
6			267 38 47,17	−0,03″	267 38 47,14
7			321 21 07,88	−0,03	321 21 07,85

Если линейные элементы e и e_1 выразить в дециметрах, то

$$c'' = -\frac{(a)}{D_{км}} e \quad \text{и} \quad r'' = -\frac{(a)}{D_{км}} e_1.$$

Поправки за центрировку и редукцию в триангуляции 1 и 2 классов вычисляют с точностью до 0,01″, а в триангуляции 3 и 4 классов — до 0,1″. С учетом этих поправок вычисляют направления, приведенные к центрам знаков.

Вычисление приближенных прямоугольных координат пунктов. Приближенные координаты пунктов необходимы для составления точной схемы триангуляции, для вычисления поправок в направления за кривизну изображения геодезических линий на плоскости, для вычисления расстояний между пунктами в тех случаях, когда эти расстояния не могут быть получены из решения треугольников, и т. д.

Приближенные координаты пунктов вычисляют при помощи пятизначных или шестизначных таблиц натуральных значений тригонометрических функций с точностью до целых метров.

Приближенные координаты могут быть вычислены:

по формулам решения прямой задачи на плоскости;

по формулам котангенсов углов треугольников;

по формулам тангенсов или котангенсов дирекционных углов.

Вычисление поправок в направления за кривизну изображения геодезических линий в проекции Гаусса — Крюгера; редукция длины исходной стороны. В триангуляции 2—4 классов поправки в направления за кривизну изображения сторон треугольников на плоскости в проекции Гаусса — Крюгера вычисляют по формулам *

$$\delta''_{12} = \frac{1}{3} f (x_1 - x_2)(2y_1 + y_2),$$

$$\delta''_{21} = -\frac{1}{3} f (x_1 - x_2)(2y_2 + y_1),$$

* В триангуляции 1 класса при длинах сторон более 50 км применяют более точную формулу (см. раздел II.4).

где δ''_{12} и δ''_{21} — поправки в прямое и обратное направления; x_1, y_1, x_2, y_2 — приближенные координаты пунктов 1 и 2, выраженные в километрах; ординаты y_1 и y_2 отсчитывают от осевого меридиана зоны, причем с положительным знаком к востоку от меридиана и с отрицательным — к западу от него; $f = \rho''/2R^2$.

Поправки δ вычисляют и вводят в измеренные направления с точностью до 0,01″ в триангуляции 2 класса и до 0,1″ — в триангуляции 3 и 4 классов.

Для направлений триангуляции 3 и 4 классов на территории СССР значение коэффициентов $\frac{1}{3} f$ принимают равным 0,000845. Для направлений 2 класса значения этого коэффициента можно выбирать из табл. III.2.7 по средней абсциссе линии $x_m = 1/2\,(x_1 + x_2)$.

Таблица III.2.7

Значения коэффициента $\frac{1}{3} f$

x_m, км	$\frac{1}{3} f$	x_m, км	$\frac{1}{3} f$	x_m, км	$\frac{1}{3} f$
	$\times 10^{-7}$		$\times 10^{-7}$		$\times 10^{-7}$
4010	8465	5430	8440	6960	8415
4300	8460	5715	8435	7320	8410
4585	8455	6005	8430	7720	8405
4865	8450	6310	8425	8195	8400
5145	8445	6625	8420	8825	8395
5430		6960		9500	

Чтобы не ошибиться в порядке поправок δ'', рекомендуется пользоваться табл. III.2.8, дающей приближенные значения этих поправок.

Таблица III.2.8

Величина поправок $\delta''_{12} = \frac{1}{3} f\,(x_1 - x_2)\,(2y_1 + y_2)$

$x_1 - x_2$, км	$2y_1 + y_2$, км								
	100	200	300	400	500	600	700	800	900
1	0,1″	0,2″	0,2″	0,3″	0,4″	0,5″	0,6″	0,7″	0,8″
5	0,4	0,8	1,3	1,7	2,1	2,5	3,0	3,4	3,8
10	0,8	1,7	2,5	3,4	4,2	5,1	5,9	6,8	7,6
20	1,7	3,4	5,1	6,8	8,4	10,1	11,8	13,5	15,2
30	2,5	5,1	7,6	10,1	12,6	16,2	17,7	20,2	22,8

Правильность вычисления поправок δ''_{ik} в направления контролируют по сферическим избыткам треугольников. В треугольнике с вершинами 1, 2, 3, номера которых возрастают по ходу часовой стрелки, вычисляют для каждого угла поправки $\delta_1 = \delta_{13} - \delta_{12}$, $\delta_2 = \delta_{21} - \delta_{23}$, $\delta_3 = \delta_{32} - \delta_{31}$. Контроль: $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -\varepsilon$, т. е. сумма поправок δ_l в углы треугольника должна быть равна его сферическому избытку, взятому с обратным знаком.

Для перехода от длины стороны на эллипсоиде к ее длине на плоскости применяют формулы, приведенные в разделе сфероидической геодезии соответственно для триангуляции 1 и 2 классов.

z / u	0,2″	0,5″	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	40″
80°																	
81																	
82																	
83																	
84																	
85																	
86																	
87																	
88																	
89°00′																	
10																	
20																	
30																	
40																	
50																	
90°																	

Рис. III.2.7

Вычисление поправок в направления за уклонения отвесных линий, за высоту наблюдаемых целей и за переход от нормального сечения к геодезической линии.

а) Поправки за уклонения отвесных линий учитывают в триангуляции 1—2 классов и при создании высокоточных геодезических сетей в горных районах.

Поправку в направление с пункта i на пункт n за уклонение отвесной линии от нормали к эллипсоиду в данной точке i вычисляют по формуле

$$\delta''_1 = -(\xi_i \sin A_{in} - \eta_i \cos A_{in}) \operatorname{ctg} z_{in},$$

где ξ_i и η_i — составляющие уклонения отвесной линии соответственно в плоскости меридиана и первого вертикала; A_{in} — геодезический азимут направления in, для которого вычисляется поправка; z_{in} — измеренное зенитное расстояние с i на n.

Поправку δ''_1 вычисляют лишь в тех случаях, когда величина полного уклонения отвесной линии на пункте $u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ и значение зенитного расстояния z данного направления находятся в пределах площади, заштрихованной на рис. III.2.7.

Значения ξ и η получают по астрономо-геодезическим и гравиметрическим данным.

Азимут A_{in} вычисляют с точностью до $0{,}1^{\varrho}$ по формуле

$$A_{in} = \alpha_{i0} + \gamma + M_{in},$$

где α_{i0} — дирекционный угол начального направления, вычисляемый по приближенным прямоугольным координатам; γ — угол сближения меридианов (выбирается из геодезических таблиц); M_{in} — измеренное направление.

Если зенитное расстояние z_{in} не измерялось, то при известных нормальных высотах H_n и H_i центров пунктов величина ctg z может быть вычислена по приближенной формуле

$$\operatorname{ctg} z_{in} \cong \frac{1}{s}\left[(H_n + v_n) - (H_i + l_i) - \frac{1-k}{2R}s^2\right],$$

где v_n и l_i — высота визирной цели и высота инструмента соответственно над центрами знаков n и i; $(1-k)\,s^2/2R$ — поправка за кривизну Земли и рефракцию; s — расстояние между пунктами.

б) **Поправка в направление за высоту наблюдаемой цели.** При наблюдениях в горных и высокогорных районах в результаты наблюдений на пунктах триангуляции 1 и 2 классов вводят поправку за высоту наблюдаемых целей над референц-эллипсоидом. Поправку δ_2'' за высоту наблюдаемой с пункта i визирной цели n вычисляют по формуле

$$\delta_2'' = H_n\,(1)_n\,\frac{e^2}{2}\sin 2A_{in}\cos^2 B_n,$$

где H_n — высота визирной цели над эллипсоидом Красовского в точке n; B_n — широта точки n; e — первый эксцентриситет меридианного эллипса; $(1)_n = \rho''/M_n$ — функция радиуса кривизны меридианного сечения, выбираемая из геодезических таблиц по аргументу B_n; A_{in} — геодезический азимут направления in.

в) **Поправка за переход от нормального сечения к геодезической линии.** В триангуляции 1 класса в направления вводят еще поправку δ_3'' за переход от нормального сечения на эллипсоиде к геодезической линии. Поправку δ_3'' в направление in вычисляют по формуле

$$\delta_3'' = -\frac{e^2}{12\rho''}\,s_{in}^2\,(2)_m^2\sin 2A_{in}\cos^2 B_m,$$

где

$$B_m = \frac{1}{2}(B_i + B_n),$$

e — первый эксцентриситет меридианного эллипса; $(2)_m = \rho''/N_m$ — функция радиуса кривизны сечения первого вертикала, выбираемая из геодезических таблиц по аргументу средней широты B_m; s_{in} — длина стороны, A_{in} — геодезический азимут направления.

Составление таблицы направлений, приведенных к центрам знаков и редуцированных на плоскость. В каждое измеренное направление вводят поправки за центрировку c'' и редукцию r'', поправки δ'' за кривизну изображения геодезических линий в проекции Гаусса — Крюгера; при наблюдениях в горных районах и при значительных уклонениях отвесной линии в направления 1 и 2 клас-

сов вводят поправки δ_1'' за уклонения отвесных линий, поправки δ_2'' за высоту наблюдаемых целей над эллипсоидом Красовского и дополнительно в триангуляции 1 класса поправки δ_3'' за переход от нормального сечения на эллипсоиде к геодезической линии.

По каждому направлению вычисляют сначала сумму перечисленных поправок, а затем разности между суммой поправок каждого направления и суммой поправок начального (нулевого) направления на станции. Полученные поправки алгебраически прибавляют к измеренным значениям направлений. В итоге получают таблицу приведенных к центру знака и редуцированных на плоскость направлений, которые используют при дальнейшем уравнивании сети.

Предварительная оценка точности угловых измерений в триангуляции. Прежде чем приступить к окончательному уравниванию триангуляции за все возникающие в ней геометрические условия, необходимо убедиться, что угловые измерения на пунктах сети исполнены качественно и удовлетворяют предъявляемым к ним требованиям. Для этого вычисляют свободные члены условных уравнений фигур (невязки треугольников), полюсных, базисных, азимутальных и затем полученные величины сравнивают с установленными для них допусками.

Невязки треугольников вычисляют по углам, приведенным к центрам знаков, по формулам

$$\omega = \sum \beta - (180° + \varepsilon) — \text{на сфере},$$

$$\omega = \sum \beta - 180° — \text{на плоскости},$$

где $\sum \beta$ — сумма измеренных углов в треугольнике, ε — сферический избыток треугольника. При этом 67% невязок должны находиться в интервале от 0 до $m\sqrt{3}$; 95% — от 0 до $2{,}5m\sqrt{3}$ и только лишь три невязки из тысячи могут быть допущены равными $3m\sqrt{3}$. Здесь m — средняя квадратическая ошибка измеренного угла, вычисленная по невязкам треугольников,

$$m = \sqrt{\frac{\sum \omega^2}{3n}},$$

где n — число невязок треугольников.

Согласно Инструкции [4], невязки треугольников не должны превышать 3, 4, 6 и 8″ в триангуляции 1, 2, 3 и 4 классов, а средние квадратические ошибки измеренного угла, вычисленные по невязкам треугольников, — 0,7; 1,0; 1,5 и 2,0″ соответственно.

Для вычисления средней квадратической ошибки измеренного угла нередко используют и другую формулу

$$m = 0{,}725\,\frac{\sum |\omega|}{n},$$

где $\sum |\omega|$ — сумма абсолютных значений всех n невязок треугольников в сети.

Свободные члены условий полюсных ($\omega_п$), базисных ($\omega_б$) и азимутальных ($\omega_а$) вычисляют по формулам, приведенным в следующем разделе Справочника. Величины свободных членов этих условий не должны превышать

$$\omega_п \leqslant 2{,}5\mu\sqrt{\sum \delta^2},$$

$$\omega_б = 2{,}5\sqrt{\mu^2 \sum \delta^2 + 2m^2_{\lg b}},$$

$$\omega_а \leqslant 2{,}5\sqrt{\mu^2 n + 2m^2_\alpha},$$

где μ — установленная Инструкцией для соответствующего класса триангуляции средняя квадратическая ошибка измерения углов; $\sum \delta^2$ — сумма квадратов изменений логарифмов синусов связующих углов треугольников при изменении этих углов на 1″; $m_{\lg b}$ — средняя квадратическая ошибка в логарифме длины базисной (выходной) стороны; m_α — средняя квадратическая ошибка исходного азимута, а n — число углов в передаче азимута.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Ф. Н. Избранные сочинения, т. III и т. IV. М., Геодезиздат, 1955. 574 с.
2. Данилов В. В. Точная полигонометрия. М., Геодезиздат, 1953. 231 с.
3. Литвинов Б. А., Лобачев В. М., Воронков Н. Н. Геодезическое инструментоведение. М., «Недра», 1971. 328 с.
4. Инструкция о построении государственной геодезической сети СССР. М., «Недра», 1966, 341 с.
5. Яковлев Н. В. Об учете климатологических особенностей города при высокоточных угловых измерениях в городской триангуляции 1 класса. Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 6, 1960, с. 15—31.
6. Яковлев Н. В. Высокоточные угловые измерения и азимутальные определения в нестационарном поле боковой рефракции (диссертация). М., 1971, 396 с.

III.3. СВЕТОДАЛЬНОМЕРНЫЕ И РАДИОДАЛЬНОМЕРНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ. РАДИОГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И РАДИОГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

А. В. Кондрашков

А. СВЕТОДАЛЬНОМЕРЫ

III.3.1. Общие сведения

Светодальномеры — приборы, служащие для измерения расстояний при помощи световых сигналов. Прибор состоит из собственно дальномера — приемо-передатчика, устанавливаемого на одном конце измеряемой линии, и отражателя, устанавливаемого на другом конце линии.

Длину линии определяют по времени, затраченному световыми сигналами на распространение вдоль линии от приемо-передатчика до отражателя и обратно, и по скорости распространения света в воздухе v. Если это время равно τ, то измеряемое расстояние

$$D = \frac{v}{2}\tau + \delta_k,$$

где δ_k — постоянная поправка дальномера.

Световые сигналы, используемые для определения расстояния, получаются изменением во времени параметров световых колебаний или их модуляцией. Такими параметрами в существующих дальномерах являются амплитуда колебаний, определяющая яркость, силу света или световой поток, или отношение осей эллипса эллиптически поляризованного света. Для модуляции света используются линейный или квадратичный электрооптический эффект, дифракция света на ультразвуковых волнах в прозрачном веществе или зависимость интенсивности испускаемого источником света от проходящего через него электрического тока. Поэтому различают дальномеры с электрооптическими и ультразвуковыми модуляторами света, а также дальномеры со светодиодами.

Изменения параметров световых колебаний могут быть импульсными или непрерывными. В последнем случае они имеют характер, близкий к гармоническому; для определения времени τ в этом случае измеряют разность фаз параметра за время τ. В связи с этим

различают дальномеры импульсные * и фазовые. Разность фаз гармонического колебания меняется циклически, а непосредственное ее измерение возможно лишь в пределах одного фазового цикла. Поэтому для определения по измеренной разности фаз полного времени распространения сигналов приходится измерять разности фаз колебаний на нескольких известных частотах модуляции, либо. плавно изменяя частоту модуляции, определять число полных фазовых циклов, соответствующее некоторому непрерывному диапазону их изменения и частоты, ограничивающей выбранный диапазон.

В связи с этим различают фазовые дальномеры с фиксированными частотами модуляции и дальномеры с плавно изменяемой частотой модуляции. Фиксация выбранной разности фаз или ее измерение могут выполняться визуально — глазом или фотоэлектрическим устройством. Поэтому различают дальномеры визуальные и фотоэлектрические.

В качестве источников света в дальномерах используют лампы накаливания, газоразрядные источники света, газовые оптические квантовые генераторы (лазеры), светодиоды.

В зависимости от источника света различают дальномеры: обычные, лазерные, со светодиодами. По назначению светодальномеры делятся на дальномеры для измерения больших, средних и малых расстояний (топографические).

Светодальномеры для больших расстояний применяются для измерения расстояний ~20—25 км и обеспечивают измерения с относительной ошибкой не больше 1/300 000—1/400 000 («Кварц», геодиметры NASM-2A, модели 6 и 8).

Светодальномеры для средних расстояний применяются для измерения расстояний ~5—15 км с относительной ошибкой порядка 1/100 000—1/300 000 (СВВ-1).

Топографические дальномеры применяются для измерения расстояний до 3—5 км с относительной ошибкой порядка 1/10 000—1/100 000 (СТ-65, КДГ-3, ТД-2).

Успехи полупроводниковой электроники в последнее десятилетие позволили разработать небольшие по размерам, достаточно легкие, потребляющие небольшую энергию светодальномерные приставки (насадки) к угломерным инструментам (ДНК-02, DI10).

Естественным шагом в развитии геодезической электронной техники явилось стремление объединить в одном приборе измерение расстояний и углов. В связи с этим в последние годы были разработаны электронные тахеометры (Reg Elta 14, геодиметр мод. 700).

Некоторые сведения об отечественных и зарубежных светодальномерах приведены в табл. III.3.1.

III.3.2. Светодальномер «Кварц»

Лазерный светодальномер «Кварц» предназначен для наиболее точных измерений расстояний в государственной геодезической опорной сети. Он состоит из двух частей: приемо-передатчика (рис. III.3.1) и отражателя (рис. III.3.2). Источником электри-

* В настоящее время более высокая точность измерения времени достигается измерением разности фаз. Поэтому импульсные дальномеры распространения не получили.

Марка дальномера, страна—изготовитель	Тип дальномера	Источник света *	Частоты модуляции, МГц
СВВ-1, СССР	Визуальный	ДАЦ	Переменные ~10
Кварц, СССР	Фотоэлектрический	ОКГ	Постоянные ~30
СТ-65, СССР	Визуальный	ЛН	Переменные ~25
ТД-2, СССР	Визуальный	ЛН	Переменные ~15
КДГ-3, СССР	Фотоэлектрический	СД	Постоянные ~30
МСД-1, СССР	То же	СД	Постоянные ~150
ДНК-02, СССР	»	СД	Постоянные ~30
Геодиметр, мод. 6, Швеция	»	ЛН	»
		РЛ	»
Мод. 8, Швеция	»	ОКГ	»
EOS, ГДР	»	ЛН	Постоянные ~60
ЕОК2000, ГДР	»	СД	Постоянные ~30
DI 10, Швейцария, Франция	»	СД	Постоянные ~14
ME-3000, Швейцария	»	КИЛ	Постоянные ~500
Reg Elta 14, ФРГ	»	СД	
Геодиметр, мод. 700, Швеция	»	ОКГ	~30

* ЛН — лампа накаливания, ДАЦ — дуговая аргено-циркониевая лам КИЛ—ксеноновая импульсная лампа, СД—светодиод.

ческого питания дальномера служит бензоэлектрический агрегат. Дальномер работает следующим образом (рис. III.3.3). Линейно-поляризованный свет гелий-неонового лазера *1* оптической системой *2*, *3* направляется в конденсатор Керра *4*, а по выходе из него — на анализатор *5* и стеклянную пластинку *6*. Последняя поставлена под углом в 45° к оси падающего на нее пучка лучей, а малая часть света отражается ею на пластину *7*. Эти две пластины образуют внутреннюю оптическую линию.

Бо́льшая часть света проходит пластину *6* и объективом передающей оптической системы приемо-передатчика *8* параллельным пучком направляется на уголковый отражатель, установленный на другом конце измеряемой линии. Отраженный последним свет проходит защитное стекло *9* зеркально-линзовой приемной оптической системы дальномера *10*, *11*, *12* и призмой *13* направляется на серый клин *14*, раздвижную диафрагму *15* и призму *16*. Вышедший

Таблица III.3.1

Дальность действия, км			Средняя квадратическая ошибка измерения, см	Масса, кг		Потребляемая мощность, Вт
минимальная	днем	ночью		приемо-передатчика	комплекта	
1	5	20	$1{,}5+1{,}5 \cdot D \cdot 10^{-6}$	18	400	350
	20	40	$1{,}0+2 \cdot D \cdot 10^{-6}$		105	140
0,1	2	5	$1{,}5+3 \cdot D \cdot 10^{-6}$	9	70	30
0,135	4	10	$1{,}0+2 \cdot D \cdot 10^{-6}$	15	105	80
0,002			$1{,}5+5 \cdot D \cdot 10^{-6}$			
0,004	0,2		0,1—0,2	4,5		3,5
0,004	0,4		2			1
	3—5	10—15	$0{,}5+1 \cdot D \cdot 10^{-6}$	14,5	37	20
	7—10	20—25			57	300
0,015	60	60	$0{,}5+1 \cdot D \cdot 10^{-6}$	23	45	
0,020	10	15	$0{,}5+2 \cdot D \cdot 10^{-6}$	32	70	70
0	2		1	12		8
1	1		1	4	22	15
Несколько сотен метров			0,01—0,2			12
До 2 км			1	20	~31,5	
До 5 км			$0{,}5+1 \cdot D \cdot 10^{-6}$	14,5	~20,5	

па, РЛ—ртутная лампа, ОКГ—газовый оптический квантовый генератор.

из нее свет проходит интерференционный фильтр *17* и оптической системой *18* через диафрагму *19* направляется на катод фотоэлектронного умножителя *20*.

Для модуляции света на конденсатор Керра подается постоянное поляризующее напряжение от источника *21* и переменное модулирующее напряжение от генератора *22*. В последнем могут быть получены колебания четырех высокостабильных частот: $f_1 = 30{,}0$ МГц, $f_2 = 29{,}99625$ МГц, $f_3 = 29{,}925$ МГц и $f_4 = 28{,}5$ МГц. Одновременно эти колебания подаются в смеситель *26*. В него поступают также колебания от вспомогательного генератора *24*, частоты которых на 15 кГц больше соответственных частот модуляции света. В смесителе образуются колебания частоты 15 кГц, которые подаются в фазосдвигающее устройство *25*, где фаза их может быть изменена скачком на 90°. С выхода этого устройства с измененной или не измененной переключателем фазой эти колебания напра-

вляются в индуктивный фазовращатель *26*, а с него, после усиления в усилителе *27*, в фазовый детектор *28*. Эти электрические колебания образуют так называемое опорное напряжение на фазовом детекторе. Модулированный свет, прошедший дважды измеряемое расстояние и упавший на катод ФЭУ, вызывает в нем переменный поток электронов. На дополнительный электрод ФЭУ, накладываемый снаружи на его прозрачный катод, от вспомогательного генератора *24* подается переменное напряжение, частота которого на 15 кГц больше частоты модуляции света. В результате в токе

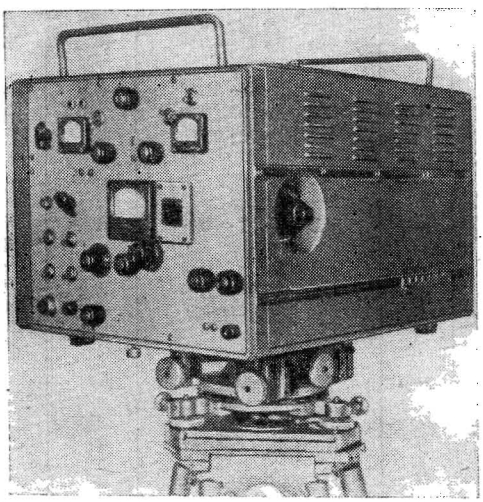


Рис. III.3.1

ФЭУ образуется переменная составляющая тока с частотой в 15 кГц. Эта составляющая поступает в усилитель *29*, а из него — в фазовый детектор *28*, где образует так называемое сигнальное напряжение. На выходе фазового детектора получается ток, величина которого зависит от разности фаз сигнального и опорного напряжений. Этот ток направляется в стрелочный индикатор *30*. Последний указывает нуль всякий раз, когда разность фаз сигнального и опорного напряжений составляет 90 или 270°. При измерении расстояния светодальномером стрелку индикатора устанавливают на нуль при помощи фазовращателя. Такому положению стрелки индикатора соответствует соотношение

$$D_i = N_i \frac{\lambda_i}{2} + l_i + \delta_k,$$

где $i = 1, 2, 3, 4$ — номер частоты модуляции света, D_i — результат измерения расстояния на частоте f_i, N_i — целое число или

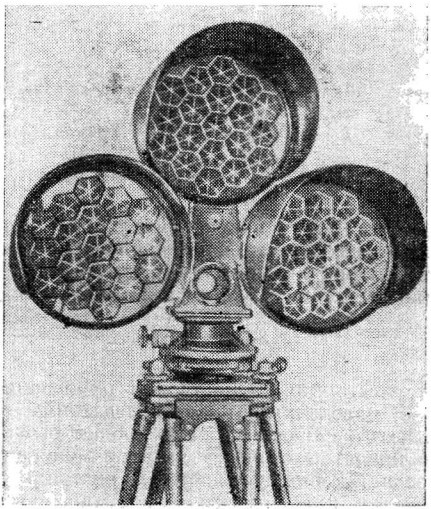


Рис. III.3.2

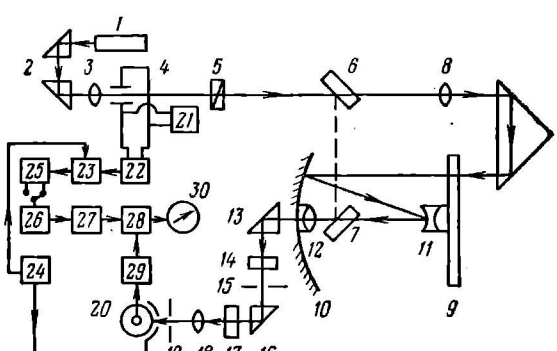


Рис. III.3.3

нуль, λ_l — длина волны модуляции света, δ_k — постоянная поправка дальномера. Величины N_l находят по формулам

$$N_1 = 20s - 3{,}8\,(l_4 - l_1)\ \text{м},$$

$$N_2 = N_1 - p, \quad N_3 = N_1 - m, \quad N_4 = N_1 - s,$$

где

$$s = 20m - 4{,}0\,(l_3 - l_1)\ \text{м} + 0{,}2\,(l_4 - l_1)\ \text{м},$$

$$m = 20p - 4{,}0\,(l_2 - l_1)\ \text{м} + 0{,}2\,(l_3 - l_1)\ \text{м},$$

$$p = 0{,}025 D_{\text{пр}}\ \text{км} + 0{,}2\,(l_2 - l_1)\ \text{м},$$

и приближенно известному с погрешностью до 20 км расстоянию $D_{\text{пр}}$.

Постоянная поправка дальномера определяется по результату измерения дальномером линии в 1—2 км достаточно точно известной длины. Если эта длина $D_{\text{изв}}$, а длина, полученная дальномером, $D_{\text{д}}$, то

$$\delta_k = D_{\text{изв}} - D_{\text{д}}.$$

Измерение расстояния дальномером производят в следующем порядке. После наведения приемо-передатчика на отражатель, получения ответного сигнала и регулировки его величины серым клином устанавливают переключатель фаз в положение, при котором вносимая фазосдвигающим устройством постоянная разность фаз равна нулю. Затем при помощи фазовращателя устанавливают стрелку индикатора на нуль таким вращением рукоятки фазовращателя, при котором направление ее вращения и движения стрелки совпадают. При положении стрелки на нуле получают отсчет по шкале фазовращателя. Затем получают отсчет по фазовращателю при установке стрелки индикатора на нуль при противоположных направлениях вращения стрелки индикатора и рукоятки фазовращателя. После этого направляют свет во внутреннюю оптическую линию и точно так же получают два отсчета по шкале фазовращателя при установке стрелки индикатора на нуль.

Затем получают по два отсчета по шкале фазовращателя при установке стрелки индикатора на нуль для света из внутренней оптической линии и от отражателя, при положении переключателя фаз, соответствующем постоянной разности фаз, равной 90°. Такие измерения выполняют на каждой из четырех частот модуляции света, деля общее число приемов (например 16 при измерениях базисных сторон триангуляции 1-го класса) поровну между частотами. Так как дальномером можно работать в светлое время суток, то обычно всю программу делят поровну и каждую часть выполняют в подходящие утренние и вечерние часы. Температуру и давление воздуха определяют на обоих концах линии, а влажность — у приемо-передатчика. Метеорологические измерения у приемо-передатчика выполняют перед измерением на каждой частоте модуляции, а у отражателя — через каждые десять минут. При обработке результатов измерения на станции образуют средние отсчеты по фазовращателю, полученные на каждой частоте модуляции при свете от отражателя и из внутренней оптической линии, и их разность. Эту разность исправляют поправкой за нелинейность шкалы

фазовращателя, получаемой из специальных исследований. Пользуясь формулами

$$l_1 = 0{,}012488\varphi_1, \qquad l_2 = 0{,}012489\varphi_2,$$
$$l_3 = 0{,}012519\varphi_3, \qquad l_4 = 0{,}013145\varphi_4,$$

переводят разности средних отсчетов φ_i в линейную меру. Затем по формулам

$$D_1 = N_1 \frac{\lambda_1}{2} + l_1,$$

$$D_2 = N_2 \frac{\lambda_2}{2} + l_2,$$

$$D_3 = N_3 \frac{\lambda_3}{2} + l_3,$$

$$D_4 = N_4 \frac{\lambda_4}{2} + l_4$$

вычисляют величины D_1, D_2, D_3, D_4 — результаты измерений на частотах f_1, f_2, f_3, f_4, исправляют их метеорологическими поправками и образуют среднее. К последнему придают постоянную поправку дальномера δ_k и получают измеряемое расстояние.

III.3.3. Светодальномеры СТ-65 и ТД-2

Светодальномеры СТ-65 (рис. III.3.4) и ТД-2 (рис. III.3.5) — визуальные топографические дальномеры с переменной частотой модуляции света.

Блок-схема светодальномера СТ-65 приведена на рис. III.3.6. Свет от источника *1* конденсором *2* направляется через поляризатор *3* в конденсатор Керра *4*, затем объективом *5* свет посылается на зеркально-линзовый отражатель *6*. Отраженный последним свет поступает в приемную трубу дальномера и объективом *7* направляется в конденсатор Керра *8*. Пройдя анализатор *9* и окуляр *10*, он попадает в глаз наблюдателя.

Для модуляции света на конденсаторы Керра подается постоянное поляризующее и переменное модулирующее напряжение

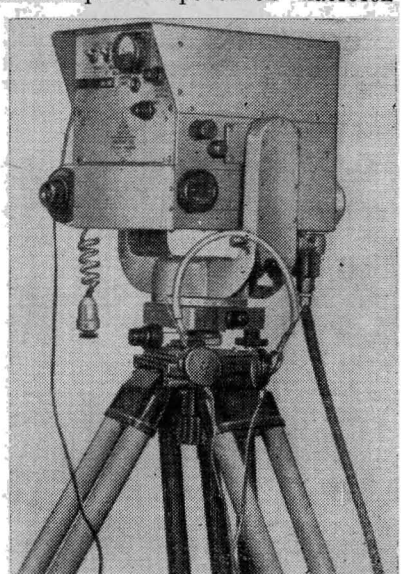


Рис. III.3.4

высокой частоты от генератора *11*. Одновременно переменное напряжение подается в смеситель *12*, куда поступают также электрические колебания частоты 100 кГц от кварцевого генератора *13* и электрические колебания частоты 110 кГц от кварцевого генератора *14*. Образующиеся в смесителе колебания низкой частоты после усиления в усилителе *15* поступают в телефон *16*. Электрическое питание дальномера осуществляется от блока питания *17* и аккумулятора *18*.

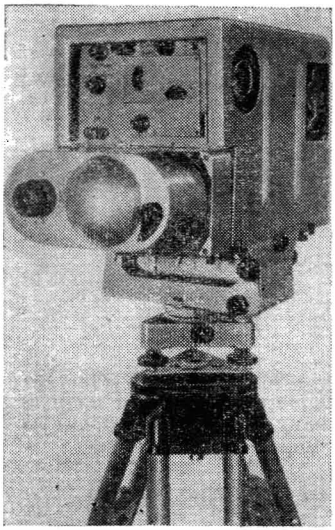


Рис. III.3.5

Дальномер работает следующим образом. Естественно поляризованный свет источника *1* поляризатором *3* превращается в линейно поляризованный и направляется в первый конденсатор Керра *4*. Здесь под влиянием приложенного к конденсатору переменного электрического напряжения образуются обыкновенные и необыкновенные световые колебания, мгновенная разность хода которых на выходе конденсатора соответствует мгновенному значению электрического напряжения. В результате сложения этих световых колебаний образуется эллиптически поляризованный свет, а форма эллипса поляризации непрерывно меняется. Такой, модулированный по поляризации, свет после отражения на другом конце измеряемой линии поступает во второй конденсатор Керра, а по выходе из него проходит анализатор.

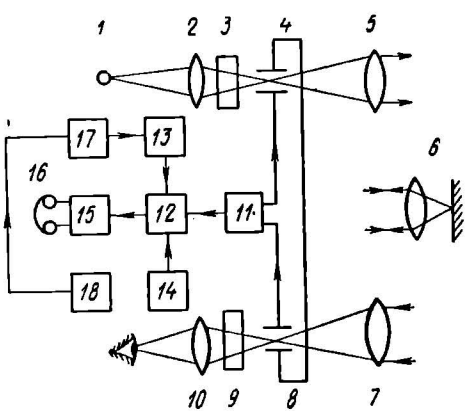


Рис. III.3.6

Измерение расстояний этим дальномером производится компенсационным способом. При измерении расстояний этим способом частота электрического напряжения, приложенного к конденсаторам Керра, устанавливается такой, при которой разность хода обыкновенных и необыкновенных лучей, образующаяся в передающем конденсаторе Керра за время пробега светом оптического пути от входа первого конденсатора до выхода второго, компенсируется во втором конденсаторе. Кроме того, конденсаторы Керра устанавливаются так, чтобы электрические поля в них были взаимно перпендикулярны. Если указанная разность хода изменением частоты электрического напряжения скомпенсирована, то на выходе второго конденсатора образуется свет, поляризация которого такая же, как и поляризация света, поступающего в первый конденсатор Керра. Поляризатор и анализатор в дальномере установлены так, что их плоскости пропускания света перпендикулярны. Поэтому достижение упомянутой компенсации фиксируется минимумом света, видимого наблюдателем. Этому минимуму соответствует следующее соотношение между измеряемым расстоянием D, скоростью света в воздухе v и частотой f переменного электрического напряжения, приложенного к конденсаторам:

$$D = N\frac{v}{2f} + \delta_k = N\frac{\lambda}{2} + \delta_k, \qquad \text{(III.3.1)}$$

где N — целое число или нуль, λ — длина волны модуляции света, соответствующая скорости v, δ_k — постоянная поправка дальномера. В приведенном уравнении две неизвестные величины: D и N. Для определения расстояния компенсационным способом производят измерения частот, соответствующих, по крайней мере, двум минимумам света. При этом определяют число минимумов света, образующихся при плавном изменении частоты от начальной f_i до конечной f_k. В этом случае для расстояний имеют

$$D_i = N_i\frac{v}{2f_i} + \delta_k = N_i\frac{\lambda_i}{2} + \delta_k,$$

$$D_k = N_k\frac{v}{2f_k} + \delta_k = N_k\frac{\lambda_k}{2} + \delta_k,$$

а для чисел N_k и N_i

$$N_k - N_i = n,$$

где n — число минимумов света, образующихся при плавном изменении частоты в указанных пределах. Решение последних уравнений для N_i и N_k дает

$$N_k = \frac{nf_k}{f_k - f_i}, \qquad N_i = \frac{nf_i}{f_k - f_i}. \qquad \text{(III.3.2)}$$

В дальномере СТ-65 конденсаторы Керра подключены к генератору электрического напряжения так, что действующие на них электрические напряжения различаются по фазе на 180°. Вследствие этого упомянутая компенсация имеет место, когда число N отличается от целого на 0,5. Для составления программы изменения расстояния компенсационным способом вначале выполняют так называемый счет минимумов. При этом, плавно изменяя частоту

генератора от начала до конца диапазона, получают отсчеты по шкале генератора, соответствующие минимуму наблюдаемого света. Программа измерения расстояний дальномером СТ-65 зависит от длины линии. Для линий длиной до 1 км просчитываются все минимумы, а для более длинных линий — лишь 5—10 минимумов в начале и конце диапазона. Для измерения линий длиной 0,1—0,2 км используют два минимума, при измерении линий 0,2—1,0 км — четыре и при измерении линий длиннее 1 км используют 6—10 минимумов. Измерения делят так, чтобы одна половина минимумов приходилась на начало диапазона генератора высокой частоты, а другая — на конец диапазона. При этом 20 полуприемов измерений на каждом минимуме распределяются поровну на все минимумы. В одном полуприеме измерения линии, изменяя частоту модуляции света четыре раза, устанавливают ее соответствующей минимальной интенсивности света; при этом получают четыре отсчета по шкале генератора. Два из этих отсчетов (1 и 3) получают при возрастающих отсчетах по шкале генератора, два других — при убывающих. Измерение расстояния на каждом минимуме производят в следующем порядке.

По нулевым биениям, прослушиваемым в телефон, устанавливают младшую и старшую калибровочные точки, кратные 100 кГц, между которыми находится наблюдаемый минимум света. Отсчеты по шкале генератора, соответствующие этим точкам, записывают в журнал. Производят калибровку шкалы генератора через 10 кГц, начиная от установленной калибровочной точки, кратной 100 кГц, на участке шкалы, соответствующем положению используемого минимума. Наблюдают минимум необходимым числом приемов. Производят заключительную калибровку шкалы генератора на узком участке шкалы, где находится наблюдаемый минимум.

При вычислении измеренного расстояния находят средние из отсчетов шкалы генератора, полученные при соответствующих минимумах, а также из отсчетов для калибровочных точек, кратных 10 кГц, между которыми находятся минимумы. По средним отсчетам, линейной интерполяцией, пользуясь «Таблицей калибровочных точек кварцев 100 кГц и 110 кГц», прилагаемой к прибору, получают частоту модуляции, соответствующую минимуму света. Затем по формулам

$$\Delta f_{\text{ср}} = \frac{(f_k - f_l) + (f_{k+p} - f_{l+p}) + (f_{k+2p} - f_{l+2p})}{3},$$

$$\delta f_{\text{ср}} = \frac{(f_{l+p} - f_l) + (f_{l+2p} - f_{l+p}) + (f_{k+p} - f_k) + (f_{k+2p} - f_{k+p})}{4},$$

$$n = \frac{\Delta f_{\text{ср}}}{\delta f_{\text{ср}}}\, p,$$

$$N_l = \frac{f_l}{\Delta f_{\text{ср}}}\, n, \qquad N_k = N_l + n,$$

$$N_{l+p} = N_l + p, \qquad N_{l+2p} = N_l + 2p,$$

$$N_{k+p} = N_k + p, \qquad N_{k+2p} = N_k + 2p,$$

$$D_l = N_l \frac{\lambda_l}{2}, \qquad D_{l+p} = N_{l+p} \frac{\lambda_l + p}{2},$$

$$D_{i+2p} = N_{i+2p}\frac{\lambda_{i+2p}}{2},$$

$$D_k = N_k\frac{\lambda_k}{2}, \qquad D_{k+p} = N_{k+p}\frac{\lambda_{k+p}}{2}, \qquad D_{k+2p} = N_{k+2p}\frac{\lambda_{k+2p}}{2}$$

вычисляют D_i, D_{i+p}, D_{i+2p}, D_k, D_{k+p}, D_{k+2p}. При этом полученные из вычислений числа N округляют до нечетного числа половин. Здесь f_i, f_{i+p}, f_{i+2p} — частоты минимумов, наблюдаемых в начале диапазона генератора, f_k, f_{k+p}, f_{k+2p} — частоты минимумов, наблюдаемых в конце диапазона i, $i + p$, $i + 2p$, k, $k + p$, $k + 2p$ — их номера, $\lambda_i/2$, $\lambda_{i+p}/2$, $\lambda_{i+2p}/2$, $\lambda_k/2$, $\lambda_{k+p}/2$, $\lambda_{k+2p}/2$ — длины полуволн, модуляции света, выбираемые из «Таблиц для вычисления расстояний, измеренных светодальномером СТ-62М» по аргументу соответствующих частот. Указанные длины полуволн соответствуют температуре воздуха 12° С и давлению воздуха 740 мм рт. ст.

Среднее из полученных D затем исправляется необходимыми поправками.

Блок-схема оптической части дальномера ТД-2 приведена на рис. III.3.7.

Свет от источника *1* конденсором *2* через поляризатор *3* направляется в конденсатор Керра *4*. По выходе из последнего зеркально-линзовой системой, состоящей из зеркала *5*, светоделительной призмы *6* и объектива *7*, направляется на отражатель *8*. Возвращенный последним свет зеркально-линзовой системой *7*, *6*, *9* направляется во второй конденсатор Керра *10*. Свет, вышедший из конденсатора, может быть пропущен либо через пластину исландского шпата, либо через анализатор, либо через простое стекло, конструктивно объединенные в револьверную головку *11*. Прошедший револьверную головку свет через окуляр *12*, поляроид и фильтр *13* рассматривается глазом. Для модуляции света к конденсаторам Керра прикладываются постоянное поляризующее и переменное модулирующее напряжения. Для измерения частоты модуляции света служит кварцевый калибратор, позволяющий прокалибровать шкалу генератора через 25 кГц. Электрическое питание дальномера осуществляется от аккумуляторных батарей в 6 и 12 В при помощи преобразователя напряжения, выполненного в виде отдельного блока. Измерение расстояния дальномером может выполняться компенсационным способом или способом сравнения. При измерении расстояния компенсационным способом револьверная головка устанавливается в положение, при котором свет, вышедший из второго конденсатора Керра, проходит анализатор. При измерении

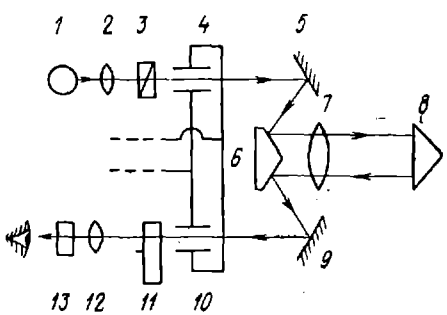


Рис. III.3.7

расстояния способом сравнения головка устанавливается в положение, при котором свет, вышедший из конденсатора, проходит пластину исландского шпата. Вследствие свойственного исландскому шпату двойного лучепреломления вошедший в него свет образует обыкновенные и необыкновенные световые колебания. При достаточной толщине пластины они образуют два изображения источника света, которые могут рассматриваться глазом. При измерении расстояния способом сравнения изменением частоты модуляции света добиваются одинаковой интенсивности указанных двух изображений. При этом среднее из частот, соответствующих двум последовательным одинаковым интенсивностям изображений, равно частоте, соответствующей измерению расстояний компенсационным способом. Уровень, на котором приравниваются интенсивности света, может регулироваться положением плоскости пропускания света поляроидом. Фильтр облегчает приравнивание интенсивности света в двух изображениях отражателя.

Программа измерения расстояний способом сравнения включает те же элементы, что и программа измерения расстояний компенсационным способом, т. е. счет минимумов, калибровку шкалы генератора, собственно измерения расстояний. После того как определены частоты, соответствующие минимумам света, и число минимумов между ними n, по формулам, приведенным выше, вычисляются расстояния.

III.3.4. Светодальномеры КДГ-3 и МСД-1

Светодальномеры КДГ-3 (рис. III.3.8) и МСД-1 (рис. III.3.9) — топографические фотоэлектрические дальномеры с полупроводниковыми светодиодами в качестве источника света.

Блок-схема дальномера КДГ-3 изображена на рис. III.3.10. Электрическое напряжение любой из трех высоких частот $f_1 =$ = 30,0 МГц, $f_2 = 27{,}0$ МГц, $f_3 = 29{,}9$ МГц с генератора *1* подается на светодиод *2*. Излучаемый им свет полупрозрачным зеркалом *3* направляется на объектив *4* и последним посылается на призменный отражатель *5*. Возвращенный отражателем свет проходит объектив, полупрозрачное зеркало *3* и падает на катод фотоэлектронного умножителя *6*. Напряжение высокой частоты поступает также в смеситель *7*. В смеситель подаются электрические колебания генератора *8*, частота которых на 100 кГц меньше частоты колебаний генератора *1*. В результате в смесителе образуются электрические колебания частоты 100 кГц. Эти колебания поступают в фазовращатель *9*, а с него в фазовый коммутатор *10*, который с частотой 1 кГц меняет фазу электрического напряжения на 180°. Генератор *11* вырабатывает электрическое напряжение, управляющее работой фазового коммутатора. Электрическое напряжение с коммутатора поступает на специальный электрод, расположенный около катода фотоэлектронного умножителя, и образует так называемое опорное напряжение. На другой подобный электрод подается напряжение от гетеродина. В результате действия на катод ФЭУ, изменяющегося с частотой модуляции светового потока, а также действия в околокатодном пространстве ФЭУ указанных двух напряжений в нем образуется ток частоты 1 кГц, создающий так называемое сигнальное напряжение на выходе ФЭУ. После усиления в усилителе *12*

этот ток поступает в синхронный детектор *13*. В последний подаются также электрические колебания от генератора *11*. Стрелочный индикатор *14* указывает нуль всякий раз, когда разность фаз опорного и сигнального напряжений на фотоэлектронном умножителе составляет 90 или 270°. Для ослабления влияния на результат измерения периодических ошибок фазовращателя в приборе имеется другой

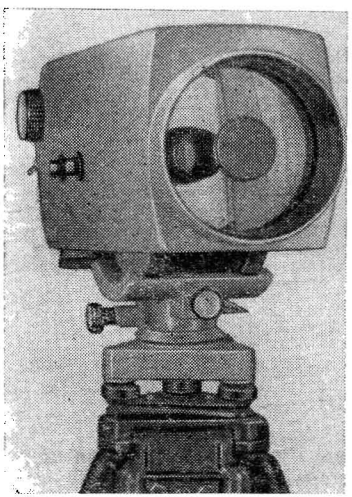


Рис. III.3.8

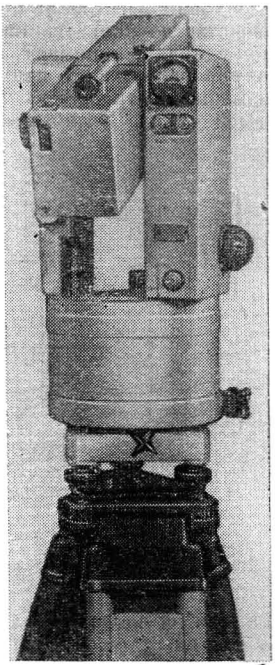


Рис. III.3.9

фазовращатель, позволяющий изменять фазу опорного напряжения скачком на 90°. Дальномер снабжен внутренней оптической линией, позволяющей направить свет из передающей части

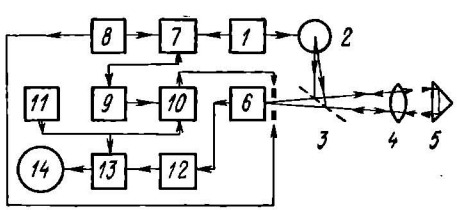


Рис. III.3.10

прибора в приемную, минуя отражатель, установленный на другом конце измеряемой линии. Измерение расстояния состоит в получении отсчетов по фазовращателю, соответствующих нулевым

показаниям индикатора при разностях фаз сигнального и опорного напряжений в 90 и 270° и положениям переключателя фазы 0 и 90°*, при свете с дистанции и из оптической линии. По полученным средним разностям отсчетов при свете с дистанции и из оптической линии получают расстояние по таблицам и формулам, приведенным в руководстве по пользованию прибором.

Блок-схема дальномера МСД-1 приведена на рис. III.3.11. Свет полупроводникового излучателя *1* объективом *2* направляется на призменный отражатель *3*, установленный на другом конце измеряемой линии. Возвращенный отражателем свет объективом *4*

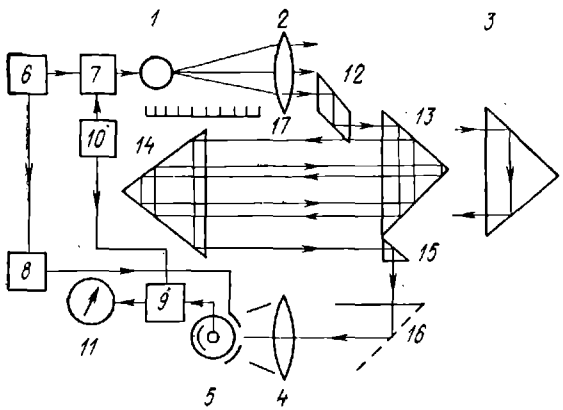


Рис. III.3.11

направляется на катод фотоэлектронного умножителя *5*. Для модуляции света на источник света от генератора *6* через манипулятор фазы *7*, изменяющий ее на 180°, с частотой 80 раз в секунду подается электрическое напряжение частот $f_1 = 149{,}852$ МГц и $f_2 = 146{,}854$ МГц. Напряжение генератора *6* подается также в фазовращатель *8*, а с него на специальный электрод вблизи катода фотоэлектронного умножителя. Электрические сигналы с ФЭУ поступают в синхронный детектор *9*. На манипулятор фазы и синхронный детектор подаются импульсы напряжения от устройства *10* с частотой следования 80 имп/сек. Ток синхронного детектора регистрируется стрелочным индикатором *11*. При помощи призмы *12* часть света, выходящего из объектива *2*, может быть направлена в оптическую линию, образованную прямоугольной призмой *13*, возвратно-отражающей призмой *14* и призмой *15*. Откидным зеркалом *16* свет может быть направлен в приемную часть дальномера, минуя отражатель. Возвратно-отражающая призма *14* может перемещаться поступательно, а ее положение может быть отмечено отсчетом по шкале *17*.

Измерение расстояния дальномером состоит в получении двух отсчетов по шкале оптической линии, соответствующих двум последовательным нулевым показаниям индикатора, на каждой

* Только при измерениях на частоте f_1.

частоте модуляции света. Частота модуляции света f_1 такова, что в сухом воздухе при температуре +20° С и давлении 760 мм рт. ст. длина волны модуляции света равна 2 м. Частота модуляции света позволяет определить расстояние однозначно, если оно предварительно известно с точностью до 50 м. Формулы для вычисления расстояний имеют вид

$$D_1 = N\frac{\lambda_1}{2} + L_1 = (1000{,}000N + L_1) \text{ мм},$$

$$D_2 = N\frac{\lambda_2}{2} + L_2 = (1020{,}408N + L_2) \text{ мм},$$

$$N = 0{,}049\,(L_1 - L_2) \text{ мм},$$

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2} + 50m + \delta_k,$$

где L_1 и L_2 — средние из отсчетов шкалы оптической линии, m — число отрезков по 50 м, содержащееся в измеряемой линии, δ_k — постоянная поправка дальномера.

III.3.5. Светодальномерные насадки ДНК-02 и DI 10

Светодальномерная насадка на теодолит ДНК-02 (рис. III.3.12) разработана в Государственном оптическом институте им. С. И. Вавилова на основе дальномера КДГ-3. Светодальномерная насадка на теодолит DI 10 (рис. III.3.13) выпускается совместно французской фирмой Серсель и швейцарской фирмой Вильд. Источники света в этих насадках — полупроводниковые светодиоды, дающие свет в близкой инфракрасной части спектра. Порядок и программа измерения расстояний насадкой ДНК-02, а также вычисление измеренного расстояния подобны имеющим место при измерении расстояний дальномером КДГ-3. Результат измерения расстояния насадкой DI 10 выдается на числовом табло: при этом после наведения насадки на отражатель и включения прибора автоматически по определенной программе выполняются все изменения частот модуляции света, необходимые для однозначного определения расстояния.

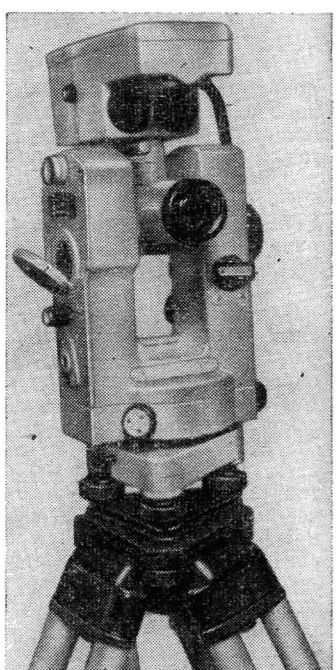


Рис. III.3.12

III.3.6. Электронные тахеометры Reg Elta 14 и геодиметр 700

Электронный тахеометр Reg Elta 14 (рис. III.3.14) и геодиметр 700 (рис. III.3.15) служат для измерения горизонтальных и вертикальных углов, а также наклонных расстояний. Оба прибора имеют электронные вычислительные устройства для автоматического получения горизонтальных расстояний, а геодиметр имеет также устройство для автоматического введения в результат измерения расстояния метеорологической поправки. Результаты измерений в обоих приборах представляются автоматически на цифровом табло. К обоим приборам придаются ленточные перфораторы, позволяющие записать информацию, получаемую от тахеометра, для последующего непосредственного введения ее в ЭВМ или передачи по телеграфу без промежуточного преобразования.

Для измерения расстояний в тахеометре Reg Elta 14 используется дальномер (SM 11) со светодиодом в качестве источника света, а в геодиметре 700 — гелий-неоновый газовый лазер. Для измерения углов в обоих тахеометрах используются кодовые диски с электронным отсчетом.

В. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАДИОДАЛЬНОМЕРЫ

Радиодальномерами называют приборы, состоящие из двух приемо-передающих радиостанций, снабженные устройствами для измерения времени прохождения радиосигналов при распространении их от одного пункта до другого. Радиостанции помещают в пунктах, расстояние между которыми необходимо измерить.

Расстояние измеряют по измеренному времени распространения сигналов, излучаемых радиостанциями. Если это время равно τ, а скорость распространения сигналов v, то измеряемое расстояние D равно

$$D = \frac{v}{2}\tau + \delta_k,$$

где δ_k — постоянная поправка дальномера.

Так как время распространения сигналов наиболее точно можно определить измерением разности фаз гармонических колебаний, то сигналы, используемые для получения расстояния, представляют собой близкие к гармоническим электромагнитные колебания.

Для измерения времени τ могут быть использованы несущие электромагнитные колебания, излучаемые радиостанциями. Практика показывает, однако, что удобнее использовать сигналы, полученные модуляцией несущих колебаний по гармоническому закону; при этом результаты измерения получаются точнее. Так как в последнем случае время определяют путем измерения разности фаз модулирующих колебаний, то последние часто называют измерительными, или метрическими, а соответствующую частоту — метрической частотой.

Так как время должно быть измерено с малой абсолютной ошибкой, метрическая частота не может быть выбрана низкой. Вследствие того, что разность фаз колебаний циклически повторяется и может быть измерена только ее часть, меньшая или равная 2π,

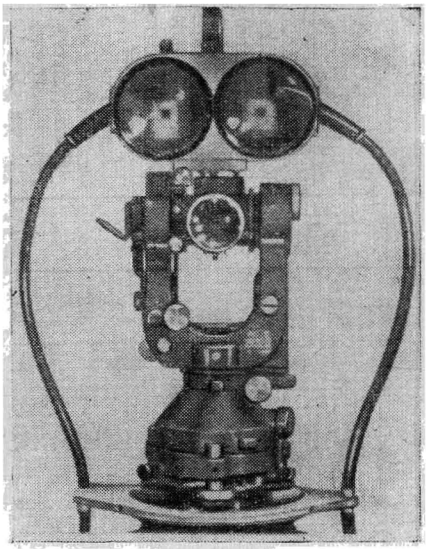


Рис. III.3.13

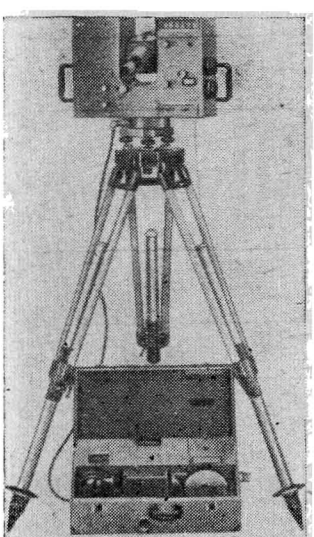


Рис. III.3.14

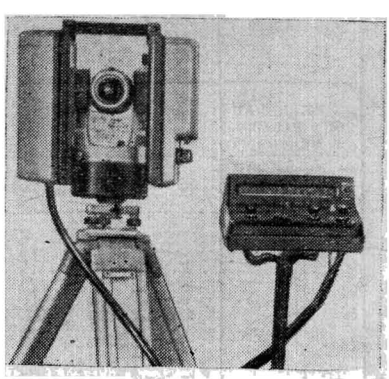


Рис. III.3.15

Таблица III.3.2

Марка дальномера, страна-изготовитель	Длина несущей волны, см	Основная частота модуляции, МГц	Отсчет результата измерения	Пределы измеряемых расстояний, км		Средняя квадратическая ошибка измерения расстояний	Масса станции, кг	Потребляемая мощность, Вт	Примечание
				min	max				
Теллурометр MRA-3, ЮАР	3	7,5	Цифровой	0,03	50	± 1 см $+ 3 \cdot D - 10^{-6}$	16	38	
MRA-4, ЮАР	0,8	75	ЭЛТ *	0,05	60	± 3 мм $+ 3 \cdot D \cdot 10^{-6}$	19,5		
CA 1000, ЮАР	3		Цифровой		10 и 30	1,5 см		7	10 км с нормальной антенной, 30 км — с усиленной антенной
Электротейп DM-20, США	3	15	Цифровой	0,05	100	± 1 см $+ 3 \cdot D \cdot 10^{-6}$	11,5		
Дистомат DI-50, Швейцария	3	15	Цифровой	0,1	150	± 2 см $+ 10^{-5} - 10^{-6}$	22	50	Приемо-передающий блок может быть удален от индикаторного на 15 м
Дистаметр III, ФРГ	3	7.5	Цифровой	0,05	100	± 2 см $+ 10^{-5} - 10^{-6}$	10,8	30	
Дистаметр 8, ФРГ	0,8	7,5	Цифровой	0,05	50				
GET-A2, ВНР	3	10	Цифровой	—	15	± 2 см $+ 2 \cdot D \cdot 10^{-6}$	5		Приемо-передающий блок может быть удален от индикаторного на 15 м
RG10, ПНР	3	7,5	Цифровой	0,1	40	± 3 см $+ 5 \cdot D \cdot 10^{-6}$	10	32	
РЕМ-2, ГДР	3	10	ЭЛТ	0,1	100	± 3 см $+ 3 \cdot D \cdot 10^{-6}$	13,5		
РДГВ, СССР	10	10	ЭЛТ	0,2	30	± 5 см $+ 3 \cdot D \cdot 10^{-6}$			
«Луч», СССР	3,5	—	Фазовращатель	0,2	40	± 3 см $+ 3 \cdot D \cdot 10^{-6}$	23,5 **	80	Приемо-передающий блок может быть удален от индикаторного на 25 м

для определения полного времени распространения сигналов необходимо использовать сигналы нескольких метрических частот, по которым определяют различные доли полного времени распространения сигналов.

Некоторые сведения об отечественных и зарубежных радиодальномерах приведены в табл. III.3.2.

III.3.7. Геодезический радиодальномер РДГВ

Геодезический радиодальномер РДГВ (рис. III.3.16) (радиодальномер геодезический с взаимозаменяемыми станциями) был разработан на основе дальномеров РДГ и ВРД* и отличается от последних тем, что в нем любая станция дальномера может выполнять функции ведомой и ведущей станций.

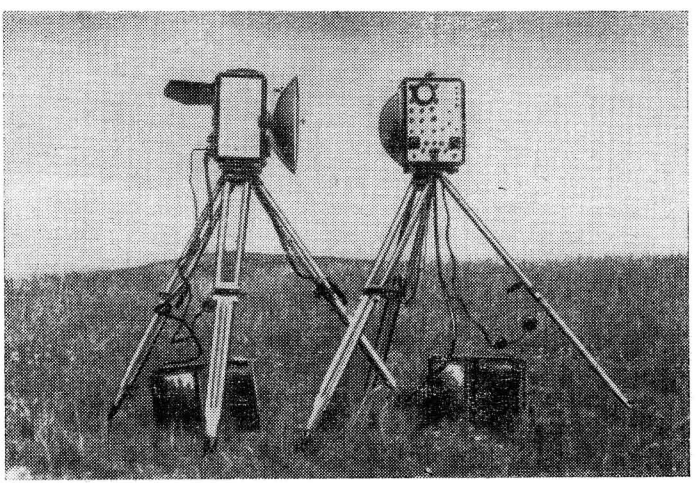


Рис. III.3.16

Станции дальномера имеют следующую блок-схему (рис. III.3.17): *1* и *1′* — приемо-передающие антенны станции, работающей в режиме ведущей, и станции, работающей в режиме ведомой. Они представляют собой полуволновые вибраторы с рефлектором. *2* и *2′* — клистронные генераторы электрических колебаний несущих частот, частоты колебаний которых могут изменяться в пределах 2800—3200 МГц и различаются на 33 МГц на ведущей и ведомой станциях. *3* и *3′* — термостатированные кварцевые генераторы колебаний метрических частот: $A = 10\,000$, $A^+ = 9999$, $A^- = 10\,001$, $B = 9990$, $B' = 9989$, $C = 9900$, $C' = 9899$, $D = 9000$, $D' = 8999$ кГц. *4* и *4′* — микрофоны и *5* и *5′* —

* Справочник геодезиста. М., «Недра», 1966.

телефоны для дуплексной телефонной связи между станциями. *6* и *6′* — кристаллические смесители, *7* и *7′* — усилители промежуточной частоты, *8* и *8′* — частотные детекторы, *9* и *9′* — амплитудные детекторы, *10* и *10′* — индикаторные блоки, *11* и *11′* — электронно-лучевые трубки.

Станции дальномера могут работать в режимах измерения и разговора. В режиме измерения станции работают следующим образом. Колебания генератора *2*, модулированные по частоте

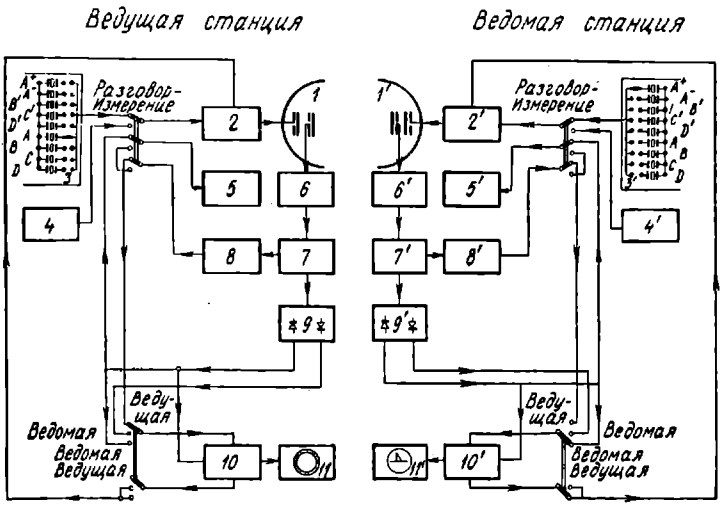


Рис. III.3.17

колебаниями одной из частот A, B, C или D модулятора *3*, излучаются передающим диполем антенны *1* ведущей станции. Колебания ведущей станции принимаются приемным диполем антенны *1′* ведомой станции и поступают в смеситель *6′*. Колебания клистронного генератора *2′* этой станции, модулированные по частоте одним из колебаний A^+, A^-, B', C' или D' модулятора *3′*, излучаются передающим диполем антенны *1′* этой станции. Излученные передающим диполем колебания улавливаются приемным диполем этой станции и также поступают в смеситель *6′*. Таким образом, в смеситель *6′* поступают колебания несущих частот, различающихся на 33 МГц, модулированные по частоте разными частотами. В результате на выходе смесителя образуется синусоидальный сигнал промежуточной частоты, модулированный по амплитуде с частотой, равной разности частот модуляции, т. е. 1 кГц. Этот сигнал поступает в усилитель промежуточной частоты *7′*, а затем в амплитудный детектор *9′*. Амплитудный детектор имеет два выхода, управляемых переключателем: $+\pi$ и $-\pi$, сигналы с которых сдвинуты по фазе на 180°. Синусоидальный сигнал низкой частоты с выхода детектора поступает в индикаторный блок *10′*, в котором в момент прохождения сигнала через нуль образуется импульс. Изображение этого импульса

получается на экране электроннолучевой трубки *11'*. Импульс положительной полярности с индикаторного блока подается на клистронный генератор *2'* и также модулирует его по частоте. Таким образом, клистронный генератор ведомой станции оказывается модулированным дважды: синусоидально с одной из частот A^+, A^-, B', C' или D' и импульсно с частотой следования импульсов 1000 имп/сек. Такие дважды модулированные по частоте колебания ведомой станции принимаются приемным диполем антенны *1* ведущей станции. В него же поступают и колебания, излучаемые ведущей станцией. Колебания различных несущих частот, модулированные с различными частотами синусоидально и импульсно, образовавшиеся в приемном диполе, направляются в смеситель *6*. В смесителе образуется сигнал частоты 33 МГц, модулированный синусоидально по амплитуде с частотой 1 кГц и модулированный импульсно по частоте с частотой следования 1000 имп/сек. Этот сигнал поступает в частотный детектор *8* и амплитудный детектор *9*. На выходе частотного детектора образуются импульсы с частотой 1000 имп/сек, а на выходе амплитудного детектора — синусоидальные колебания частоты 1 кГц. Синусоидальные колебания поступают в индикаторный блок *10* и используются для получения круговой развертки на экране электроннолучевой трубки *11*. Импульсы также поступают в индикаторный блок *10*, а затем на модуляторный электрод электроннолучевой трубки и запирают ее на время действия импульса. В результате в развертке образуется разрыв. Экран трубки снабжен круговой шкалой, содержащей 100 делений, по которой определяется место разрыва. При работе станций в режиме разговора, при соответствующем положении переключателя, к клистронным генераторам *2* и *2'* оказываются присоединенными усилители низкой частоты с микрофонами *4* и *4'*, а к частотным детекторам — усилители низкой частоты с телефонами *5* и *5'*. Вместе с радиостанциями в одном кожухе смонтированы блоки питания в виде преобразователей постоянного тока аккумуляторных батарей напряжением 12 В в постоянные токи напряжений, необходимых для нормальной работы радиостанций.

В комплект дальномера входят три станции. Источником электрического питания дальномера служат аккумуляторные батареи напряжением 12 В. Для зарядки аккумуляторов служит выпрямитель и бензо-электрический агрегат.

III.3.8. Геодезический радиодальномер «Луч»

Геодезический радиодальномер «Луч» (рис. III.3.18) разработан в Центральном научно-исследовательском институте геодезии, аэрофотосъемки и картографии.

В этом дальномере приемо-передатчик и индикатор выполнены отдельно и могут соединяться кабелем длиной до 25 м. Приемо-передатчик может устанавливаться на мачте необходимой высоты, обеспечивающей взаимную видимость между двумя станциями. Управление приемо-передатчиком и производство измерения производятся при помощи индикатора, расположенного внизу. Дальномер работает следующим образом (рис. III.3.19). Колебания высокой частоты (8600—8900 МГц) клистронного генератора *1* ведущей станции, модулированные по частоте колебаниями метрической

частоты термостатированного кварцевого генератора *2*, излучаются антенной *3* этой станции и принимаются антенной ведомой станции *3′*. Антенной этой станции принимаются также колебания клистронного генератора *1′* другой высокой частоты, модулированные по частоте колебаниями термостатированного кварцевого генератора *2′*. Колебания, принятые антенной *3′*, направляются в смеситель *4′*, на выходе которого образуются колебания промежуточной частоты, модулированные по амплитуде. Эти колебания поступают в усилитель промежуточной частоты *5′*, а с него — в амплитудный детектор *6′* и частотный детектор *7′*. На выходе амплитудного детектора *6′* образуются синусоидальные колебания частоты, равной разности частот модулирующих колебаний, т. е. 1 кГц. Последние поступают в усилитель *8′*, а с него — в частотный модулятор *8″*. Колебаниями этого модулятора модулируются по частоте колебания вспомогательного генератора *9′* колебаний частоты 83 кГц. Колебания последнего поступают в клистронный генератор *1′* и вторично модулируют его по частоте. Таким образом, колебания генератора *1′* оказываются модулированными по частоте

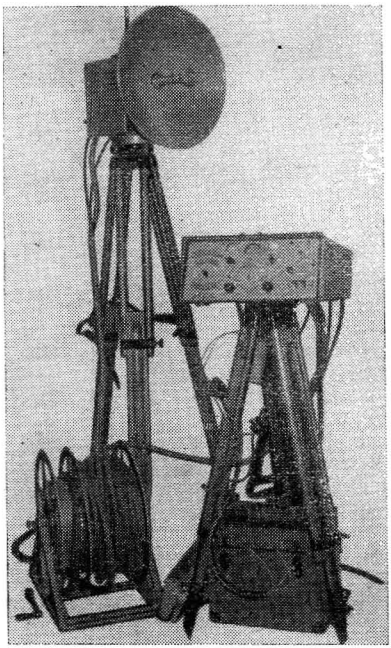


Рис. III.3.18

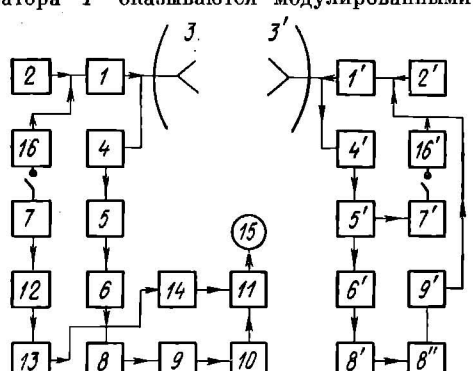


Рис. III.3.19

дважды. Эти колебания излучаются антенной *3'* ведомой станции и принимаются антенной *3* ведущей станции. Последней принимаются также и собственные колебания этой станции. Принятые колебания поступают в смеситель *4*, затем в усилитель промежуточной частоты *5*, а с него в амплитудный *6* и частотный *7* детекторы. На выходе амплитудного детектора образуются колебания частоты 1 кГц, которые после усиления в усилителе *8* поступают в фазовращатель *9*, усилитель *10* и фазовый детектор *11*. Колебания частоты 83 кГц с выхода первого частотного детектора *7* после усиления в усилителе *12* подаются на второй частотный детектор *13*. Колебания частоты 1 кГц, образовавшиеся на выходе этого детектора, после усиления в усилителе *14* поступают на второй вход фазового детектора *11*. Ток фазового детектора регистрируется стрелочным прибором *15*, указывающим нуль при разностях фаз колебаний, поступивших на входы фазового детектора, равных 90 и 270°. Устройства автоматической подстройки частоты *16* и *16'*, управляемые сигналами с частотных детекторов *7* и *7'*, позволяют поддерживать постоянной разность частот несущих колебаний ведущей и ведомой станций.

III.3.9. Радиодальномер Электротейп

Дальномер DM-20 (рис. III.3.20) состоит из двух приемо-передающих станций, каждая из которых может быть и ведомой и ведущей. В качестве источников питания, вставляемых в приемо-передатчики, могут быть использованы 12-вольтовые аккумуляторные батареи: свинцовые весом 3,6 кг на 3 часа работы, никелево-кадмиевые весом 3,2 кг на 3 часа работы; серебряные весом 0,8 кг на 2 часа 30 мин работы. Масса всего оборудования каждой станции с указанными источниками питания — около 26 кг.

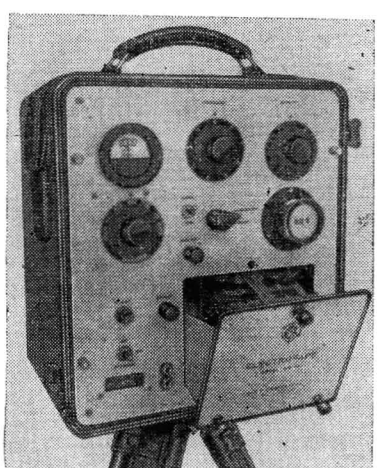


Рис. III.3.20

Восемь фиксированных несущих частот станций лежат в диапазоне 10 000—10 500 МГц. Наивысшая частота модуляции составляет 7,5 МГц, четыре другие модулирующие частоты — 6,0000; 7,3500; 7,4850 и 7,4985 МГц позволяют измерять полное время распространения сигналов при расстоянии до 100 км.

Индикатором измеряемого расстояния служит цифровое устройство, показания которого используют для получения сразу расстояния в сантиметрах при некотором стандартном показателе преломления воздуха. При необходимости оно может

быть исправлено за отличие температуры, давления и влажности воздуха от принятых для стандартного показателя преломления.

III.3.10. Радиодальномер Дистомат D150

Дальномер D150 (рис. III.3.21) состоит из двух приемопередающих станций, каждая из которых может быть как ведомой, так и ведущей. Станция состоит из двух отдельных блоков — передатчика и блока управления и измерения. Блоки могут быть разнесены на расстояние до 15 м. Масса передатчика — 7,5 кг, блока управления и измерения — 14,5 кг. Дальномер снабжается блоком питания в виде аккумуляторных батарей. Несущие частоты станций лежат в пределах от 10 200 до 10 500 МГц.

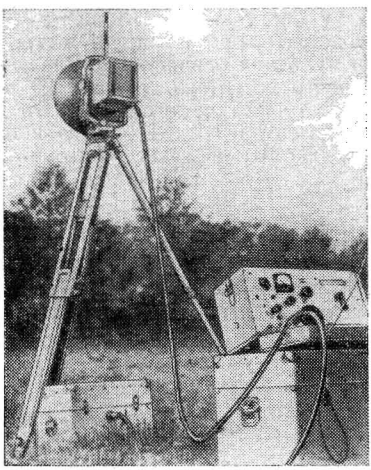


Рис. III.3.21

Результат измерения расстояния, выраженный в сантиметрах, получают на цифровом индикаторе. Он отнесен к метеорологическим условиям: температура воздуха 12° С, давление 745 мм рт. ст., относительная влажность 76% (показатель преломления воздуха 1,000320).

Блок управления и измерения снабжен программным переключателем, при помощи которого (без участия наблюдателя на другой станции) часть расстояния, меньшая 1 м, может быть получена повторно. Измеренное расстояние может быть исправлено поправками за отличие температуры, давления и влажности воздуха при измерениях от принятых средних.

III.3.11. Измерение расстояний радиодальномером РДГВ

Для измерения расстояния станции радиодальномера устанавливают на конечных точках линии, направляют одну на другую, включают и между ними устанавливают радиотелефонную связь. Оператор станции, исполняющей роль ведомой, настраивает ее на частоту ведущей станции, пользуясь радиотелефоном. После настройки уточняется направление станций друг на друга по силе принимаемых сигналов станций. После этого в течение 10—15 мин прогревают термостаты модуляторов, производят центрировку и регулировку развертки, устанавливают уровень модуляции.

Каждый прием измерения линии состоит из приближенных (грубых), точных и вновь приближенных измерений. При приближенных измерениях на ведущей станции получают отсчеты по шкале электроннолучевой трубки A^+, A^-, B, C и D при работе станций на метрических частотах A, B, C и D и соответствующих им частотах A^+, A^-, B', C' и D'. Затем на обеих станциях измеряют температуру, давление и влажность воздуха. Оператор ведомой станции передает их по радиотелефону на ведущую станцию.

Из отсчетов A^+, A^-, B, C и D образуют разности $A^+ - B$, $A^+ - C$ и $A^+ - D$, а также $A^+ - A^-$ и из полученных чисел образуют число, дающее приближенное время распространения сигналов на пути распространения. Последнее получается в наносекундах, если слева направо выписать число десятков в разностях $A^+ - B$, $A^+ - C$, $A^+ - D$ и приписать к ним полуразность $A^+ - A^-$. Если измеряемое расстояние больше 15, 30, 45 км, то слева от этого числа надо приписать соответственно 1, 2 или 3.

Затем приступают к точному измерению времени распространения для уточнения содержащегося в нем числа единиц наносекунд. Для этого при 10—20 различных, следующих через равные интервалы, значениях несущих частот, изменяемых на ведомой станции, и при частотах модуляции A, A^+, A^- получают при каждой несущей частоте по четыре отсчета A^+, A^-, $A_{-\pi}$ и $A_{+\pi}$. После этого вновь измеряют температуру, давление и влажность воздуха, а затем повторяют приближенные измерения расстояния.

Для контроля степени ослабления влияния отражений электромагнитных колебаний от подстилающей поверхности на результат измерения полезно построить график результатов точных измерений, полученных на различных несущих частотах. По оси ординат графика откладывают результаты точных измерений времени в наносекундах, а по оси абсцисс — соответствующие различным несущим частотам отсчеты по шкале объемного резонатора клистронного генератора. Вид графика, напоминающий один период синусоиды, указывает на достигнутую компенсацию влияний отражений в окончательном среднем результате измерения. Отличие графика от синусоиды указывает на неполную компенсацию упомянутых влияний; при этом в зависимости от необходимой точности измерений могут потребоваться дополнительные измерения на других несущих частотах, перемена мест расположения станций или изменение их высот над землей. Длины сторон при измерениях в государственной полигонометрии измеряют шестью приемами, распределяемыми по возможности равномерно на два дня. Стороны полигонометрии 3 и 4 классов измеряют тремя приемами в один день. Средние из четырех отсчетов (A^+, A^-, $A_{+\pi}$ и $A_{-\pi}$), полученных на каждой несущей частоте, должны лежать в пределах 4 нсек. Длины сторон, вычисленные по результатам измерений в различных приемах, не должны расходиться более чем на 8 см при измерениях в ходах полигонометрии 2 класса и более 10 см — в полигонометрии 3 и 4 классов. Если указанные допуски не соблюдаются, то производят дополнительные измерения двумя приемами, а за окончательный результат измерений принимают среднее из всех полученных результатов.

8. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ, ИЗМЕРЕННЫХ СВЕТО- ИЛИ РАДИОДАЛЬНОМЕРАМИ. ПОПРАВКИ В РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Расстояние, измеренное свето- или радиодальномером, приведенное к центрам знаков и на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера, вычисляется по формулам

$$d = D_0 + \delta_v + \delta_k + \delta_h + \delta_c + \delta_r + \delta_H + \delta_L$$

или

$$d = D_v + \delta_k + \delta_h + \delta_c + \delta_r + \delta_H + \delta_L,$$

где D_0 — расстояние, отсчитанное по указателю расстояний дальномера, соответствующее некоторому стандартному значению скорости распространения электромагнитных колебаний в воздухе v_0 или стандартному показателю преломления воздуха n_0 или стандартной длине волны модуляции колебаний λ_0; D_0 может быть также вычислено по формуле, соответствующей дальномеру, с упомянутыми значениями v_0, n_0 или λ_0; D_v — расстояние, полученное по значению скорости распространения электромагнитных колебаний v или показателю преломления n или длине волны модуляции колебаний λ, имевшим место фактически во время производства измерений; δ_v — метеорологическая поправка за отличие фактических скорости распространения электромагнитных колебаний v, показателя преломления воздуха n или длины волны модуляции λ от принятых при получении D; δ_k — постоянная поправка дальномера; δ_h — поправка за приведение измеренной линии к горизонту; δ_c, δ_r — поправки за центрировку приемо-передатчика и отражателя светодальномера или станций над концами измеряемой линии; δ_H — поправка за приведение измеренного расстояния на референц-эллипсоид; δ_L — поправка за приведение измеренного расстояния на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера.

При вычислении некоторых поправок следует принимать приближенное значение измеренного расстояния, исправленное некоторыми предыдущими поправками. В связи с этим применяют следующие обозначения:

$$D_{\mathrm{I}} = D_0 + \delta_v + \delta_k = D_v + \delta_k,$$

$$D_{\mathrm{II}} = D_{\mathrm{I}} + \delta_h + \delta_c + \delta_r,$$

$$D_{\mathrm{III}} = D_{\mathrm{II}} + \delta_H,$$

$$d = D_{\mathrm{III}} + \delta_L.$$

Показатель преломления воздуха для света n_L вычисляется по формулам

$$(n_G - 1) \cdot 10^7 = 2876{,}04 + \frac{16{,}288}{\lambda^2} + \frac{0{,}136}{\lambda^4},$$

$$n_L = 1 + \frac{n_G - 1}{1 + \alpha t} \frac{p}{760} - \frac{55e}{1 + \alpha t} \cdot 10^{-9}.$$

Показатель преломления воздуха для радиоволн n_R вычисляется по формуле

$$(n_R-1)\cdot 10^6=\frac{103{,}49}{T}(p-e)+\frac{86{,}26}{T}\left(1+\frac{5748}{T}\right)e=$$

$$=\frac{103{,}49}{T}p+\left(-\frac{17{,}23}{T}+\frac{495\,822}{T^2}\right)e,\ .$$

В этих формулах: n_G — групповой показатель преломления сухого воздуха при температуре 0° С и давлении 760 мм рт. ст., λ — эффективная длина волны света, который используется в дальномере, в мкм, n_L — показатель преломления света в воздухе при температуре $t°$ С, давлении p в мм рт. ст. и абсолютной влажности e в мм рт. ст., α — коэффициент объемного расширения воздуха, равный 1/273,16 = 0,003661, n_R — показатель преломления воздуха для радиоволн, T — абсолютная температура в градусах Кельвина, $T = t° + 273{,}16$. Абсолютная влажность воздуха e вычисляется по формуле

$$e=E'+\frac{p}{a}(t_c-t_{вл})\left(1+\frac{t_{пл}}{872{,}8}\right),$$

где E' — давление водяных паров, насыщающих воздух, при температуре влажного термометра $t_{вл}$ (выбирается из Психрометрических таблиц), p — давление воздуха в мм рт. ст., a — постоянная психрометра Ассмана, равная 1510 при положительных температурах влажного термометра и 1756 — при резервуаре влажного термометра, покрытом льдом, t_c и $t_{вл}$ — температуры сухого и влажного термометров психрометра Ассмана.

Если скорость распространения света в пустоте c, а показатель преломления воздуха n, то скорость распространения электромагнитных колебаний в воздухе,

$$v=\frac{c}{n}.$$

При вычислении метеорологической поправки могут оказаться полезными следующие соотношения:

$$v_0=\frac{c}{n_0},$$

$$\frac{v}{v_0}=\frac{n_0}{n},\qquad \frac{v-v_0}{v_0}=\frac{n_0-n}{n},$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{v}{v_0},\qquad \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0}=\frac{v-v_0}{v_0},$$

$$\frac{\tau}{\tau_0}=\frac{n}{n_0},\qquad \frac{\tau-\tau_0}{\tau_0}=\frac{n-n_0}{n_0},$$

где n — показатель преломления воздуха, v — скорость распространения электромагнитных колебаний, λ — длина волны моду-

ляции, τ — время, затраченное колебаниями на пробег двойного измеряемого расстояния. Эти величины соответствуют температуре, давлению и влажности воздуха, имевшим место во время измерений, или расстоянию D_v, n_0, v_0, λ_0 и τ_0 — те же величины, соответствующие расстоянию D_0.

При вычислении метеорологической поправки вместо показателя преломления воздуха пользуются также модулем N показателя преломления воздуха

$$N = (n - 1) \cdot 10^6.$$

Для сухого воздуха при $t = 0°$ С, $p = 760$ мм рт. ст. и длинах волн света 0,56 мкм и 0,63 мкм модули показателя преломления соответственно равны 303,8 и 300,0.

Для радиоволн при тех же метеорологических условиях $N = 288{,}0$.

Метеорологическая поправка может быть вычислена также по формуле

$$\delta_v = (N_0 - N)\, D_0 \cdot 10^{-3}.$$

Здесь δ_v получается в миллиметрах, если D_0 выражено в метрах.

Постоянная поправка дальномера δ_k приводится в паспорте прибора и для светодальномеров может даваться отдельно для приемо-передатчика δ_k' и отражателя δ_k''. В этом случае

$$\delta_k = \delta_k' + \delta_k''.$$

Постоянная поправка радиодальномера должна быть взята та, которая соответствует паре станций, участвовавших в измерении данной линии.

Поправка за приведение линии к горизонту δ_h вычисляется по формуле

$$\delta_h = -\frac{h^2}{2D_I} - \frac{h^4}{8D_I^3},$$

где h — превышение приемо-передатчика над отражателем светодальномера или между станциями радиодальномера.

Поправки за центрировку приемо-передатчика δ_c и отражателя δ_r вычисляются по формулам

$$\delta_c = -e\cos\theta + \frac{h^2}{2D_I - e\cos\theta},$$

$$\delta_r = -e_1\cos\theta_1 + \frac{h_1^2}{2D_I - e_1\cos\theta_1},$$

или, если e и $e_1 < 1$ м, то по формулам

$$\delta_c = -e\cos\theta,$$

$$\delta_r = -e_1\cos\theta_1.$$

Здесь e, e_1, θ, θ_1 — элементы центрировки приемо-передатчика и отражателя, а значения h и h_1 указаны на рис. III.3.22.

Поправка за приведение линии на поверхность относимости δ_H вычисляется по формуле

$$\delta_H = -D_{II}\frac{H_m - h_m}{R_A} + D_{II}\left(\frac{H_m + h_m}{R_A}\right)^2 + \frac{D_{II}^3}{24R_A^2} =$$

$$= -D_{II}\left[\frac{H_m + h_m}{R_A} - \left(\frac{H_m + h_m}{R_A^2}\right)^2\right] + 1{,}02D_{II}^3 \cdot 10^{-6},$$

где H_m — средняя высота измеренной линии над уровнем моря, h_m — средняя высота геоида над референц-эллипсоидом, R_A —

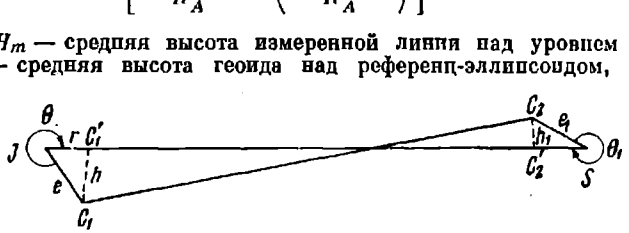


Рис. III.3.22

средний радиус кривизны нормального сечения референц-эллипсоида в азимуте измеряемой линии в точке со средней широтой линии B_m. Поправка за приведение измеренной линии на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера δ_L вычисляется по формуле

$$\delta_L = D_{III}\frac{Y_m^2}{2R_m^2} + D_{III}\left(\frac{\Delta Y^2}{24R_m^2} + \frac{Y_m^4}{24R_m^4}\right),$$

где D_{III} — длина линии на поверхности референц-эллипсоида в километрах, Y_m — средняя ордината линии, ΔY — разность ординат концов линии, R_m — средний радиус кривизны референц-эллипсоида. Второй член формулы учитывают при удалении линии от осевого меридиана, превышающем 150 км.

Некоторые дальномеры снабжаются специальными таблицами для вычисления расстояний и поправок.

Модули показателя преломления света в воздухе для длин волн света $\lambda = 0{,}50 \div 0{,}85$ мкм при температурах $t = -40 \div +50°$ С; абсолютную влажность воздуха e при температурах от -39 до $+40°$ С; модули показателя преломления воздуха для радиоволн при температурах от $-39{,}9$ до $+49{,}9°$ С; величины $v/2$ для радиоволн при $N = 180 \div 379$, а также таблицы поправок за центрировку станций, наклон линии, за приведение измеренных расстояний на уровень моря, а также на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера имеются в [4] и [5].

Р. РАДИОГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

III.3.12. Общие сведения

Под радиогеодезической системой понимают несколько радиостанций, взаимодействующих друг с другом так, что положение одной из них может быть определено, если положение других

известно. Радиогеодезические системы предназначены главным образом для определения местоположения движущихся объектов. Такими объектами в геодезической практике могут быть: самолет, выполняющий аэрофотосъемку, судно, производящее гидрографическую съемку. Радиогеодезические системы широко применяются также при геофизических разведках с самолетов и судов. Радиогеодезические системы, подобно радионавигационным системам воздушной и морской навигации, позволяют определять местоположение объектов, но отличаются от них более высокой точностью, меньшим весом и габаритами и потребляемой энергией.

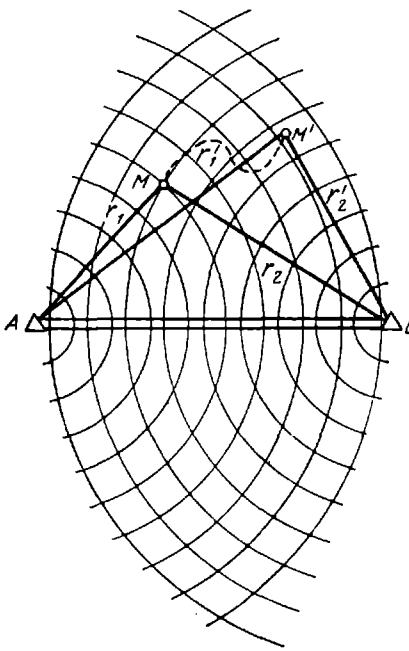


Рис. III.3.23

Радиогеодезические системы различают по виду измеряемых ими величин, определяющих местоположение. Такими величинами, определяющими положение объекта на поверхности земли, являются: два расстояния от двух известных пунктов до определяемого, две разности расстояний от определяемого до трех заданных пунктов.

При определении местоположения объекта, находящегося над Землей, одним расстоянием является высота. Она определяется чаще всего при помощи радиовысотомера. Если две другие величины, необходимые для определения положения объекта и определяемые системой, есть расстояние его от двух известных пунктов, то система называется круговой. В этом случае положение объекта или его точки надира определяется пересечением двух окружностей с центрами в известных пунктах A и B и с радиусами r_1 и r_2 (рис. III.3.23). Если пренебречь эллипсоидальностью Земли и полагать ее шаром, то указанные окружности будут сферическими, а если точность измерений и расстояния r_1 и r_2 позволяют, то они могут быть приняты плоскими. Координаты объекта или его точки надира в этих случаях могут быть найдены по формулам для вычисления координат пункта, определяемого линейной засечкой на сфере или на плоскости.

Если положение объекта определяется при помощи измерения двух разностей расстояний $r_1 - r_2$ и $r_3 - r_2$ его от пунктов A, B и C, B (рис. III.3.24), то положение его или точки надира определяется пересечением двух сферических гипербол с фокусами

в точках A, B и B, C, если пренебречь эллипсоидальностью Земли и полагать ее шаром, или пересечением плоских гипербол, если точность измерений и расстояния r_1, r_2 и r_3 позволяют пренебречь сферичностью Земли. Такие системы называют разностными или гиперболическими. Координаты объекта или его точки надира в этом случае находят из решения задачи фазового зонда.

Радиогеодезические системы обычно позволяют измерять не сами расстояния r_1 и r_2 или разности расстояний $r_1 - r_2$ и $r_3 - r_2$,

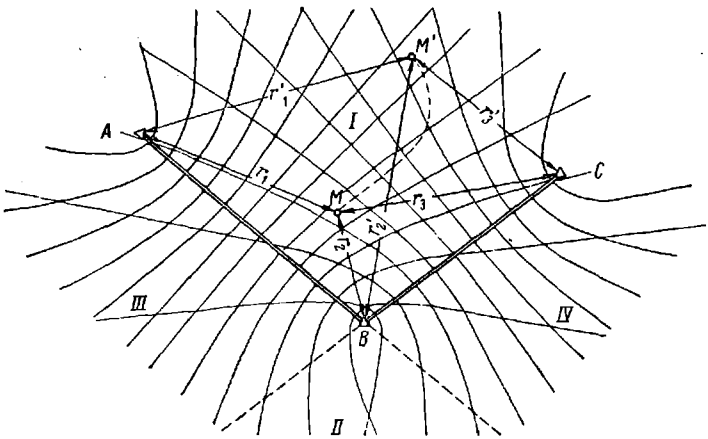


Рис. III.3.24

а их приращения $\Delta r_1 = r'_1 - r_1$, $\Delta r_2 = r'_2 - r_2$ или $\Delta r_{12} = (r'_1 - r'_2) - (r_1 - r_2)$, $\Delta r_{32} = (r'_3 - r'_2) - (r_3 - r_2)$, соответствующие перемещению объекта из пункта M с известными координатами в пункт M' с неизвестными координатами (см. рис. III.3.23, III.3.24). Необходимые для определения координат пункта M' расстояния или разности расстояний находят по формулам

$$r'_1 = r_1 + \Delta r_1, \quad r'_2 = r_2 + \Delta r_2,$$

$$r'_1 - r'_2 = r_1 - r_2 + \Delta r_{12}, \quad r'_3 - r'_2 = r_3 - r_2 + \Delta r_{32}.$$

Измерение расстояний, их приращений или изменения разностей расстояний могут быть выполнены импульсным или фазовым методом. В зависимости от метода измерения расстояний или разностей расстояний системы могут быть импульсными или фазовыми.

Работа радиогеодезической системы при определении положения движущегося объекта, например аэрофотоаппарата на самолете при аэрофотосъемке, связывается и синхронизируется с работой других устройств, например затвора, так, чтобы регистрируемые системой величины, определяющие положение объекта, относились к моменту срабатывания других устройств (в приведенном примере — к моменту экспозиции аэрофотоаппарата). Если эта синхронизация неполная, то из специальных исследований определяют

Таблица III.3.3

Основные характеристики радиогеодезических и некоторых радионавигационных систем

Система	Страна	Тип	Вид работы	Частота сигнала, МГц	Дальность действия, км	Средняя квадратическая ошибка определения положения, м
Поиск	СССР	Гиперболическая	Фазовый	2	150	5—15
Хайран	США	Круговая	Имульсный	300	До 1000	5—10
Хай-Фикс (А, В)	Англия	Гиперболическая или круговая	Фазовый	2	55	3—10
Декка	Англия	Гиперболическая	Фазовый	0,1	200	10—150
Декка-Лямбда	Англия	Круговая	Фазовый	0,1	400	8—75
Торан	Франция	Гиперболическая	Фазовый	1,4—2	150	5—10
Рана Н	Франция	Гиперболическая	Фазовый	2	200	5—20
Рана G	Франция	Гиперболическая или круговая	Фазовый	2	60	5—20
Лоран В	США	Гиперболическая	Фазовый	2	150	5—10
Лоран С	США	Гиперболическая	Импульсный	0,1	1200	30—300

Таблица III.3.4

Основные характеристики УКВ радиогеодезических систем

Система	Страна	Несущие частоты, ГГц	Способ регистрации результатов измерений	Дальность действия, км	Средняя квадратическая ошибка измерений расстояний	Число станций в системе	Примечания
Аэродист MRC 2	ЮАР	1,2 + 1,5	Механический, перфолента	240	$\pm(1\text{ м} + D \cdot 10^{-5})$	3 наземные, 1 самолетная	D — длина линии, м
Аэродист MRC 3	ЮАР	1, 2, 3 или 10	Магнитная лента, в готовом виде для ввода в ЭВМ	200	$\pm(1\text{м} + 3 \cdot D \cdot 10^{-6})$	3 наземные, 1 самолетная	Частоты по выбору заказчика
Гидродист MRB 2	ЮАР	3		40	$\pm 1{,}5$ м	2 береговые, 1 набортная	
Гидродист MRB 3	ЮАР	1, 2, 3 или 10		30	$\pm(1\text{ м} + 3 \cdot D \cdot 10^{-6})$	2 береговые, 1 набортная	
Самолетный радиодальномер РДС	СССР	~1,2	Фотографический, при помощи ЭЛТ	250	$\pm(1\text{ м} + D \cdot 10^{-5})$	3 наземные, 1 самолетная	Скорость самолета до 500 км/ч
Автотейп DM-40	США	2,9 ÷ 3,1	Цифровой отсчет в метрах	0,1—100	$\pm(0{,}5\text{ м} + D \cdot 10^{-5})$	2 наземные, 1 подвижная	Подвижная станция может быть установлена на вертолете, судне или автомобиле. Скорость перемещения подвижной станции до 150 км/ч

поправки, позволяющие получить координаты объекта в момент срабатывания соответствующих устройств.

В табл. III.3.3 приведены основные характеристики фазовых и импульсных радиогеодезических, а также некоторых радионавигационных систем, используемых для геодезических местоопределений, а в табл. III.3.4 — некоторые характеристики ультракоротковолновых радиогеодезических систем, разработанных на основе геодезического радиодальномера.

III.3.13. Радиогеодезическая система «Поиск»

Гиперболическая радиогеодезическая система «Поиск» (рис. III.3.25) состоит из станций: двух боковых *1* и *3* базисных станций и центральной *2* базисной станции, ретрансляционной станции *4*, устанавливаемых в пунктах с известными координатами,

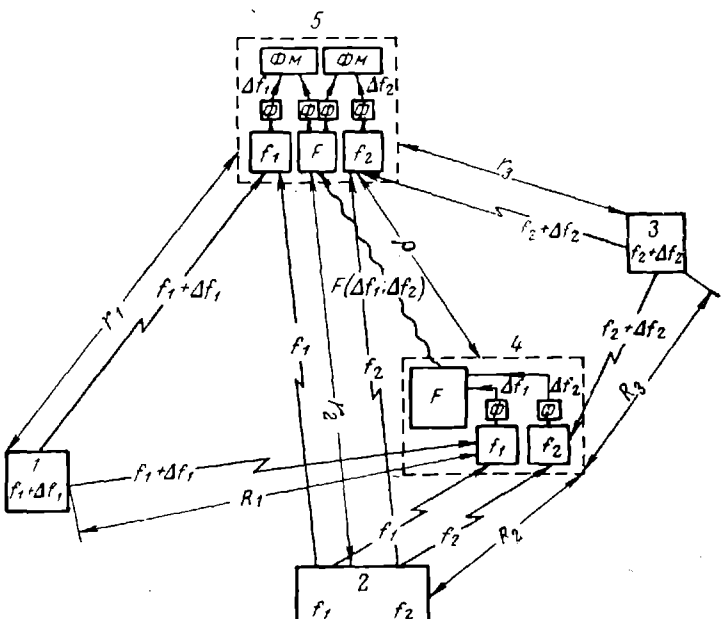


Рис. III.3.25

и приемной станции — фазового зонда *5*, устанавливаемого на объекте, положение которого определяется. Система работает следующим образом. Центральная базисная станция *2* попеременно с частотой 4—8 раз в секунду излучает колебания двух разных частот — $f_1 \approx 2200$ кГц ($\lambda_1 \approx 136$ м) и $f_2 \approx 2300$ кГц ($\lambda_2 \approx 130$ м). Боковые базисные станции *1* и *3* непрерывно излучают колебания частот $f_1 + \Delta f_1$ и $f_2 + \Delta f_2$, где $\Delta f_1 = 460$ Гц и $\Delta f_2 = 660$ Гц.

Два приемника ретрансляционной станции принимают колебания частот f_1 и $f_1 + \Delta f_1$ и f_2 и $f_2 + \Delta f_2$, излучаемые центральной базисной станцией и соответственными боковыми. В смесителях приемников этой станции фильтрами Φ выделяются колебания частот Δf_1 и Δf_2. Колебаниями этих частот, в соответствии с тактом работы центральной базисной станции, модулируются по амплитуде колебания передатчика ретрансляционной станции, работающего на частоте $f = 2700$ кГц. Колебания центральной базисной станции и близкие им по частоте колебания боковых станций принимаются двумя соответственными приемниками фазового зонда. Третий приемник зонда принимает колебания ретрансляционной станции. В результате смешения колебаний двух разных частот на выходах

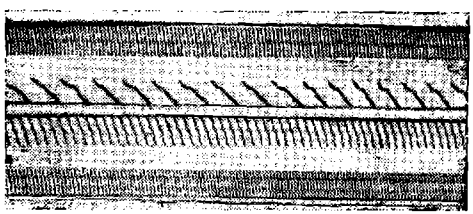


Рис. III.3.26

первого и второго приемников зонда образуются колебания разностных частот Δf_1 и Δf_2, которые выделяются соответственными фильтрами Φ. В результате амплитудного детектирования на выходе третьего приемника образуются также колебания частот Δf_1 и Δf_2, которые разделяются также фильтрами Φ. С выхода фильтров эти колебания поступают в соответствующие каналы фазометра ΦM, а с него в регистратор фазовых циклов. В нем соответствующие разности фаз колебаний частот Δf_1 и Δf_2 преобразуются в расстояния между двумя наклонными линиями на фазограмме (рис. III.3.26). Расстояние между смежной парой наклонных линий соответствует одному фазовому циклу. На фазограмме могут быть отмечены начало и конец маршрута, соответствующего перемещению фазового зонда из пункта M в пункт M' (см. рис. III.3.24). Соответствующее этому перемещению приращение разности расстояний по первому каналу равно

$$(r_1' - r_2') - (r_1 - r_2) = k_1 \Delta\varphi_1 + \frac{\Delta\omega_1}{\omega_1}[(\rho' - r_1') - (\rho - r)].$$

Здесь $k_1 = \dfrac{v}{f_1}$ — цена одного фазового цикла в линейной мере, v — скорость распространения радиоволн в воздухе во время измерений, $\Delta\varphi_1$ — число фазовых циклов, соответствующее перемещению фазового зонда из M в M', $\Delta\omega_1 = 2\pi\,\Delta f_1$, $\omega_1 = 2\pi f_1$. Цена фазового цикла вычисляется по приведенной формуле с подходящим для средних метеорологических условий и района работ значением v или определяется экспериментально путем перемеще-

ния фазового зонда из одного известного пункта в другой. Второй член в правой части равенства — поправка за положение ретрансляционной станции. Приращение разности расстояний по второму каналу равно

$$(r_3' - r_2') - (r_3 - r_2) = k_2 \Delta\varphi_2 + \frac{\Delta\omega_2}{\omega_2}[(\rho' - r_3') - (\rho - r_3)].$$

Здесь k_2, $\Delta\varphi_2$, $\Delta\omega_2$ и ω_2 — указанные выше, но относящиеся ко второму каналу, величины.

III.3.14. Самолетный радиодальномер (РДС)

Круговая радиогеодезическая система РДС предназначена для определения координат центров снимков при аэрофотосъемке. Она состоит из одной ведущей и трех ведомых станций, из которых одновременно в работе участвуют две. Ведущая станция помещается на самолете, две ведомые — в пунктах с известными координатами.

Системой измеряются два наклонных расстояния от подвижной до двух наземных станций. Принцип работы каждой пары станций, образованной ведущей и ведомой станциями системы, близок к принципу работы станций геодезического радиодальномера. В отличие от последнего, однако, для образования сигналов использована не частотная, а амплитудная модуляция несущих колебаний.

Система обеспечивает необходимую при аэрофотосъемке скорость регистрации результатов измерений, их однозначность и одновременное измерение расстояний от самолетной до двух или трех наземных станций.

Один канал системы работает следующим образом.

Передатчик самолетной станции излучает электромагнитные колебания частот $\sim 1{,}2$ ГГц, модулированные по амплитуде высокостабильными колебаниями метрической частоты. Наземная станция также излучает колебания того же диапазона, модулированные по амплитуде колебаниями стабильной частоты, отличающейся от метрической частоты на $\sim 1{,}5$ кГц. Частоты несущих колебаний соответствующих пар станций различаются на величину избранной промежуточной частоты. Колебания самолетной станции принимаются наземной станцией и смешиваются с колебаниями последней. В результате в ней образуются колебания промежуточной частоты, модулированные по амплитуде колебаниями, частота которых $\sim 1{,}5$ кГц. После детектирования колебаний промежуточной частоты из синусоидальных колебаний частоты $\sim 1{,}5$ кГц образуются импульсы. Последними также модулируются несущие колебания ведомой станции. В результате последние оказываются модулированными по амплитуде дважды: синусоидально и импульсами. Колебания, излученные этой станцией, принимаются самолетной станцией и вместе с модулированными колебаниями последней поступают в смеситель. В последний поступают также колебания от второй наземной станции. Частоты несущих колебаний наземных станций выбраны так, что на выходе смесителя образуются колебания двух различных промежуточных частот. Эти колебания усиливаются в двух каналах усилителя и детектируются. На выходе каждого детектора получаются два сигнала: синусоидальный с частотой $\sim 1{,}5$ кГц и импульсный — с частотой следования

~ 1500 имп/сек. Разность фаз соответственно импульса и синусоидального колебания определяет время пробега электромагнитными колебаниями туда и обратно расстояния от одной из наземных до самолетной станции.

Для измерения времени, соответствующего измеряемому расстоянию, в самолетном радиодальномере применена электронно-лучевая трубка с ждущей линейной разверткой. Для этого синусоидальные колебания каждого канала преобразуются в импульсы, которые подаются к электроду, управляющему яркостью электронного луча. До появления на этом электроде импульса от синусоидальных колебаний трубка заперта. В момент поступления импульса она отпирается и на экране образуется светящаяся точка. Период развертки немного больше периода следования импульсов.

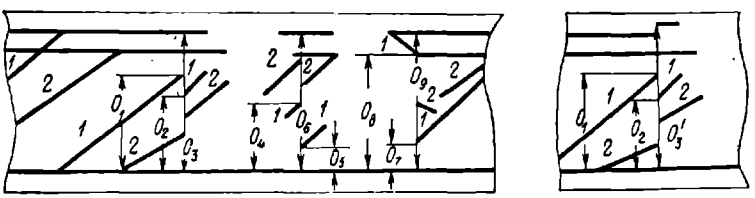


Рис. III.3.27

Поэтому на другом краю трубки образуется вторая светящаяся точка. Импульсный сигнал ведомой станции образует светящуюся точку, положение которой меняется при изменении расстояния между самолетной и наземной станциями. При работе системы экран трубки проектируется на движущуюся фотографическую пленку. На последней от двух неподвижных светящихся точек образуются изображения двух параллельных прямых линий на краях пленки, а от перемещающейся точки — изображение наклонной линии между ними (рис. III.3.27).

Расстояние между параллельными линиями определяет масштаб шкалы индикатора. При скорости распространения радиоволн 299 965 км/сек в измеряемых расстояниях он равен 100 м. Индикатор обеспечивает регистрацию расстояний до двух и трех наземных станций. При двух наземных станциях на экране образуются три неподвижные светящиеся точки, а на регистрограмме — соответственно три параллельные линии: одна у одного и две близкие друг к другу у другого ее края.

Для однозначного определения расстояния до 10 км на самолетной и наземных станциях имеются по два кварцевых генератора, колебаниями которых могут модулироваться несущие колебания. Частоты этих модулирующих колебаний таковы, что позволяют установить число километров и сотен метров в измеряемом расстоянии. Для исключения из результата измерений погрешности из-за задержки и искажений фазы в аппаратуре станций на наземных станциях имеется четвертый кварцевый генератор, частота которого образует с основной метрической частотой модуляции самолетной станции разность, равную по абсолютной величине разности основной частоты и частоты модуляции первого генератора наземной

станции, но противоположную ей по знаку. Работа модулирующих генераторов происходит по программе, определяемой электронным коммутатором. Момент начала работы коммутатора определяется внешним импульсом. Переключению частот модуляции на фотографической пленке соответствуют разрывы записи, по которым и определяется полное расстояние. Для получения отличия измеряемого расстояния от целого числа десятков километров необходимо из измерений на регистрограмме получить шесть величин O_1, O_2, O_3, . . ., O_6 и по формулам

$$A = \frac{O_1}{O_3} \cdot 100,$$

$$Б = \left(\frac{O_1}{O_3} - \frac{O_2}{O_3}\right) \cdot 100 \quad \text{при} \quad O_1 > O_2$$

или

$$Б = \left(\frac{O_1}{O_3} - \frac{O_2}{O_3} + 1\right) \cdot 100 \quad \text{при} \quad O_1 < O_2,$$

$$В = \left(\frac{O_4}{O_6} - \frac{O_5}{O_6}\right) \cdot 100 \quad \text{при} \quad O_4 > O_5$$

или

$$В = \left(\frac{O_4}{O_6} - \frac{O_5}{O_6} + 1\right) 100 \quad \text{при} \quad O_4 < O_5$$

вычислить числа A, $Б$ и $В$. Затем к числу A необходимо последовательно слева направо приписать цифру десятков чисел $Б$ и $В$. Полученное число даст указанное отличие расстояния в метрах при выбранной скорости распространения радиоволн, не исправленное за задержку сигналов и искажения фазы в цепях станций. Последняя поправка вычисляется по величинам O_7, O_8 и O_9, также получаемым по регистрограмме, по формуле

$$\Delta_H = \frac{1}{2}\left(\frac{O_7}{O_9} + \frac{O_8}{O_9} - 1\right) \cdot 100.$$

Она придается к полученному выше числу с обратным знаком. Число десятков километров в измеряемом расстоянии должно быть известно. Порядок работ с самолетным радиодальномером при аэрофотосъемке описан в [7].

Д. РАДИОГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

III.3.15. Основные сведения об обработке результатов радиогеодезических измерений

1. Поправки за скорость и кривизну пути распространения радиоволн

При использовании точных круговых радиогеодезических систем для создания опорных геодезических сетей поправка в измеренное расстояние за скорость распространения радиоволн вычисляется по формуле

$$\Delta_v = \left(N_p - \frac{0{,}5N_1 + N_2 + \cdots + N_{n-1} + 0{,}5N_n}{n}\right) D \cdot 10^{-6}.$$

Здесь n — число точек от наземной до самолетной станции, разбивающих путь радиоволн между ними на $n-1$ отрезков, D — измеренное расстояние, N_p — модуль показателя преломления воздуха, соответствующий расстоянию, получаемому непосредственно из измерений, N_l — модуль показателя преломления воздуха в середине соответствующего отрезка пути радиоволн. Последний вычисляется по формулам

$$N_l = N'_l + \delta N \cdot K_l,$$

$$N'_l = A_0 + A_1 H_l + A_2 H_l^2 + A_3 H_l^3 + A_4 H_l^4, \qquad \text{(III.3.3)}$$

$$K_l = B_0 + B_1 H_l + B_2 H_l^2 + B_3 H_l^3 + B_4 H_l^4, \qquad \text{(III.3.4)}$$

где

$$\delta N = N_m - A_0, \qquad \text{(III.3.5)}$$

$$N_m = A_0 + \frac{N_l - N'_l}{K_l}, \qquad \text{(III.3.6)}$$

а N'_l и K_l вычисляются по формулам (III.3.3) и (III.3.4).

Для высот до 9 км $A_0 = 330$, $A_1 = -48{,}000 \cdot 10^{-3}$, $A_2 = +3{,}860 \cdot 10^{-6}$, $A_3 = -0{,}148 \cdot 10^{-9}$, $B_0 = 1$, $B_1 = -0{,}381 \cdot 10^{-3}$, $B_2 = +0{,}523 \cdot 10^{-7}$, $B_3 = -0{,}239 \cdot 10^{-11}$.

Необходимые для вычисления N_l высоты H_l точек пути распространения радиоволн вычисляются по формуле

$$H_l = H_н + \frac{H_c + H_н}{D} D_l - h_{Rl} + h_{\rho l},$$

где $H_н$ и H_c — высоты начальной и конечной точек линии над уровнем моря; D_l — расстояние от точки H_1 до точки l; h_{Rl} и $h_{\rho l}$ — поправки в высоту за кривизну Земли и пути радиоволн.

$$h_{Rl} = D_l (D - D_l) \cdot 78{,}4 \cdot 10^{-9},$$

$$h_{\rho l} = 0{,}5\,\Delta D \alpha_1 + \Delta D \alpha_2 + \cdots + \Delta D \alpha_{l-1} + 0{,}5\,\Delta D \alpha_l,$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{n-1}\left[\Delta D \frac{1}{\rho_2}(n-1{,}5) + \Delta D \frac{1}{\rho_3}(n-2.5) + \cdots + \right.$$

$$\left. + \Delta D \frac{1}{\rho_{n-1}} 1{,}5 + \Delta D \frac{1}{\rho_n} 0{,}5\right],$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{\rho_2}\Delta D,$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}\right)\Delta D,$$

. . . . . .

$$\alpha_n = \alpha_1 + \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \cdots + \frac{1}{\rho_n}\right)\Delta D,$$

$$\frac{1}{\rho_l} = [A_1 + 2A_2H_l + 3A_3H_l^2 + 4A_4H_l^3 +$$

$$+ (B_1 + 2B_2H_l + 3B_3H_l^2 + 4B_4H_l^3)] \cdot 10^{-6}.$$

Так как для вычисления ρ_l необходимо иметь H_l, а для вычисления H_l необходимо знать ρ_l, то вычисления их ведутся последовательными приближениями. При вычислении H_l в первом приближении принимают $h_l = 0$. Число точек n на пути распространения радиоволн зависит от длины линии, превышения между ее конечными пунктами, характера подстилающей поверхности и горизонтального градиента N. При измерении коротких расстояний ($\leqslant 200$ км) над однородной поверхностью достаточно одного определения N_l в точке пути радиоволн с высотой 600—1000 м относительно наземной станции. При прохождении радиоволн над гористой местностью или местностью с различным характером поверхности N_l следует определять по крайней мере в двух точках с высотами 500—600 и 1000—1500 м над наземной станцией. Число точек n может доходить до 11. При этом ошибка в Δv не превысит $2 \cdot D \cdot 10^{-6}$.

Поправка за кривизну пути распространения радиоволн в указанном случае вычисляется по формуле

$$\Delta_\rho = -0{,}5D\,(0{,}5\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{n-1}^2 + 0{,}5\alpha_n^2).$$

При использовании круговой радиогеодезической системы для планового обоснования аэрофотосъемки поправка за скорость распространения вычисляется по формуле

$$\Delta_v = \left\{N_0 - N_m - \left\{\frac{1}{2}Q_1(H_c - H_н) + \frac{1}{3}Q_2(H_c^2 + 2H_cH_н + H_н^2) + \right.\right.$$

$$+ \frac{1}{4}Q_3(H_c^3 + 3H_c^2H_н + 3H_cH_н^2 + H_н^3) + \left[\frac{1}{6}Q_1 + \frac{1}{6}Q_2(H_c - H_н) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{20}Q_3(3H_c^2 + 4H_cH_н + 3H_н^2)\right] D^2\varepsilon +$$

$$\left.\left. + \frac{1}{10}\left[\frac{1}{3}Q_2 + \frac{1}{2}Q_2(H_c + H_н)\right] D^4\varepsilon^2 + \frac{1}{140}Q_3D^6\varepsilon^3\right\}\right\} D \cdot 10^{-6}.$$

Здесь

$$Q_1 = A_1 + B_1\delta N,$$

$$Q_2 = A_2 + B_2\delta N,$$

$$Q_3 = A_3 + B_3\delta N,$$

$$Q_4 = A_4 + B_4\delta N,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho_{ср}}\right),$$

$$\frac{1}{\rho_{ср}} = Q_1 + 2Q_2H_{ср} + 3Q_3H_{ср}^2,$$

где R — средний радиус кривизны Земли в районе работ, $H_{ср}$ — высота средней точки радиолуча,

$$H_{ср}=\frac{H_c+H_к}{2}-\frac{D^2\varepsilon}{4}.$$

Поправка за кривизну пути распространения радиоволн может быть подсчитана по формуле

$$\Delta_\rho=-\frac{D^3}{24\rho^2_{ср}}.$$

Ошибка определения поправки Δv по приведенной формуле — $^1/_{200\ 000}$ расстояния.

2. Редукция измеренного расстояния на референц-эллипсоид

Расстояние S на сфере радиуса R_m может быть вычислено по формуле

$$S=D-\frac{H_1+H_2}{2R_m}D-\frac{(H_2-H_1)^2}{2D}+\frac{D^3}{24R^2_m},$$

где D — измеренное расстояние, H_1 и H_2 — высоты конечных точек линии над сферой.

Поправка за переход от расстояния S на сфере к расстоянию на референц-эллипсоиде $S_э$ равна

$$S_э-S=\frac{1}{6}S^3\left(\frac{e'}{R_m}\right)^2\cos^2 B_1\cos^2 A_{1,2},$$

где e' — второй эксцентриситет референц-эллипсоида, B' — широта начальной точки дуги S, $A_{1,2}$ — ее азимут.

Для линий, направленных по меридиану при $B_1=55°$, длиной в 100, 200, 300, 400 и 500 км эта поправка составляет 0,009, 0,072, 0,245, 0,580, 1,133 м. При редукции расстояния на референц-эллипсоид под высотами H_1 и H_2 следует понимать высоты концов линии над последним.

3. Редуцирование расстояний с референц-эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера

Если расстояние между концами линии на референц-эллипсоиде S, то ее длина d на плоскости в проекции Гаусса-Крюгера

$$d=S+\Delta S_1+\Delta S_2+\Delta S_3+\Delta S_4,$$

где

$$\Delta S_1=\frac{S}{6R^2_m}(y_1^2+y_1y_2+y_2^2),$$

$$\Delta S_2=\frac{S}{36R^4_m}(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)^2,$$

$$\Delta S_3 = -\frac{5}{24}\frac{y_m^4}{R_m^4}S,$$

$$\Delta S_4 = -\frac{\eta_m^2 t_m}{6R_m^3}(y_2^2 - y_1^2)(x_2 - x_1)S,$$

$$\eta_m^2 = e'^2\cos^2 B_m, \quad t_m = \operatorname{tg} B_m, \quad B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2),$$

B_1 и B_2 — широты концов линии, y_1, y_2, x_1, x_2 — ординаты и абсциссы концов линии, R_m — средний радиус кривизны референц-эллипсоида в точке с широтой B_m. При $S = 400$ км и средней широте линии $B_m = 55°$ ΔS_4 не превосходит 3 см. При расстояниях, не превышающих 200 км, можно пользоваться формулой

$$d = S\left[1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_m^2}\right],$$

где $y_m = {}^1/_2\ (y_1 + y_2)$, а $\Delta y = y_2 - y_1$. При этом погрешность редуцированного расстояния не превзойдет 2 см.

4. Редуцирование измеренных разностей расстояний на сферу или референц-эллипсоид

Редуцированные на сферу разности расстояний равны

$$S_1 - S_2 = D_1 - D_2 + \delta(D_1 - D_2),$$

$$S_3 - S_2 = D_3 - D_2 + \delta(D_3 - D_2),$$

где $D_1 - D_2$ и $D_3 - D_2$ — разности расстояний, полученные из измерений, а

$$\delta(D_1 - D_2) = \frac{1}{2R_m}[(H + H_2)D_2 - (H + H_1)D_1] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{(H - H_2)^2}{D_2} - \frac{(H - H_1)^2}{D_1}\right] + \frac{1}{24R_m^2}(D_1^3 - D_2^3),$$

$$\delta(D_3 - D_2) = \frac{1}{2R_m}[(H + H_2)D_2 - (H + H_3)D_3] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{(H - H_2)^2}{D_2} - \frac{(H - H_3)^2}{D_3}\right] + \frac{1}{24R_m^2}(D_3^3 - D_2^3)$$

— поправки, переводящие их на сферу радиуса R_m.

Необходимые для вычисления поправок расстояния D_1, D_2, D_3 и высоту H достаточно знать приближенно. Так, например, при $H_l = 1$ км, $H = 6$ км при ошибке поправки, не превышающей 1 м, расстояния $D_l = 200$ км надо знать с ошибкой 8—10 км. С погрешностью $\sim 0{,}1$ м при указанных расстояниях редуцированные на сферу разности расстояний будут совпадать с разностями расстояний, редуцированными на поверхность референц-эллипсоида.

5. *Редуцирование разностей расстояний с референц-эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера*

Поправки $\delta(S_1 - S_2)$ и $\delta(S_3 - S_2)$ в измеренные разности расстояний, за редукцию их на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера могут быть вычислены по формулам

$$\delta(S_1 - S_2) = \frac{1}{6R_m^2}(S_1[yy]_{1,4} - S_2[yy]_{2,4}),$$

$$\delta(S_3 - S_2) = \frac{1}{6R_m^2}(S_3[yy]_{3,4} - S_2[yy]_{2,4}),$$

где

$$[yy]_{ij} = y_i^2 + y_i y_j + y_j^2,$$

R_m — средний радиус кривизны референц-эллипсоида в точке со средней широтой района работ, y_4 — ордината определяемого пункта.

Даже при $y_4 \approx 400$ км расстояния S достаточно знать с ошибкой, не большей 1,5 км.

6. *Вычисление плоских прямоугольных координат пунктов по двум измеренным расстояниям*

Если координаты известных пунктов A и B равны x_A, y_A, x_B, y_B, а координаты определяемого пункта C равны x_C, y_C, то

$$x_C - x_A = p\cos\alpha_{AB} + h\sin\alpha_{AB},$$

$$x_C - x_B = -q\cos\alpha_{AB} + h\sin\alpha_{AB},$$

$$y_C - y_A = p\sin\alpha_{AB} - h\cos\alpha_{AB},$$

$$y_C - y_B = -q\sin\alpha_{AB} - h\cos\alpha_{AB},$$

где

$$p = r_1\cos A = (r_1^2 - r_2^2 + d^2) : 2d,$$

$$q = r_2\cos B = (-r_1^2 + r_2^2 + d^2) : 2d,$$

$$h = \sqrt{r_1^2 - p^2} = \sqrt{r_2^2 - q^2},$$

A и B — углы треугольника ABC, а d — длина стороны AB.

7. *Вычисление координат пунктов по измеренным длинам сторон сферического треугольника*

Если сферические координаты исходных пунктов φ_A, λ_A и φ_B, λ_B, а отнесенные к поверхности сферы расстояния от определяемого пункта P до пунктов A и B соответственно r_1 и r_2, то

$$\sin\varphi_P = \sin\varphi_A\cos r_1 + \cos\varphi_A \sin r_1 \cos(A_{AB} - A),$$

$$\sin(\lambda_P - \lambda_A) = \frac{\sin r_1 \sin A_{AP}}{\cos\varphi_P}, \quad \sin(\lambda_B - \lambda_P) = -\frac{\sin r_2 \sin A_{BP}}{\cos\varphi_P},$$

$$\lambda_P = \lambda_A + (\lambda_P - \lambda_A) = \lambda_B - (\lambda_B - \lambda_P),$$

где

$$\sin A_{AB} = \frac{\sin(\lambda_B - \lambda_A)}{\sin S}\cos\varphi_B,$$

$$\sin A_{BA} = \frac{\sin(\lambda_B - \lambda_A)}{\sin S}\cos\varphi_A,$$

$$\cos S = \sin\varphi_A \sin\varphi_B + \cos\varphi_A\cos\varphi_B\cos(\lambda_B - \lambda_A),$$

$$\cos A = \frac{\cos r_2 - \cos r_1\cos S}{\sin r_1 \sin S}, \quad \cos B = \frac{\cos r_1 - \cos r_2\cos S}{\sin r_2 \sin S}.$$

8. *Вычисление пространственных координат объекта по трем измеренным расстояниям*

Если пространственные координаты трех заданных пунктов A, B и C равны x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C, а пространственные координаты определяемого пункта P равны x_P, y_P, z_P, то

$$\Delta x = x_P - x_B = g_1 + h_1\Delta z,$$

$$\Delta y = y_P - y_B = g_2 + h_2\Delta z,$$

$$\Delta z = z_P - z_B = (-N + \sqrt{N^2 - ML}) : M.$$

Здесь

$$g_1 = \frac{y_C f_1 - y_A f_2}{x_A y_C - x_C y_A}, \quad h_1 = \frac{y_A z_C - y_C z_A}{x_A y_C - x_C y_A},$$

$$g_2 = \frac{x_A f_2 - x_C f_1}{x_A y_C - x_C y_A}, \quad h_2 = \frac{x_C z_A - x_A z_C}{x_A y_C - x_C y_A},$$

$$f_1 = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2 + d_{12}^2), \quad f_2 = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_3^2 + d_{13}^2), \quad M = 1 + h_1^2 + h_2^2,$$

$$N = g_1h_1 + g_2h_2, \quad L = g_1^2 + g_2^2 - r_1^2,$$

$$r_1 = AP, \quad r_2 = BP, \quad r_3 = CP, \quad d_{12} = AB, \quad d_{13} = AC.$$

Контроль:

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = r_1^2.$$

9. Решение задачи фазового зонда на плоскости в проекции Гаусса-Крюгера по методу приближений

Приближенные прямоугольные координаты определяемого пункта могут быть получены по гиперболическим при помощи планшета с гиперболической сеткой. Если эти координаты $x_{P'}$ и $y_{P'}$, то координаты определяемого пункта в каждом приближении вычисляются по формулам

$$x_P = x_{P'} + \delta x, \quad y_P = y_{P'} + \delta y,$$

$$\delta x = \frac{\delta r_1 n_2 - \delta r_2 n_1}{m_1 n_2 - m_2 n_1}, \quad \delta y = \frac{\delta r_2 m_1 - \delta r_1 m_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1},$$

$$\delta r_1 = (r_1 - r_2) - (r_1' - r_2'), \quad \delta r_2 = (r_3 - r_2) - (r_3' - r_2'),$$

$$m_1 = \cos \alpha_{AP'} - \cos \alpha_{BP'}, \quad m_2 = \cos \alpha_{CP'} - \cos \alpha_{BP'},$$

$$n_1 = \sin \alpha_{AP'} - \sin \alpha_{BP'}, \quad n_2 = -\sin \alpha_{CP'} - \sin \alpha_{BP'}.$$

Расстояния r_1', r_2', r_3' и дирекционные углы $\alpha_{AP'}$, $\alpha_{BP'}$ и $\alpha_{CP'}$ находят решением обратной геодезической задачи по приближенным координатам определяемого пункта и координатам базисных пунктов A, B и C.

10. Решение задачи фазового зонда на сфере

Сферические координаты определяемого пункта P (рис. III.3.28) могут быть вычислены по формулам

$$\sin \varphi_P = \sin \varphi_B \cos r_2 + \cos \varphi_B \sin r_2 \cos \beta,$$

$$\sin (\lambda_P - \lambda_B) = \frac{\sin r_2 \sin \beta}{\cos \varphi_P},$$

$$\lambda_P = \lambda_B + (\lambda_P - \lambda_B),$$

$$\operatorname{tg} r_2 = \frac{\cos (r_1 - r_2) - \cos S_1}{\sin S_1 \cos \varphi_1 + \sin (r_1 - r_2)} = \frac{\cos (r_3 - r_2) - \cos S_2}{\sin S_2 \cos \varphi_2 + \sin (r_3 - r_2)},$$

$$\varphi_1 = \beta - \beta_1, \quad \varphi_2 = \beta_2 - \beta,$$

$$\sin (\beta + \delta) = -\frac{l}{m} \cos \delta,$$

$$\operatorname{tg} \delta = +\frac{n}{m}, \quad \kappa = \frac{\cos (r_1 - r_2) - \cos S_1}{\cos (r_3 - r_2) - \cos S_2},$$

$$l = \kappa \sin (r_3 - r_2) - \sin (r_1 - r_2),$$

$$m = \kappa \sin S_2 \sin \beta_2 - \sin S_1 \sin \beta_1,$$

$$n = \kappa \sin S_2 \cos \beta_2 - \sin S_1 \cos \beta_1.$$

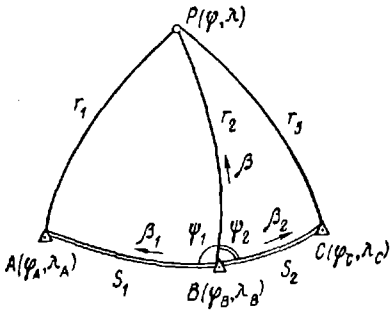


Рис. III.3.28

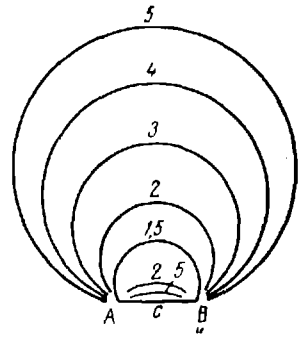
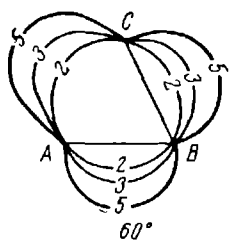


Рис. III.3.29



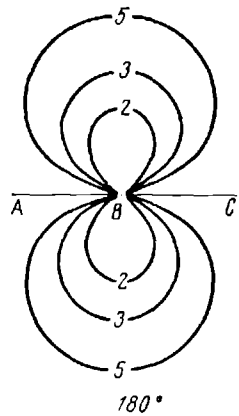
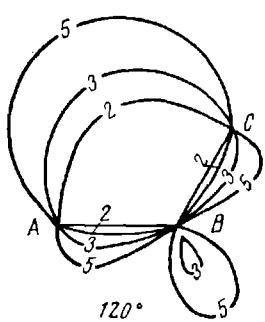


Рис. III.3.30



III.3.16. Предвычисление точности радиогеодезических определений

Средняя квадратическая ошибка определения положения пункта круговой радиогеодезической системой может быть рассчитана по формуле

$$M = \frac{\sqrt{2}}{\sin \alpha} m_1$$

где m — средняя квадратическая ошибка измерения расстояний, а α — угол, под которым из определяемого пункта виден базис системы. На рис. III.3.29 приведены окружности равных ошибок определения местоположений, соответствующие $1{,}5m$, $2m$, $3m$, $4m$, $5m$.

Средняя квадратическая ошибка определения положения пункта при помощи гиперболической системы может быть рассчитана по формуле

$$M = \frac{m}{2} \operatorname{cosec} \frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{2} \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha_1}{2} + \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha_2}{2}},$$

где m — средняя квадратическая ошибка измерения разностей расстояний от базисных станций до определяемого пункта, α_1 и α_2 — углы, под которыми видны базисы системы из определяемого пункта. Сумма углов берется при вычислении ошибок положения пунктов в областях I и II, а их разность — для вычисления ошибок положения точек в областях III и IV (см. рис. III.3.24). На рис. III.3.30 приведены кривые ошибок, равных $2m$, $3m$, $5m$ для системы с равными базисами, образующими углы 60, 120 и 180°.

III.3.17. Измерение больших расстояний методом пересечения створа линии

При помощи круговых радиогеодезических систем может быть измерено расстояние между двумя пунктами. Для этого на самолете размещается ведущая станция системы, а в пунктах, расстояние между которыми определяют, помещают ведомые станции. Во время полета самолета в направлении, пересекающем измеряемую линию (рис. III.3.31), вблизи линии, через одинаковые интервалы времени измеряются расстояния s_1 и s_2 до наземных станций, а затем определяется минимальная сумма наклонных дальностей $(s_1 + s_2)_{\min}$, соответствующая положению самолета в створе измеряемой линии. Если ближайшему к створу положению самолета присвоить номер 0, а другие его положения до створа обозначить номерами $-1, -2, \ldots -(n-1), -n$, а после пересечения створа — соответственно номерами $+1, +2, \ldots +(n-1), +n$, то

$$(s_1 + s_2)_{\min} = p - \frac{q^2}{4r},$$

где

$$p = p_1 + (s_1 + s_2)_0,$$

а p_1, q и r находят на основании уравнений поправок

$$\begin{aligned} p_1 - nq \quad &+ n^2 r \quad + l_{-n} \quad = v_{-n} \\ p_1 - (n-1)\, q + (n-1)^2 r &+ l_{-(n-1)} = v_{-(n-1)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&p_1 - q \quad + r \quad + l_{-1} = v_{-1}\\
&p_1 \qquad\qquad\quad = v_0\\
&p_1 + q \quad + r \quad + l_{+1} = v_{+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_1 + (n-1)\,q + (n-1)^2 r + l_{n-1} = v_{n-1}\\
&p_1 + \quad nq + n^2 r \quad + l_n = v_n.
\end{aligned}
$$

Получаемые из них нормальные уравнения имеют вид

$$
\begin{aligned}
&[aa]\,p_1 \quad + [ac]\,r + [al] = 0\\
&\quad [bb]\,q + \quad + [bl] = 0\\
&[ac]\,p_1 \quad + [cc]\,r + [cl] = 0.
\end{aligned}
$$

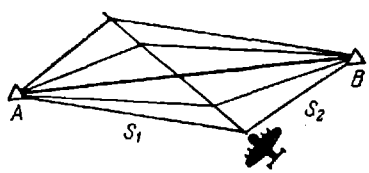


Рис. III.3.31

Решение этих нормальных уравнений дает

$$p_1 = \frac{[cc]\,[al] - [bl]\,[cl]}{[bb]^2 - [aa]\,[cc]},$$

$$q = -\frac{[bl]}{[bb]};$$

$$r = \frac{[aa]\,[cl] - [bb]\,[al]}{[bb]^2 - [aa]\,[cc]}.$$

Если в обработку не вошло измерение с каким-либо номером (например, —15), то при применении приведенных формул не следует использовать результат измерения с симметричным номером (+15). Средняя квадратическая ошибка минимальной суммы дальностей вычисляется по формуле

$$m = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{[vv]}{2(n-k-2)\,(2n-k+1)}},$$

где k — число пропущенных сумм.

После определения $(s_1 + s_2)_{\min}$ находят

$$s_{1,\min} = (s_1 + s_2)_{\min} - s_{2,0},$$

$$s_{2,\min} = (s_1 + s_2)_{\min} - s_{1,0}.$$

которые исправляют поправками за кривизну пути и скорость распространения радиоволн способом, указанным в § III.4.4, п. 2, а затем редуцируют на шаровую или эллипсоидальную поверхность относимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. В. Кондрашков. Электрооптические и радиогеодезические измерения. М., «Недра», 1972. 343 с.

2. В. З. Пащенков. Радио- и светодальномеры. М., «Недра», 1972. 301 с.

3. К. Л. Проворов, Ф. П. Носков. Радиогеодезия. М., «Недра», 1973. 352 с.

4. Ю. Г. Бугаев, Ю. П. Гричук, Б. Д. Яровой. Таблицы для вычисления длины сторон полигонометрии и трилатерации 1 и 2 классов, измеренных свето- и радиодальномерами. М., «Недра», 1969. 47 с.

5. Ю. Г. Бугаев, Ю. П. Гричук, Б. Д. Яровой. Таблицы для вычисления длины сторон полигонометрии и трилатерации 3 и 4 классов, измеренных свето- и радиодальномерами. М., «Недра», 1969. 68 с.

6. Радиогеодезические работы при геофизических съемках. Практическое пособие. М., 1965, 223 с. (М-во геологии СССР). Всесоюз. науч.-исслед. ин-т геофизических методов разведки).

7. Стереотопографическая съемка в масштабе 1 : 25 000 равнинных, тундровых и таежно-болотных районов. Под ред. К. Н. Герценовой. М., 1969. 206 с. (М-во геологии СССР. Центр. науч.-исслед. ин-т геодезии, аэросъемки и картографии).

8. В. А. Полевой. Математическая обработка результатов радиогеодезических измерений. М., «Недра», 1971. 343 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Книга 1

Стр.

РАЗДЕЛ I

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

I.1. Теория ошибок измерений (*В. Д. Большаков*) 7

А. Элементы теории вероятностей и математической статистики 7

I.1.1. Общие понятия 7

I.1.2. Схема случаев. Непосредственный подсчет вероятностей 8

I.1.3. Относительная частота и вероятность 9

I.1.4. Теоремы теории вероятностей 10

I.1.5. Многократные повторные испытания. Вероятнейшее число появлений события 14

I.1.6. Понятие о случайной величине и законе распределения вероятностей 16

I.1.7. Числовые характеристики законов распределения 20

I.1.8. Нормальный закон распределения. Интеграл вероятностей 26

I.1.9. Среднее и вероятное отклонение. Их связь со стандартом при нормальном законе распределения 31

I.1.10. Понятие о статистических связях. Коэффициент корреляции. Уравнение регрессии 32

I.1.11. Общие понятия математической статистики . . 34

I.1.12. Числовые характеристики статистического распределения 35

I.1.13. Определение законов распределения на основе опытных данных (выравнивание статистических рядов) 36

Б. Теория ошибок измерений 38

I.1.14. Общие понятия 38

I.1.15. Кривая ошибок (кривая Гаусса) и ее свойства 40

Стр.

I.1.16. Критерии, применяемые при оценке точности измерений 41
I.1.17. Исследование ряда ошибок на нормальное распределение 43
I.1.18. Определение коэффициента корреляции и уравнения регрессии на основе опытных данных 46
I.1.19. Оценка точности функций величин, полученных в результате коррелированных и некоррелированных измерений 51
I.1.20. Обработка ряда равноточных измерений одной величины 54
I.1.21. Понятие о доверительных интервалах 57
I.1.22. Оценка точности по разностям двойных равноточных измерений 58
I.1.23. Неравноточные измерения. Веса измерений . . 60
I.1.24. Вес функции коррелированных и некоррелированных аргументов 61
I.1.25. Обработка ряда неравноточных измерений одной величины 62
I.1.26. Оценка точности по разностям двойных неравноточных измерений 65
Приложения 67
I.2. Метод наименьших квадратов (*В. Д. Большаков*) 72
А. Параметрический способ уравнивания 72
I.2.1. Общие понятия о методе наименьших квадратов 72
I.2.2. Уравнения поправок и нормальные уравнения 73
I.2.3. Решение системы нормальных уравнений по схеме Гаусса 75
I.2.4. Контроль составления и решения нормальных уравнений 76
I.2.5. Пример уравнивания равноточных измерений параметрическим способом 81
I.2.6. Оценка точности уравненных неизвестных 83
I.2.7. Оценка точности функций уравненных неизвестных 85
I.2.8. Матричные формулы уравнивания параметрическим способом 87
I.2.9. Пример уравнивания нивелирной сети параметрическим способом 88
I.2.10. Способ узлов проф. В. В. Попова составления нормальных уравнений 92
I.2.11. О построении доверительных интервалов . . . 92

Стр.
Б. Корреляторный способ уравнивания 94
I.2.12. Постановка задачи. Условные и нормальные уравнения коррелат 94
I.2.13. Контроль составления и решения системы нормальных уравнений коррелат 95
I.2.14. Некоторые виды условных уравнений 96
I.2.15. Оценка точности функций при коррелатном уравнивании 99
I.2.16. Матричные формулы уравнивания коррелатным способом 100
I.2.17. Определение допустимости невязок условных уравнений 102
I.2.18. Пример уравнивания нивелирной сети коррелатным способом 103
I.2.19. Способ полигонов В. В. Попова для составления нормальных уравнений коррелат 106
I.2.20. Способ Крюгера — Урмаева 107
В. Дополнительные вопросы теории математической обработки геодезических измерений 114
I.2.21. Уравнивание параметрическим способом с условиями (избыточными неизвестными) 114
I.2.22. Способ условий с дополнительными неизвестными 116
I.2.23. Уравнивание при большом числе неизвестных 117
I.2.24. Понятие об уравнивании зависимых измерений 118
I.2.25. Применение метода наименьших квадратов при аппроксимации функций 119
I.2.26. Решение нормальных уравнений методом приближений 122
Список литературы 124
I.3. Вычислительная техника в геодезии (*Е. Г. Ларченко*) 125
А. Краткая характеристика основных вычислительных средств и эффективность их применения 125
I.3.1. Общие сведения о применении средств вычислительной техники 125
I.3.2. Классификация цифровых вычислительных машин и краткие сведения об их возможностях 126
I.3.3. Организационные формы использования вычислительных машин 128
Б. Приближенные числа и правила действий с ними при обработке информации на вычислительных машинах 129

Стр.
I.3.4. Об источниках происхождения приближенных чисел 129
I.3.5. Связь погрешностей приближенных чисел с верными значащими цифрами 130
I.3.6. Точность суммы и разности округленных чисел 132
I.3.7. Точность произведения, частного, степени и корня 132
I.3.8. Точность функции общего вида 134
В. Рациональные приемы и методы применения простейших вычислительных средств 136
I.3.9. Выбор средств и приемов вычислений 136
I.3.10. Рациональные приемы вычислений на арифмометре 137
I.3.11. Выбор и использование таблиц при вычислениях 139
Г. Клавишные вычислительные машины (КВМ) и их применение 141
I.3.12. Основные принципы устройства и развития КВМ 141
I.3.13. Электронная клавишная вычислительная машина «Искра-12М» 142
I.3.14. Электронная клавишная вычислительная машина «Искра-1122» 145
I.3.15. Электронные клавишные вычислительные машины «Электроника-70» и «Электроника-70М» 145
I.3.16. Основные характеристики некоторых электронных клавишных вычислительных машин 147
Д. Электронные вычислительные машины (ЭВМ) . . 149
I.3.17. Структурная схема и принципы работы ЭВМ . . 149
I.3.18. Системы счисления, применяемые в ЭВМ . . . 152
I.3.19. Операции с числами в ЭВМ 156
I.3.20. Характеристика наиболее распространенных отечественных ЭВМ 158
Е. Программирование для ЭВМ 162
I.3.21. Этапы решения задач на ЭВМ 162
I.3.22. Общие сведения о программировании в кодах ЭВМ 164
I.3.23. Блок-схемное представление алгоритма решения задачи. Циклические программы 165
I.3.24. Перенос программы и исходных данных на перфокарты и перфоленты и ввод их в машину 171
I.3.25. Вывод результатов вычислений 172
I.3.26. Математическое обеспечение ЭВМ 172

Стр.
I.3.27. Общие сведения об алгоритмических языках . . 175
I.3.28. Алгоритмический язык АЛГОЛ 177
I.3.29. Алгоритмический язык ФОРТРАН 181
Список литературы 184

РАЗДЕЛ II

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ И ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АСТРОНОМИЯ

II.1. Космическая геодезия (*И. И. Краснорылов, М. С. Урмаев*) 187
А. Общие сведения 187
II.1.1. Роль космической геодезии в системе геодезических работ 187
II.1.2. Общие принципы использования ИСЗ в геодезических целях 188
II.1.3. Системы координат 190
II.1.4. Преобразования систем координат 194
II.1.5. Системы измерения времени 198
Б. Сведения из теории движения ИСЗ 200
II.1.6. Невозмущенное движение ИСЗ 200
II.1.7. Возмущенное движение ИСЗ 206
II.1.8. Методы интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения ИСЗ 208
II.1.9. Возмущения от гравитационного поля Земли . . 210
II.1.10. Влияние притяжения Луны и Солнца 214
II.1.11. Возмущения в движении ИСЗ вследствие тормозящего действия атмосферы 214
II.1.12. Влияние светового давления 215
II.1.13. Учет возмущений от аномального гравитационного поля Земли при интегрировании уравнений движения ИСЗ 215
II.1.14. Вычисление эфемериды ИСЗ 216
II.1.15. Определение орбит ИСЗ 218
В. Спутниковая сферическая астрономия и определение условий видимости 220
II.1.16. Движение спутника относительно вращающейся Земли 220
II.1.17. Элементы спутниковой сферической астрономии 221
II.1.18. Определение условий видимости 226
II.1.19. Влияние аберрации и рефракции 229
Г. Наблюдения ИСЗ 230
II.1.20. Методы наблюдений ИСЗ 230

Стр.

II.1.21. Камеры для фотографических наблюдений ИСЗ 230
II.1.22. Порядок вычисления топоцентрических координат ИСЗ по результатам фотографических наблюдений 231
II.1.23. Радиоэлектронные методы наблюдений ИСЗ . . 234
II.1.24. Лазерные наблюдения ИСЗ 234
II.1.25. Предварительная обработка радиоэлектронных и лазерных наблюдений 235
Д. Геометрические задачи космической геодезии . . 236
II.1.26. Космические геодезические сети 236
II.1.27. Особенности построения космической триангуляции 237
II.1.28. Основные элементы космической триангуляции 238
II.1.29. Виды условий, возникающих в сетях космической триангуляции 240
II.1.30. Уравнивание космической триангуляции . . . 241
II.1.31. Установление масштаба в космической триангуляции 244
II.1.32. Орбитальный метод построения космических сетей 244
Е. Динамические задачи космической геодезии . . . 246
II.1.33. Общие соображения 246
II.1.34. Определение зональных гармоник 247
II.1.35. Определение тессеральных и секториальных гармоник 250
II.1.36. Формулы вычисления гравитационного потенциала для разных моделей Земли 252
Ж. Геодезические искусственные спутники Земли (ГИСЗ) 253
II.1.37. Требования к ГИСЗ и параметрам их орбит 253
II.1.38. Формулы для вычисления яркости пассивных спутников 256
З. Фундаментальные геодезические постоянные . . . 257
Список литературы 258
II.2. Теория фигуры Земли и гравиметрия (*Б. П. Шимбирев*) 259
А. Гравитационное поле Земли 259
II.2.1. Сила тяжести 259
II.2.2. Потенциал силы тяжести 261
II.2.3. Силовые линии, уровенные поверхности . . . 262
II.2.4. Вертикальный градиент силы тяжести 265
II.2.5. Разность потенциалов. Ортометрическая высота 265

Стр.

II.2.6. Проблема определения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли 267
Б. Нормальное гравитационное поле Земли 269
II.2.7. Нормальный потенциал Земли, нормальная сила тяжести 269
II.2.8. Соотношения между параметрами уровенного эллипсоида 269
II.2.9. Нормальная формула силы тяжести 271
II.2.10. Вертикальный градиент нормальной силы тяжести и кривизна силовой линии нормального поля 271
В. Величины, характеризующие отличие действительного поля Земли от нормального 272
II.2.11. Возмущающий потенциал 272
II.2.12. Уклонения отвеса 273
II.2.13. Нормальная высота. Аномалия высоты 274
II.2.14. Квазигеоид 275
II.2.15. Аномалии силы тяжести 276
II.2.16. Косвенная интерполяция аномалий 279
II.2.17. Строение Земли. Сопоставление данных наблюдений с гидростатической теорией 281
Г. Определение фигуры Земли 286
II.2.18. Постановка задачи 286
II.2.19. Определение возмущающего потенциала Земли 287
II.2.20. Формулы для вычисления высот квазигеоида и составляющих уклонений отвеса 288
II.2.21. Определение точных геодезических координат относительно общего земного эллипсоида 291
Д. Определение геодезических координат относительно референц-эллипсоида 291
II.2.22. Необходимость местной гравиметрической съемки 291
II.2.23. Вычисление разностей нормальных высот . . 292
II.2.24. Вычисление превышений квазигеоида 293
II.2.25. Вычисление гравиметрических уклонений отвеса и высот квазигеоида 295
II.2.26. Интерполирование астрономо-геодезических уклонений отвеса 298
Е. Методы измерений силы тяжести 300
II.2.27. Классификация методов 300
II.2.28. Абсолютные определения силы тяжести . . . 300
II.2.29. Относительные определения силы тяжести . . 303
Список литературы 308

Стр.

II.3. Геодезическая астрономия (*А. П. Колупаев, А. Н. Кузнецов*) 309
А. Общие сведения 309
II.3.1. Некоторые обозначения, принятые в геодезической астрономии 309
II.3.2. Формула для интерполирования с часовыми изменениями и со вторыми разностями 310
II.3.3. Перевод времени 311
II.3.4. Явления суточного вращения небесной сферы 311
II.3.5. Соотношения между элементами параллактического треугольника 313
II.3.6. Роль астрономических определений в геодезических работах, их точность 317
Б. Астрономические инструменты и приборы 318
II.3.7. Выбор способа и инструментов для наблюдения по определению астрономических широт, долгот и азимутов 318
II.3.8. Фотоэлектрическая регистрация моментов прохождения звезд 319
II.3.9. Хронографы 320
II.3.10. Импульсная приставка для приема секундных сигналов 320
В. Определение широт, долгот и азимутов на пунктах государственной геодезической сети 321
II.3.11. Определение времени по способу Цингера с применением контактного микрометра 321
II.3.12. Определение широты по способу Талькотта 323
II.3.13. Определение долготы 328
II.3.14. Определение азимута по часовому углу Полярной 330
II.3.15. Определение геодезического азимута непосредственно из наблюдений звезд в меридиане 333
II.3.16. Определение геодезического азимута из многократных наблюдений ярких звезд вблизи меридиана 338
II.3.17. Приведение астрономических широт, долгот и азимутов к центру тригонометрического знака 343
Г. Приближенные астрономические определения . . 345
II.3.18. Определение широты по зенитному расстоянию Полярной 345
II.3.19. Определение широты по зенитному расстоянию Солнца 346

Стр.
II.3.20. Определение времени по зенитному расстоянию Солнца 348
II.3.21. Определение азимута по зенитному расстоянию Солнца 349
II.3.22. Определение азимута по часовому углу Полярной 351
II.3.23. Определение азимута по способу Красовского 352
II.3.24. Определение долготы 354
Список литературы 354
II.4. Сфероидическая геодезия (*Г. В. Багратуни*) 356
II.4.1. Определения 356
II.4.2. Земной эллипсоид 357
II.4.3. Кривые на поверхности земного эллипсоида . . 362
II.4.4. Решение малых сфероидических треугольников 363
II.4.5. Вычисление геодезических координат пунктов государственной опорной сети 365
II.4.6. Решение геодезических задач на большие расстояния 368
II.4.7. Решение геодезических задач в пространстве . . 370
II.4.8. Плоские прямоугольные координаты в конформной проекции Гаусса — Крюгера 373
II.4.9. Понятие о других конформных проекциях . . 380
II.4.10. Дифференциальные формулы 382
II.4.11. Уклонение отвесной линии 383
Список литературы 384

РАЗДЕЛ III

ОСНОВНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

III.1. Общие положения о триангуляции и трилатерации (*З. С. Хаимов*) 387
А. Государственная геодезическая сеть СССР 387
III.1.1. Общие сведения. Классификация сетей 387
Б. Предвычисление и оценка точности построения геодезических сетей 395
III.1.2. Предвычисление и оценка точности триангуляции 395
III.1.3. Предвычисление и оценка точности трилатерации 408
В. Проектирование и рекогносцировка государственных геодезических сетей 417
Г. Постройка геодезических знаков 421
Список литературы 424

Стр.

III.2. Высокоточные угловые измерения и предварительные вычисления в триангуляции (*Н. В. Яковлев*) 426
III.2.1. Высокоточные угломерные инструменты . . . 426
III.2.2. Источники ошибок при высокоточных угловых измерениях 437
III.2.3. Методы высокоточных угловых измерений . . 457
III.2.4. Определение элементов приведения 469
III.2.5. Предварительные вычисления в триангуляции 470
Список литературы 477

III.3. Светодальномерные и радиодальномерные измерения. Радиогеодезические системы и радиогеодезические измерения (*А. В. Кондрашков*) 478
А. Светодальномеры 478
III.3.1. Общие сведения 478
III.3.2. Светодальномер «Кварц» 479
III.3.3. Светодальномеры СТ-65 и ТД-2 485
III.3.4. Светодальномеры КДГ-3 и МСД-1 490
III.3.5. Светодальномерные насадки ДНК-02 и DI10 493
III.3.6. Электронные тахеометры Reg Elta 14 и геодиметр 700 494
Б. Геодезические радиодальномеры 494
III.3.7. Геодезический радиодальномер РДГВ 497
III.3.8. Геодезический радиодальномер «Луч» 499
III.3.9. Радиодальномер Электротейп 501
III.3.10. Радиодальномер Дистомат D150 502
III.3.11. Измерение расстояний радиодальномером РДГВ 502
В. Вычисление расстояний, измеренных свето- или радиодальномерами. Поправки в результаты измерений 504
Г. Радиогеодезические системы 507
II.3.12. Общие сведения 507
III.3.13. Радиогеодезическая система «Поиск» 512
III.3.14. Самолетный радиодальномер (РДС) 514
Д. Радиогеодезические измерения 516
III.3.15. Основные сведения об обработке результатов радиогеодезических измерений 516
III.3.16. Предвычисление точности радиогеодезических определений 524
III.3.17. Измерение больших расстояний методом пересечения створа линии 525
Список литературы 527

Стр.

III.4. Уравнивание триангуляции, трилатерации и комбинированной сети (*П. А. Гайдаев*) 528
А. Введение 528
III.4.1. Общие положения 528
III.4.2. Исходные данные, требования к ним 528
III.4.3. Измеряемые величины. Системы координат 529
III.4.4. Точности измерений и вычислений 530
III.4.5. Редукционные поправки 531
III.4.6. О способах уравнивания 533
Б. Виды условий (условных уравнений), возникающих в триангуляции [1, 3, 4, 6] 534
III.4.7 Обозначения (на плоскости) 535
III.4.8 Угловые условия 535
III.4.9. Синусные условия 539
III.4.10. Условные уравнения для направлений 546
III.4.11. Классификация условий и подсчет числа независимых условий различного вида. Выбор условий, их взаимозаменяемость 547
В. Уравнивание триангуляции коррелатным способом [1, 3, 5, 6, 9] 552
III.4.12. Общие замечания 552
III.4.13. О способах, основанных на методе Крюгера 553
III.4.14. Упрощенный способ 554
III.4.15. Полный пример уравнительных и окончательных вычислений 560
Г. Уравнивание геодезических сетей параметрическим способом 568
III.4.16. Общие основы. Уравнения поправок 568
III.4.17. Уравнивание ориентированных направлений 574
III.4.18. Уравнивание ориентированных направлений на ЭВМ 577
III.4.19. Применение параметрического способа для уравнивания различных геодезических построений . . . 581
Д. Уравнивание типовых фигур трилатерации коррелатным способом 583
III.4.20. Общие сведения. Способ сравнения углов 583
Список литературы 586

Стр.

III.5. Государственная и городская полигонометрия (*В. Г. Селиханович*) 588

А. Расчетные формулы 588

III.5.1. Классификация полигонометрии 588

III.5.2. Принятые обозначения 590

III.5.3. Основные расчетные формулы 591

Б. Линейные измерения подвесными мерными приборами 600

III.5.4. Мерные приборы, ленты, проволоки 600

III.5.5. Приборы для натяжения, базисные штативы, оптический отвес и другие 601

III.5.6. Нормальные меры и компарирование проволок 602

III.5.7. Источники ошибок подвесных мерных приборов, их влияние на результаты измерений 605

III.5.8. Производство полевых измерений 610

III.5.9. Обработка линейных измерений, вычисление длины стороны 613

III.5.10. Оценка точности линейных измерений в сетях государственного значения 617

В. Угловые измерения 617

III.5.11. Оптический теодолит средней точности . . . 617

III.5.12. Источники ошибок угловых измерений . . . 620

III.5.13. Марки и их поверки 622

III.5.14. Оптический отвес и его поверки 623

III.5.15. Угловые измерения способом круговых приемов 624

III.5.16. Оценки точности угловых измерений 624

Г. Уравнительные вычисления 627

III.5.17. Уравнивание полигонометрического хода любой формы по способу наименьших квадратов . . 627

III.5.18. Уравнивание вытянутого хода с применением таблиц проф. А. С. Чеботарева 631

III.5.19. Уравнивание азимутального хода 633

III.5.20. Уравнивание полигонометрических сетей . . 634

III.5.21. Раздельное уравнивание полигонометрических сетей 636

III.5.22. Дальномерно-базисная полигонометрия . . 642

III.5.23. Параллактическая полигонометрия 647

III.5.24. Короткобазисная параллактическая полигонометрия по методу проф. А. С. Филонепко 651

Стр.
III.5.25. Привязочные работы 652
Список литературы 661
III.6. Гироскопические приборы (*В. Ю. Торочков*) 663
III.6.1. Назначение и измерительные возможности гироскопических приборов 663
III.6.2. Гироскоп и гироскопические приборы 664
III.6.3. Топопривязчик 671
III.6.4. Гиротеодолиты 675
III.6.5. Гиростабилизирующие устройства для аэрофотоаппаратов и гравиметров 686
Список литературы 689
III.7. Нивелирование (*М. Е. Пискунов*) 690
III.7.1. Классификация нивелирных сетей СССР . . . 690
III.7.2. Система счета высот в нивелирной сети 691
А. Геометрическое нивелирование 694
III.7.3. Способы нивелирования 694
III.7.4. Нивелиры и их основные части 696
III.7.5. Нивелирные знаки 705
III.7.6. Поверки и исследования уровенных нивелиров 709
III.7.7. Поверки и исследования нивелиров с компенсаторами 714
III.7.8. Поверки оптических высотомеров 715
III.7.9. Исследование и компарирование нивелирных реек 716
III.7.10. Методика нивелирования 719
III.7.11. Высокоточное нивелирование специального назначения 728
III.7.12. Особые случаи нивелирования 730
III.7.13. Главнейшие источники ошибок измерений в геометрическом нивелировании 734
III.7.14. Оценка точности результатов геометрического нивелирования 738
III.7.15. Уравнивание результатов измерений в нивелирных сетях 740
Б. Тригонометрическое нивелирование 747
III.7.16. Формулы тригонометрического нивелирования 747
В. Барометрическое нивелирование (*В. Г. Селиханович*) 753
III.7.17. Барометрические формулы 753
III.7.18. Инструменты для барометрического нивелирования 755
III.7.19. Точность барометрического нивелирования 761
Г. Автоматическое нивелирование (*В. И. Шиллингер*) 762
Список литературы 769

РАЗДЕЛ IV
ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ И ФОТОТОПОГРАФИЧЕСКИЕ СЪЕМКИ

Стр.

IV.1. Топографические методы съемки (*Н. И. Модринский*) 773
IV.1.1. Топографические карты и планы 773
IV.1.2. Задачи, решаемые по топографической карте 776
IV.1.3. Теодолитные работы 785
IV.1.4. Тахеометрия 809
IV.1.5. Нивелирование поверхности 822
IV.1.6. Мензульная съемка 825
Список литературы 837
IV.2. Аэрофототопографические методы съемки (*Г. П. Левчук*) 839
А. Аэросъемочная аппаратура. Требования к аэрофотосъемке 839
IV.2.1. Виды фотосъемки 839
IV.2.2. Аэрофотоаппараты (АФА) 840
IV.2.3. Радиовысотомер 842
IV.2.4. Статоскоп 843
IV.2.5. Съемка линии горизонта 844
IV.2.6. Солнечный перископ 846
IV.2.7. Технические требования к аэрофотосъемке . . 846
Б. Анализ аэроснимка 847
IV.2.8. Элементы центральной проекции 847
IV.2.9. Связь координат точек аэроснимка и местности 850
IV.2.10. Масштабы аэроснимков 851
IV.2.11. Смещение точек на аэроснимках 853
IV.2.12. Искажение направлений на аэроснимках . . . 855
В. Комбинированный метод аэротопографической съемки 856
IV.2.13. Схема комбинированного метода 856
IV.2.14. Плановая фототриангуляция 857
IV.2.15. Трансформирование аэроснимков 860
IV.2.16. Составление фотосхем и фотопланов 867
IV.2.17. Привязка аэроснимков 868
IV.2.18. Топографическое дешифрирование 871
IV.2.19. Съемка рельефа на фотопланах 872
Г. Стереоскопический метод измерений. Элементы ориентирования снимков 873
IV.2.20. Стереоскопические измерения 873
IV.2.21. Стереоскопы 876

Стр.
IV.2.22. Стереокомпараторы 876
IV.2.23. Определение элементов взаимного ориентирования и углов наклона аэроснимков 877
Д. Дифференцированный метод стереотопографической съемки 884
IV.2.24. Схема дифференцированного метода 884
IV.2.25. Стереометры 884
IV.2.26. Обработка аэроснимков на топографическом стереометре 890
IV.2.27. Составление топографического плана 893
Е. Универсальный метод стереотопографической съемки 894
IV.2.28. Сущность метода 894
IV.2.29. Мультиплекс 895
IV.2.30. Универсальные приборы для обработки аэроснимков с преобразованными связками проектирующих лучей 898
Ж. Понятие о способах пространственной фототриангуляции 906
IV.2.31. Пространственная фототриангуляция на универсальных приборах 906
IV.2.32. Понятие о способах аналитической фототриангуляции с применением ЭВМ 908
З. Наземная стереофотограмметрическая съемка . . 910
IV.2.33. Сущность наземной стереофотограмметрической съемки 910
IV.2.34. Фототеодолиты 912
IV.2.35. Полевые и камеральные работы при фототеодолитной съемке 914
Список литературы 916

РАЗДЕЛ V

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПРИ ИЗЫСКАНИЯХ И СТРОИТЕЛЬСТВЕ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

(*Г. П. Левчук*)

А. Изыскания сооружений. Крупномасштабные съемки площадок 919
V.1. Стадии проектирования и изысканий 919
V.2. Крупномасштабные изыскательские планы . . . 920
V.3. Обоснование и съемка площадок 922

Стр.

Б. Трассирование линейных сооружений 925
V.4. Трасса. Трассирование 925
V.5. Камеральное трассирование 926
V.6. Полевое трассирование 929
V.7. Технологические схемы изысканий магистральных трасс с применением аэрометодов 935
V.8. Способы детальной разбивки кривых 937
V.9. Переходные кривые 941
В. Геодезические работы при водных изысканиях . . 945
V.10. Определение уровней водотоков 945
V.11. Определение скорости потока и направления течения 946
V.12. Промеры глубин 950
V.13. Определение расходов 952
V.14. Составление продольного профиля реки 954
V.15. Топографо-геодезические работы на водохранилищах 956
Г. Разбивка инженерных сооружений 958
V.16. Общие принципы разбивки сооружений 958
V.17. Опорные разбивочные сети 961
V.18. Способы разбивки сооружений 965
V.19. Детальные разбивочные работы 970
Д. Геодезические работы при монтаже конструкций и оборудования 984
V.20. Подготовительные работы 984
V.21. Плановая установка и выверка оборудования 984
V.22. Высотная установка оборудования 989
V.23. Способы установки и выверки конструкций по вертикали 990
V.24. Автоматизированные приборы для разбивки и выверки сооружений 993
V.25. Исполнительные съемки. Составление генеральных планов 994
Е. Наблюдения за деформациями сооружений 996
V.26. Измерения осадок фундаментов 996
V.27. Определение горизонтальных смещений сооружений 999
V.28. Наблюдения за кренами, трещинами, оползнями 1004
V.29. Фотограмметрические методы измерения деформаций 1006
Список литературы 1008

РАЗДЕЛ VI

ЭКОНОМИКА, ПЛАНИРОВАНИЕ И ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА

(К. В. Бажанов)

Стр.

VI.1. Основы новой системы планирования и экономического стимулирования в топографо-геодезическом производстве ГУГК 1011
VI.2. Структура затрат на производство топографо-геодезических работ 1012
VI.3. Трудовые ресурсы предприятий 1014
VI.4. Материальные ресурсы предприятий 1016
VI.5. Планирование производства 1020
VI.6. Организация производства 1022
VI.7. Основы научного управления производством . . 1025
VI.8. Планирование производства в изыскательских организациях 1029
Список литературы 1031
Предметный указатель 1032

СПРАВОЧНИК ГЕОДЕЗИСТА
(в двух книгах)

Книга 1

Редакторы: *В. Д. Большаков, Г. П. Левчук*
Редакторы издательства: *Л. М. Комарькова, Н. Т. Куприна*
Переплет художника *С. Н. Голубева*
Технический редактор *А. Е. Матвеева*
Корректоры *М. П. Курылева* и *В. П. Крымова*

Сдано в набор 7/VI 1974 г. Подписано в печать 28/II 1975 г. Т-01496.
Формат 84 × 108¹/₃₂. Бумага № 2. Книга 1, печ. л. 17,0. Усл. п. л. 28,56.
Книга 1, уч.-изд. л. 30,30. Тираж 57 000 экз. Заказ № 1058/4565—15.
Цена 1 р. 75 к.

Издательство «Недра», 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19
Ленинградская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
196006, г. Ленинград, Московский пр., 91.

Ю.75к.

«Недра»

Справочник геодезиста