

ПРЕЗЕНТАЦИЯ ПО КУРСУ

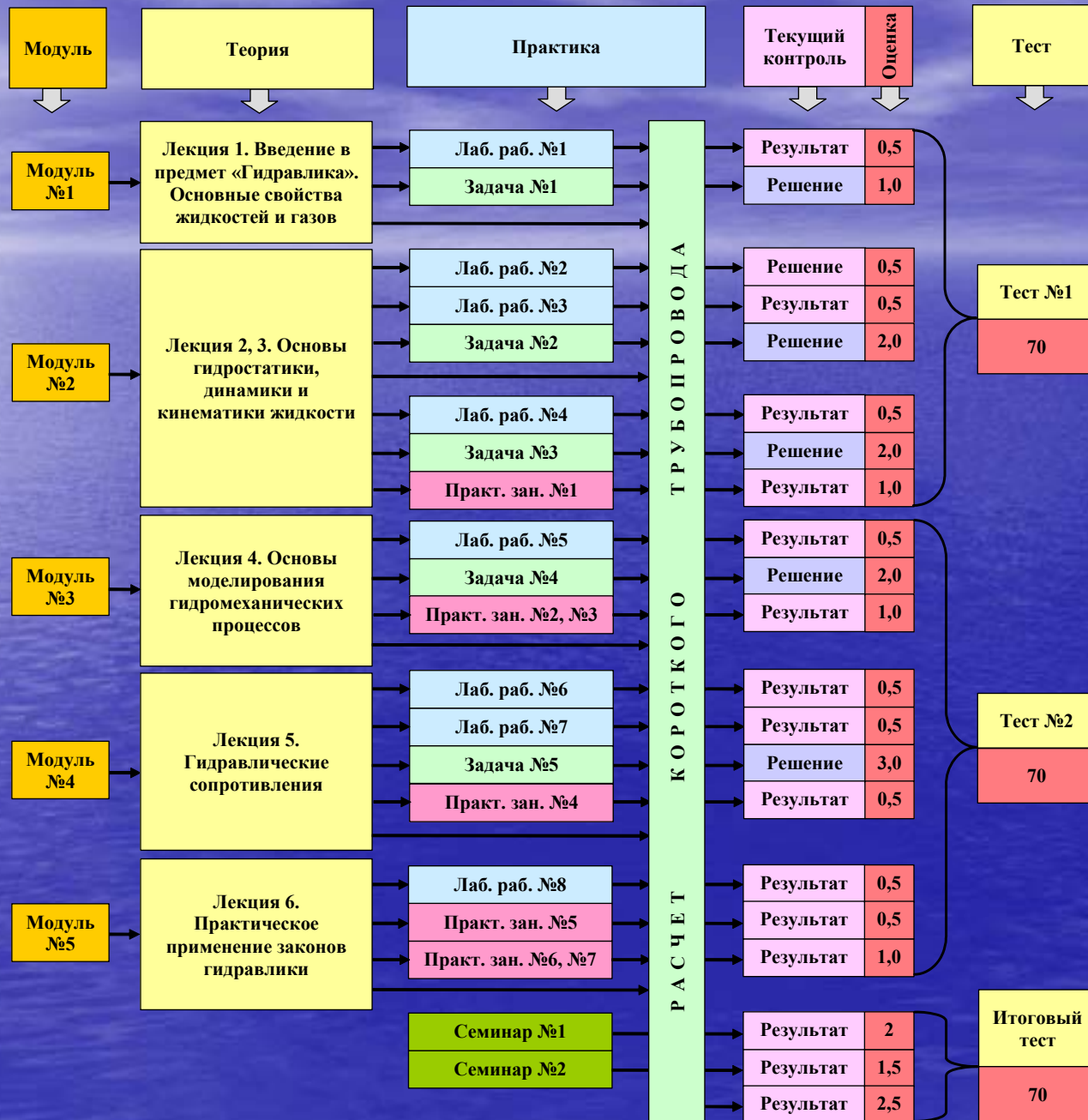
«ГИДРАВЛИКА»

Методические указания по самостоятельному изучению предмета

Для успешного изучения учебной дисциплины «Гидравлика» необходимо:

- изучить теоретический материал, представленный в виде курса лекций;
- применить полученные теоретические знания при решении задач;
- выполнить экспериментальные исследования во время лабораторных работ;
- выполнить расчет короткого трубопровода и подготовить отчет о проделанной работе в соответствии с программой изучения дисциплины.

Схема изучения дисциплины



Для успешного освоения дисциплины и получения положительной итоговой оценки **необходимо:**

1. Изучить теоретический материал, изложенный в курсе лекций.
2. Применить теорию для решения практических задач, представленных в курсе лекций.
3. Определить давление в накопительном резервуаре $p_{\text{ман}}$, обеспечивающее протекание воды в коротком трубопроводе с минимальным расчетным расходом Q_H . Размеры трубопровода и расход принимаются в соответствии с выбранным вариантом Задания.

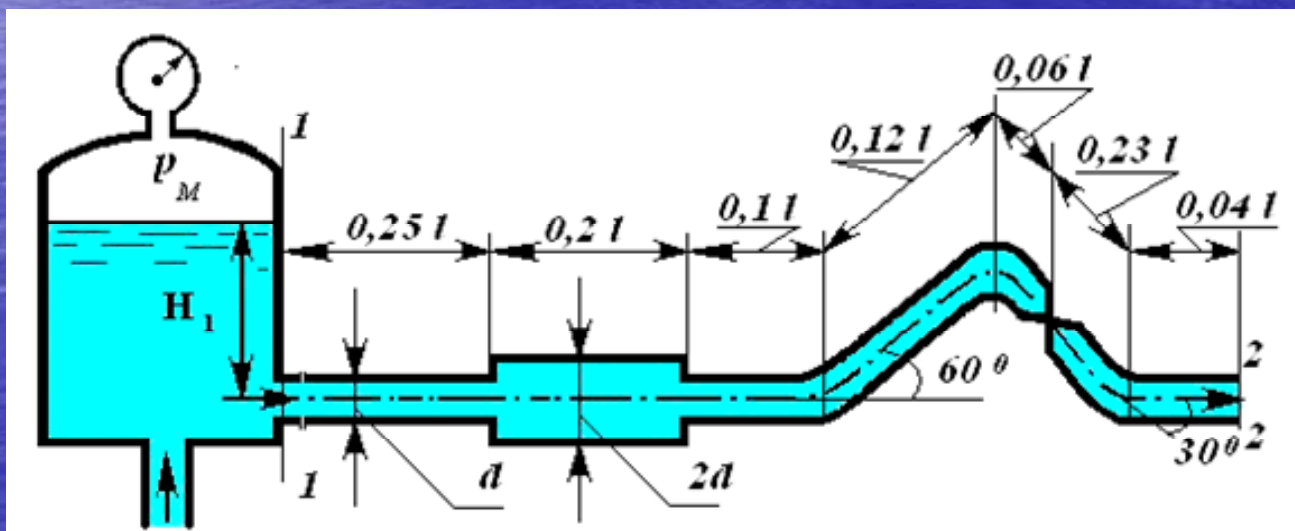


Схема короткого трубопровода

Для успешного освоения дисциплины и получения положительной итоговой оценки **необходимо:**

4. Выполнить лабораторные работы для определения свойств жидкости и параметров ее движения:
 - Лабораторная работа № 1 «Определение величины коэффициента вязкости воды».
 - Лабораторная работа № 2 «Исследование законов движения жидкости».
 - Лабораторная работа № 3 «Исследование режимов движения жидкости».
 - Лабораторная работа № 6 «Определение величины коэффициента гидравлического трения трубы».
 - Лабораторная работа № 7 «Определение величины коэффициента местного сопротивления вентиля».
5. Использовать результаты экспериментальных исследований в расчете трубопровода.
6. Выполнить расчет и провести экспериментальное исследование на физической модели изменения давления в трубопроводе в случае утечки 0,001% объема жидкости из гидравлической системы (лабораторная работа № 4).
7. Выполнить расчет физической модели трубопровода и провести экспериментальное исследование (лабораторная работа № 5) с применением масштабов, указанных в Задании.
8. Провести исследование возможности применения формул расчета длинных трубопроводов (лабораторная работа № 8) для определения параметров короткого трубопровода.
9. Построить линии полного и пьезометрического напоров по длине трубопровода.
10. Сравнить результаты расчета с результатами, полученными на модели.

Программа самостоятельной работы студентов по изучению дисциплины «Гидравлика» для специальностей: ПГС, ТГВ, ВиВ, ГСХ

Учебная неделя	Самостоятельная работа	Контроль знаний
1	Изучение теории: лекция №1 «Введение в гидравлику. Основные свойства жидкости и газа». Решение задачи по теме лекции №1. Подготовка к лабораторной работе №1	
2	Составление отчета по лабораторной работе №1.	Тестирование по лекции №1. Представление решения задачи (лекция №1) и для проверки.
3	Изучение теории: лекция №2 «Основы гидростатики, динамики и кинематики жидкости». Часть 1. Решение задачи по теме лекции №2, часть 1. Подготовка к лабораторной работе № 2	Представление результата лабораторной работы №1 для проверки.
4	Составление отчета по лабораторной работе №2. Подготовка к лабораторной работе №3.	Тестирование по лекции №2, часть 1. Представление решения задачи (лекция №2, часть 1) для проверки.
5	Изучение теории: лекция №2 «Основы гидростатики, динамики и кинематики жидкости». Часть 2. Составление отчета по лабораторной работе №3. Расчет утечки жидкости из трубопровода. Подготовка к лабораторной работе №4. Решение задачи по теме лекции №2, часть 2.	Представление результата лабораторной работы №2 для проверки.
6	Составление отчета по лабораторной работе №4. Сравнение результатов эксперимента с результатами расчета. Решение задачи по теме лекции №2, часть 2.	Тестирование по лекции №2. Часть 2. Представление расчета утечки жидкости из трубопровода для проверки. Представление результата лабораторной работы №3 для проверки.
7	Изучение теории: лекция №3 «Основы моделирования гидромеханических процессов». Расчет физической модели трубопровода. Подготовка к лабораторной работе №5.	Представление результата лабораторной работы №4 для проверки. Представление решения задачи (лекция №2, часть 2) для проверки.

Программа самостоятельной работы студентов по изучению дисциплины «Гидравлика» для специальностей: ПГС, ТГВ, ВиВ, ГСХ

Учебная неделя	Самостоятельная работа	Контроль знаний
8	Составление отчета по лабораторной работе №5. Решение задачи по теме лекции №3.	Тестирование по лекции №3. Представление результатов расчета физической модели для проверки.
9	Изучение теории: лекция №4 «Гидравлические сопротивления». Подготовка к лабораторным работам №6 и №7. Решение задачи по теме лекции №4.	Представление результата лабораторной работы №5 для проверки. Представление решения задачи (лекция №3) для проверки.
10	Составление отчета по лабораторным работам №6 и №7.	Тестирование по лекции №4. Представление решения задачи (лекция №4) для проверки.
11	Изучение теории: лекция №5 «Практическое применение законов гидравлики». Подготовка к лабораторной работе №8. Решение задачи по теме лекции №5.	Представление результатов лабораторных работ №6 и №7 для проверки.
12	Составление отчета по лабораторной работе №8. Первый этап расчета короткого трубопровода.	Тестирование по лекции №5. Представление решения задачи (лекция №5) для проверки.
13	Второй этап расчета трубопровода.	Представление результата лабораторной работы №8 для проверки.
14	Оформление расчета короткого трубопровода.	.
Дополнительные занятия для студентов, не выполнивших учебный план		
15	Подготовка к сдаче итогового тестирования. Работа над ошибками расчета короткого трубопровода.	Представление расчета короткого трубопровода для проверки
16	Подготовка к защите расчета и отчетов лабораторных работ.	Итоговое тестирование
17		Защита результатов расчета и лабораторного исследования.
18	Фиксация результатов изучения дисциплины.	

ГИДРАВЛИКА

**Физические
свойства жидкости**

Предмет гидравлики

- **Гидравлика** — наука о движении и покое воды и других жидкостей. Жидкостью в гидравлике представляют как сплошную среду, легко изменяющую форму под действием внешних сил.
- **Сплошная среда** — это масса, физические и механические параметры которой являются функциями координат в выбранной системе отсчета. Молекулярное строение жидкостей заменяется сплошной средой той же массы.

Гидравлическое определение понятия жидкости и свойств капельной, некапельной и идеальной жидкости

Жидкостью называется физическое тело, обладающее текучестью и не имеющее своей формы, но принимающее форму того сосуда, в котором оно находится.

Текучестью называется способность жидкости изменять свою форму, не дробясь на части, под действием даже небольших сил.

Различают два вида жидкостей:

капельные и **некапельные** (газообразные).

Гидравлическое определение понятия жидкости и свойств капельной, некапельной и идеальной жидкости

Капельные жидкости

- Оказывают большое сопротивление изменению объема и трудно поддаются сжатию.
- При изменении давления и температуры их объем изменяется весьма незначительно.
- Любая капельная жидкость может переходить в газообразное состояние при определенной температуре и давлении.
- Практически не оказывают заметного сопротивления растягивающим усилиям.
- Оказывают существенное сопротивление сдвигающим силам.

Некапельные (газообразные) жидкости

- Изменяют свой объем в зависимости от этих же факторов в значительной степени.
- При понижении температуры и повышении давления могут переходить в жидкое состояние.

Силы, действующие в жидкости

На произвольно выделенный объем жидкости действуют два вида сил:

- **Поверхностные:**

P – сила давления

T – сила трения

- **Массовые:**

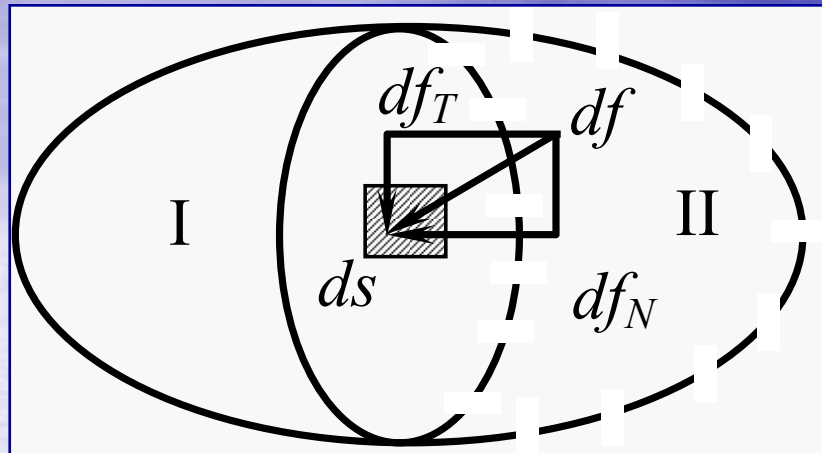
G – сила тяжести

I – сила инерции

- Массовые силы действуют по всему выделенному объему и пропорциональны его массе $G = mg, I = -ma$.

Поверхностные силы действуют по поверхности и пропорциональны площади поверхности.

Силы, действующие в жидкости



Напряжение в жидкости

$$\tau = \frac{df_T}{ds}, \text{ где } df_T \text{ — сила трения площади } ds.$$

Нормальное напряжение, действующее по нормали к поверхности ds , называют **напряжением давления** или **давлением**.

$$p = \frac{df_N}{ds}, \text{ где } df_N \text{ — сила давления площади } ds.$$

Силу df , действующую на площадь ds можно разложить на две составляющие:

тангенциальную и **нормальную**.

Соответственно, напряжение в жидкости может быть

тангенциальным (τ) и **нормальным** (p).

Тангенциальное напряжение, действующее вдоль поверхности ds , называют **напряжением трения**:

Силы, действующие в жидкости

Для площади S можно записать $\tau = \frac{T}{S}$ где T – сила трения площади S .

$p = \frac{P}{S}$, где P – сила давления площади S .

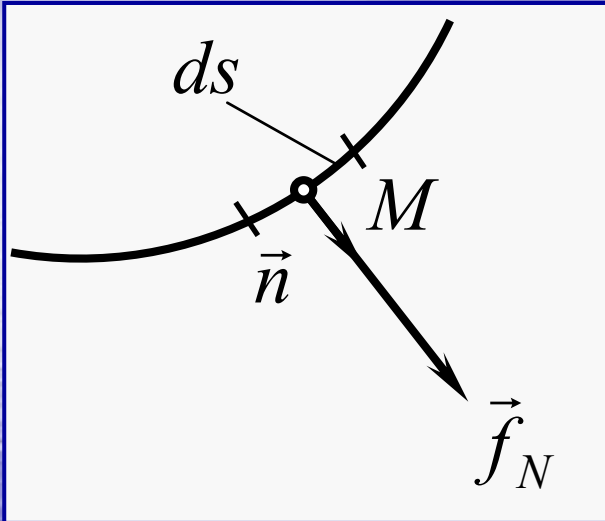
В покоящейся жидкости имеется только нормальное напряжение, тангенциальное напряжение отсутствует.

Сила трения действует вдоль поверхности: $T = \tau S$

Сила давления направлена по нормали к поверхности:

$$P = pS$$

Давление и его свойства



Рассмотрим точку M в жидкости, проведем через эту точку поверхность ds .

Результирующая сила воздействия всех молекул, находящихся в постоянном движении, на эту поверхность

перпендикулярна ds . Можно записать в

векторной форме $d\vec{f}_N = p ds \vec{n}$, где $\vec{n}$ –

единичный вектор, направленный по

нормали к поверхности ds .

$$d\vec{f}_N$$

зависит от величины поверхности ds , но из формулы видно, что давление в точке не зависит от ds .

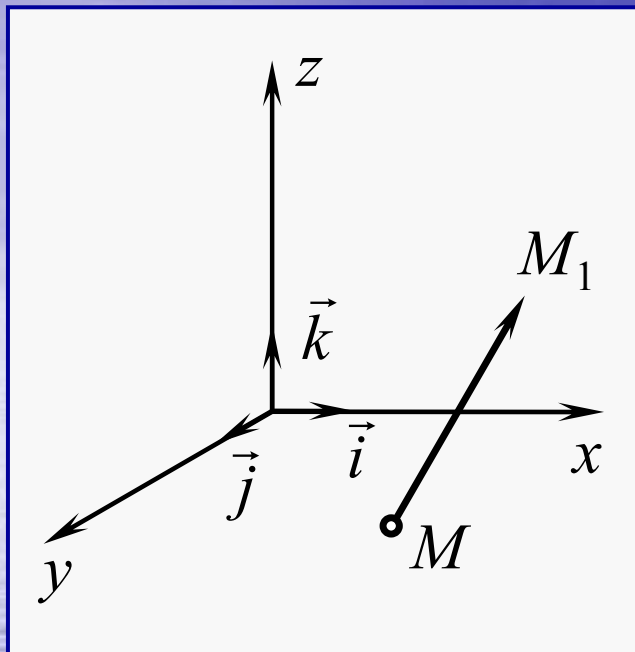
Свойства давления

1. Давление в точке в любом направлении одинаково и не зависит от ориентации ds . Через точку M можно провести бесконечное множество поверхностей и сила df_N будет зависеть только от величины ds .

2. Гидростатическое давление является непрерывной функцией координат пространства

$$p = f(x, y, z)$$

Понятие о градиенте давления



Рассмотрим точку M , имеющую координаты (x, y, z) и находящуюся в жидкости. Давление в точке M — p_M . Это давление зависит только от координат точки M . Можно записать

$$p_M = p(x, y, z)$$

На небольшом расстоянии от точки M находится точка M_1 с координатами $(x + dx, y + dy, z + dz)$.

Давление в M_1 отличается от давления p_M на некоторую величину

dp : $p_{M_1} = p_M + dp$. Давление зависит от координат точки M_1 :

$$p_{M_1} = p(x + dx, y + dy, z + dz)$$

Тогда

$$dp = p(x + dx, y + dy, z + dz) - p(x, y, z)$$

Понятие о градиенте давления

Т.к. p является функцией координат x, y, z , то величину dp можно записать в дифференциальной форме

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Вектор перемещения от точки M к точке M_1 записывается в форме

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz,$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, направленные вдоль осей координат.

Определение: В физике для обозначения изменения некоторой скалярной величины G (температуры, давления) от одной точки к другой используется понятие вектора

$$\overrightarrow{grad}G = \frac{\partial G}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial G}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial G}{\partial z} \vec{k}$$

Понятие о градиенте давления

Вектор градиента давления величин

Можно записать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}$$

Произведение двух векторов

$$\overrightarrow{grad} p \overrightarrow{MM_1} = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

или

$$dp = \overrightarrow{grad} p \overrightarrow{MM_1}$$

Вывод: Изменение давления dp является скалярным произведением двух векторов $grad p$ и MM_1 .

Понятие о градиенте давления

Свойства вектора

$$\overrightarrow{\text{grad } p}.$$

1. Если точки M и M_1 принадлежат поверхности в которой все точки испытывают одинаковое давление, то можно записать

$$p_M = p_{M_1} \text{ тогда } dp = 0.$$

Вывод: $\overrightarrow{\text{grad } p}$ расположен по нормали к поверхности равного давления, проходящей через точку M .

2. Предположим, что M_1 расположена по нормали к поверхности равного давления, проходящей через точку M , тогда $dp > 0$. Значит скалярное произведение $\overrightarrow{\text{grad } p} \cdot \overrightarrow{MM_1}$ имеет положительное значение и $\overrightarrow{\text{grad } p}$ имеет то же направление, что и $\overrightarrow{MM_1}$.

Вывод: $\overrightarrow{\text{grad } p}$ направлен в сторону увеличения давления.

3.
$$\overrightarrow{\text{grad } p} = \frac{dp}{MM_1}$$

Вывод: величина определяется отношением разности давлений в двух точках к расстоянию между этими точками.

Единицы давления

При измерении атмосферного давления используют единицу давления – **бар**

- **$1 \text{ бар} = 105 \text{ Па}$**

При измерении при помощи пьезометрических трубок используют единицы длины

- **для воды $1 \text{ мм.в.ст} = 9,8 \text{ Па}$**
- **тогда $1 \text{ бар} = 9,8 \text{ м.в.ст}$**
- **для ртути $1 \text{ мм.рт.ст} = 133,3 \text{ Па}$**

Можно подсчитать, что: $1 \text{ бар} = \frac{9810}{133,3} \text{ мм.рт.ст.}$

Старая система измерения. Давление, создаваемое

телом массой 1 кг на 1 см²:

$$1 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2} = 0,98 \text{ бар}$$

Основные физические свойства жидкостей

Плотностью называют количество массы жидкости, содержащееся в единице объема (отношение массы m к ее объему V), кг/м³:

$$\rho = \frac{m}{V},$$

где m – есть масса жидкости, заключенная в объеме V .

Плотность меняется при изменении температуры и давления.

Основные физические свойства жидкостей

Удельным (или **объемным**) **весом**

называется отношение веса жидкости к ее объему, Н/м³ :

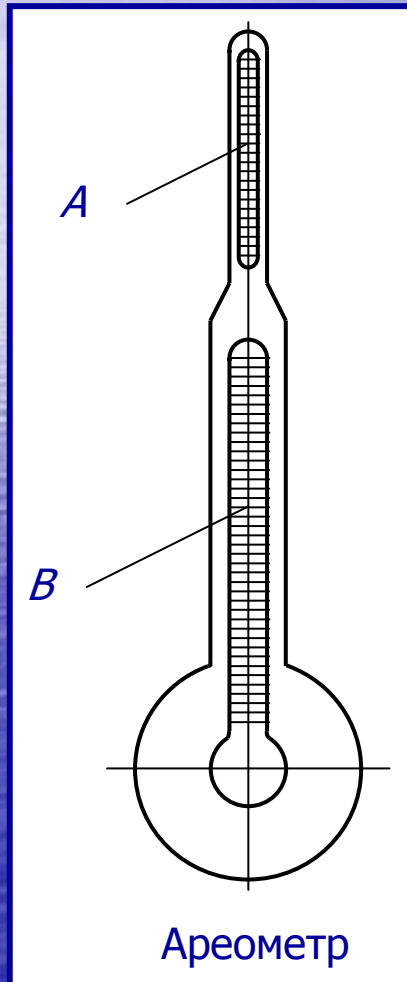
$$\gamma = \frac{G}{V},$$

где G – вес жидкости, V – занимаемый ею объем.

Плотность и удельный вес связаны между собой соотношением

$$\gamma = g\rho$$

Основные физические свойства жидкостей



Для определения удельного веса жидкости применяются различные способы и приборы. Наиболее просто удельный вес может быть найден путем взвешивания на точных **аналитических весах**.

$$\gamma = \frac{G_2 - G_1}{V}.$$

В производственных условиях удельный вес жидкости обычно определяется при помощи специального прибора – **ареометра**

(ареометрическая шкала *A*;
термометрическая шкала *B*)

Основные физические свойства жидкостей

Для пресной воды γ практически равно:

$$\gamma = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 1 \frac{\text{Т}}{\text{м}^3} = 0,001 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3} = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 9810 \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}.$$

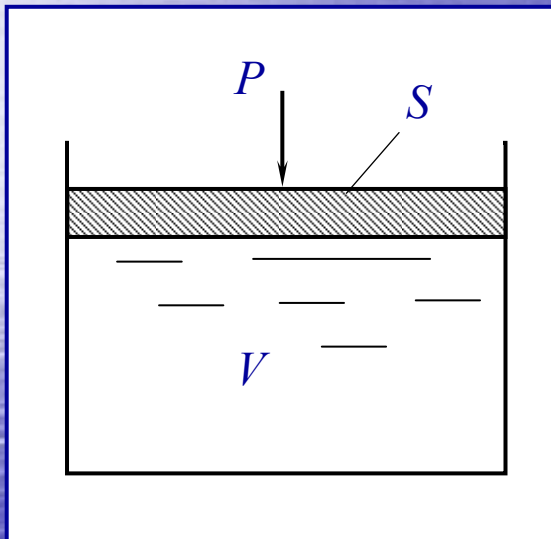
В таблице представлен удельный вес воды при разной температуре.

$t, ^\circ\text{C}$	0	10	20	30	40	60	100
$\gamma, \text{кг/м}^3$	999,9	999,4	998,2	995,7	992,2	983,2	958,4

Основные физические свойства жидкостей

Сжимаемость – свойство жидкостей изменять объем при изменении давления. Сжимаемость капельных жидкостей характеризуется **коэффициентом объемного сжатия**

$$\beta_V = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}, \quad \frac{\text{м}^2}{\text{кг}}$$



где V – начальный объем, м³;
 dV – элементарное изменение объема, м³;
 dp – элементарное изменение давления, кг/м².

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия называется **модулем упругости**

$$E_0 = \frac{1}{\beta_V}$$

Основные физические свойства жидкостей и газов

Сжимаемость характеризуется также отношением изменения давления к изменению плотности, равным квадрату скорости распространения звука в среде:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Для оценки сжимаемости среды при ее движении важно не абсолютное значение скорости звука a , а относительное, которое называется числом Маха:

$$\text{Ma} = u/a.$$

Основные физические свойства жидкостей и газов

Газы характеризуются значительной сжимаемостью и высокими значениями коэффициента температурного расширения. Зависимость плотности газов от давления и температуры устанавливается **уравнением состояния**. Для совершенных газов (нет взаимодействия между молекулами) справедливо уравнение Клапейрона, позволяющее определить плотность газа при известных давлении и температуре

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

где p – абсолютное давление; R – удельная газовая постоянная (для воздуха $R = 283$ Дж/кг·К); T – абсолютная температура.

В технических расчетах плотность газа, приводят к нормальным физическим условиям ($t = 0^\circ\text{C}$; $p = 101325$ Па) или стандартным условиям ($t = 20^\circ\text{C}$; $p = 101325$ Па). Можно подсчитать, что в стандартных условиях плотность воздуха $\rho = 1,21$ кг/м³.

При других условиях плотность воздуха можно определить по формуле

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}$$

где ρ_0 , T_0 и p_0 – плотность, температура и давление при известных стандартных условиях соответственно.

Основные физические свойства жидкостей и газов

Температурное расширение - увеличение объема капельных жидкостей, при увеличении температуры, характеризуется **коэффициентом температурного расширения**, выражающим относительное увеличение объема жидкости при увеличении температуры на 1 град

$$\beta_t = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}, \quad \frac{1}{^\circ\text{C}},$$

где V — первоначальный объем жидкости;

dV — изменение этого объема при повышении температуры на величину dt .

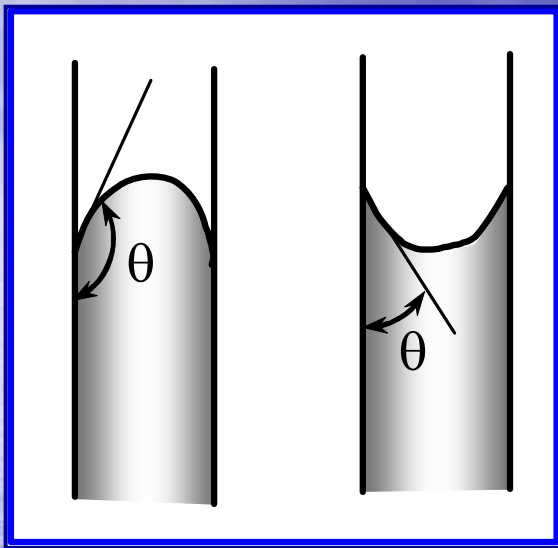
Растворимость газов в жидкостях — способность жидкостей растворять в своем объеме газы. Количество растворенного газа в единице объема жидкости различно для разных жидкостей и изменяется с изменением давления.

Относительный объем газа, растворимого в жидкости до ее полного насыщения прямо пропорционален давлению

$$\frac{V_{\text{г}}}{V_{\text{ж}}} = k \frac{p_2}{p_1}$$

где $V_{\text{г}}$ — объем растворенного газа при нормальных условиях; $V_{\text{ж}}$ — объем жидкости; k — коэффициент растворимости; p_1 и p_2 — начальное и конечное давление.

Основные физические свойства жидкостей и газов



Поверхностное натяжение. Капиллярные явления.

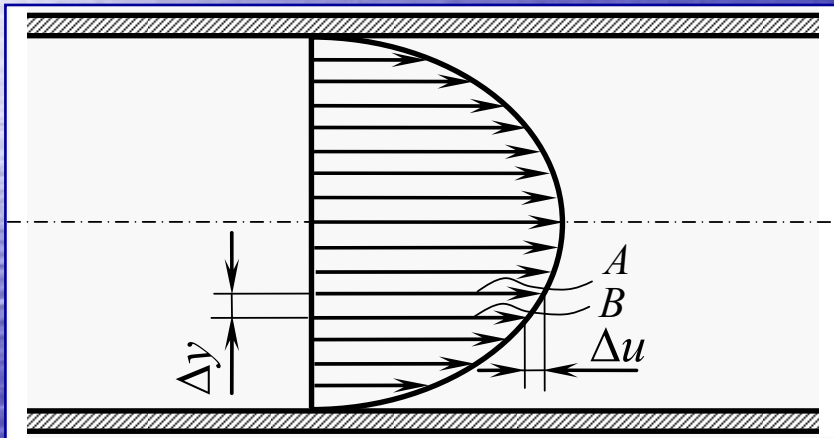
Молекулы жидкости, находящиеся у поверхности контакта с другой жидкостью, газом или твердым телом имеют другую энергию, чем молекулы, находящиеся внутри объема жидкости. Эта энергия пропорциональна площади поверхности раздела S и характеризуется величиной **коэффициента поверхностного натяжения σ** , который зависит от материала соприкасающихся сред, чистоты поверхности и температуры.

На поверхности раздела трех фаз: **твердой стенки, жидкости и газа** образуется **краевой угол θ** . Величина угла зависит только от природы соприкасающихся сред, и не зависит от формы сосуда и силы тяжести. Чем хуже смачивающая способность, тем больше краевой угол. От явления смачивания зависит поведение жидкости в тонких (капиллярных) трубках, погруженных в жидкость. При плохом смачивании жидкость в трубке поднимается над уровнем свободной поверхности, при хорошем – опускается.

Влияние сил поверхностного натяжения приходится учитывать при работе с жидкостными приборами для измерения давления, при истечении жидкости из малых отверстий, при фильтрации, в других случаях, когда силы, действующие в жидкости меньше сил капиллярного натяжения.

Вязкость жидкости

Вязкость – свойство жидкостей оказывать сопротивление сдвигу соседних слоев при движении жидкости. Все реальные жидкости обладают вязкостью, которая проявляется в виде внутреннего трения при относительном перемещении смежных частей жидкости. Свойство, обратное вязкости – **текучесть**. Текучесть характеризует степень подвижности частиц жидкости.



Согласно **гипотезе Ньютона**, касательное напряжение, возникающее при движении жидкости пропорционально скорости деформации объема жидкости

$$\tau = \mu \frac{du}{dy},$$

где μ – коэффициент пропорциональности или **динамический коэффициент вязкости**.

Единица измерения динамического коэффициента вязкости – **Пуаз (П)**:

$$1\text{ П} = 0,1 \text{ Па}\cdot\text{с} = 0,0102 \text{ (кг}\cdot\text{с)/м}^2$$

Вязкость жидкости

За единицу вязкости принимают в системе СГС – **пуаз** (в честь французского ученого **Пуазейля**)

$$1 \text{ пуаз} = 1 \frac{\text{дина} \cdot \text{с}}{\text{см}^2} = 1 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}} = 0,1 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = 0,0102 \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}.$$

Коэффициент кинематической вязкости ν , который равен отношению динамического коэффициента вязкости к плотности ρ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Единицей измерения кинематического коэффициента вязкости является **стокс** (в честь английского ученого **Дж. Стокса**) (в системе СГС):

$$1 \text{ стокс} = 1 \frac{\text{пуаз}}{\text{г/см}^3} = 1 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}.$$

Вязкость жидкости

- Сотая доля стокса называется сантистоксом.
- Сотая доля пуаза называется сантипуазом.
- Сотая доля метра называется сантиметром.
- Учитывая, что $1 \text{ кг} = 981000 \text{ дин}$, а $1 \text{ м}^2 = 10000 \text{ см}^2$, легко установить связь между числами, выражающими вязкость в технической и физической системах единиц:

$$\mu \frac{\text{дин} \cdot \text{с}}{\text{см}^2} = 98,1 \left(\mu \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right);$$

$$\nu \text{ см}^2 / \text{с} = 10000 \left(\text{м}^2 / \text{с} \right).$$

Вязкость жидкости. Закон вязкого трения Ньютона.
Динамический и кинематический коэффициенты
вязкости. Измерение вязкости вискозиметром Энглера.
Градусы Энглера.

- Зависимость вязкости от давления может быть оценена следующей формулой:

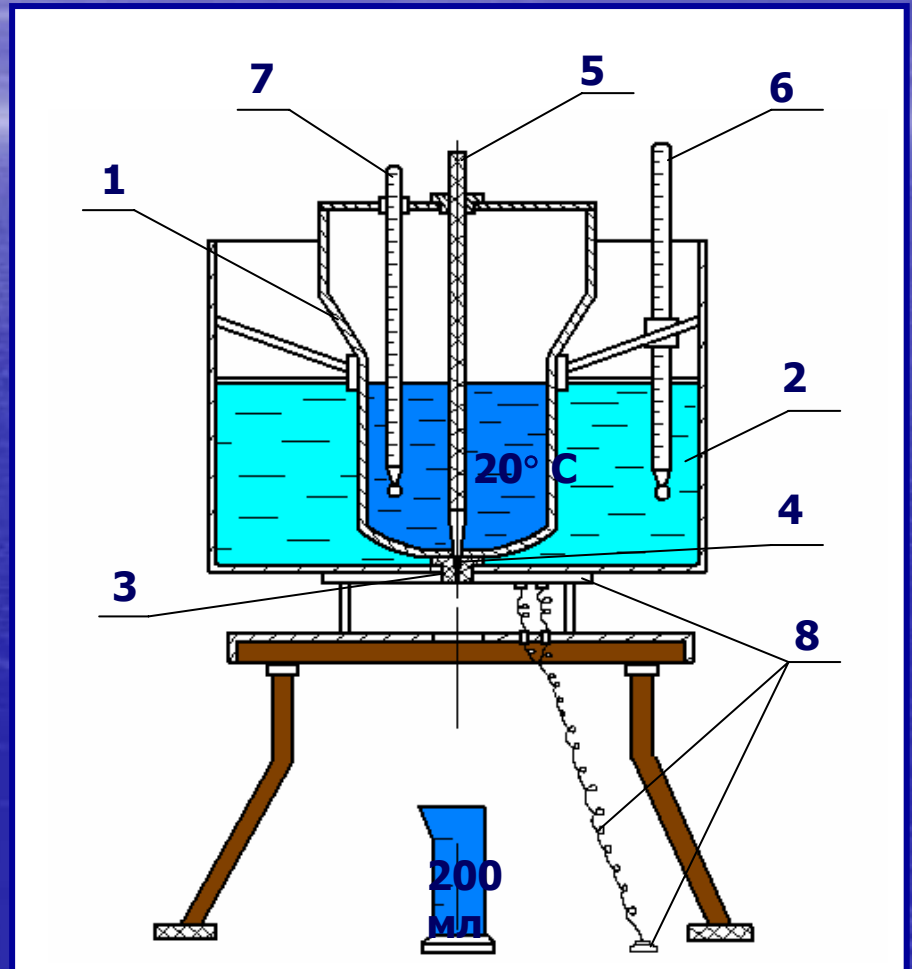
$$\mu = \mu_0 \cdot e^{a(p-p_0)}$$

где μ и μ_0 — значения вязкости при давлениях p и p_0 в кг/см²;
 a — коэффициент, значение которого для минеральных масел меняется в пределах 0,002÷0,003 (нижний предел соответствует высоким температурам, а верхний — низким).

Вязкость жидкости

Вискозиметр Энглера

- 1 - металлический (латунный) цилиндра;
- 2 - водная ванна;
- 3 - латунная; цилиндрическая трубка;
- 4 - коническая платиновая трубочка;
- 5 - специальным стержень;
- 6 и 7 - термометры;
- 8 - электронагреватель



Идеальная жидкость

- С целью облегчить и упростить ряд теоретических выводов и исследований в гидравлике иногда пользуются понятием **идеальной**, или **совершенной жидкости**, которая обладает абсолютной несжимаемостью, полным отсутствием температурного расширения и не оказывает сопротивления растягивающим и сдвигающим усилиям.
- идеальная жидкость отличается от жидкости реальной, наличием у последней сил сопротивления сдвигу, определяемых особым свойством жидкости — **ВЯЗКОСТЬЮ**.

Под **идеальной жидкостью** подразумевают такую воображаемую жидкость, которой присущи:

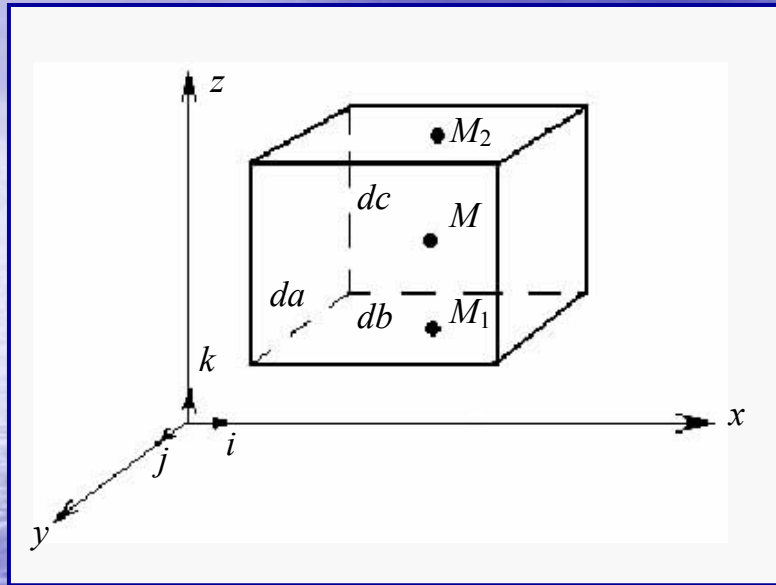
- а) абсолютная несжимаемость;*
- б) абсолютное несопротивление разрыву;*
- в) абсолютная текучесть или полное отсутствие ВЯЗКОСТИ.*

ГИДРАВЛИКА

**Основы гидростатики,
динамики и кинематики
жидкости**

Тема 1. Равновесие жидкости

Дифференциальное уравнение равновесия жидкости. Поверхность равного давления



Для результирующей силы сторон объема dV , параллельных плоскости xOy можно записать

$$\overrightarrow{dF_z} \vec{k} = (p_1 - p_2) da db$$

$\overrightarrow{dF_z}$ параллельна оси Oz .

Разность $(p_1 - p_2)$ можно записать в виде $p_1 - p_2 = (p_1 - p) - (p_2 - p)$, но в соответствии со свойством градиента давления можно написать

$$(p_1 - p) = \overrightarrow{grad p_M} \overrightarrow{MM_1}, \quad (p_2 - p) = \overrightarrow{grad p_M} \overrightarrow{MM_2}$$

Откуда

$$(p_1 - p_2) = \overrightarrow{grad p_M} (\overrightarrow{MM_1} - \overrightarrow{MM_2})$$

Так как

$$(\overrightarrow{MM_1} - \overrightarrow{MM_2}) = \overrightarrow{M_2M} + \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{M_2M_1} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{M_2M_1} = (-\vec{k}) dc, \quad \text{то}$$

$$(p_1 - p_2) = \overrightarrow{grad p_M} (-\vec{k}) dc$$

Дифференциальное уравнение равновесия жидкости. Поверхность равного давления

Таким образом, результирующая сила $\overrightarrow{dF_z} \vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}} p_M (-\vec{k}) dcdadb$ по

$dcdadb = dV$, откуда $\overrightarrow{dF_z} \vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}} p_M (-\vec{k}) dV.$

Аналогично для сил $\overrightarrow{dF_x}$ и $\overrightarrow{dF_y}$.

Результирующая всех сил, действующих на объем dV будет

соответстве $\overrightarrow{dF} \vec{k} = -\overrightarrow{\text{grad}} p_M dV.$

Выводы:

1. Результирующая сила $\overrightarrow{dF}$ направлена в противоположную сторону, чем $\overrightarrow{\text{grad}} p_M$
2. $\overrightarrow{dF}$ перпендикулярна плоскости, проходящей через точку M , на которой давления одинаковы и ориентирована в сторону уменьшения давления.

Дифференциальное уравнение равновесия жидкости. Поверхность равного давления

В жидкости, находящейся в покое, действуют:

- сила тяжести $dm\vec{g} = \rho dV\vec{g}$, направленная вертикально вниз;
- равнодействующая сила давления $\vec{\text{grad}} p = \rho\vec{g}$

Выводы:

1. Вектор градиента давления направлен вертикально вниз, как и вектор $\vec{g}$.
2. В жидкости, находящейся в равновесии давление увеличивается сверху вниз.
3. В покоящейся жидкости плоскости равного давления горизонтальны.
4. В покоящейся жидкости давление в точке зависит только от ординаты z .

Т.к. $dp = \vec{\text{grad}} p \overrightarrow{MM_1}$, то с учетом полученного уравнения, можно записать

$$dp = \rho g \overrightarrow{MM_1}$$

Т.к. $\vec{g} = -\vec{k}g$ и $\overrightarrow{MM_1} = \vec{k}g$, то $dp = -\rho g dz$.

Нами получено **основное уравнение гидростатики в дифференциальной форме.**

Основное уравнение гидростатики

В случае несжимаемой жидкости плотность жидкости не зависит от давления, а если принять температуру постоянной, то можно записать $\rho = \text{const}$.

Разность давлений между двумя точками:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$$

или

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 = \text{const}$$

Нами получено **основное уравнение гидростатики в поле силы тяжести.**

Если принять $z_1 - z_2 = h$, то $p_2 - p_1 = \rho g h$.

Выводы:

1. В покоящейся жидкости давление увеличивается с увеличением глубины.
2. В покоящейся жидкости любая горизонтальная плоскость представляет собой поверхность, на которой в любой точке давление будет неизменным. Такая поверхность называется **поверхностью равного давления.**

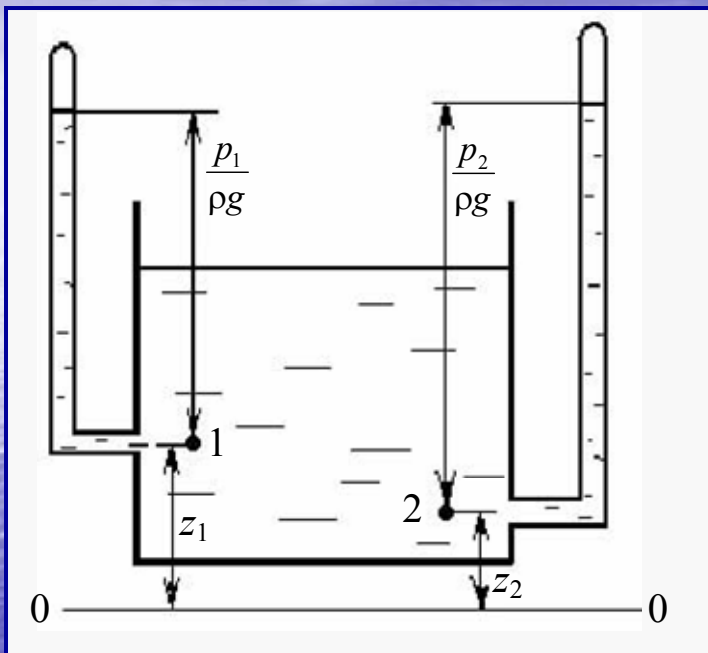
Три формы записи основного уравнения гидростатики

Основное уравнение гидростатики в форме давлений

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 = const$$

Основное уравнение гидростатики в форме напоров

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = const$$



где $\frac{p_1}{\rho g}$ и $\frac{p_2}{\rho g}$ – пьезометрические напоры;
 z_1 и z_2 – геометрические напоры.

Основное уравнение гидростатики в форме удельной энергии

$$\frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + g z_2 = const$$

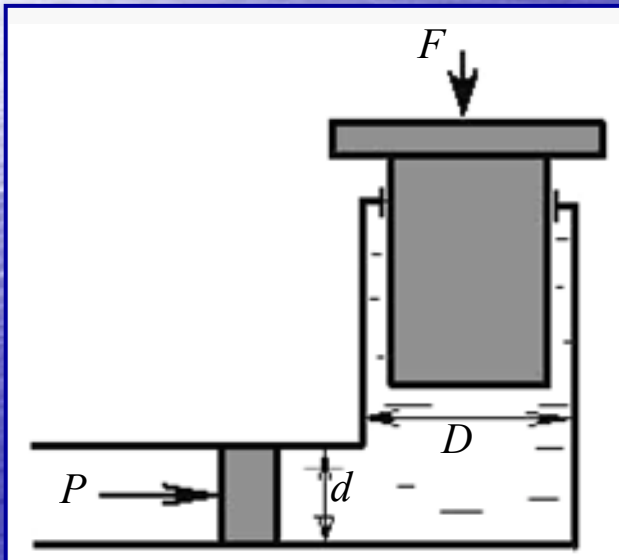
где $\frac{p_1}{\rho}$ и $\frac{p_2}{\rho}$ – удельная энергия давления; $g z_1$ и $g z_2$ – удельная энергия положения.

Закон Паскаля

$$p_1 = p_0 + \rho gh$$

где p_0 – давление на свободной поверхности; h – глубина, на которой находится точка 1.

Из этого уравнения следует, что **изменение давления на свободной поверхности на величину приведет к увеличению давления в точке на ту же величину. Этот вывод и есть закон Паскаля.**



Выводы:

1. Сила P будет больше силы F во столько же раз, во сколько площадь S больше площади s .
2. В отличие от твердых тел жидкость передает не силу, а давление.

Закон Паскаля используется в гидропрессах и гидроусилителях. При воздействии на

малый поршень площадью $s = \frac{\pi d^2}{4}$ с силой F создается давление $p = \frac{F}{s}$. Согласно закона

Паскаля это давление передается во все точки жидкости и поршень площадью S

создает усилие $P = \frac{F}{s} S = \frac{4F}{\pi d^2} \times \frac{\pi D^2}{4} = F \frac{D^2}{d^2}$.

Абсолютное, манометрическое и вакуумметрическое давление

Давление можно измерить двумя способами:

- 1) если принять за начало отсчета атмосферное давление;
- 2) если принять за начало отсчета абсолютный вакуум, когда давление в объеме отсутствует.

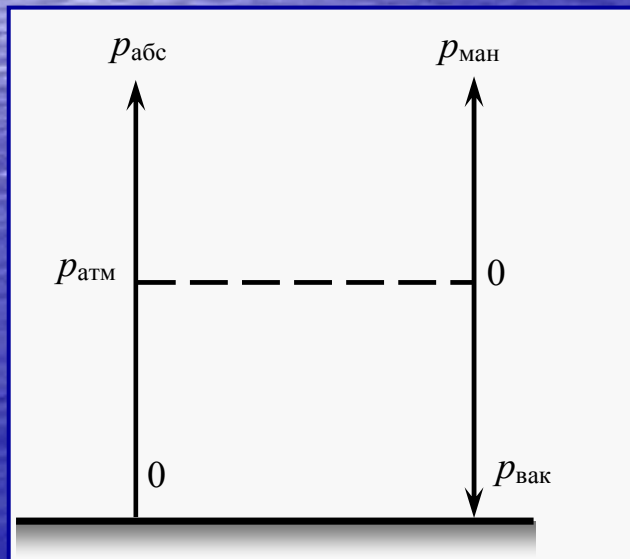
В первом случае давление называется **избыточным** или **манометрическим**, во втором — **абсолютным**.

Избыточное давление в точке

$$p_1 = \rho gh$$

Абсолютное давление для этой точки

$$p_1 = p_0 + \rho gh$$

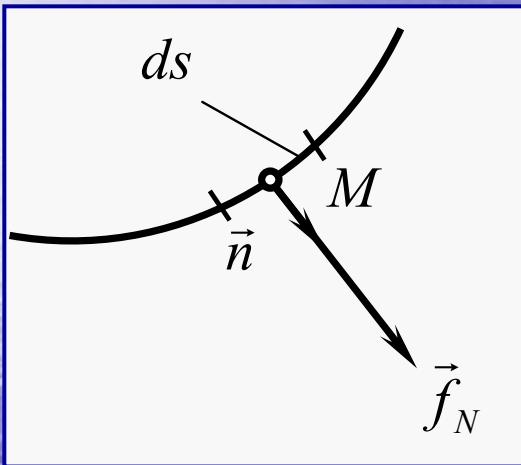


В общем случае абсолютное давление может быть больше или меньше атмосферного, если

$p_{\text{абс}} < p_{\text{атм}}$, то разность между атмосферным давлением и абсолютным называется **вакуумом**

$$p_{\text{вак}} = p_{\text{атм}} - p_{\text{абс}}.$$

Сила давления на плоские и криволинейные поверхности



1. Сила давления на отдельный элемент поверхности.

Сила давления на площадку ds будет равна

$$\overrightarrow{df_N} = p_M ds \vec{n}$$

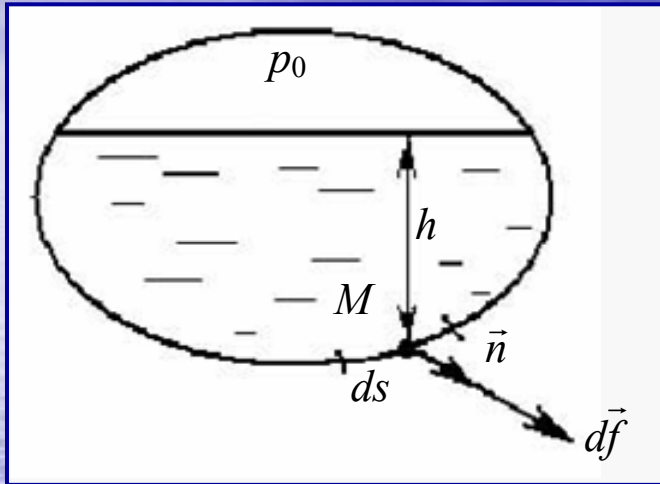
где $\vec{n}$ – единичный вектор, ориентированный по нормали к площадке ds .

Сила давления на элемент стенки ds

$$\overrightarrow{df} = (p_0 + \rho gh) ds \vec{n}$$

Сила давления на плоские и криволинейные поверхности

2. Результирующая сила давления на стенку.



Весь резервуар испытывает воздействие двух результирующих сил:

1. Результирующей сил давления

$$\vec{P} = \sum d\vec{f}$$

2. Реакции материала стенки резервуара

$$\vec{R} = \sum d\vec{f}_R$$

$$\vec{P} + \vec{R} = 0$$

$$\vec{P} = -\vec{R}$$

Сама жидкость в резервуаре находится в равновесии под воздействием двух сил:

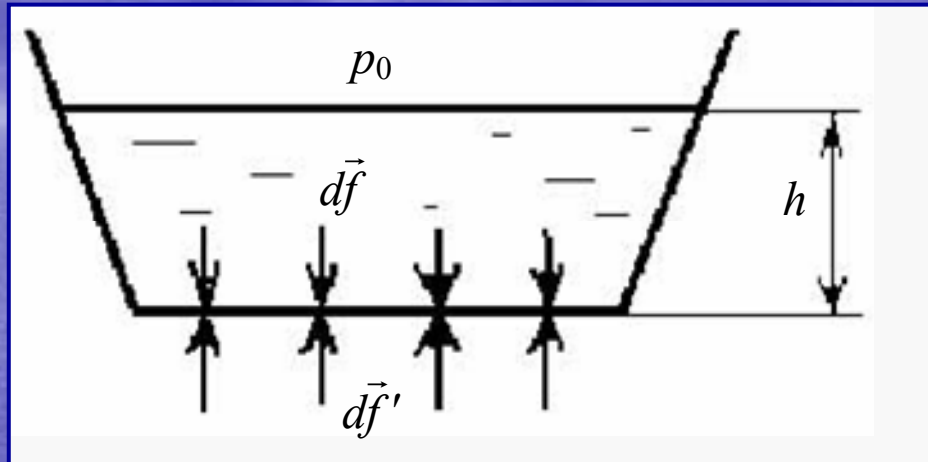
- силы реакции материала стенки R ;
- силы тяжести, направленной вертикально вниз G

$$\vec{R} = -\vec{G}$$

$$\vec{P} = \vec{G}$$

Сила давления на плоские и криволинейные поверхности

3. Сила давления жидкости на дно резервуара.



Так как дно резервуара плоское и горизонтальное, то каждый элемент поверхности дна будет испытывать давление

$$p = p_0 + \rho gh$$

и на него воздействует элементарная сила давления со стороны жидкости

$$\overrightarrow{df} = p \, ds \vec{n}$$

и сила давления со стороны наружного воздуха

$$\overrightarrow{df}' = p_0 \, ds \vec{n}'$$

Сила давления на плоские и криволинейные поверхности

Все элементарные силы

$$\vec{df}_1 \quad \vec{df}'$$

параллельны между собой.

Равнодействующая сила давления воды

$$\vec{P}_1 = \sum \vec{df} = \int_S p \, ds \vec{n}$$

Так как $p = \text{const}$

$$\vec{P} = pS\vec{n} = (p_0 + \rho gh)S\vec{n}$$

Аналогично равнодействующая сила давления воздуха

$$\vec{P}_0 = p_0 S \vec{n}'$$

Эти две силы вертикальны и действуют в разных направлениях.

Результирующая сила давления на дно резервуара

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_0$$

или

$$P = P_1 + P_0$$

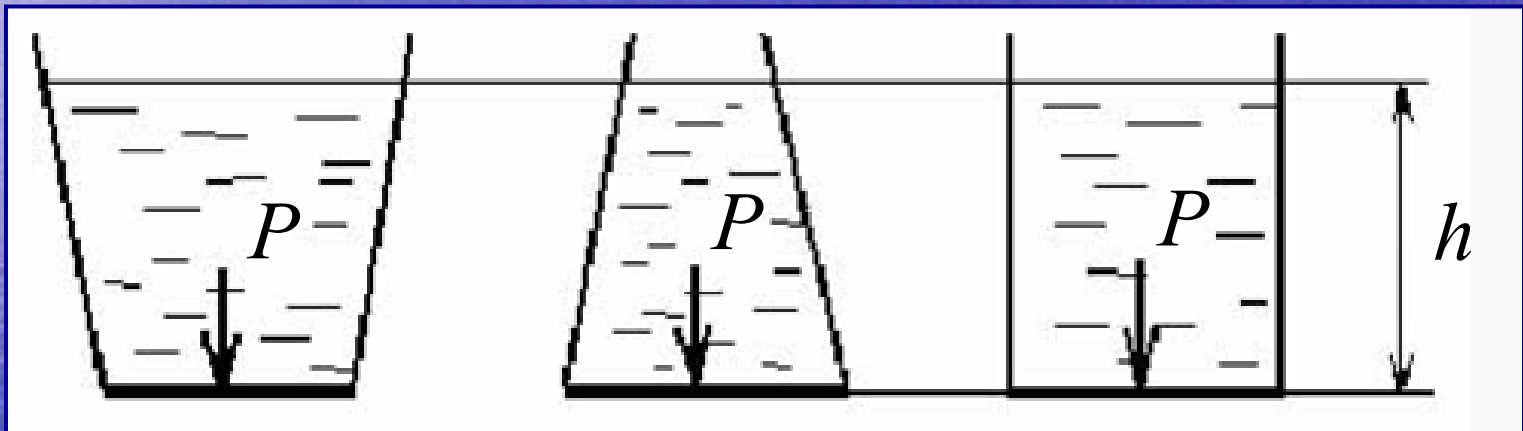
или

$$P = \rho ghS$$

Сила P – вертикальная, направлена вниз и приложена по центру дна резервуара (из соображения симметрии).

Сила давления на плоские и криволинейные поверхности

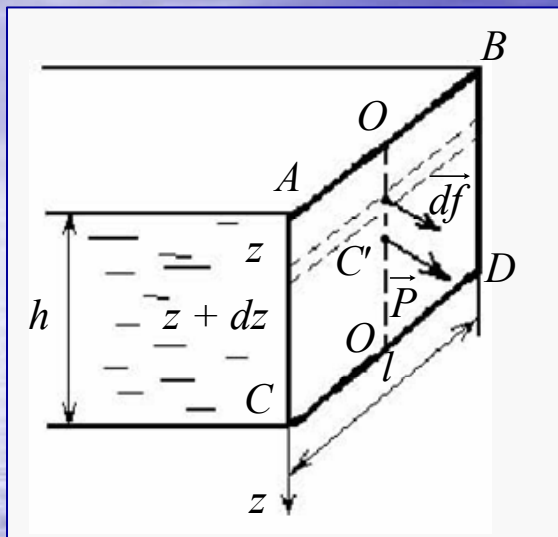
Гидростатический парадокс. Независимо от формы резервуара сила давления на дно зависит только от площади S , глубины заполнения h и плотности ρ и не зависит от количества жидкости, находящейся в резервуаре.



Опыт Паскаля. Резервуар рассчитан на определенное давление жидкости. В него добавляют небольшое количество воды. Ничего не происходит. Вставляют тонкую трубочку и добавляют гораздо меньшее количество воды – резервуар разрушается.

Сила давления на плоские и криволинейные поверхности

4. Сила давления на вертикальную прямоугольную стенку.



Элемент испытывает давление

$$\vec{d\vec{f}} = p ds \vec{n}$$

Давление на глубине z :

$$p = \rho g z.$$

Площадь $ds = l dz$. Тогда

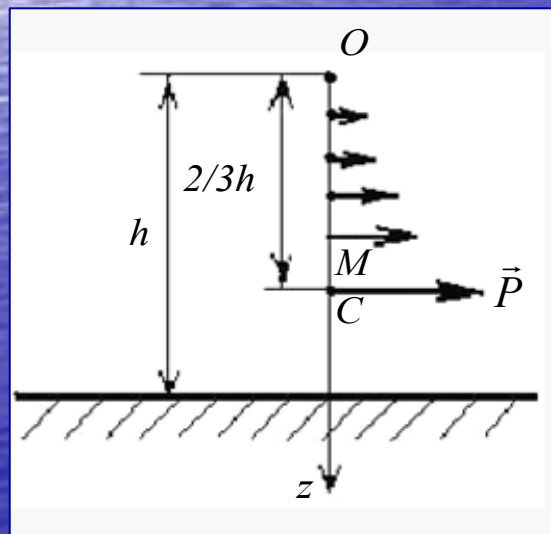
$$\vec{d\vec{f}} = \rho g z dz l \vec{n}$$

Сила давления

$$\vec{P} = \int_{z=0}^{z=h} \rho g z l dz \vec{n}$$

$$P = \frac{\rho g l h^2}{2}$$

$$P = \rho g S \frac{h}{2}$$



Определим точку приложения силы P .

Для $\vec{P}$ момент силы $M_O(\vec{P}) = P \times OC$

Для силы $d\vec{f}$, приложенной в точке M на глубине z :

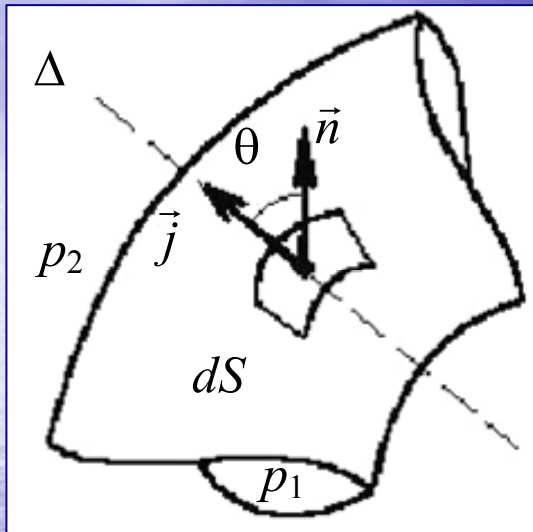
$$M_O(d\vec{f}) = df \times OM, \text{ где } OM = z.$$

$$\text{Таким образом } P \times OC = \int_{z=0}^{z=h} \rho g l z^2 dz$$

$$P \times OC = \frac{\rho g l h^2}{3} \text{ или } \frac{\rho g l h^2}{2} \times OC = \frac{\rho g l h^2}{3}, \text{ откуда } OC = \frac{2}{3} h$$

Сила давления на плоские и криволинейные поверхности

5. Сила давления на криволинейную поверхность.



Каждый элемент поверхности площадью ds испытывает воздействие силы давления с внешней стороны

$$\vec{df}_1 = p_1 ds \vec{n}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к ds , ориентированный в сторону внешней жидкости.

Равнодействующая от суммы всех элементарных сил, действующих на поверхность изнутри $\vec{P}_1 = \sum \vec{df}_1$

$$\vec{P}_1 = p_1 \int_S ds \vec{n}.$$

Проекция силы $\vec{P}_1$, по направлению единичного вектора $\vec{j}$ будет

$$\vec{P}_1 \vec{j} = p_1 \int_S \vec{n} \vec{j} ds$$

Сила давления на плоские и криволинейные поверхности

5. Сила давления на криволинейную поверхность (продолжение).

Если θ – угол между направлением Δ и нормалью к поверхности ds , то

$\vec{n} \vec{j} = \cos \theta$, тогда

$$\vec{P}_1 \vec{j} = p_1 \int_S ds \times \cos \theta$$

В то же время $ds \times \cos \theta = ds'$, тогда $\vec{P}_1 \vec{j} = p_1 \int_S ds'$, или $\vec{P}_1 \vec{j} = p_1 dS'$

где dS' – проекция поверхности S на поверхность, перпендикулярную выбранному направлению Δ .

Таким образом, можно записать $\vec{P}_1 \vec{j} = P_1$, как произведение двух векторов и

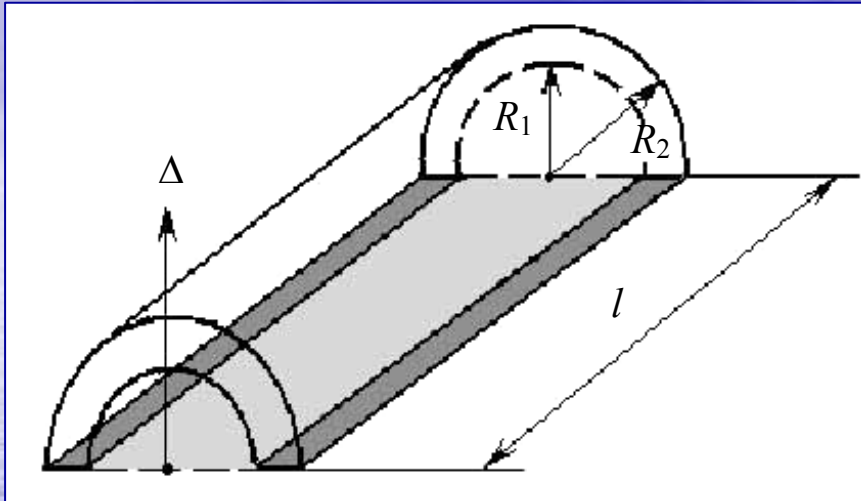
$$P_1 = p_1 dS'$$

Такой же результат мы получим для равнодействующей силы P_2

$$P_2 = p_2 dS'$$

Сила давления на плоские и криволинейные поверхности

6. Сила давления на цилиндрическую поверхность.



Равнодействующая сил
внутреннего давления

$$P_1 = p_1 dS'$$

где S' – проекция поверхности S на плоскость, перпендикулярную направлению Δ . Поверхность S' является прямоугольником, площадь которого $2R_1 l$, тогда

$$P_1 = p_1 2R_1 l$$

Аналогичный результат можно получить для силы внешнего давления

$$P_2 = p_2 2R_2 l$$

Для второй части трубы мы получим тот же результат.

Величина, характеризующая способность материала сопротивляться его разрыву обозначается σ . Сила сопротивления материала

$$F = \sigma S_{\text{сопр}}$$

где $S_{\text{сопр}}$ – площадь сопротивления.

Сила давления на плоские и криволинейные поверхности

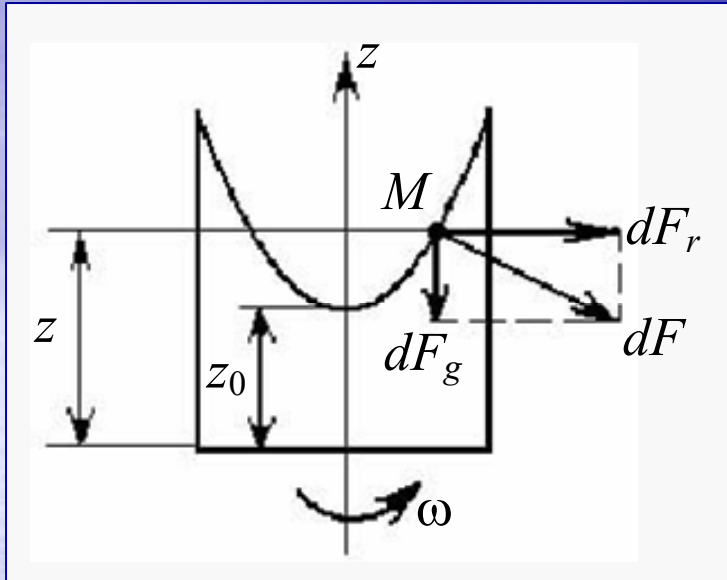
6. Сила давления на цилиндрическую поверхность (продолжение).

Таким образом, разрыв произойдет в случае, если $P_1 - P_2 \geq F$, или $p_1 2R_1 l - p_2 2R_2 l \geq \sigma S_{\text{сопр}}$, или $p_1 2R_1 l - p_2 2(R_1 + e)l \geq \sigma S_{\text{сопр}}$, или $p_1 2R_1 l - p_2 2R_1 l - p_2 2el \geq \sigma 2el$, или $p_1 R_1 - p_2 R_1 \geq \sigma e + p_2 e$, откуда следует, что при

$$e \leq \frac{R_1(p_1 - p_2)}{\sigma + p_2}$$

произойдет разрыв трубы.

Относительный покой жидкости



Относительным покоем жидкости называется такое ее состояние, при котором каждая ее частица сохраняет свое положение относительно твердой стенки движущегося резервуара, в котором находится жидкость

Разложим массовую силу dF на две составляющие:

горизонтальную $dF_r = dm\omega^2 r$ и вертикальную $dF_g = -dmg$

Разделив действующие силы на dm , получим дифференциальное уравнение поверхности уровня

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0 \quad \text{или} \quad \omega^2 r dr - g dz = 0$$

Проинтегрировав, получаем

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = \text{const}$$

Вывод: При вращении резервуара с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси поверхностями равного давления будет семейство параболоидов вращения.

Относительный покой жидкости

Для точки M , находящейся на свободной поверхности жидкости

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

Закон распределения давления найдем из дифференциального уравнения гидростатики, которое в данном случае примет вид

$$dp = \rho(\omega^2 r dr - g dz)$$

С учетом граничных условий $(r = 0, z = z_0, p = p_0)$

$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + \rho g(z_0 - z)$$

Если представить, что

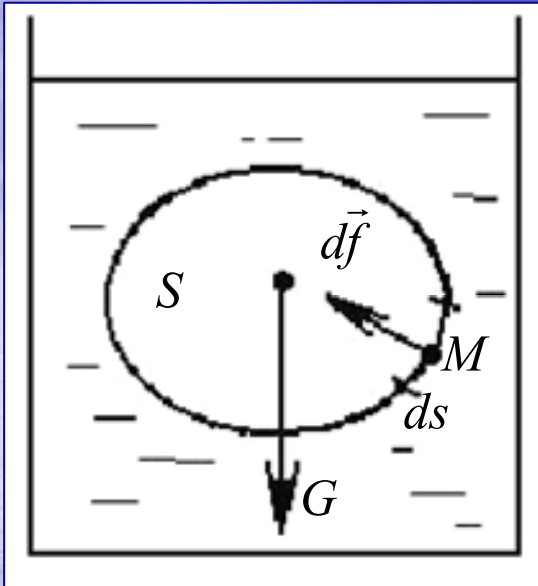
$$p_0^i = p_0 + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

то получим уравнение

$$p = p_0^i + \rho g(z_0 - z)$$

Вывод: Распределение давления подчиняется линейному закону для любой фиксированной цилиндрической поверхности.

Закон Архимеда



1. Равновесие твердого тела в жидкости.

На тело, находящееся в жидкости действуют:

- 1) сила тяжести;
- 2) сила давления воды.

На каждый элемент поверхности площадью ds действует сила

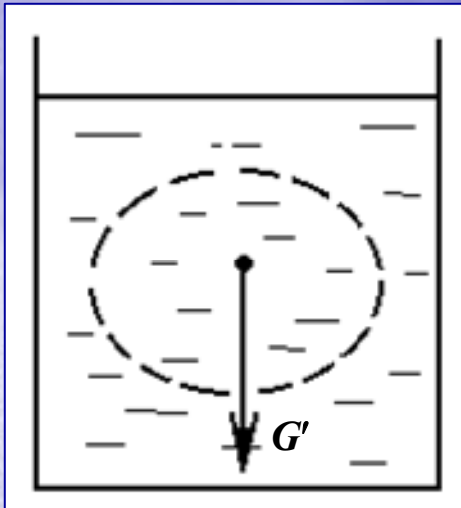
$$d\vec{f} = p\vec{n}ds$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали внутрь тела.

Давление p зависит только от положения точки M , соответственно, каждая элементарная сила $d\vec{f}$ будет зависеть от расположения элемента и от его формы. Таким образом, равнодействующая сил $d\vec{f}$ будет зависеть только от места нахождения тела в жидкости и от величины внешней поверхности тела S .

Закон Архимеда

2. Равновесие жидкости.



Жидкость, находящаяся внутри этого контура находится в равновесии под действием:

- 1) **собственного веса G' .**
- 2) **резльтирующей силы внешнего давления воды P .**

Равновесие жидкости, находящейся внутри контура S можно записать в следующем виде:

$$G + P = 0 \text{ или } G = -P.$$

Для тела плавающего в жидкости

$$P_A = G' = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{т}}$$

где P_A сила, действующая на погруженное в жидкость тело;

$\rho_{\text{ж}}$ плотность жидкости;

$V_{\text{т}}$ объем тела.

Закон Архимеда

Закон Архимеда: На твердое тело, погруженное в покоящуюся жидкость, действует сила гидростатического давления, равная весу жидкости в объеме тела, направленная вертикально вверх и проходящая через центр тяжести тела.

3. Условия равновесия плавающих тел.

Т.к. вес тела $G = \rho_{\text{т}} g V_{\text{т}}$, а архимедова сила $P_A = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{т}}$, то в случае неравенства плотностей тела жидкости, эти силы будут приложены к различным точкам. Для того чтобы плавающее тело было устойчивым, необходимо, чтобы центр приложения архимедовой силы (центр водоизмещения) находился выше центра приложения силы тяжести.

Основное уравнение гидростатики для сжимаемой жидкости

Дифференциальное уравнение равновесия для среды переменной плотности после интегрирования имеет вид

$$\int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{const.}$$

Для вычисления интеграла необходимо задать закон изменения состояния газа.

Изотермическая атмосфера

Если принять, что температура газа не изменяется с изменением высоты, а уравнение состояния записать в следующем виде

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{p}{C},$$

откуда $C = \frac{p}{\rho}$ – постоянная величина.

Подставив последнее соотношение в предыдущее уравнение, получим

$$C \ln p + gz = \text{const}$$

или

$$gz + \frac{p}{\rho} \ln p = \text{const}.$$

Запишем предыдущее уравнение для двух высот: на поверхности земли, где $z_0 = 0$, давление $p = p_0$, на высоте z давление будет p . Обозначим

$z - z_0 = h$ и $\frac{p_0}{\rho_0 g} = H$, учитывая, что $\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$ получим $h = H \ln \frac{p}{p_0}$, откуда

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{h}{H}}$$

Вывод: Давление уменьшается по высоте по экспоненциальному закону.

Неизотермическая атмосфера

Обычно температура воздуха с увеличением высоты уменьшается. Температура дымовых газов также быстро уменьшается в трубе. Для того, чтобы проинтегрировать основное уравнение гидростатики в этом случае необходимо знать закон изменения температуры с изменением высоты. Чаще всего для атмосферного воздуха принимают, что температура уменьшается по линейному закону

$$a = \frac{T - T_0}{h},$$

где T_0 – температура на поверхности земли; a – градиент температуры.

Можно записать дифференциальное уравнение равновесия в следующем виде

$$\frac{dp}{p} = -g \frac{dz}{R(T_0 - az)},$$

тогда

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{g}{Ra} \ln \frac{T_0 - az}{T_0}$$

или

$$p = p_0 \left(\frac{T_0 - az}{T_0} \right)^{\frac{g}{Ra}}$$

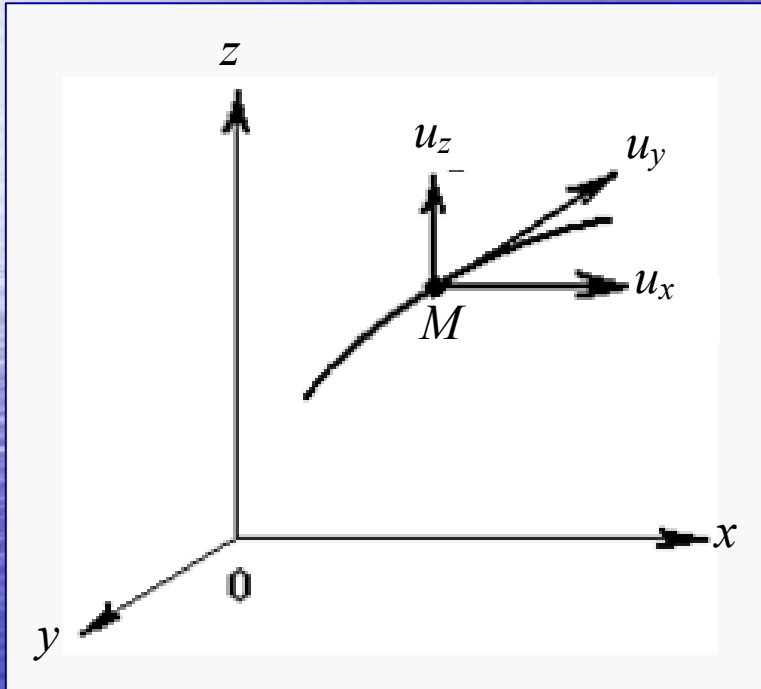
или

$$p = p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{g}{Ra}}.$$

ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Основные понятия кинематики жидкости

Мгновенное значение составляющих скорости вдоль осей координат будет зависеть от положения точки, т.е. от величины координат x , y , z и времени t . Для составляющих скоростей течения жидкости в рассматриваемой точке, можно записать функциональные зависимости:



$$u_x = f_1(x, y, z, t)$$

$$u_y = f_2(x, y, z, t)$$

$$u_z = f_3(x, y, z, t)$$

Зная для конкретного случая течения значения этих функций, можно для любого момента времени получить распределение скоростей течения жидкости.

Расход — количество жидкости, проходящей в единицу времени через данное сечение трубопровода. Различают объемный и массовый расходы.

Основные понятия кинематики жидкости

Объемный расход — объем жидкости, проходящий в единицу времени через данное сечение трубопровода:

$$Q = \frac{V}{t} \left(\frac{\text{м}^3}{\text{с}} \right), \quad \text{где } V - \text{объем жидкости.}$$

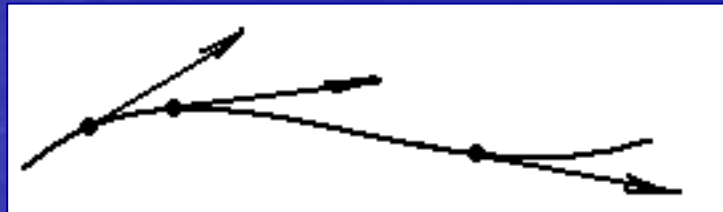
Массовый расход — масса жидкости, проходящая в единицу времени через данное сечение:

$$Q_m = \frac{m}{t} \left(\frac{\text{кг}}{\text{с}} \right)$$

Соответственно, $Q_m = \rho Q$ где ρ — плотность жидкости.

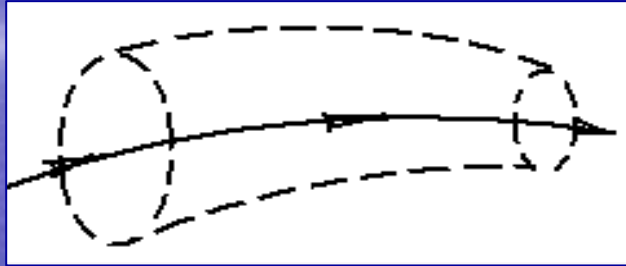
Траектория — кривая, вдоль которой происходит перемещение частицы жидкости.

Линия тока — кривая, в каждой точке которой вектор скорости движения частицы направлен по касательной к ней



Основные понятия кинематики жидкости

Трубка тока — поверхность, очерченная вдоль небольшого контура внутри которой вдоль линии тока перемещаются частицы жидкости. Стенки трубки тока непроницаемы. Площадь поперечного сечения трубки тока мала, поэтому скорости движения в каждой точке равны.



Элементарная струйка — поток жидкости, протекающий в трубке тока. Элементарную струйку можно представить также как совокупность линий тока, проходящих через бесконечно малое сечение ds , а разность скоростей соседних линий тока бесконечно мала. Расход элементарной струйки $dq = uds$. Поток жидкости можно представить как совокупность трубок тока, в которых движутся элементарные струйки.

$$Q = \int_S dq$$

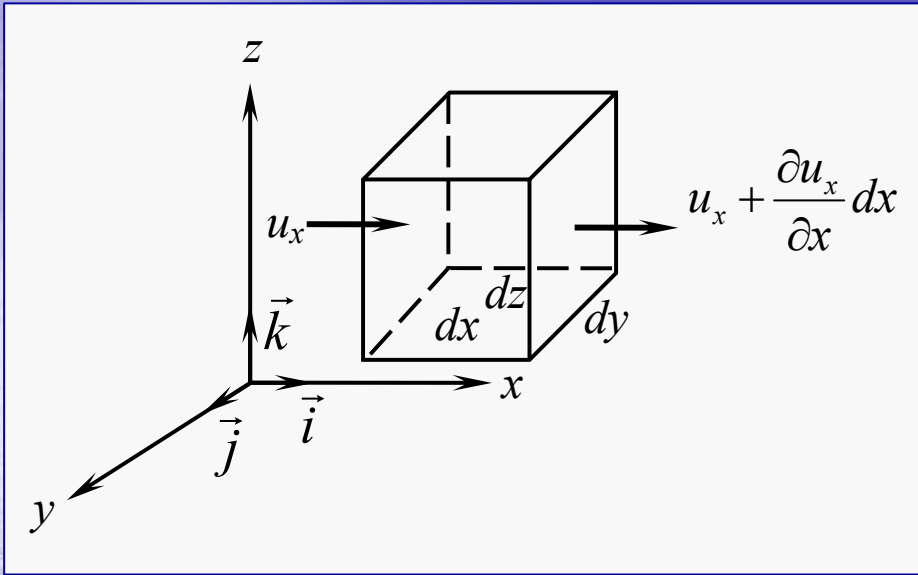
Средняя скорость потока — скорость, одинаковая в каждой точке потока в данном сечении, соответствует реальному расходу

$$v_{cp} = \frac{\sum u_i}{i}$$

$$v_{cp} = \frac{\sum dq}{\sum ds}$$

$$v_{cp} = \frac{Q}{S}$$

Уравнение неразрывности



Поскольку рассматриваемый элементарный объем неподвижен, изменение скорости не зависит от времени. В направлении оси x через левую грань втечет за 1 с жидкость массой,

$$(u_x dydz\rho)$$

а вытекает через правую грань

$$\left[+\rho \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dydz \right]$$

Значит, за 1 с из параллелепипеда вытекает в направление оси x жидкости больше, чем втекает, на

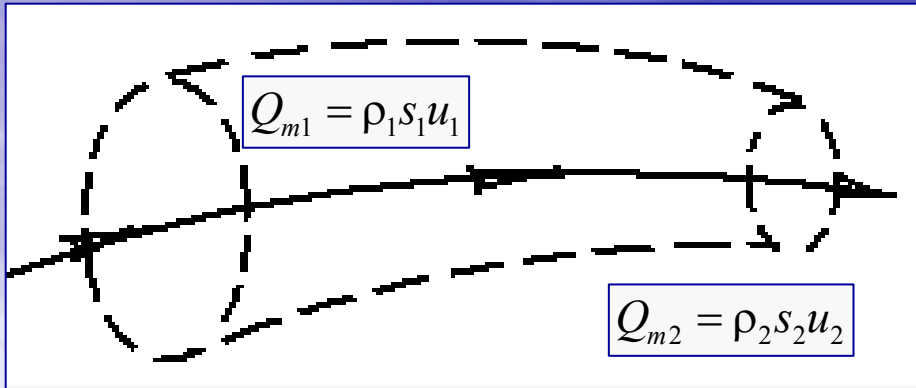
$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} \times dx dy dz.$$

Закон сохранения массы требует, чтобы сумма трех полученных приращений была равна нулю:

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz + \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz + \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz = 0$$

Это уравнение называют **уравнением неразрывности**, т.к. оно предполагает, что жидкость является сплошной средой.

Уравнение неразрывности



В трубке тока масса жидкости, находящаяся между левым и правым сечениями, остается постоянной, следовательно, условие сплошности потока в трубке тока будет:

$$Q_{m1} = Q_{m2} = \text{const}$$

Если плотность жидкости по длине трубки тока не изменяется, то можно записать для левого и правого сечений:

$$s_1 u_1 = s_2 u_2 = \text{const}$$

$$Q_1 = Q_2 = \text{const}$$

Полученное уравнение является **уравнением неразрывности для трубки тока**. Для потока реальной жидкости уравнение неразрывности записывается в следующем виде:

$$S_1 v_{cp1} = S_2 v_{cp2} = \text{const}$$

Можно сделать два важных вывода:

1. При установившемся движении жидкости объемный расход не меняется;
2. При увеличении площади сечения потока жидкости средняя скорость уменьшается, и, наоборот, при уменьшении сечения - скорость увеличивается.

Виды движения жидкости



Установившееся движение жидкости – движение жидкости, при котором все параметры жидкости (давление, температура, скорость и др.) не изменяются по времени.

$$u = f(x, y, z)$$

Для **неустановившегося движения**:

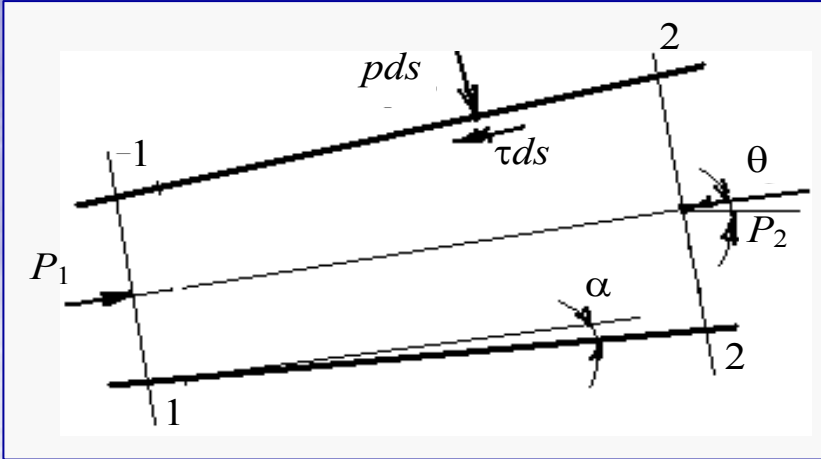
$$u = f(x, y, z, t)$$

Равномерное движение – установившееся движение, при котором скорость по всей длине потока не изменяется:

$$u = const$$

Напорное движение устанавливается в закрытых гидравлических системах, в которых жидкость течет в, основном, под действием силы давления, **безнапорное движение** наблюдается в открытых системах, в которых движение жидкости происходит под действием силы тяжести.

Интегральная формула количества движения



В сечении 1-1 действует сила давления, направленная внутрь выделенного объема жидкости

$$P_1 = p_1 s_1$$

в сечении 2-2 – сила

$$P_2 = p_2 s_2$$

На элементарной площадке стенки канала действуют: сила реакции стенки, равная силе давления pds и сила вязкого трения τds . Проекция этих сил на ось движения равна $pds \sin \alpha + \tau ds \cos \alpha$. Суммарная проекция внешних сил, действующих на изолированную массу жидкости, равна

$$\int_S p \sin \alpha ds + \int_S \tau \cos \alpha ds + p_1 s_1 - p_2 s_2$$

Проекция всех сил, действующих на изолированную массу, равна

$$\int_S p \sin \alpha ds + \int_S \tau \cos \alpha ds + p_1 s_1 - p_2 s_2 - g \rho V \sin \theta.$$

Отношение количества движения, действительно перенесенного потоком, к количеству движения, определенного по средней скорости, называется **коэффициентом Буссинеска**

$$\alpha_0 = \int_S v^2 s / (v_{cp}^2 s)$$

Интегральная формула количества движения

В единицу времени при установившемся движении изменение количества движения составит

$$\rho \left(\alpha_{02} v_{cp2}^2 s_2 - \alpha_{01} v_{cp1}^2 s_1 \right) = \rho Q \left(\alpha_{02} v_{cp2} - \alpha_{01} v_{cp1} \right)$$

где Q – расход жидкости.

Импульс действующих сил должен равняться изменению количества движения массы, на которую данный импульс действует.

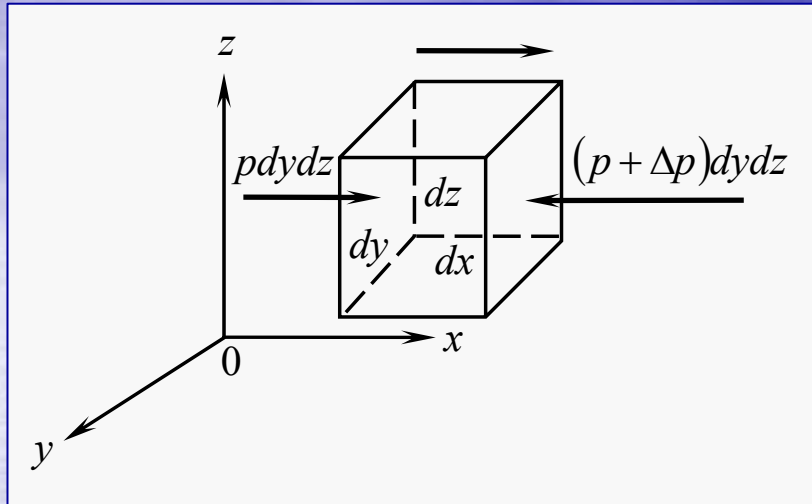
Следовательно, при течении жидкости в канале с учетом принятых условий соблюдается равенство

$$\int_S p \sin \alpha ds + \int_S \tau \cos \alpha ds + p_1 s_1 - p_2 s_2 - g \rho V \sin \theta = \rho Q \alpha_{02} v_{cp2} - \rho Q \alpha_{01} v_{cp1}$$

Нами получено **гидравлическое уравнение количества движения**.

Вывод: При переходе от сечения 1-1 к сечению 2-2 проекция секундного количества движения потока изменяется на величину, равную сумме проекций всех внешних сил, действующих на объем потока, заключенный между сечениями 1-1 и 2-2.

Дифференциальное уравнение движения невязкой жидкости (уравнение Эйлера)



На параллелепипед действуют поверхностные силы давления и массовые силы с проекциями X , Y , Z , отнесенными к единице массы. При движении объема возникают силы инерции. Проекции этих сил на оси координат, отнесенные к единице массы, равны соответственно:

$$-\frac{du_x}{dt}, -\frac{du_y}{dt}, -\frac{du_z}{dt}.$$

Уравнения равновесия будут выглядеть следующим образом

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt}$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt}$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt}$$

Система уравнений Эйлера

Дифференциальное уравнение движения невязкой жидкости (уравнение Эйлера)

Можно получить полный дифференциал уравнений Эйлера для установившегося движения, если рассматривать перемещение частиц жидкости вдоль линии тока. Для этого надо умножить каждое из уравнений системы на соответствующую проекцию элементарного перемещения частиц dx, dy, dz , и сложить их:

$$(Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) - \left(\frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz \right) = 0.$$

Т.к. для установившегося течения линии тока совпадают с траекториями движения частиц, то

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \frac{dy}{dt} = u_y, \frac{dz}{dt} = u_z.$$

Тогда

$$\frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz = u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} du^2$$

Для установившегося движения давление зависит только от координат, поэтому второй член уравнения есть полный дифференциал давления dp . Получим

$$(Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho} dp - \frac{1}{2} du^2 = 0$$

Мы получили *дифференциальное уравнение движения невязкой жидкости*.

Дифференциальное уравнение движения невязкой жидкости (уравнение Эйлера)

В поле силы тяжести

$$X = 0, Y = 0, Z = -g,$$

тогда уравнение запишется в следующем виде

$$-gdz - \frac{dp}{\rho} - \frac{du^2}{2} = 0.$$

После интегрирования этого уравнения получаем (при $\rho = \text{const}$) уравнение

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const},$$

которое называется *уравнением Бернулли для струйки невязкой жидкости*.

Общее уравнение энергии в интегральной форме (Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости)

Для двух сечений струйки невязкой жидкости это уравнение будет выглядеть следующим образом

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2}$$

Сумма слева представляет полную удельную энергию струйки в сечении 1-1, сумма справа – полную удельную энергию струйки в сечении 2-2. Можно записать, что

$$E_1 = E_2$$

В процессе движения вязкой жидкости запас ее механической энергии уменьшается, и на самом деле

$$E_1 > E_2$$

Обозначим энергию, затрачиваемую на преодоление сил сопротивления $E_{пот}$

$$E_1 = E_2 + E_{пот}$$

Мощность потока складывается из энергии отдельных струек

где N – мощность потока; dN – мощность струйки.

$$N = \int_S dN$$

$$dN = E dQ_m = \left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u dS$$

Общее уравнение энергии в интегральной форме (Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости)

Величина удельной энергии потока равна частному от деления мощности потока на массовый расход

$$E = \frac{\int_s \left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u ds}{Q_m}$$

Это уравнение можно разбить на два интеграла

$$E = E_{\Pi} + E_{\text{кин}} = \frac{\int_s \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho u ds}{Q_m} + \frac{\int_s \left(\frac{u^2}{2} \right) \rho u ds}{Q_m}$$

где E_{Π} – удельная потенциальная энергия потока относительно выбранной плоскости сравнения;

$E_{\text{кин}}$ – удельная кинетическая энергия потока.

$$E_{\Pi} = \frac{\rho \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) \int_s u ds}{Q_m} = \frac{\left(gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho Q}{Q_m} = gz + \frac{p}{\rho}$$

Общее уравнение энергии в интегральной форме (Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости)

Умножим и поделим это выражение на $v_{cp}^3 S$

$$\frac{\int_S \left(\frac{u^2}{2} \right) \rho u ds}{Q_m} \frac{v_{cp}^3 S}{v_{cp}^3 S} = \frac{v_{cp}^2}{2} \rho v_{cp} S \frac{\int_S \frac{u^3}{2} ds}{v_{cp}^3 S Q_m} = \frac{v_{cp}^2}{2} \frac{Q_m}{Q_m} \alpha$$

где α — коэффициент, который учитывает неравномерность распределения скоростей в сечении, *называется коэффициент Кориолиса*.

$$E_{кин} = \alpha \frac{v_{cp}^2}{2}$$

Запишем **уравнение Бернулли для двух сечений потока реальной жидкости**

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 v_{2cp}^2}{2} + E_{ном}$$

Выводы:

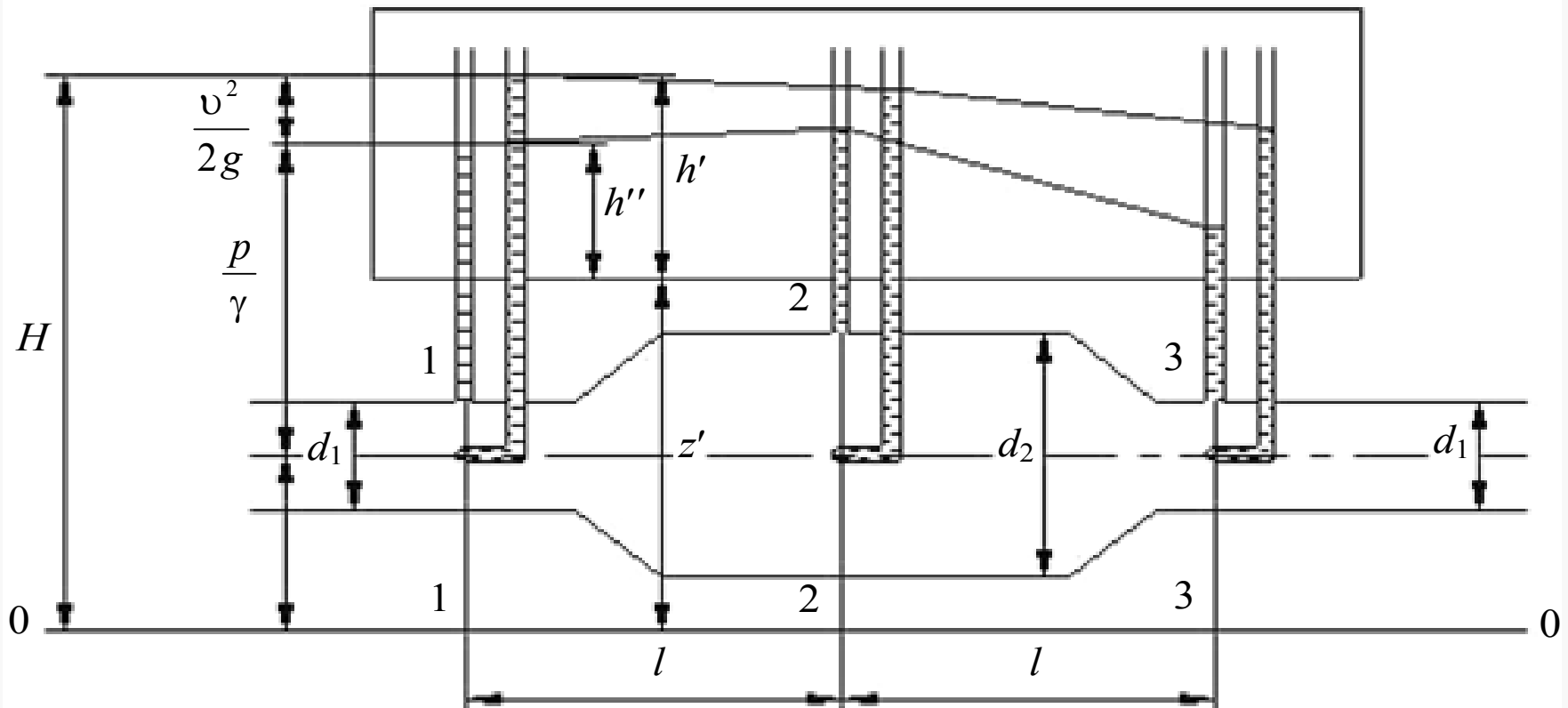
1. При увеличении кинетической энергии потока от одного сечения к другому потенциальная энергия уменьшается, и, наоборот, с увеличением потенциальной энергии, кинетическая уменьшается.
2. Коэффициент α тем больше, чем больше скорости отдельных струек отличаются от величины средней скорости. Если скорости всех элементарных струек будут равны средней скорости, то $\alpha = 1$.

Три формы представления уравнения Бернулли для потока реальной жидкости

Уравнение Бернулли в форме напоров можно получить, если разделить уравнение в форме удельной энергии на g , обозначив

$$\frac{E_{nom}}{g} = h_w$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_{2cp}^2}{2g} + h_w$$



Три формы представления уравнения Бернулли для потока реальной жидкости

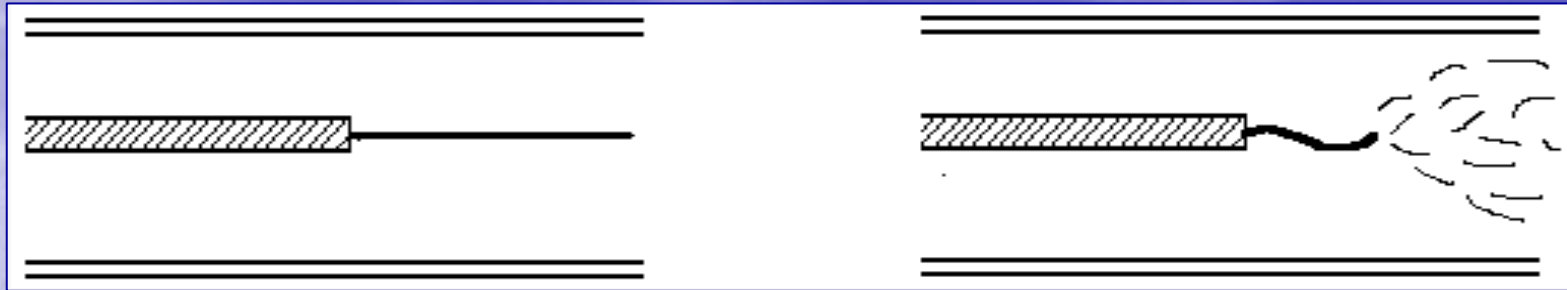
Уравнение Бернулли в форме давлений получаем, если уравнение Бернулли в форме удельной энергии умножим на плотность ρ .

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{\alpha_1 v_{1\text{cp}}^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \rho \frac{\alpha_1 v_{2\text{cp}}^2}{2} + \rho g h_w.$$

Вывод: при увеличении скорости движения потока давление на этом участке падает и, наоборот – при уменьшении скорости давление увеличивается.

Уравнение Бернулли в форме давлений применяется для расчета систем вентиляции, газовых стояков внутри зданий и т.д.

Особенности турбулентного и ламинарного течения жидкости. Число Рейнольдса



Жидкость в круглой трубе движется как бы концентрическими кольцевыми слоями, которые не перемешиваются между собой. Такое движение называется **ламинарным** (слоистым)

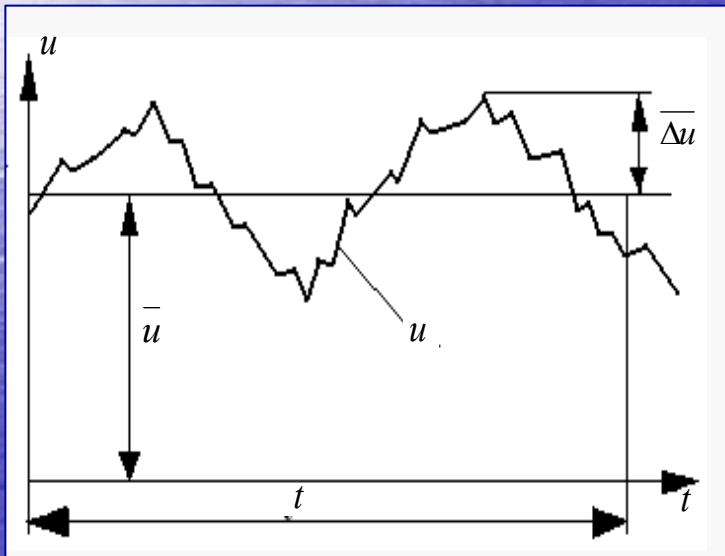
Отдельные частицы жидкости и ее небольшие объемы пребывают в состоянии хаотического и беспорядочного движения. Наряду с общими поступательными движениями имеется поперечное перемещение частиц. Такое движение называется **турбулентным**

Характеристика	Ламинарный режим	Турбулентный режим
Движение	Только продольное	Продольное и поперечное
Потери энергии	$gh_w \equiv u^1$	$gh_w \equiv u^2$
Передача тепла	Теплообмен за счет теплопроводности	Теплообмен за счет теплопроводности и конвекции
Эпюра скорости	Параболическая функция	Логарифмическая функция
Коэффициент α	$\alpha = 2$	$\alpha \approx 1$

Особенности турбулентного и ламинарного течения жидкости. Число Рейнольдса

Режим зависит от трех параметров: средней скорости, диаметра и кинематической вязкости ν . Рейнальдс пришел к выводу, что существует некоторое критическое значение соотношения этих параметров, являющееся границей между ламинарными и турбулентными режимами течения, и нашел его:

$$Re = \frac{v_{cp} \cdot d}{\nu} = 2320.$$



Хаотичность турбулентного движения с кинематической точки зрения означает, что скорость движения в отдельных точках пространства непрерывно изменяется как по величине, так и по направлению. Скорость в данной точке турбулентного потока, измеренную в данный момент времени, называют **мгновенной** и обозначают u . Экспериментальные исследования показывают, что изменения мгновенной скорости носит случайный характер.

$$\bar{u} = \frac{1}{t} \int_0^t u dt$$

где t — достаточно длинный интервал времени.

Особенности турбулентного и ламинарного течения жидкости. Число Рейнольдса

Отклонение мгновенной скорости от ее осредненного значения $\Delta u = u - \bar{u}$ называют **пульсационной скоростью** или **пульсацией**. Замена действительных беспорядочных движений жидких комков на фиктивное струйное движение требует введения некоторых фиктивных сил взаимодействия между воображаемыми струйками.

Благодаря этому Прандтлем был введен новый вид поверхностных сил и соответствующих касательных напряжений

$$\tau_{xy} = -\rho \Delta u_x \Delta u_y$$

которые называются **турбулентными касательными напряжениями**.

Осредненные касательные напряжения называются **турбулентными**

$$\tau_{\text{турб}} = -\rho \overline{\Delta u_x \Delta u_y}$$

Полное касательное напряжение турбулентного потока

$$\tau = \tau_{\text{турб}} + \tau_{\text{вязк}} = -\rho \overline{\Delta u_x \Delta u_y} + \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy}$$

Уравнение Бернулли для элементарной струйки невязкой сжимаемой жидкости

Плотность сжимаемой жидкости изменяется в процессе движения

$$gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} = const$$

При установившемся движении влияние сжимаемости практически проявляется только в газах, при анализе течения которых удельной энергией положения можно пренебречь.

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} = const$$

Это уравнение можно назвать **уравнением Бернулли для сжимаемой жидкости**.

Вывод: При установившемся течении невязкого газа сумма удельной потенциальной, внутренней и кинетической энергии есть величина постоянная.

Для вычисления интеграла необходимо знать процесс изменения состояния газа при этом течении. Такой процесс описывается уравнением

$$\frac{p}{\rho^k} = C$$

где k — показатель адиабаты процесса; C — постоянная.

Теперь уравнение Бернулли для сжимаемой жидкости принимает вид

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = const$$

Поскольку отношение

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

$$\frac{k}{k-1} \cdot RT + \frac{u^2}{2} = const$$

Изменение скорости вдоль трубки тока сжимаемого газа связано с изменением температуры. При увеличении скорости температура падает и наоборот.

Уравнение Бернулли для потока вязкой сжимаемой жидкости

Заменив в уравнении для струйки скорость струйки u на среднюю скорость потока v_{cp} , можно сразу написать уравнение Бернулли сжимаемой **невязкой** **жидкости**

$$\frac{k}{k-1} \cdot RT + \frac{v_{cp}^2}{2} = const$$

Уравнение Бернулли для вязкой сжимаемой жидкости

Дифференциальное уравнение движения

$$\frac{dp}{\rho} + v dv + dE_n = 0,$$

При адиабатическом течении, где отсутствует обмен тепла со средой вне границ потока, можно получить уравнение движения в конечном виде

$$di = dq + \frac{dp}{\rho},$$

где q – количество тепла, передаваемое 1 кг газа.

$$gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} = const$$

Вывод: При установившемся течении невязкого газа сумма удельной потенциальной, внутренней и кинетической энергии есть величина постоянная.

ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Основы моделирования

При изучении гидроаэродинамических явлений необходимо широкое применение **эксперимента**. Например, все вопросы, касающиеся турбулентного движения жидкости, не имеют точного теоретического решения, поэтому **экспериментальные решения дополняют теоретические**. Все виды гидравлических сопротивлений и соответствующие им коэффициенты определяются экспериментальным путем.

Различают **математическое моделирование** (на ЭВМ) и **физическое** (на физических моделях).

Обоснование моделирования и использование в натуре результатов экспериментов на модели связано с **подобием движения в натуре и на модели**. **Подобными** называют явления, происходящие в геометрически подобных системах одинаковой физической природы, когда одинаковые величины (например скорости или силы), действующие в подобных точках, имеют между собой постоянные отношения, которые называются **масштабами**.

Виды подобия. Масштабы моделирования

Для установления подобия гидроаэродинамических явлений между **натурой** и моделью следует использовать правила **механического подобия**. Механическое подобие подразумевает выполнение **геометрического, кинематического и динамического подобия**.

Геометрически подобными являются два потока

$$\frac{l_n}{l_m} = k_l$$

где k_l линейный масштаб;

l_n l_m геометрические размеры природы и модели.

$$\frac{S_n}{S_m} = k_S \text{ - масштаб площадей} \quad \frac{V_n}{V_m} = k_V \text{ - масштаб объемов}$$

Виды подобия. Масштабы моделирования

Кинематическими подобными являются два потока, если поля скоростей на модели и в натуре в подобных точках пространства связаны масштабом

$$\frac{v_n}{v_m} = k_v$$

$$\frac{a_n}{a_m} = k_a$$

- масштаб ускорений

Для **динамического подобия** необходимо, чтобы все силы одинаковой природы, действующие в подобных точках модели и натуры на частицы жидкости, отличались между собой только постоянными масштабами

$$\frac{F_n}{F_m} = k_F$$

масштаб сил можно представить следующими выражениями

$$k_F = k_a k_m = \frac{k_v}{k_t} k_\rho k_V = \frac{k_v}{k_t} k_\rho k_l^3 = k_v^2 k_l^2 k_\rho$$

Критерии подобия

Устанавливаемые частные условия подобия называются **критериями подобия**.

Критерий Эйлера.

$$\frac{p_n}{\rho_n u_n^2} = \frac{p_m}{\rho_m u_m^2}$$

$$Eu = \frac{p}{\rho u^2} = idem$$

термин ***idem*** означает, что условия, определяемые данным соотношением, должны быть одинаковы на модели и на натуре.

Вывод: критерию Эйлера соответствует равенство отношений сил давления к силам инерции на модели и на натуре.

Критерий Рейнольдса

$$\frac{u_n l_n \rho_n}{\mu_n} = \frac{u_m l_m \rho_m}{\mu_m}$$

$$Re = \frac{u l \rho}{\mu} = idem$$

При соблюдении **критерия Рейнольдса** критерий Эйлера выполняется автоматически. Если жидкости на модели и в натуре одинаковы, то при равенстве

$$Re_n = Re_m$$

$$u_n l_n = u_m l_m$$

$$k_l = \frac{1}{k_u}$$

Вывод: При моделировании по Рейнольдсу уменьшение размеров модели в раз требует увеличения скорости движения жидкости на модели в такое же количество раз.

Критерии подобия

Критерий Фруда

Определяет отношение сил инерции к силам тяжести

$$Fr = \frac{u^2}{gl} = idem$$

$$\frac{u_n^2}{gl_n} = \frac{u_m^2}{gl_m}$$

При моделировании по Фруду

$$k_u = \sqrt{k_l}$$

Вывод: Одновременно нельзя удовлетворить равенство критериев Рейнольдса и Фруда для одной и той же жидкости на модели и в натуре.

Критерий Архимеда

Определяет отношение выталкивающей силы Архимеда к силам инерции

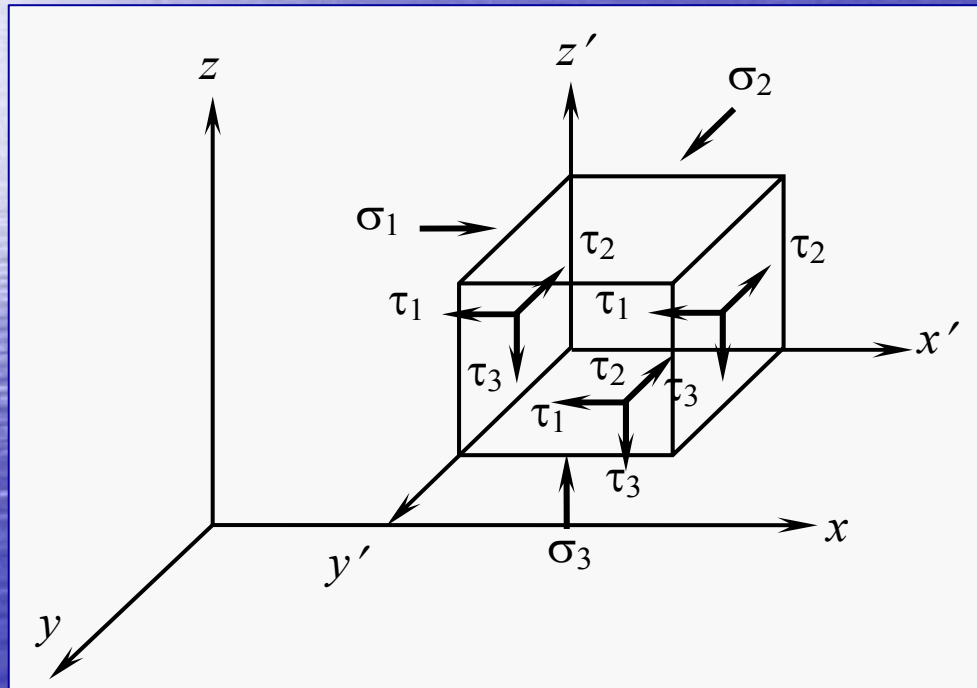
$$Ar = \frac{gl}{u^2} \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = idem$$

$$\frac{gl_n}{u_n^2} \frac{\rho_n - \rho_{n0}}{\rho_n} = \frac{gl_m}{u_m^2} \frac{\rho_m - \rho_{m0}}{\rho_m}$$

где $\frac{\rho - \rho_0}{\rho}$ — отношение разности плотностей среды и струи к плотности среды.

Конечно-разностная форма уравнения Навье-Стокса

Напряженное состояние жидкости. Законы движения и покоя жидкостей и газов основываются на законах механики сплошной среды, что позволяет рассматривать равновесие и течение жидкости в целом без учета механизма молекулярного движения.



На поверхности граней элементарного параллелепипеда возникают **три различных по величине касательных напряжения и три нормальных составляющих напряжений**: вдоль осей x и y — напряжение τ_1 , вдоль осей x и z — τ_2 и вдоль осей y и z — τ_3 . Вдоль оси x действует нормальная составляющая напряжения σ_1 , вдоль оси y — σ_2 и вдоль оси z — σ_3 .

На массу жидкости, находящуюся в изолированном объеме, действуют **массовые силы**, которые **пропорциональны третьей степени размера выделенного объема**

Конечно-разностная форма уравнения Навье-Стокса

Суммарная проекция силы, определяемая нормальными составляющими напряжения

$$\left[\sigma_1 + \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \right) dx \right] dydz - \sigma_1 dydz = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dx dydz.$$

Составляющие вдоль оси x

$$\frac{\partial \tau_3}{\partial y} dx dydz$$

$$\frac{\partial \tau_2}{\partial y} dx dydz$$

Суммарная составляющая сил, возникающих на гранях изолированного элемента жидкости за счет дополнительного напряжения в проекции на ось x , равна

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} \right) dx dydz$$

Аналогично составляющие дополнительного напряжения, действующие на остальных гранях, в проекциях на оси Oy и Oz дадут составляющие сил:

$$\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_3}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} \right) dx dydz$$

и

$$\left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial z} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x} \right) dx dydz$$

Конечно-разностная форма уравнения Навье-Стокса

Прибавляя эти силы, отнесенные к единице массы жидкости к правой части уравнений Эйлера, получим условия динамического равновесия в точке потока при течении реальной жидкости

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} \right) dx dy dz; \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_3}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} \right) dx dy dz; \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial z} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x} \right) dx dy dz. \end{aligned} \right\}$$

Определим теперь силы, возникающие в точке потока за счет вязкости.

Проекция на ось Ox сил вязкости, отнесенных к единице объема и действующих в точке, определяемой в потоке координатами x, y, z

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} + \mu \left[2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right]$$

Конечно-разностная форма уравнения Навье-Стокса

Дифференцируя уравнение неразрывности по x , получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).$$

Тогда уравнение сил, возникающих за счет вязкости жидкости, равно

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$

Аналогично в проекции на оси Oy и Oz дополнительная проекция сил, которые следует учитывать при течении вязких жидкостей, составит:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \quad \text{и} \quad \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right).$$

Конечно-разностная форма уравнения Навье-Стокса

Уравнения Эйлера с учетом этих дополнительных сил примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\}$$

Полученная система уравнений называется **уравнениями Навье-Стокса**.

Уравнение Навье-Стокса, как и уравнение Эйлера, интегрируются только для некоторых частных случаев, но в последние годы, в связи с развитием различных методов решения подобных задач, полученные уравнения используются все чаще и являются идеальным инструментом, позволяющим получить хороший результат. Наиболее часто для решения уравнений Навье-Стокса применяются **численные методы**.

Общая схема применения численных методов и их реализация на ЭВМ

Под **численными методами** подразумеваются методы решения задач, сводящиеся к арифметическим и логическим действиям над числами, т.е. к тем действиям, которые выполняет ЭВМ.

Решение, полученное численным методом, обычно является приближенным, т.е. содержит **некоторую погрешность**.

Источниками погрешности являются:

- 1) несоответствие математической задачи изучаемому реальному явлению;
- 2) погрешность исходных данных;
- 3) погрешность метода решения;
- 4) ошибки округлений в арифметических и других действиях над числами.

Погрешность в решении, обусловленная первыми двумя источниками называется **неустранимой**.

Численные методы в большинстве случаев сами по себе являются приближенными. Такие погрешности называются **погрешностями метода**.

Общая схема применения численных методов и их реализация на ЭВМ

При решении задач на ЭВМ чаще всего встречаются две ситуации:

- 1)** если количество выполняемых арифметических действий невелико, то, обычно, ошибки округления не проявляются, так как в ЭВМ числа представляются с 10 и более десятичными значащими цифрами, а окончательный результат редко бывает нужен более чем с 5 десятичными значащими цифрами.
- 2)** если задача сложная (уравнения с частными производными), то в этом случае погрешности округления в каждом действии не учитываются, так как они взаимокompенсируются.

Численный метод может считаться удачно выбранным, если его погрешность в несколько раз меньше неустранимой погрешности, а погрешность, возникающая за счет округлений, называемая **вычисленной погрешностью**, в несколько раз меньше **погрешности метода**.

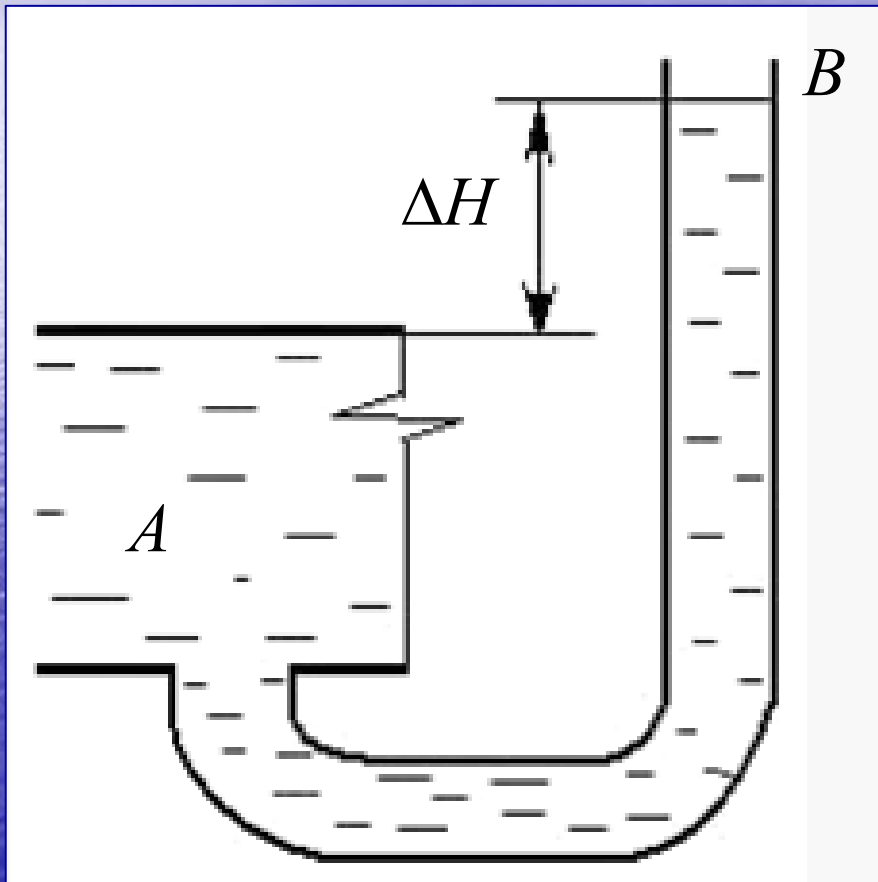
Общая схема применения численных методов и их реализация на ЭВМ

Этапы метода вычислительного эксперимента:

1. Формируется задача, выбирается физическая модель процесса, решается вопрос о том, какие физические величины надо учитывать. Проводится описание физической модели математическим способом (дифференциальные, интегральные и другие уравнения). Полученную математическую модель исследуют методами математической физики, чтобы установить, правильно ли поставлена задача, хватает ли исходных данных, не противоречат ли они друг другу, существует ли решение поставленной задачи и единственно ли оно.
2. Построение приближенного численного метода решения задачи, т.е. выбора вычислительного алгоритма. Вычислительный алгоритм – последовательность арифметических и логических операций, при помощи которых находится приближенное численное решение математической задачи, сформулированной на первом этапе.
3. Программирование вычислительного алгоритма на ЭВМ.
4. Проведение расчетов на ЭВМ.
5. Анализ полученных численных результатов и последующее уточнение математической модели.

Измерительные приборы, используемые при проведении экспериментальных работ

1. Жидкостные манометры прямого действия.



Чувствительность манометра определяется по следующей формуле

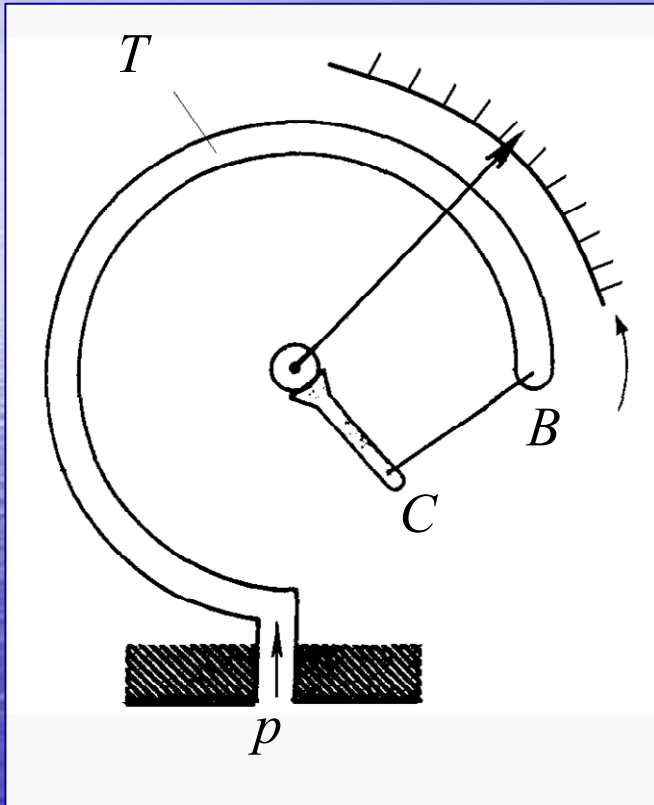
$$s = \frac{\Delta h}{\Delta p} = \frac{1}{g\rho}$$

Давление определяется по разности уровней жидкости в трубках *A* и *B*

$$p = \rho g \Delta h$$

Измерительные приборы, используемые при проведении экспериментальных работ

2. Механические манометры.

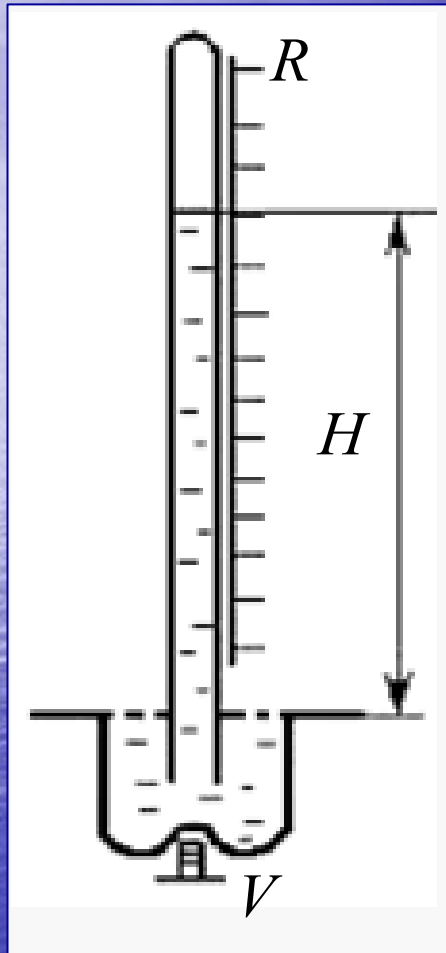


Манометр состоит из согнутой металлической трубки **T**, один конец которой соединен с резервуаром, в котором измеряется давление. Конец трубки **B** соединен с рычагом **BC**, который поворачивает стрелку. При повороте стрелки она указывает величину давления. При избыточном давлении в трубке **T** свободный ее конец **B** начинает распрямляться и приводит в движение стрелку, которая показывает величину давления. Такие манометры отличаются прочностью.

Измерительные приборы, используемые при проведении экспериментальных работ

3. Барометры.

Барометры используются для измерения атмосферного давления. В лабораторных условиях используется **барометр Фортина**, позволяющий довольно точно измерить атмосферное давление.



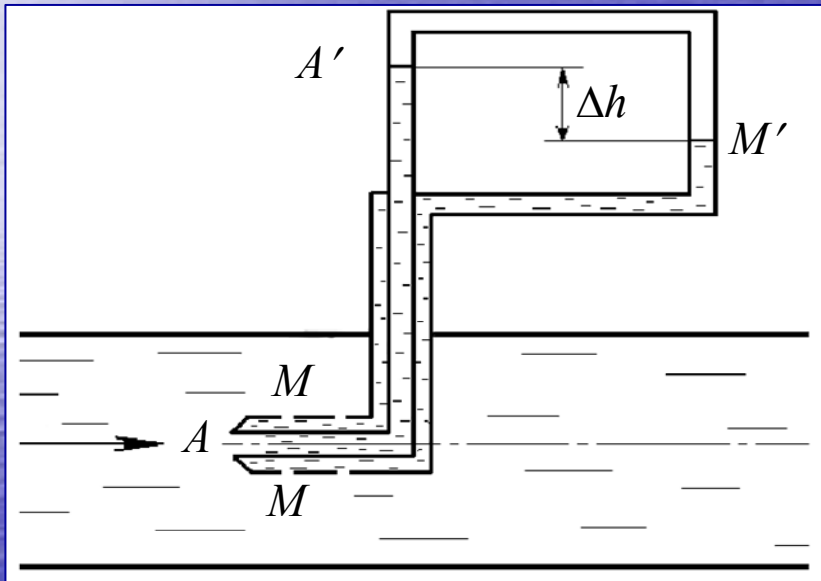
4. Вакуумметры.

Принцип действия **механического и жидкостного вакуумметров** аналогичен принципу действия механического манометра и жидкостного пьезометра.

Измерительные приборы, используемые при проведении экспериментальных работ

5. Трубка Пито–Прандтля.

Трубка Пито–Прандтля позволяет одновременно определить величину динамического и статического давления в определенной точке потока.



Разность давления в точках A' и M' будет

$$\Delta p = \rho g h$$

Разность давления Δp зависит от динамического давления на входе в трубку Пито–Прандтля, что следует из уравнения Бернулли для точек A и M :

$$p_M = p_A + \frac{\rho v^2}{2}$$

где v – скорость потока на входе в трубку Пито–Прандтля. Таким образом,

$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2}$$

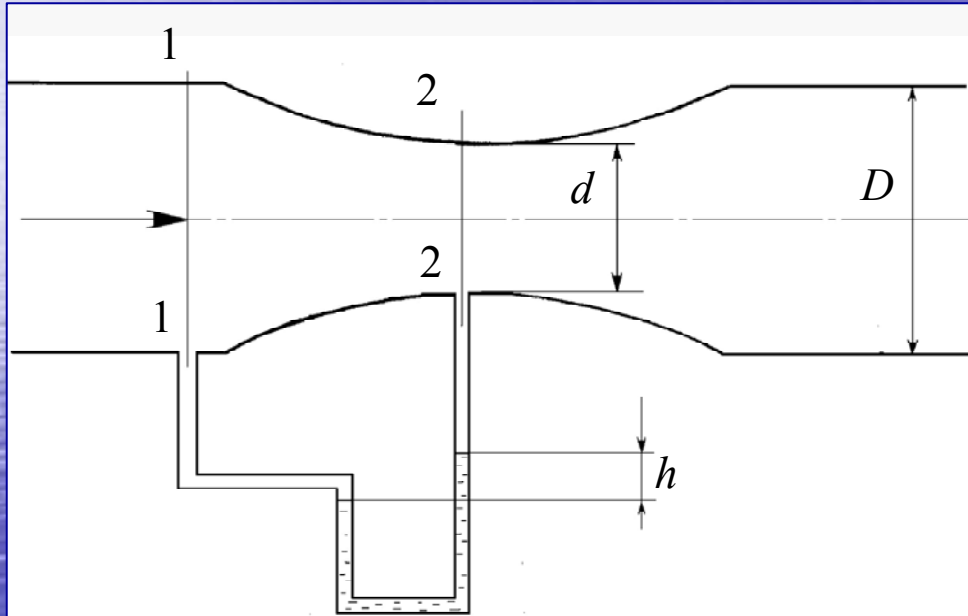
откуда получаем

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Измерительные приборы, используемые при проведении экспериментальных работ

6. Расходомер Вентури.

Расходомер служит для измерения расхода жидкости и представляет собой плавную сходящуюся – расходящуюся вставку, к которой подключается дифференциальный манометр.



Для вывода расчетной формулы применим уравнение Бернулли для сечения 1-1 перед сужением и сечения 2-2 в сужении ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$).

$$\Delta p = \rho \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) = \rho \frac{v_2^2}{2} \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2} \right)$$

С учетом уравнения неразрывности

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

$$\Delta p = \rho \frac{v_2^2}{2} \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right)$$

Откуда

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho} \frac{1}{1 - (d^4 / D^4)}} \quad Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho} \frac{1}{1 - (d^4 / D^4)}}$$

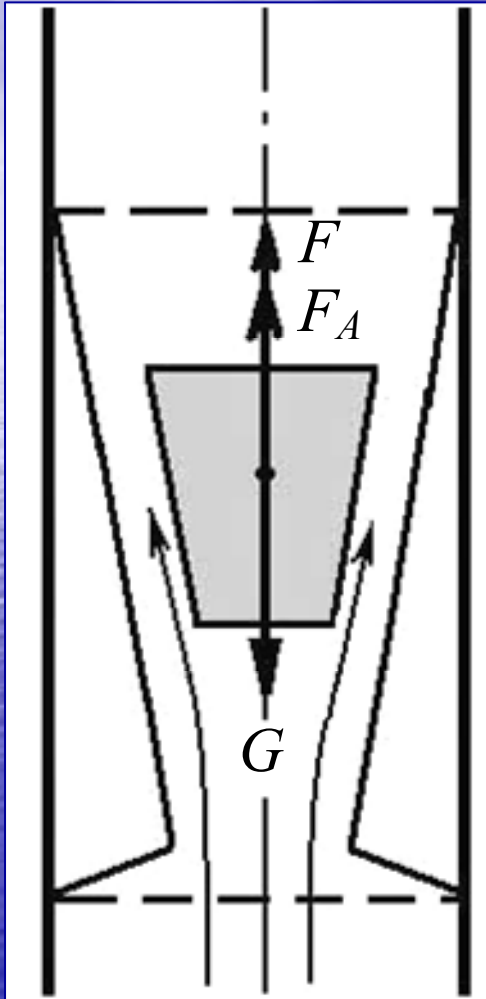
Для ртутного манометра

$$\Delta p = (\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{ж}}) g h$$

$$Q = S_{\mu} \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}$$

Измерительные приборы, используемые при проведении экспериментальных работ

7. Ротаметры.



Ротаметры используются для измерения расхода жидкостей, имеющих слабые коррозионные свойства. Ротаметр состоит из сужающейся стеклянной трубки и металлического конусообразного измерителя. На измеритель действуют следующие силы: сила тяжести G , архимедова сила F_A , сила динамического давления жидкости F . Для измерителя, находящегося в покое, можно записать

$$G = F + F_A$$

$$mg = \rho_{\text{ж}} Vg + \frac{\rho_{\text{ж}} v^2}{2} S$$

Сила тяжести и архимедова сила – величины постоянные, поэтому сила динамического давления жидкости при любом расходе будет также постоянной.

$$Q = vS$$

Гидравлические сопротивления

Виды гидравлических сопротивлений

Потери по длине

Уравнение Бернулли можно записать в следующем виде

$$p_1 - p_2 = \rho g h_w = \rho E_{\text{пот}} = p_w = p_{\text{дл}}$$

Вывод: Работа сил давления расходуется на преодоление сил трения, что и обуславливает потери механической энергии, которые прямо пропорциональны длине пути движения.

В зависимости от формы записи уравнения Бернулли эти потери называются:

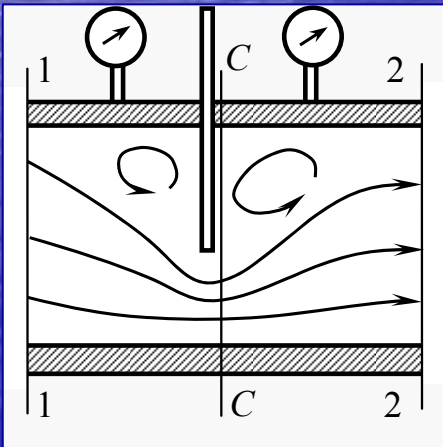
- потерями давления по длине $p_{\text{дл}}$
- потерями удельной энергии по длине $E_{\text{дл}}$
- потерями напора по длине $h_{\text{дл}}$

Местные потери

Образуются в результате изменения структуры потока по пути движения жидкости

В зависимости от формы записи местные потери записываются как $p_{\text{м}}, E_{\text{м}},$ или $h_{\text{м}}$

Общие потери в трубопроводе складываются из потерь по длине и потерь на местных сопротивлениях

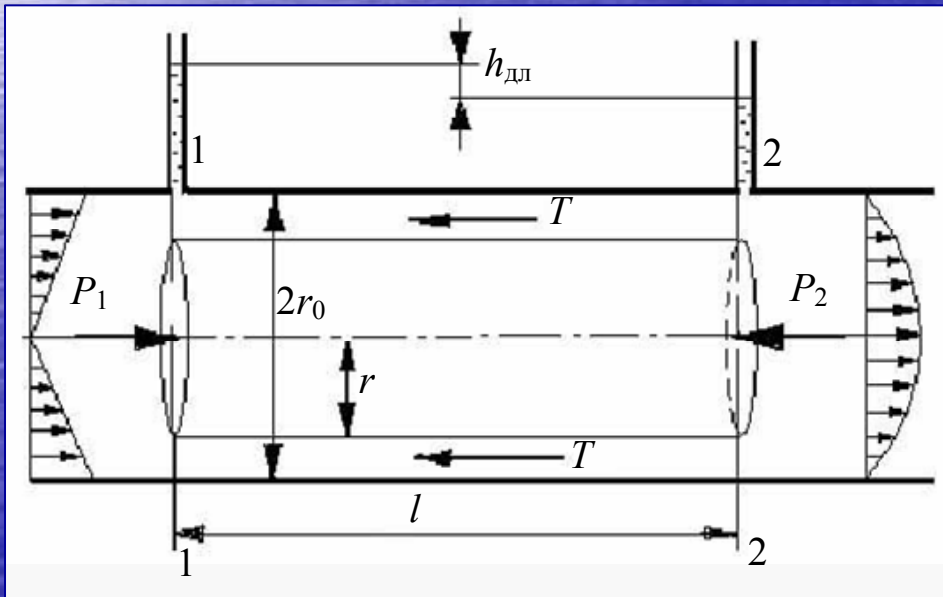


Сопротивление по длине при движении в цилиндрической трубе при ламинарном течении

При ламинарном режиме жидкость движется концентрическими слоями. Воспользуемся формулой Ньютона для напряжений трения, приняв $dy = dr$

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}$$

Знак «минус» указывает на то, что скорость уменьшается в направлении оси r (от центра к стенке трубы).



На выделенный объем действуют внешние силы: нормальные к живым сечениям: силы давления, и касательные силы сопротивления T , приложенные к боковой поверхности

$$P_1 = p_1 S$$

$$P_2 = p_2 S$$

$$T = S\tau = 2\pi r l \tau$$

Соппротивление по длине при движении в цилиндрической трубе при ламинарном течении

Уравнение равновесия этих сил относительно направления движения:

$$P_1 = P_2 + T$$

$$p_1 \pi r^2 = p_2 \pi r^2 + 2 \pi r l \tau$$

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{2\tau}{r}$$

$$\tau = \frac{(p_1 - p_2)r}{2l}$$

Вывод: При ламинарном движении в круглой трубе напряжение трения максимально у стенки и равно 0 на оси трубы

Закон распределения скоростей

Закон распределения скоростей по сечению трубы можно получить из следующего уравнения

$$du = \frac{(p_1 - p_2)rdr}{2\mu l}$$

После интегрирования, получаем:

Граничные условия: $r = r_0$ $u = 0$

$$u = -\frac{(p_1 - p_2)r^2}{4\mu l} + const$$

$$\frac{(p_1 - p_2)r_0^2}{4\mu l} = const$$

$$u = \frac{(p_1 - p_2)(r_0^2 - r^2)}{4\mu l}$$

Вывод: При ламинарном течении скорости в сечении трубки распределяются по параболическому закону

Сопротивление по длине при движении в цилиндрической трубе при ламинарном течении

Максимальная скорость на оси трубы будет при $r = 0$

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$$

Полный расход

$$Q = u_{\max} \frac{\pi r_0^2}{2}$$

Вывод: Для того чтобы определить расход при ламинарном режиме достаточно измерить скорость на оси потока и умножить ее на половину площади живого сечения.

Средняя скорость

$$u_{\text{ср}} = \frac{u_{\max}}{2}$$

Вывод: Средняя скорость при ламинарном режиме в два раза меньше скорости на оси потока.

Закон сопротивления при ламинарном режиме

$$h_{\text{дл}} = \frac{8\nu l Q}{\pi r_0^4 g}$$

Вывод: Потери напора на преодоление сил сопротивления по длине при ламинарном режиме прямопропорциональны расходу и длине трубопровода и обратнопропорциональны радиусу трубы в четвертой степени.

Формула Дарси-Вейсбаха

Заменим в формуле

$$h_{\text{дл}} = \frac{8\nu l Q}{\pi r_0^4 g}$$

$$Q = v_{\text{ср}} \frac{\pi d^2}{4}$$

$$r_0^4 = \frac{d^4}{16}$$

Получаем формулу Пуазейля

$$h_{\text{дл}} = \frac{32\nu l v_{\text{ср}}}{g d^2}$$

Перепишем формулу Пуазейля следующим образом

$$h_{\text{дл}} = 32 \frac{\nu}{d} \frac{l}{d} \frac{v_{\text{ср}}}{g}$$

умножим и разделим на

$$\frac{v_{\text{ср}}}{2}$$

$$h_{\text{дл}} = 32 \frac{\nu}{d} \frac{l}{d} \frac{v_{\text{ср}}}{g} \frac{2}{\frac{v_{\text{ср}}}{2}}$$

Если

$$\frac{\nu}{v_{\text{ср}} d} = \frac{1}{\text{Re}}$$

то получаем

$$h_{\text{дл}} = \frac{64\nu}{v_{\text{ср}} d} \frac{l}{d} \frac{v_{\text{ср}}^2}{2g}$$

$$h_{\text{дл}} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{v_{\text{ср}}^2}{2g}$$

Формула Дарси-Вейсбаха для определения потерь напора по длине

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{\text{ср}}^2}{2g}$$

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

– коэффициент гидравлического трения

Турбулентное движение в гидравлически гладких и шероховатых трубах

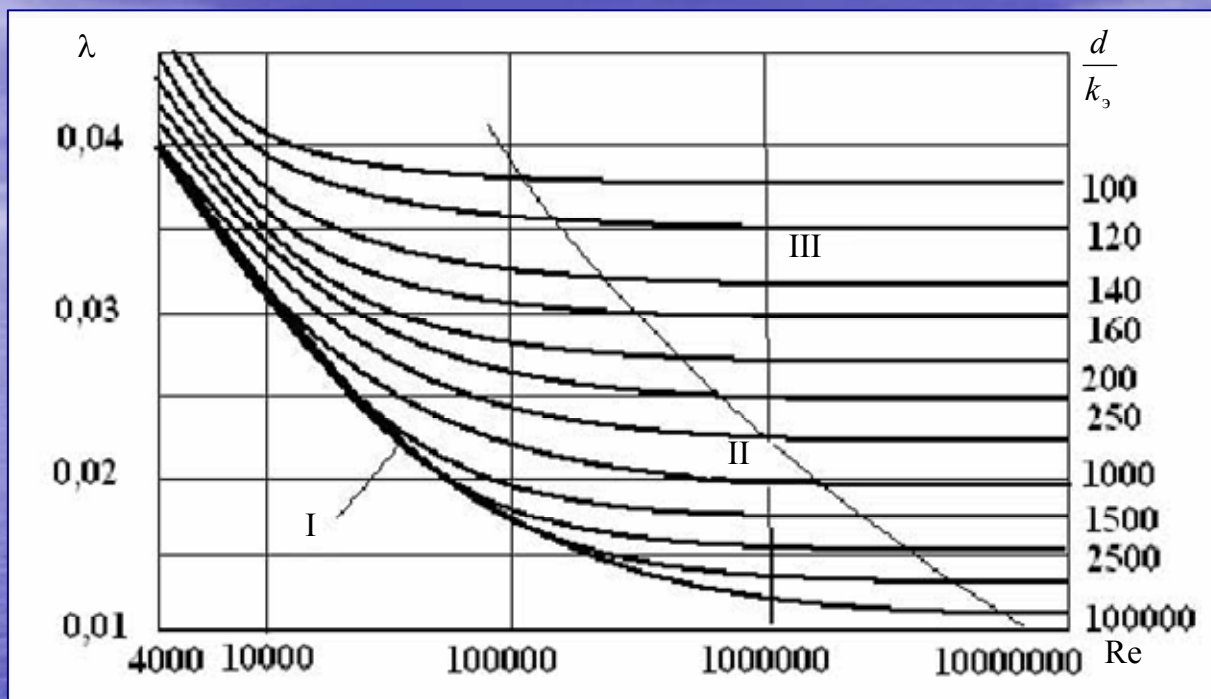


График Мурина

Для ламинарного течения гидравлический коэффициент трения

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Линия I соответствует области **гидравлически гладких** труб

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}$$

Эту зависимость можно использовать в диапазоне чисел

$$Re \leq 20 \frac{d}{k_s}$$

Турбулентное движение в гидравлически гладких и шероховатых трубах

Область II на графике является *переходной* областью от гидравлически гладких к шероховатым трубам.

$$\lambda = 0,11 \cdot \left(\frac{68}{\text{Re}} + \frac{k_{\text{э}}}{d} \right)^{0,25}$$

Эту формулу можно использовать в диапазоне чисел

$$20 \frac{d}{k_{\text{э}}} < \text{Re} < 500 \frac{d}{k_{\text{э}}}$$

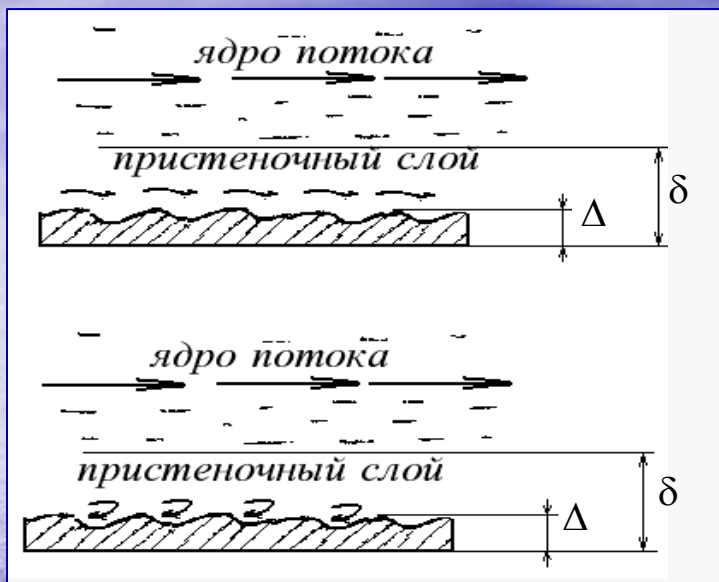
Область III является областью *гидравлически шероховатых* труб.

$$\lambda = 0,11 \cdot \left(\frac{k_{\text{э}}}{d} \right)^{0,25}$$

можно использовать при

$$\text{Re} > 500 \frac{d}{k_{\text{э}}}$$

Турбулентное движение в гидравлически гладких и шероховатых трубах



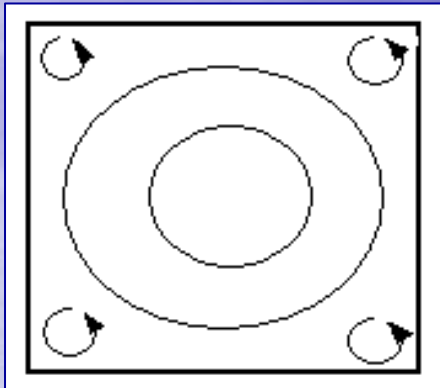
В качестве интегральной характеристики состояния внутренней поверхности трубы используется

эквивалентная шероховатость

$k_{\text{э}}$

Материал и состояние трубы	$k_{\text{э}}$, мм
Из цветных металлов и стекла	$\approx 0,001$
Стальные бесшовные: – новые – бывшие в эксплуатации	$\approx 0,014$ $\approx 0,2$
Стальные сварные: – новые – бывшие в эксплуатации	$\approx 0,05$ $\approx 0,5$

Движение жидкости в трубах некруглого сечения



Для транспорта капельных жидкостей и газов иногда используют трубопроводы некруглого сечения: овальной, прямоугольной формы. В таких трубах возникают так называемые вторичные течения, которые можно наблюдать при подкрашивании потока.

При турбулентном движении жидкости коэффициенты гидравлического трения соответствуют коэффициентам для круглых труб, а увеличение сопротивления учитывается тем, что труба некруглого сечения приводится к трубе круглой соответствующего диаметра. Для этого применяется эквивалентный диаметр

$$d_{\text{э}} = 4R_{\text{г}}$$

где $R_{\text{г}}$ — гидравлический радиус

$$R_{\text{г}} = \frac{S}{\chi}$$

где S — площадь сечения трубопровода; χ — смоченный периметр.

Местные гидравлические сопротивления

Местные сопротивления вызываются фасонными частями, арматурой, другим оборудованием трубопроводных сетей, которые изменяют величину или направление скорости движения жидкости на отдельных участках, что всегда связано с появлением дополнительных потерь напора.

Потери напора на местных сопротивлениях определяются по формуле Вейсбаха

$$h_m = \xi_m \frac{v_1^2}{2g},$$

где ξ_m — коэффициент местного сопротивления, который зависит от вида сопротивления и определяется опытным путем.

Основные виды местных потерь напора можно условно разделить на следующие группы:

потери, связанные с изменением живого сечения потока (резкое или постепенное расширение и сужение потока);

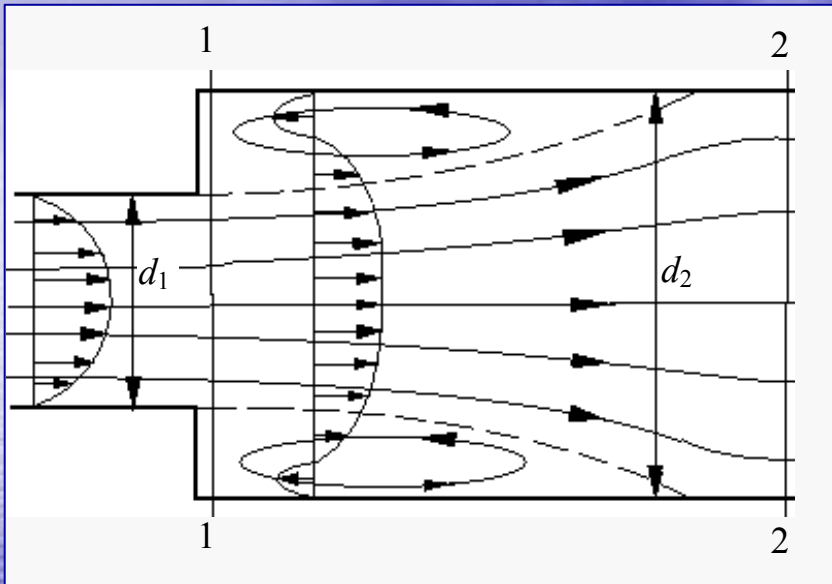
потери, вызванные изменением направления потока, его поворотом (поворот трубы);

потери, связанные с протеканием жидкости через арматуру различного типа (вентили, краны, клапаны, сетки);

потери, возникшие вследствие отделения одной части потока от другой или слияния двух потоков (тройники, крестовины и т.д.).

Местные гидравлические сопротивления

Резкое расширение трубопровода.



Если принять ряд допущений, то теоретически можно доказать, что потери напора при резком расширении

$$h_{pp} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \quad \text{— формула Борда}$$

Эту формулу можно привести к другому виду:

$$h_{pp} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}$$

Если принять

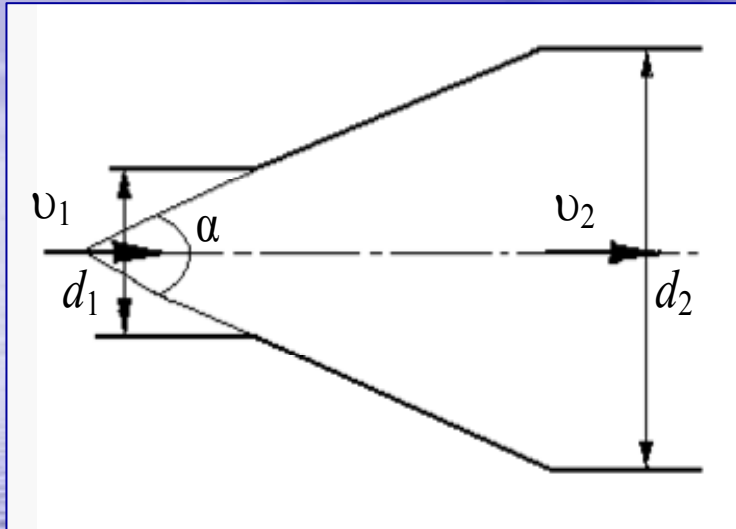
$$\xi_{pp} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

коэффициент местного сопротивления при резком расширении, то формула Борда принимает следующий вид:

$$h_{pp} = \xi_{pp} \frac{v_1^2}{2g}$$

Местные гидравлические сопротивления

Постепенное расширение



Потерю напора в диффузоре можно условно рассматривать как сумму потерь на трение и расширение. При небольших углах α возрастают потери по длине, а сопротивление на расширение становится минимальным. При больших углах α наоборот возрастает сопротивление на расширение. Коэффициент сопротивления диффузора можно определить по следующей формуле

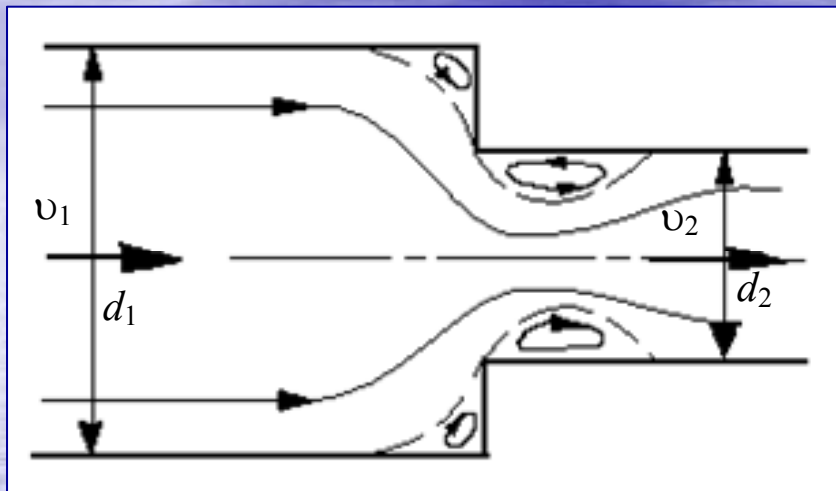
$$\xi_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

где k – коэффициент смягчения, который зависит от угла α , и его значения приводятся в справочниках

$$h_{\text{диф}} = \xi_{\text{диф}} \frac{v_1^2}{2g}$$

Местные гидравлические сопротивления

Внезапное сужение



При внезапном сужении потока также образуются водоворотные зоны в результате отрыва от стенок основного потока, но они значительно меньше, чем при резком расширении трубы, поэтому и потери напора значительно меньше. Коэффициент местного сопротивления на внезапное сужение потока можно определить по формуле

$$\xi_{\text{рс}} = 0,5(1 - n)$$

$$n = \frac{S_2}{S_1}$$

Постепенное сужение (конфузор)

Величина сопротивления конфузора будет зависеть от угла конусности конфузора θ . Коэффициент сопротивления можно определить по формуле

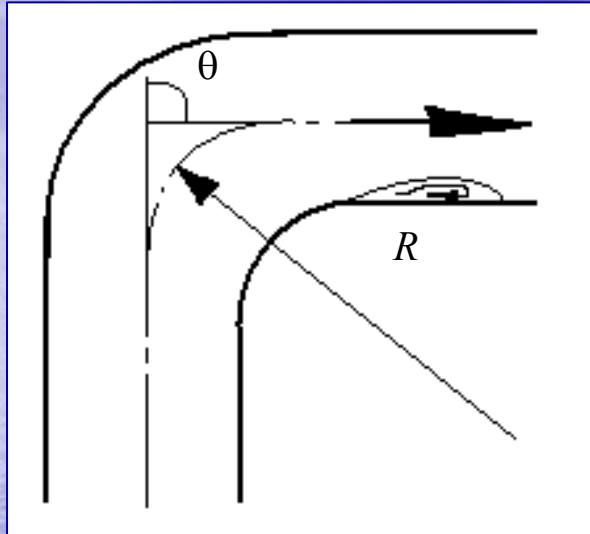
$$\xi_{\text{конф}} = k_{\text{конф}}(1 - n)$$

$$k_{\text{конф}} = f(\theta)$$

приводится в справочниках.

Местные гидравлические сопротивления

Поворот трубы (колени)

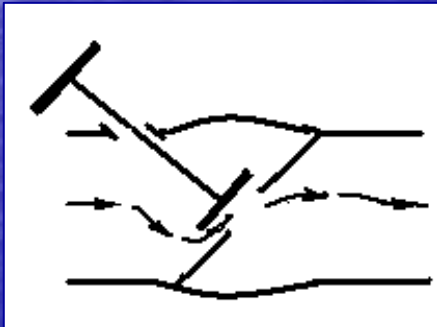


Величина коэффициента местного сопротивления зависит от угла поворота θ , радиуса поворота R , формы поперечного сечения и приводится в справочниках. Для круглого сечения трубы при $\theta = 90^\circ$ коэффициент сопротивления можно определить по формуле

$$\xi_{\text{кол}} = 0,05 + 0,2 \frac{d}{R}$$

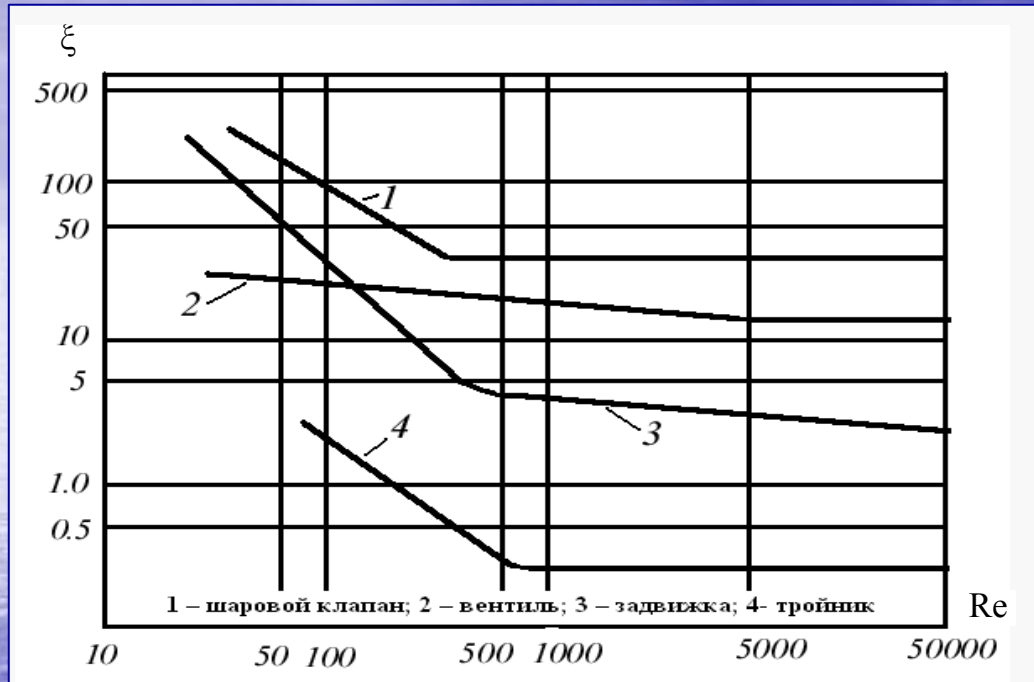
Другие виды местных сопротивлений

Для ориентировочных расчетов можно пользоваться следующими коэффициентами местного сопротивления:



- задвижка при полном открытии – 0,15;
- вход в трубу при острых кромках – 0,5;
- вентиль с косым затвором при полном открытии (рис. 4.18) – 3;
- симметричный тройник – 1,5.

Зависимость коэффициентов местных сопротивлений от числа Рейнольдса. Эквивалентная длина



В общем виде для коэффициента ξ можно записать

$$\xi = \frac{A}{Re} + \xi_{KB}$$

где ξ_{KB} — коэффициент сопротивления при больших числах Re , когда $\xi = \text{const.}$

В случае линейного закона сопротивления (наклонная прямая на графике) потери напора можно определить по *эквивалентной длине*.

Эквивалентная длина — такая длина прямого участка трубопровода данного диаметра, на которой потери на трение по длине эквивалентны потери напора, вызываемой данным местным сопротивлением, т.е.

$$h_{дл} = h_{м}$$

$$h_{м} = \lambda \cdot \frac{l_{э}}{d} \cdot \frac{v_{ср}^2}{2g}$$

Кавитация

На участках многих местных сопротивлений скорости потока резко возрастают, в результате чего давление уменьшается. Если давление становится ниже давления насыщенных паров жидкости, возникает **кавитация**. Источником кавитации являются пузырьки газа и пара, которые выделяются в сечении с пониженным давлением. Попадая в сечение с нормальным давлением, пузырьки мгновенно исчезают под действием повышенного давления. В месте исчезновения пузырьков давление резко увеличивается, повышается температура. Кавитация неблагоприятно отражается на работе оборудования, т.к. возникает вибрация, шум, эрозия металла. Кавитационные свойства местных сопротивлений оцениваются по критическому значению **числа кавитации**.

$$k = \frac{2(p_1 - p_{кр})}{\rho v_m^2}$$

где $p_{кр} = p_{н.п.}$ – давление насыщенных паров жидкости.

Предельно допустимая скорость в трубопроводе перед местным сопротивлением определяют по формуле

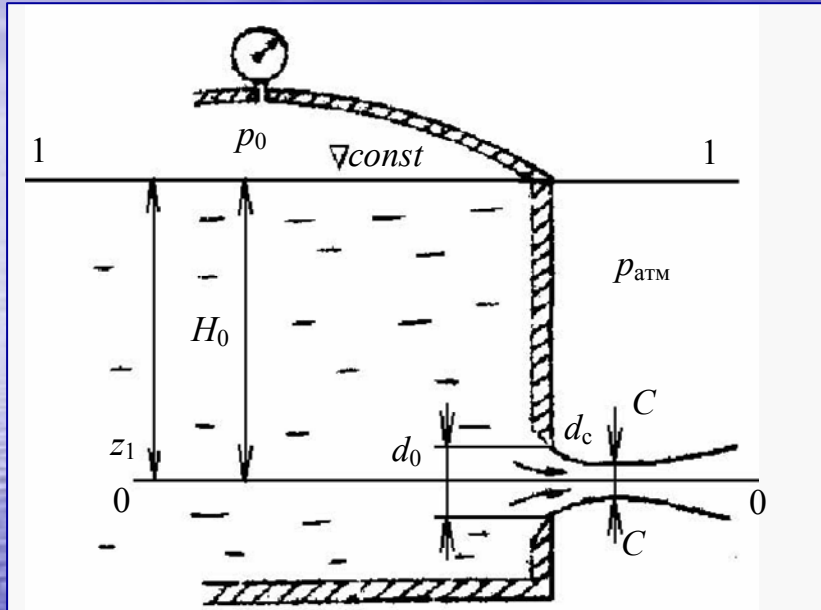
$$v_{кр} \leq \sqrt{\frac{2p_1 - p_{н.п.}}{\rho k_{кр}}}$$

Необходимо выполнение условия

$$v_m \leq v_{кр}$$

Истечение жидкостей из отверстия в тонкой стенке

Отверстием в тонкой стенке называется отверстие, толщина стенок которого составляет не более $1/4$ диаметра.



Степень сжатия струи оценивается коэффициентом

$$\varepsilon = S_c / S_o$$

Для плоскости сравнения, проведенной относительно оси отверстия, запишем уравнение Бернулли для движения жидкости от свободной поверхности, где скорость можно принять равной нулю, до сечения $C-C$

$$H_0 + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_c}{\rho g} + \frac{\alpha v_c^2}{2g} + \xi_o \frac{v_c^2}{2g}$$

Скорость истечения

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi_o}} \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH}$$

формула Торричелли

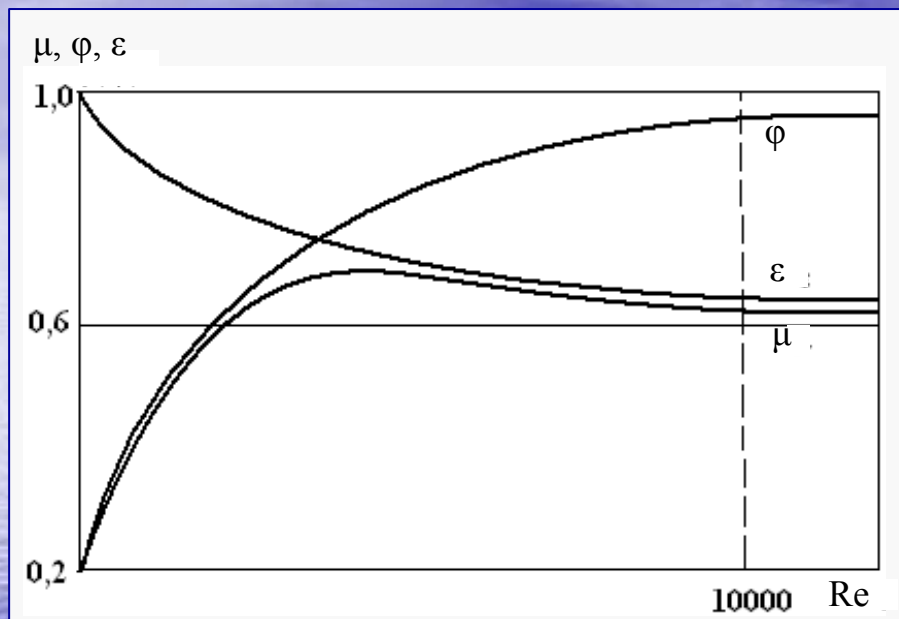
где φ – коэффициент скорости

Расход через сжатое сечение

$$Q = \mu S_o \sqrt{2gH}$$

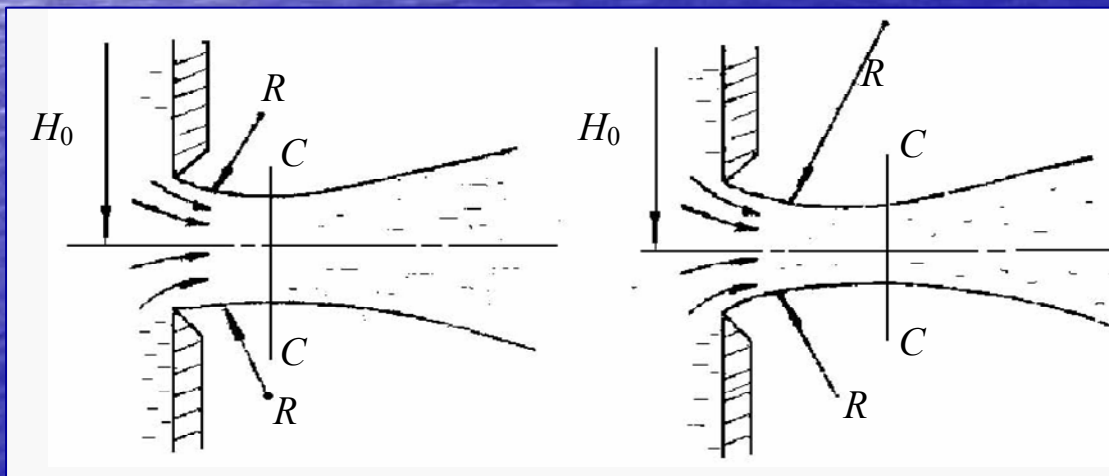
где μ – коэффициент расхода.

Зависимость коэффициентов истечения от числа Рейнольдса



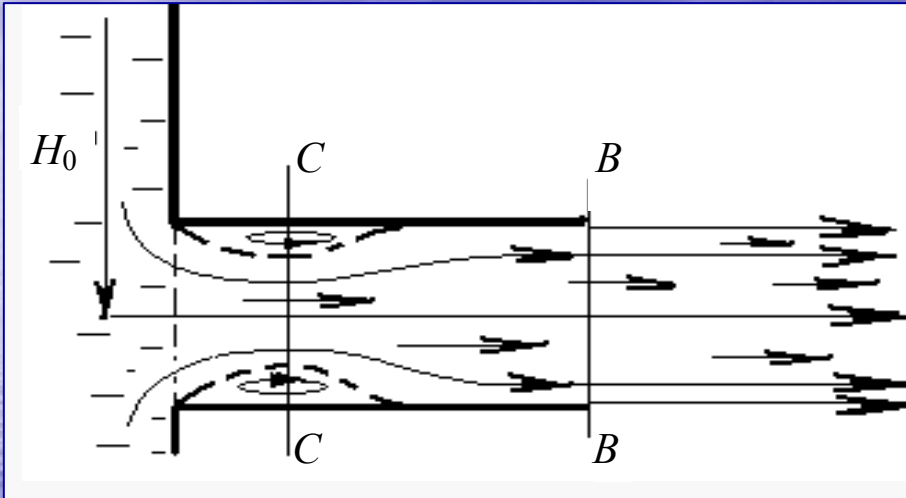
При истечении вязких жидкостей (например, дизельного топлива через форсунки) или при истечении с небольшими скоростями маловязких жидкостей (при малых числах Рейнольдса) будет проявляться зависимость величин коэффициентов истечения μ , ϕ , ε от Re

Коэффициент сжатия уменьшается вследствие увеличения радиусов кривизны поверхности струи на её участке от кромки до сжатого сечения $C-C$. При $Re \rightarrow \infty$ значения коэффициентов ϕ и ε приближаются к значениям, соответствующим истечению идеальной жидкости ($\phi = 1$, $\varepsilon = 0,6$).



Истечение из насадков

Насадком называется короткая труба длиной от 3 до 5 его диаметров, присоединенная к отверстию. При расчете насадков потерями напора по длине обычно пренебрегают.



Если резервуар открыт, а истечение происходит в атмосферу, то расход можно определить по той же формуле, что и для отверстия

$$Q = \mu S_n \sqrt{2gH_0}$$

Истечение через насадок, при котором струя полностью заполняет все пространство насадка, называется **истечением без отрыва**.

Практическое применение законов гидравлики

Расчет короткого трубопровода

Коротким считается трубопровод, в котором потери на местных сопротивлениях превышают 5% от общих потерь. К коротким относятся **системы водоснабжения, водоотведения, горячего водоснабжения внутри зданий**

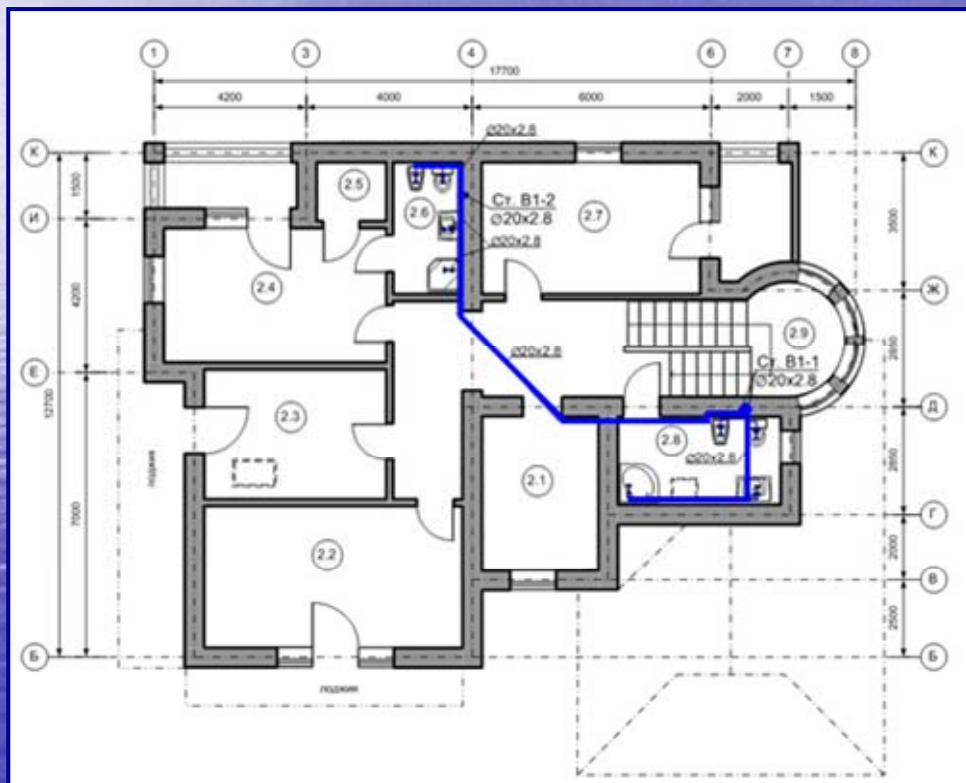


Схема водоснабжения этажа

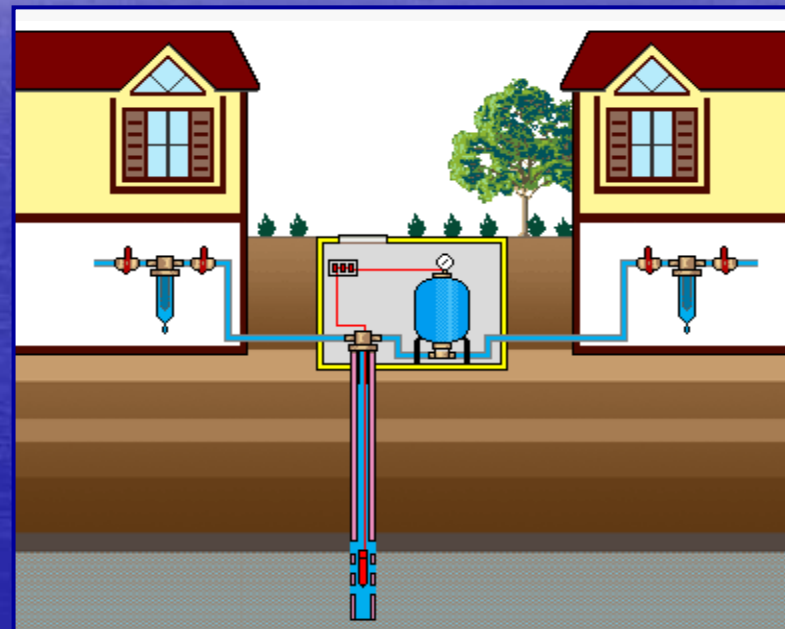


Схема водоснабжения коттеджей

Расчет короткого трубопровода

Целью расчета короткого трубопровода может быть определение **напора** или **давления** в начале трубопровода, **потерь напора** или **потерь давления**, а также определение **расхода** или **диаметра трубопровода** при известном напоре в его начале.

При расчете напора в начале короткого трубопровода должны быть заданы:

- напор или давление в конце трубопровода;
- расход
- диаметр и длина трубопровода.

При расчете напора в конце короткого трубопровода должны быть заданы:

- напор или давление в начале трубопровода;
- расход;
- диаметр и длина трубопровода.

Если целью расчета является определение расхода трубопровода, то должны быть заданы:

- напор или давление в начале и в конце трубопровода;
- диаметр и длина трубопровода.

Расчет короткого трубопровода

Расчет необходимо начать с определения формы записи уравнения Бернулли. Для расчета систем водоснабжения и водоотведения обычно применяется уравнение Бернулли в форме напоров:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_{1\text{cp}}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_{2\text{cp}}^2}{2g} + h_w$$

Расчет трубопровода фактически сводится к расчету потерь – местных и по длине. В коротком трубопроводе потери напора по длине определяются по формуле:

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{\text{cp}}^2}{2g}.$$

При неизвестном расходе:

– для ламинарного режима коэффициент гидравлического трения определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

– для турбулентного режима коэффициент гидравлического трения рассчитывается по формуле:

$$\lambda = 0,11 \cdot \left(\frac{k_{\text{э}}}{d} \right)^{0,25}$$

Расчет короткого трубопровода

Потери напора на местном сопротивлении при турбулентном режиме определяются по формуле:

$$h_m = \xi \frac{v_{cp}^2}{2g},$$

Если режим движения ламинарный, то потери напора на местном сопротивлении определяются по формуле:

$$h_m = \lambda \frac{l_{\text{э}}}{d} \frac{v_{cp}^2}{2g}$$

где l — эквивалентная длина, определяемая по таблицам в зависимости от вида местного сопротивления

Полный напор в начальном сечении трубопровода определяется по формуле:

$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2g}$$

Величина пьезометрического напора будет меньше полного напора на величину скоростного напора:

$$H_{p1} = H_1 - \frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2g}$$

Расчет короткого трубопровода

Следующее сечение выбирается в конце прямого участка трубы перед или в месте расположения следующего сопротивления

$$H_2 = H_1 - h_{\text{дл1-2}}$$

где $h_{\text{дл1-2}}$ – потери по длине между первым и вторым сечениями.

Пьезометрический напор во втором сечении будет меньше полного напора на величину скоростного напора:

$$H_{p2} = H_2 - \alpha_2 \frac{v_{2\text{ср}}^2}{2g}$$

Для упрощения расчета необходимо помнить, что при равномерном движении жидкости линия пьезометрического напора параллельна линии полного напора. Таким образом, последовательно строятся линии полного и пьезометрического напоров по всей длине трубопровода.

Расчет длинных трубопроводов

Понятие о простом и сложном напорных трубопроводах

При расчете длинных трубопроводов пренебрегают потерями напора на местных сопротивлениях, которые малы и обычно не превышают 5 % от общих потерь.

Преобразуем формулу Дарси, заменив скорость расходом, поделенным на площадь поперечного сечения трубы

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{\text{ср}}^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)^2} = A Q^2 l$$

$$A = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}$$

– удельное
сопротивление
трубопровода

Величина

$$K = \sqrt{\frac{1}{A}}$$

называется *модулем расхода* и также приводится в справочниках. Тогда

$$h_{\text{дл}} = \frac{Q^2}{K^2} l$$

Понятие о простом и сложном напорных трубопроводах

Запишем уравнение Бернулли для двух сечений трубопровода в его начале и в конце:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_{1\text{cp}}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_{2\text{cp}}^2}{2g} + h_{\text{дл}}$$

Обозначим:

$$\frac{p_1}{\rho g} = H_{\text{тр}}$$

– требуемый напор, т.е. напор, который должен создать насос в начале трубопровода;

$$z_2 - z_1 = \Delta z$$

– разность отметок земли в конце и в начале трубопровода;

$$\frac{p_2}{\rho g} = H_{\text{п}}$$

– пьезометрический напор, т.е. напор в конце трубопровода, который задается при проектировании;

$$H_{\text{п}} + \Delta z = H_{\text{ст}}$$

– статический напор.

Принимая во внимание, что в трубопроводе постоянного диаметра

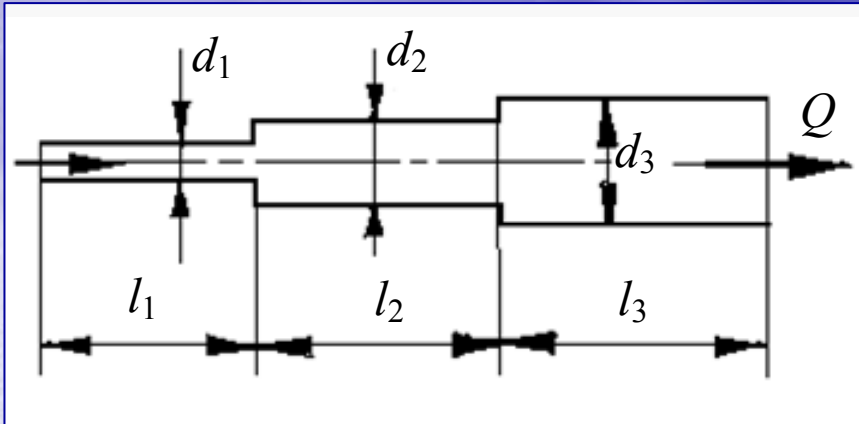
$$\frac{\alpha_1 v_{1\text{cp}}^2}{2g} = \frac{\alpha_2 v_{2\text{cp}}^2}{2g}$$

уравнение Бернулли примет вид

$$H_{\text{тр}} = H_{\text{ст}} + \frac{Q^2}{K^2} l$$

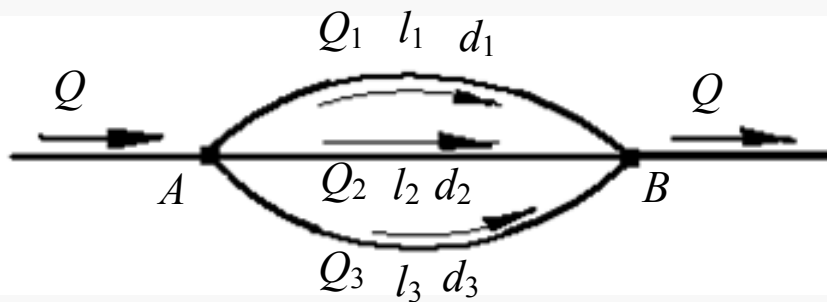
Простым называется трубопровод, не имеющий ответвлений. Всякие другие трубопроводы относят к категории **сложных**.

Расчет трубопроводов, соединенных последовательно и параллельно



При **последовательном соединении** простых трубопроводов разной длины и с различными диаметрами стык в стык, трубопровод представляет собой простой трубопровод, который можно разделить на несколько участко

$$H_{\text{тр}} = H_{\text{ст}} + Q^2 \left(\frac{l_1}{K_1^2} + \frac{l_2}{K_2^2} + \frac{l_3}{K_3^2} \right)$$



При **параллельном соединении** пьезометрический напор в узловых точках A и B одинаков для всех участков. Расход Q основного трубопровода до деления и после объединения труб один и тот же.

Задача расчета состоит в том, чтобы определить расходы в отдельных ветвях системы и также потери напора между точками A и B. Общий расход, диаметры и длины труб предполагаются известными.

Расчет трубопроводов, соединенных последовательно и параллельно

Потери напора в любой трубе ответвления одинаковы, так как в обеих общих точках разветвления имеется один и тот же напор H_A и H_B

$$h_{\text{дл}} = h_{\text{дл1}} = h_{\text{дл2}} = h_{\text{дл3}}$$

$$h_{\text{дл1}} = A_1 Q_1^2 l_1$$

$$h_{\text{дл2}} = A_2 Q_2^2 l_2$$

$$h_{\text{дл3}} = A_3 Q_3^2 l_3$$

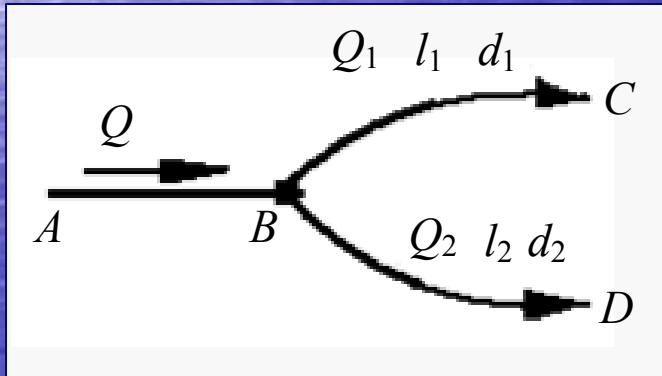
Отсюда

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \sqrt{\frac{A_2 l_2}{A_1 l_1}}$$

$$\frac{Q_1}{Q_3} = \sqrt{\frac{A_3 l_3}{A_1 l_1}}$$

$$\frac{Q_2}{Q_3} = \sqrt{\frac{A_3 l_3}{A_2 l_2}}$$

т.е. расходы на участках распределяются обратно пропорционально корню квадратному из их сопротивлений. Кроме того $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$



Простое разветвление представляет собой схему так называемой «вилки». В отличие от параллельного соединения напоры в конечных точках C и D могут быть не одинаковы.

$$Q = Q_1 + Q_2$$

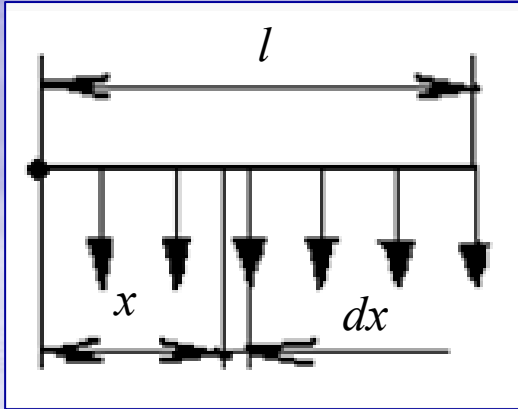
Для определения расходов в ветвях при заданном общем расходе и размерах труб ветвей необходимо составить уравнения

$$h_{\text{длAB}} = A Q^2 l$$

$$h_1 = A_1 Q_1^2 l_1$$

$$h_2 = A_2 Q_2^2 l_2$$

Расчет трубопроводов, соединенных последовательно и параллельно



Непрерывная раздача расхода по пути. К такой схеме приближается работа магистрали водопроводной сети вдоль улицы города при правильной планировке поперечных улиц. Возьмем элементарный участок dx на расстоянии x от начала трубопровода. Разбор расхода на 1 м длины — q . Расход через элементарный участок

$$Q_x = Q - qx$$

Потеря напора на этом участке

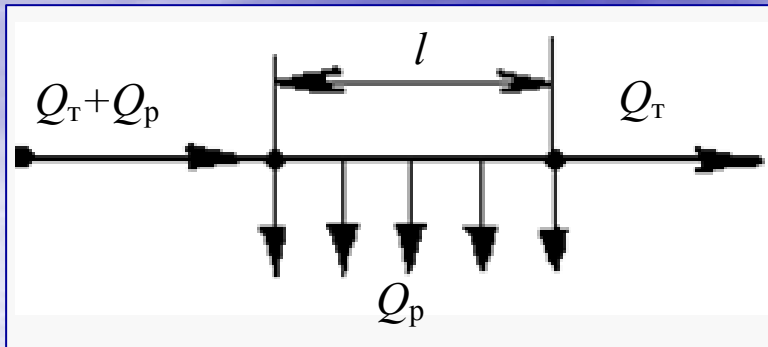
$$dh_{\text{дл}} = A Q_x^2 dx = A (Q - qx)^2 dx$$

Потеря напора по всей длине трубопровода

$$h_{\text{дл}} = \int_0^l dh_{\text{дл}} = A \int_0^l (Q - qx)^2 dx = A \left(Q^2 l - Qql^2 + \frac{q^2 l^3}{3} \right) = A \left(Q^2 l - Q^2 l + \frac{Q^2 l}{3} \right) = A \frac{Q^2 l}{3}$$

Вывод: При равномерной раздаче потеря энергии в трубопроводе в три раза меньше, чем в случае транзитного расхода.

Расчет трубопроводов, соединенных последовательно и параллельно



На практике обычно встречается смешанный случай, когда часть расхода проходит транзитом, а другая отбирается вдоль пути

В этом случае потеря напора определяется по формуле

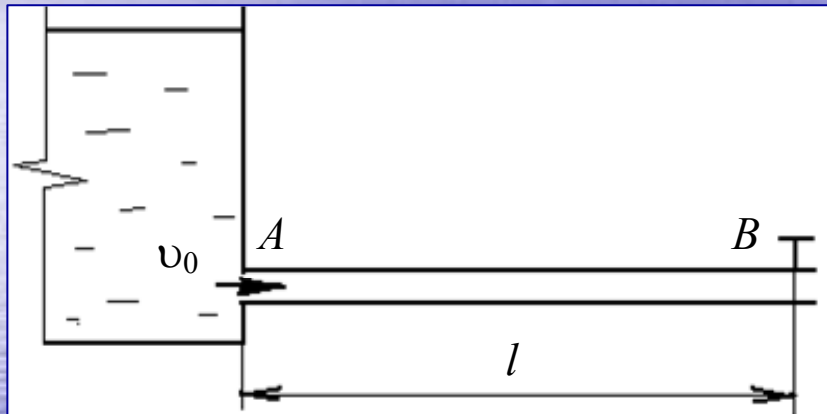
$$h_{\text{дл}} = A Q_{\text{расч}}^2 l$$

Расчетный расход

$$Q_{\text{расч}} = \sqrt{Q_{\text{т}}^2 + Q_{\text{р}} Q_{\text{т}} + \frac{Q_{\text{р}}^2}{3}}$$

Гидравлический удар

Под **гидравлическим ударом** понимают резкое повышение давления жидкости в трубопроводе, вызванное внезапным изменением скорости течения. Явление гидравлического удара свойственно только капельным жидкостям, которые почти не деформируются.



Теоретическое обоснование явления гидравлического удара и метод его расчета впервые дал Н.Е. Жуковский в 1898 г. Жуковский предложил формулу для определения повышения давления, применив закон сохранения количества движения

$$\Delta p_{\text{уд}} = \rho c v_0$$

где c – скорость распространения гидравлического удара вдоль трубы от крана до резервуара.

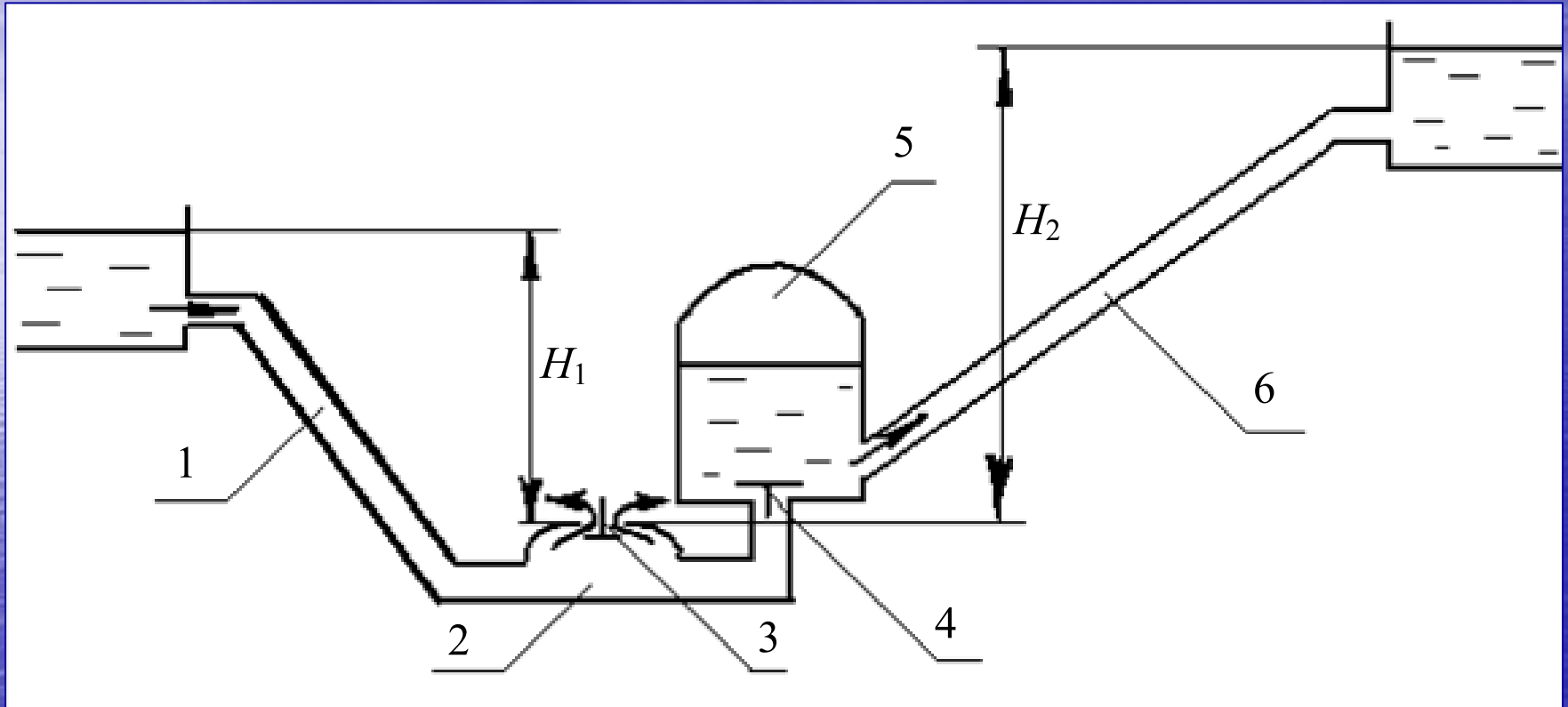
Скорость распространения гидравлического удара можно найти, применив закон сохранения массы с учетом уравнений механики упругих тел

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{E_{\text{ж}}} + \frac{2\rho r}{\delta E_{\text{тр}}}}}$$

где $E_{\text{ж}}$ – модуль упругости жидкости;
 $E_{\text{тр}}$ – модуль упругости трубы;
 r – радиус трубы;
 δ – толщина стенки трубы.

Гидравлический таран

Гидравлический таран служит для подачи воды на небольшую высоту без использования насосов.



Таким образом, гидравлический таран затрачивает часть расхода на подъем воды по нагнетательному трубопроводу на высоту, которая может достигать **10 H_1** . Обычно теряется половина расхода.