

Данный файл представлен исключительно в ознакомительных целях.

Уважаемый читатель!

Если вы скопируете данный файл,
Вы должны незамедлительно удалить его сразу после ознакомления с содержанием.
Копируя и сохраняя его Вы принимаете на себя всю ответственность, согласно действующему международному законодательству .
Все авторские права на данный файл сохраняются за правообладателем.
Любое коммерческое и иное использование кроме предварительного ознакомления запрещено.

Публикация данного документа не преследует никакой коммерческой выгоды. Но такие документы способствуют быстрейшему профессиональному и духовному росту читателей и являются рекламой бумажных изданий таких документов.

Введение

Гидравлика представляет собой теоретическую дисциплину, изучающую вопросы, связанные с механическим движением жидкости в различных природных и техногенных условиях. Поскольку жидкость (и газ) рассматриваются как непрерывные и неделимые физические тела, то гидравлику часто рассматривают как один из разделов механики так называемых сплошных сред, к каковым принято относить и особое физическое тело -жидкость. По этой причине гидравлику часто называют механикой жидкости или гидромеханикой; предметом её исследований являются основные законы равновесия и движения жидкостей и газов. Как в классической механике в гидравлике можно выделить общепринятые составные части: гидростатику, изучающую законы равновесия жидкости; кинематику, описывающую основные элементы движущейся жидкости и гидродинамику, изучающую основные законы движения жидкости и раскрывающую причины её движения.

Гидравлику можно назвать базовой теоретической дисциплиной для обширного круга прикладных наук, с помощью которых исследуются процессы, сопровождающие работу гидравлических машин, гидроприводов. С помощью основных уравнений гидравлики и разработанных ею методов исследования, решаются важные практические задачи, связанные с транспортом жидкостей и газов по трубопроводам, а также с транспортом твёрдых тел по трубам и другим руслам. Гидравлика также решает важнейшие практические задачи, связанные с равновесием твёрдых тел в жидкостях и газах, т.е. изучает вопросы плавания тел.

Широкое использование в практической деятельности человека различных гидравлических машин и механизмов ставят гидравлику в число важнейших дисциплин, обеспечивающих научно-технический прогресс.

Большой практический интерес к изучению механики жидкости вызван рядом объективных факторов. В - первых, наличие в природе значительных запасов жидкостей, которые легко доступны человеку. Во- вторых, жидкие тела обладают рядом полезных свойств, делающих их удобными рабочими агентами в практической деятельности человека. Немаловажным следует считать и тот фактор, что большинство жизненно важных химических реакций обмена протекают в жидкой фазе (чаще всего в водных растворах).

По этим причинам особый интерес человек проявил к жидкостям на самой ранней стадии своего развития. Вода и воздух (иначе жидкость и газ) были отнесены к числу основных стихий природы уже первобытным человеком. История свидетельствует об успешном решении ряда практических задач с использованием жидкостей уже на самих ранних стадиях развития человека. Первым же научным трудом по гидравлике следует

считать трактат Архимеда «О плавающих телах» (250 г. до н. э.)- Однако в дальнейшем на протяжении нескольких столетий в развитии человечества наступила эпоха всеобщего застоя, когда развитие знаний и практического опыта находились на весьма низком уровне. В последующую за этим эпоху возрождения началось бурное развитие человеческих знаний, науки, накопление практического опыта. Наравне с развитием других наук начала развиваться и наука об изучении взаимодействия жидких тел. Первыми крупными работами в этой области следует считать работы Леонардо да Винчи (1548-1620) - в области плавания тел, движения жидкостей по трубам и каналам. В работах Галилео Галилея (1564 - 1642) были сформулированы основные принципы равновесия и движения жидкости; работы Эванджелиста Торичелли (1604 - 1647) были посвящены решению задач по истечению жидкости из отверстий, а Блез Паскаль (1623 - 1727) исследовал вопросы по передаче давления в жидкости. Основополагающие и обобщающие работы в области механики физических тел, в том числе и жидких, принадлежат гениальному английскому физiku Исааку Ньютону (1643 - 1727), который впервые сформулировал основные законы механики, закон всемирного тяготения и закон о внутреннем трении в жидкостях при их движении.

Развитию гидромеханики (гидравлики) как самостоятельной науки в значительной степени способствовали труды русских учёных Даниила Бернулли (1700 - 1782), Леонарда Эйлера (1707 - 1783), М.В. Ломоносова (1711 - 1765). Работы этих великих русских учёных обеспечили настоящий прорыв в области изучения жидких тел: ими впервые были опубликованы дифференциальные уравнения равновесия и движения жидкости Эйлера, закон сохранения энергии Ломоносова, уравнение запаса удельной энергии в идеальной жидкости Бернулли.

Развитию гидравлики как прикладной науки и сближению методов изучения теоретических и

практических вопросов используемых гидравликой и гидромеханикой способствовали работы французских учёных Дарси, Буссинэ и др., а также работы Н.Е. Жуковского. Благодаря трудам этих учёных, а также более поздним работам Шеэи, Вейсбаха, Прандтля удалось объединить теоретические исследования гидромеханики с практическими и экспериментальными работами, выполненными в гидравлике. Работы Базена, Пуа-зейля, Рейнольдса, Фруда, Стокса и др. развили учение о динамике реальной (вязкой жидкости). Дифференциальное уравнение Навье - Стокса позволило описать движение реальной жидкости как функцию параметров этой жидкости в зависимости от внешних условий. Дальнейшие работы в области теоретической и прикладной гидромеханики были направлены на развитие методов решения практических задач, развитие новых методов исследования, новых направлений: теория фильтрации, газо- и аэродинамика и др. При решении практических вопросов гидравлика оперирует всеми известными методами исследований: методом анализа бесконечно малых величин, методом средних величин, методом анализа размерностей, методом аналогий, экспериментальным методом.

Метод анализа бесконечно малых величин - наиболее удобный из всех методов для количественного описания процессов равновесия и движения жидкостей и газов. Этот метод наиболее эффективен в тех случаях, когда приходится рассматривать движение объектов на атомно-молекулярном уровне, т.е. в тех случаях, когда для вывода уравнений движения приходится рассматривать жидкость (или газ) с молекулярно-кинетической теории строения вещества. Основным недостаток метода - довольно высокий уровень абстракции, что требует от читателя обширных знаний в области теоретической физики и умение пользоваться различными методами математического анализа, включая векторный анализ.

Метод средних величин - является более доступным методом, поскольку его основные положения базируются на простых (близких к обыденным) представлениях о строении вещества. При этом выводы основных уравнений в большинстве случаев не требуют знаний молекулярно-кинетической теории, а результаты, полученные при исследованиях, этим методом не противоречат «здравому смыслу» и кажутся обоснованными. Недостаток этого метода исследований связан с необходимостью иметь некоторые априорные представления о предмете исследований.

Метод анализа размерностей может рассматриваться в качестве одного из дополнительных методов исследований и предполагает всестороннее знание изучаемых физических процессов.

Методом аналогий - используется в тех случаях, когда имеются в наличии детально изученные процессы, относящиеся к тому же типу взаимодействия вещества, что и изучаемый процесс.

Экспериментальный метод является основным методом изучения, если другие методы по каким-либо причинам не могут быть применены. Этот метод также часто используется как критерий для подтверждения правильности результатов полученных другими методами.

В конечном счёте, метод изучения движения жидкости, а также уровень изучения (макро или микро) выбирается из условий практической постановки задач и соотношения характерных размеров. Основным мерилем для этих характерных размеров может быть длина свободного пробега молекул. Так для изучения движения жидкости на макро уровне необходимо, чтобы характерные размеры: L (некоторая длина) и d (ширина) по отношению к длине свободного пробега молекул λ , находились в соответствии:

$$L \gg \lambda, \text{ и } d \ll \lambda$$

1. Общие сведения о жидкостях 1.1. Жидкость как физическое тело

Чтобы представить и правильно понять характер поведения жидкости в различных условиях необходимо обратиться к некоторым представлениям классической физики о жидкости как физическом теле. Не ставя перед собой цель детального и всестороннего описания жидких тел, что подробно рассматривается в классическом курсе физики, напомним лишь некоторые положения, которые могут пригодиться при изучении гидравлики как самостоятельной дисциплины.

Так, согласно молекулярно-кинетической теории строения вещества все физические тела в природе (независимо от их размеров) находятся в постоянном взаимодействии между собой. Степень (интенсивность) взаимодействия зависит от масс этих тел и от расстояния между телами.

Количественной мерой взаимодействия тел является сила, которая пропорциональна массе тел и всегда будет убывать при увеличении расстояния между телами. В зависимости от размеров тел (элементарные частицы, атомы и молекулы, макротела) характер взаимодействия будет различным. Согласно классическим представлениям физики можно выделить четыре вида взаимодействия тел. Каждый вид взаимодействия обусловлен наличием своего переносчика взаимодействия. Два вида

взаимодействия относятся к типу дальнодействующих и повседневно наблюдаются человеком: гравитационное и электромагнитное. При электромагнитном взаимодействии происходит процесс излучения и поглощения фотонов. Именно этот процесс порождает электромагнитные силы, под действием которых протекают практически все процессы в природе, которые мы наблюдаем. Характерной особенностью этого (электромагнитного) взаимодействия является то, что его проявление зависит от многих внешних условий, которые приводят к различным наблюдаемым результатам. Так имея одну и ту же природу взаимодействия (электромагнитную) мы изучаем, на первый взгляд, совершенно разные физические процессы: движение жидкости, трение, упругость, передачу тепла, движение зарядов в электрическом поле и т.д. И, как следствие, дифференциальные уравнения, описывающие эти процессы, одинаковые.

Согласно молекулярно-кинетической теории строения вещества молекулы находятся в равновесии и, как материальные объекты постоянно взаимодействуют друг с другом. Такое равновесие нельзя считать абсолютным, т.к. молекулы находятся в состоянии хаотического движения (колебания) вокруг центра своего равновесия. Расстояния между молекулами вещества будут зависеть от величин сил действующих на молекулы. Независимо от природы действующих сил их можно сгруппировать на силы притяжения и силы отталкивания.

Условие равновесия этих сил определяет оптимальные расстояния между молекулами. Однако, в связи с тем, что такое равновесие между действующими силами является динамическим равновесием, молекулы находятся в постоянном колебательном движении относительно друг друга, испытывая при этом действие некоторой равнодействующей силы порождаемой силами притяжения и отталкивания. Поэтому особенности состояния вещества будут зависеть от соотношения между кинетической энергией колебательного движения молекул вещества и энергией взаимодействия между молекулами вещества. Так при больших массах молекул энергия взаимодействия между молекулами многократно превышает кинетическую энергию колебательного движения вещества, вследствие чего молекулы вещества занимают устойчивое положение относительно друг друга, обеспечивая тем самым постоянство формы и размеров макротела. Такие вещества, как известно, относятся к категории твёрдых тел. Противоположными особенностями характеризуются вещества, состоящие из «лёгких» молекул (молекул обладающих малой массой). Такие вещества обладают кинетической энергией колебательного движения молекул вещества превышающей многократно энергию взаимодействия между молекулами, из которых вещество состоит. По этой причине молекулы такого вещества имеют очень слабую связь между собой и легко перемещаются в пространстве на любые расстояния. Такое свойство вещества носит название диффузии (летучести). Вещества, обладающие этим свойством, относятся к категории газов. В тех случаях, когда энергия взаимодействия имеет тот же порядок, что и величина кинетической энергии колебательного движения молекул, последние обладают свойством относительной подвижности, но, при этом, сохраняют целостность самого макротела. Такое тело обладает способностью легко деформироваться при минимальных касательных напряжениях, т. е. такое тело обладает текучестью. На самом деле колебательный процесс среди молекул жидких тел достаточно сложен, и с целью простого описания данного процесса можно нарисовать упрощенную картину взаимодействия молекул жидкости. Так в отличие от молекул в твёрдых телах, при колебательном процессе в жидкости центры взаимодействия молекул могут смещаться в пространстве на

столько, на сколько это допускают расстояния между молекулами (до величины 1×10^{-8} см).

Смещение центра равновесия сил в пространстве называется релаксацией. Время, за которое происходит такое смещение, называется временем релаксации, t_0 . При этом смещение центра равновесия осуществляется не постепенно, а скачком. Таким образом, время релаксации характеризует продолжительность «оседлой жизни» молекул жидкости. Если на жидкость будет действовать некоторая сила F , то при совпадении линии действия этой силы с направлением скачка, жидкость начнёт перемещаться. При этом необходимо выполнение дополнительного условия: продолжительность действия силы должна быть

больше длительности времени релаксации t_0 , т.к. в противном случае жидкость не успеет начать своё движение, и будет испытывать упругое сжатие подобно твёрдому телу. Тогда процесс движения жидкости будет характеризовать свойство текучести присущее практически только жидким телам. Тела с такими свойствами относятся к категории жидких тел.

При этом следует отметить, что чётких и жёстких границ между твёрдыми, жидкими и газообразными

талами нет. Имеется большая группа тел занимающих промежуточное положение между твёрдыми талами и жидкостями и между жидкостями и газами. Вообще говорить о состоянии вещества можно только при вполне определённых внешних условиях. В качестве стандартных условий приняты условия при температуре 20 °С и атмосферном давлении. Стандартные (нормальные) условия вполне соотносятся с понятием благоприятных внешних условий для существования человека. Понятие о состоянии вещества необходимо дополнить. Так при увеличении кинетической энергии молекул вещества (нагрев вещества) твёрдые тела могут перейти в жидкое состояние (плавление твёрдого тела) и твёрдые тела приобретут при этом некоторые свойства жидкостей. Подобно этому увеличение кинетической энергии молекул жидкого вещества может привести жидкость в газообразное состояние (парообразование) и при этом жидкость будет иметь свойства соответствующие газам. Аналогичным способом можно превратить расплавленное твёрдое тело в пар, если в большей степени увеличить кинетическую энергию колебательного движения молекул первоначально твёрдого вещества. Уменьшение кинетической энергии молекул (охлаждение вещества) приведёт процесс в обратном направлении. Газ может быть превращён в жидкое, а, затем и в твёрдое состояние. Изучение реальных жидкостей и газов связано со значительными трудностями, т.к. физические свойства реальных жидкостей зависят от их состава, от различных компонентов, которые могут образовывать с жидкостью различные смеси как гомогенные (растворы) так и гетерогенные (эмульсии, суспензии и др.) По этой причине для вывода основных уравнений движения жидкости приходится пользоваться некоторыми абстрактными моделями жидкостей и газов, которые наделяются свойствами неприсущими природным жидкостям и газам.

Идеальная жидкость - модель природной жидкости, характеризующаяся изотропностью всех физических свойств и, кроме того, характеризуется абсолютной несжимаемостью, абсолютной текучестью (отсутствие сил внутреннего трения), отсутствием процессов теплопроводности и теплопереноса.

Реальная жидкость - модель природной жидкости, характеризующаяся изотропностью всех физических свойств, но в отличие от идеальной модели, обладает внутренним трением при движении.

Идеальный газ - модель, характеризующаяся изотропностью всех физических свойств и абсолютной сжимаемостью.

Реальный газ - модель, при которой на сжимаемость газа при условиях близких к нормальным условиям существенно влияют силы взаимодействия между молекулами.

При изучении движения жидкостей и газов теоретическая гидравлика (гидромеханика) широко пользуется представлением о жидкости как о сплошной среде. Такое допущение вполне оправдано, если учесть, что размеры пространства занимаемого жидкостью, во много раз превосходят межмолекулярные расстояния (исключением можно считать лишь разреженный газ). При изучении движения жидкостей и газов последние часто рассматриваются как жидкости с присущими им некоторыми особыми свойствами. В связи с этим принято различать две категории жидкостей: капельные жидкости (практически несжимаемые тела, или собственно жидкости) и сжимаемые жидкости (газы).

1.2. Основные физические свойства жидкостей

Плотность и удельный вес. К основным физическим свойствам жидкостей следует отнести те её свойства, которые определяют особенности поведения жидкости при её движении. Таковыми являются свойства, характеризующие концентрацию жидкости в пространстве, свойства, определяющие процессы деформации жидкости, определяющие величину внутреннего трения в жидкости при её движении, поверхностные эффекты.

Важнейшим физическим свойством жидкости, определяющим её концентрацию в пространстве, является плотность жидкости. Под плотностью жидкости понимается масса единицы объёма жидкости:

$$\rho = \frac{M}{W},$$

где: M - масса жидкости,
 W - объём, занимаемый жидкостью.

В международной системе единиц СИ масса вещества измеряется в кг, объём жидкого тела в m^3 , тогда размерность плотности жидкости в системе единиц СИ - $кг/м^3$. В системе единиц СГС плотность жидкости измеряется в $г/см^3$.

Величины плотности реальных капельных жидкостей в стандартных условиях изменяются в системе единиц СИ в широких пределах от 700 кг/м^3 до 1800 кг/м^3 , а плотность ртути достигает 13550 кг/м^3 , плотность чистой воды составляет 998 кг/м^3 . В системе единиц СГС пределы изменения плотности жидкости от $0,7 \text{ г/см}^3$ до $1,8 \text{ г/см}^3$, плотность чистой воды $0,998 \text{ г/см}^3$. Величины плотности газов меньше плотности капельных жидкостей приблизительно на три порядка, т.е. в системе единиц СИ плотности газов при атмосферном давлении и температуре 0°C изменяются в пределах от $0,09 \text{ кг/м}^3$ до $3,74 \text{ кг/м}^3$, плотность воздуха составляет $1,293 \text{ кг/м}^3$.

Плотность капельных жидкостей при стандартных условиях, $\rho \text{ кг/м}^3$		Плотность газов при атмосферном давлении и температуре 0°C , $\rho \text{ кг/м}^3$	
Азотная кислота	1510	Азот	1,251
Анилин	1020	Аммиак	0,771
Ацетон	791	Аргон	1,783
Бензин	680-720	Ацетилен	1,173
Бензол	879	Водород	0,090
Бром	3120	Воздух	1,293
Вода, H_2O	998	Гелий	0,178
Вода тяжёлая, D_2O	1109	Кислород	1,429
Глицерин	1260	Криптон	3,740
Морская вода	1010-1030	Неон	0,900
Нефть	760-995	Озон	2,139
Серная кислота	1830	Углекислота, CO_2	1,977
Этиловый спирт	790	Хлор	3,220

Плотность капельных жидкостей и газов зависит от температуры и давления. Зависимость величины плотности жидкости и газа при температуре отличной от 20°C определяется по формуле Д.И. Менделеева:

$$\rho_t = \frac{\rho_{20}}{1 + \beta_i (T - T_0)},$$

где: ρ и ρ_{20} - плотности жидкости (газа) при температурах соответственно T и $T_0 = 20^\circ\text{C}$,

β_i - коэффициент температурного расширения.

Исключительными особенностями обладает вода, максимальная плотность которой отмечается при 4°C

Плотность воды при различных температурах и атмосферном давлении					
$T, ^\circ\text{C}$	$\rho \text{ кг/м}^3$	$T, ^\circ\text{C}$	$\rho \text{ кг/м}^3$	$T, ^\circ\text{C}$	$\rho \text{ кг/м}^3$
-10	998,15	10	999,73	200	869,00
-5	999,30	20	998,23	250	794,00
0	999,87	50	988,07	300	710,00
2	999,97	100	958,38	350	574,00
4	1000,00	150	917,30	374,15	307,00

Плотность капельных жидкостей в зависимости от давления может быть определена в соответствии с уравнением состояния упругой жидкости:

$$\rho(p) = \rho_{atm} e^{\beta_p(p-p_{atm})}$$

- где: ρ_{atm} - плотность капельной жидкости при атмосферном давлении p_{atm} ,
 - β_p коэффициент объёмного сжатия капельной жидкости.
- Плотность идеальных газов при давлениях отличных от атмосферного можно определить по известному закону газового состояния Менделеева-Клайперона:

$$pV = RT,$$

давление,

V удельный объём газа

$R = \frac{1}{\rho}$ универсальная газовая постоянная
температура газа

R при $T = const$ $\rho = \rho_{atm} \frac{p}{p_{atm}}$.

T Кроме абсолютной величины плотности капельной жидкости, на практике пользуются и величиной её относительной плотности, которая представляет собой отношение ве-

личины абсолютной плотности жидкости к плотности чистой воды при температуре 4 °C: $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{44^\circ}}$.

Относительная плотность жидкости - величина безразмерная.

Имеется аналогичная характеристика и для газов. Под относительной плотностью газа (по воздуху) понимается отношение величины абсолютной плотности газа к плотности воздуха при стандартных условиях.

О плотности жидкости косвенно можно судить по весовому показателю, - удельному весу жидкости. Под удельным весом жидкости (газа) понимается вес единицы объёма жидкости (газа):

$$\gamma = \frac{G}{W},$$

G вес жидкости (газа),

где: ..

W объём, занимаемый жидкостью (газом).

Связь между плотностью и удельным весом жидкости такая же как и между массой тела и её весом:

$$\gamma = \rho g$$

Размерность удельного веса жидкости в системе единиц СИ $н/м^3$, удельный вес чистой воды составляет $9810 н/м^3$. Аналогично вводится понятие об относительном удельном весе жидкости, $\tilde{\gamma}$.

На практике величина плотности жидкости определяется с помощью простейшего прибора - ареометра. По глубине погружения прибора в жидкость судят о её плотности.

Упругость. Капельные жидкости относятся к категории плохо сжимаемых тел. Причины незначительных изменений объёма жидкости при увеличении давления очевидны, т.к. межмолекулярные расстояния в капельной жидкости малы и при деформации жидкости приходится преодолевать значительные силы отталкивания, действующие между молекулами, и даже испытывать влияние сил, действующих внутри атома. Тем не менее, сжимаемость жидкостей в 5 - 10 раз выше, чем сжимаемость твёрдых тел, т.е. можно считать, что все капельные жидкости обладают упругими свойствами.

Оценка упругих свойств жидкостей может осуществляться по ряду специальных параметров. коэффициент объёмного сжатия жидкости представляет собой относительное изменение объёма жидкости при изменении давления на единицу. По существу это известный закон Гука для модели объёмного сжатия:

$$\beta = -\frac{1}{W_0} \frac{dW}{dp}$$

W_0 начальный объём жидкости, (при начальном давлении),

β

коэффициент объёмного (упругого) сжатия жидкости.

Считается, что коэффициент объёмного сжатия жидкости зависит с достаточно большой точностью только от свойств самой жидкости и не зависит от внешних условий. Коэффициент объёмного сжатия жидкости имеет размерность обратную размерности давления, т.е. м/н . адиабатический модуль упругости жидкости K , зависящий от термодинамического состояния жидкости (величина обратная коэффициенту объёмного сжатия жидкости):

,

$$K = \frac{1}{\beta}.$$

Величина модуля упругости жидкости имеет размерность напряжения, т.е. н/м .

об упругих свойствах капельной жидкости можно судить по скорости распространения продольных волн в жидкой среде, которая равна скорости звука в покоящейся жидкости:

$$\frac{K}{\rho} = \frac{dp}{d\rho} = a^2$$

С упругими свойствами капельных жидкостей также связаны представления о сопротивлении жидкостей растяжению. Теоретически в чистых жидкостях могут быть достигнуты довольно значительные напряжения. Однако, в реальных жидкостях при наличии в них даже весьма незначительных примесей (твёрдые частицы, газ) уменьшает величину сопротивления жидкости растяжению практически до 0. По этой причине можно считать, что в капельных жидкостях напряжения растяжению невозможны.

Об упругих свойствах газов можно судить исходя из классического уравнения Пуассона:

$$p = p_{ат} \left(\frac{\rho}{\rho_{ат}} \right)^n;$$

где: n - показатель адиабаты равный отношению теплоёмкости газа при постоянном давлении к величине теплоёмкости газа при постоянном объёме.

$$n = \frac{c_p}{c_v} \approx 1,43.$$

Для оценки упругих свойств движущегося газа пользуются не абсолютной величиной скорости звука $c_{зв}$, а отношением скорости потока газа v к скорости звука в газе. Этот показатель носит название числа Маха;

$$M = \frac{v}{c_{зв}}$$

Вязкость. При движении реальных (вязких) жидкостей в них возникают внутренние напряжения, обусловленные силами внутреннего трения жидкости. Природа этих сил довольно сложна;

возникающие в жидкости напряжения связаны с процессом переноса импульса $\overline{\rho v}$ (вектора массовой скорости движения жидкости). При этом возникающие в жидкости напряжения обусловлены двумя факторами: напряжениями, возникающими при деформации сдвига и напряжениями, возникающими при деформации объёмного сжатия.

Наличие сил вязкостного трения в движущейся жидкости подтверждается простым и наглядным опытом. Если в цилиндрическую ёмкость, заполненную жидкостью опустить вращающийся цилиндр, то вскоре придёт в движение (начнёт вращаться вокруг своей оси в том же направлении, что и вращающийся цилиндр) и сама ёмкость с жидкостью. Этот факт свидетельствует о том, что вращательный момент от вращающегося цилиндра был передан через вязкую жидкость самой ёмкости, заполненной жидкостью.

Напряжения, возникающие при деформации сдвига согласно гипотезе Ньютона пропорциональны градиенту скорости в движущихся слоях жидкости, а сила трения между слоями движущейся жидкости будет пропорциональна площади поверхности движущихся слоев жидкости:

$$T = \tau S,$$

где: сила трения между слоями движущейся жидкости,

- площадь поверхности слоев движущейся жидкости,

T -

S

τ - касательные напряжения, возникающие в жидкости при деформации сдвига,

$$\tau = \pm \mu \frac{du}{dy}, \quad \mu \text{ коэффициент динамической вязкости жидкости.}$$

Величина коэффициента динамической вязкости жидкости при постоянной температуре и постоянном давлении зависит от внутренних (химических) свойств самой жидкости. Размерность коэффициента динамической вязкости в системе единиц СИ: $\text{н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$, в системе СГС - $\text{д} \cdot \text{с} / \text{см}$.

Последняя размерность носит название пуаза (пз). Таким образом, $1 \text{ пз} = 1 \text{ д} \cdot \text{с} / \text{см}$, а соотношение между единицами вязкости. $1 \text{ да} = 0,1 \text{ н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$.

Помимо коэффициента динамической вязкости жидкости широко используется коэффициент кинематической вязкости жидкости ν , представляющий собой отношение коэффициента динамической вязкости к плотности жидкости:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

В системе единиц СИ коэффициент кинематической вязкости измеряется в $\text{м}^2 / \text{с}$, в системе единиц СГС единицей измерения коэффициента кинематической вязкости жидкости является стоке (см^2), т.е. $1 \text{ см}^2 = 1 \text{ ст} / \text{с}$.

Коэффициент динамической вязкости чистой воды составляет $1 \cdot 10^{-3} \text{ н} \cdot \text{с} / \text{м}$ (или $0,01 \text{ пз}$), коэффициент кинематической вязкости чистой воды составляет $10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$ (или $0,01 \text{ ст}$).

- -

Коэффициенты вязкости жидкостей варьируют в весьма широких пределах от $0,0003$ до $0,139 \text{ н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$.

Вязкость жидкости в значительной степени зависит от температуры и давления. При увеличении температуры каплярной жидкости коэффициенты её вязкости (как динамический, так и кинематический) резко снижается в десятки и сотни раз, что обусловлено увеличением внутренней энергии молекул жидкости по сравнению с энергией межмолекулярной связи в жидкости. Зависимость вязкости каплярной жидкости от температуры может быть выражена в виде экспоненциальной зависимости:

$$\mu(T) = \mu_0 e^{-\alpha_T (T - T_0)},$$

где: μ_0 - вязкость каплярной жидкости при стандартной температуре $T_0 = 20^\circ \text{C}$,

α_T - экспериментальный температурный коэффициент. Зависимость вязкости жидкости от давления в широком диапазоне давлений остаётся практически линейной:

$$\mu(p) = \mu_{at} (1 + \alpha_p p),$$

где: μ_{at} - вязкость жидкости при атмосферном давлении, α_p - экспериментальный коэффициент пропорциональности.

Газы обладают несравнимо более низкими коэффициентами вязкости от $0,0000084$ до $0,0000192 \text{ н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$, и в отличие от каплярных жидкостей вязкость газов увеличивается при увеличении температуры, т.к. с увеличением температуры газа возрастают скорости теплового движения молекул и, соответственно, увеличивается число соударений молекул газа, что делает газ более вязким. Зависимость вязкости газа от давления ничем не отличается от аналогичной зависимости для каплярных жидкостей.

Коэффициент динамической вязкости жидкостей и газов			
Капельные жидкости при $T = 18^\circ \text{C}$	$\mu, \text{н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$	Газы при $T = 0^\circ \text{C}$	$\mu, \text{н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$

Анилин	0,00460	Азот	0,0000167
Ацетон	, 0,00034	Аммиак	0,0000093
Бром	0,00102	Водород	0,0000084
Вода	. * 0,00105	Воздух	0,0000172
Глицерин	1,39300	Кислород	0,0000192
Масло машинное	0,11300	Метан	0,0000104
Нефть	0,0080-0,1000	Углекислота CO ₂	0,0000140
Спирт этиловый	0,00122	Хлор	0,0000129

Измерение вязкости жидкостей осуществляется с помощью вискозиметров, работающих на принципе истечения жидкости через малое калиброванное отверстие; вязкость вычисляется по скорости истечения.

Кроме деформации сдвига внутреннее сопротивление в жидкости возникает и при объёмном сжатии жидкости, т.е. сжимаемая жидкость стремится восстановить состояние первоначального равновесия. Этот процесс, в некоторой степени, аналогичен проявлению сил сопротивления при деформации сдвига, хотя сам процесс и отличается по своей сути. По этой причине говорят, что в жидкости проявляется так называемая вторая вязкость ξ , обусловленная деформацией объёмного сжатия жидкости.

Поверхностное натяжение. Когда мы говорим о жидкости как о сплошной среде, это вовсе не означает, что эта среда бесконечна и безгранична. Жидкое тело всегда имеет границы, это либо твёрдые стенки каналов, либо границы раздела с газообразной средой, либо это граница раздела между различными несмешивающимися жидкостями. Такие границы можно с полным правом называть естественными границами.

В некоторых случаях границы могут выделяться условно внутри самой движущейся жидкости. На естественных границах в пограничном слое жидкости между молекулами самой жидкости и молекулами окружающей жидкостью среды существуют силы притяжения, которые, в общем случае, могут оказаться не равными. В то же время силы взаимодействия между остальными молекулами жидкости, находящимися внутри объёма, ограниченного пограничным слоем эти силы взаимно уравновешены. Таким образом, остаются не уравновешенными силы взаимодействия между молекулами, находящимися лишь во внешнем (пограничном слое). Тогда в пограничном слое возникают напряжения, которые автоматически балансируют не сбалансированные силы притяжения. Такие напряжения называются поверхностным натяжением жидкости. Этому напряжению будут соответствовать силы поверхностного натяжения. Под действием этих сил малые объёмы жидкости принимают сферическую форму (форму капли), соответствующей минимуму внутренней энергии; в трубках малого диаметра жидкость поднимается (или опускается) на некоторую высоту по отношению к уровню покоящейся жидкости. Последнее явление носит название капиллярности. Жидкость в трубке малого диаметра (капилляре) будет подниматься, если жидкость по отношению к стенке капилляра будет смачивающей жидкостью, и наоборот, будет опускаться, если жидкость для стенки капилляра окажется не смачивающей. Высоту h подъёма (опускания) жидкости в капилляре с диаметром d можно определить из соотношения:

$$h = \pm \frac{A}{d} \quad ? \text{ где: } A - \text{постоянная зависящая от свойств жидкости.}$$

Для воды мм,

$$h = \frac{30}{d},$$

Для ртути $h = -\frac{10}{d}$, мм.

Силы поверхностного натяжения малы и проявляются при малых объёмах жидкости. Величина напряжений на границе раздела зависит от температуры жидкости; при увеличении температуры внутренняя энергия молекул возрастает и, естественно, уменьшается напряжение в пограничном

слое жидкости и, следовательно, уменьшаются силы поверхностного натяжения.

Растворимость газов в капельных жидкостях. В реальных жидкостях всегда находится в растворённом состоянии газ. Это может быть воздух, азот, углеводородный газ, углекислота CO_2 , сероводород H_2S др. Наличие газа растворённого в жидкости может оказывать как благоприятное воздействие (снижается вязкость жидкости, плотность и т.д.), так и неблагоприятные факторы. Так при снижении давления из жидкости выделяется свободный газ, который может стать источником такого нежелательного явления как кавитация; выделяющийся газ может оказаться не безопасным для окружающей среды (H_2S), огнеопасным и взрывоопасным (углеводородный газ). Газ, растворённый в жидкости, как и газ в свободном состоянии может также способствовать коррозии стенок труб и оборудования, вызывать химические реакции, ведущие к образованию отложений твёрдых солей на стенках труб, накипей и др. По этой причине знание особенностей и законов растворения газа в жидкости крайне желательно.

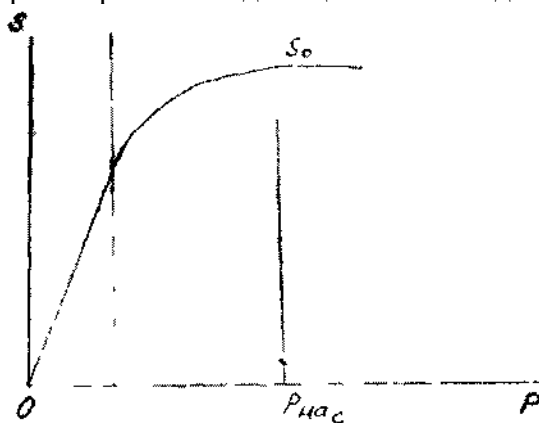
Количество газа, которое может раствориться в капельной жидкости, зависит от физико-химических свойств самой жидкости и растворяемого в ней газа, а также от температуры и давления. Максимальное количество газа, которое может быть растворено в данной жидкости носит название предельной газонасыщенности для данного газа s_0 . Естественно, что величины предельной газонасыщенности для разных газов будут разными. Другой характеристикой процесса растворения газа в жидкости является давление насыщения температуры внутренняя энергия молекул возрастает и, естественно, уменьшается напряжение в пограничном слое жидкости и, следовательно, уменьшаются силы поверхностного натяжения.

Растворимость газов в капельных жидкостях. В реальных жидкостях всегда находится в растворённом состоянии газ. Это может быть воздух, азот, углеводородный газ, углекислота CO_2 , сероводород H_2S и др. Наличие газа растворённого в жидкости может оказывать как благоприятное воздействие (снижается вязкость жидкости, плотность и т.д.), так и неблагоприятные факторы. Так при снижении давления из жидкости выделяется свободный газ, который может стать источником такого нежелательного явления как кавитация; выделяющийся газ может оказаться не безопасным для окружающей среды (H_2S), огнеопасным и взрывоопасным (углеводородный газ). Газ, растворённый в жидкости, как и газ в свободном состоянии может также способствовать коррозии стенок труб и оборудования, вызывать химические реакции, ведущие к образованию отложений твёрдых солей на стенках труб, накипей и др. По этой причине знание особенностей и законов растворения газа в жидкости крайне желательно.

Количество газа, которое может раствориться в капельной жидкости, зависит от физико-химических свойств самой жидкости и растворяемого в ней газа, а также от температуры и давления. Максимальное количество газа, которое может быть растворено в данной жидкости носит название предельной газонасыщенности для данного газа s_0 . Естественно, что величины предельной газонасыщенности для разных газов будут разными. Другой характеристикой процесса растворения газа в жидкости является давление насыщения $p_{\text{нас}}$, это такое минимальное давление в жидкости, при котором достигается насыщение капельной жидкости газом. При невысоких давлениях значительно уступающих величине давления насыщения справедлив закон растворимости Генри:

$$s(p) = \alpha \cdot p$$

Количество газа растворимого в единице объёма жидкости пропорционально давлению. При



увеличении дав

ления до давления насыщения величина

Кривая растворимости газа в жидкости $s(p)$. коэффициент растворимости газа α ,

— давление насыщения, sp — величина

$P_{нас}$ снижается, прегтетттью гязонясытттенности

В жидкости может одновременно

растворяться целая группа различных газов; нередко случаи, когда капельная жидкость и растворимый в ней газ имеют одинаковую природу (нефть и углеводородные газы); в последнем случае между жидкостью и газом может существовать весьма условная граница, зависящая от температуры смеси и других прочих условий.

Испаряемость. При повышении температуры жидкости и, в некоторых случаях, при снижении давления часть массы капельной жидкости постепенно переходит в газообразное состояние (пар). Интенсивность процесса парообразования зависит от температуры кипения жидкости при нормальном атмосферном давлении: чем выше температура кипения жидкости, тем меньше её испаряемость. Однако, более полной характеристикой испаряемости следует считать давление (упругость) насыщенных паров, данное в функции температуры. Чем больше насыщенность паров при данной температуре, тем больше испаряемость жидкости. с_

Адсорбция Адсорбцией принято называть концентрацию одного из веществ, происходящую в его поверхностном слое, т.е. на границе раздела двух фаз (например, жидкость и поверхность твёрдого тела). Такая концентрация молекул жидкости на поверхности твёрдого тела обуславливается силами межмолекулярного взаимодействия. Так сила притяжения молекул жидкости со стороны молекул твёрдого тела неизмеримо выше, силы притяжения оказываемой со стороны молекул самой жидкости. По этой причине на поверхности твёрдого тела образуется устойчивая пленка, состоящая из молекул жидкости, которая способна удерживаться на поверхности твёрдого тела даже в том случае, когда вдоль поверхности твёрдого тела перемещается поток жидкости. Сильное притяжение со стороны молекул твёрдого тела могут испытывать также и молекулы второго и третьего слоев молекул жидкости, т.е. образующаяся на поверхности твёрдого тела плёнка из частиц жидкости может быть многослойной. Поскольку сила взаимодействия между молекулами убывает с увеличением расстояния между ними, то молекулы удалённых от поверхности твёрдого тела слоев легко разрушаются под действием различных сил, т.е. внешние слои молекул жидкости крайне неустойчивы. Процесс разрушения образованной плёнки из жидких молекул называется десорбцией. Как правило, эти два процесса идут одновременно, образуя состояние неустойчивого равновесия.

Адсорбируемое вещество (в нашем случае это жидкость) называется адсорбатом, а адсорбирующее вещество (в нашем случае это твёрдое тело) называется адсорбентом. Процесс собственно адсорбции происходит на поверхности твёрдого тела без внедрения молекул адсорбата в твёрдое тело.

В тех случаях, когда молекулы адсорбата проникают в поверхностный слой адсорбента, то такой процесс принято называть абсорбцией. Если же при этом будет происхо-

дить химические реакции между веществами, то такой процесс носит название хемсорб-ции.

Следует отметить, что скорость сорбционных процессов зависит от внешних условий (температура и давление) а также от свойств самих веществ. На практике с сорбционными процессами мы встречаемся при гидроизоляции зданий и сооружений, при уплотнении сальников в различных механизмах и машинах.

1.3. Многокомпонентные жидкости

В природе химически чистых жидкостей нет, технических рафинированных тоже немного. Обычно в основной жидкости всегда имеются незначительные или весьма существенные добавки (примеси).

Для капельной жидкости примесями могут быть другие жидкости, газы и твёрдые тела. В таких случаях жидкость с примесями может образовать гомогенную или гетерогенную смесь.

Гомогенные смеси образуются в тех случаях, когда в основной жидкости (в таких случаях эта жидкость называется растворителем) примеси распределяются по всему объёму растворяющей жидкости равномерно на уровне молекул. В таких случаях смесь физически представляет собой однородную среду, называемую раствором. Сами же примеси носят название компонент.

Физические свойства такой гомогенной смеси (плотность и удельный вес) можно определить по компонентному составу:

$$\rho_{\text{см}} = \frac{\sum k_i \rho_i}{\sum k_i},$$

где: - плотность смеси,

$$\rho_{\text{см}}$$

$$\rho_i$$

- плотность i - той компоненты, k_i - количество / - той компоненты.

Величины других параметров смеси (вязкость и др.) зависят от многих физико-химических факторов, что является самостоятельным объектом изучения.

В тех случаях, когда примеси в основной жидкости находятся не на молекулярном уровне, а в виде частиц, представляющих собой многочисленные ассоциации молекул вещества примеси, то такие смеси не могут считаться однородными растворами. Физические свойства таких смесей (включая плотность и удельный вес) будут зависеть от того, какое вещество будет находиться в точке измерения. Такие смеси будут неоднородными (гетерогенными) смесями. В литературе такие смеси часто называют многофазными жидкостями. Отличительной особенностью многофазных жидкостей является наличие в них внутренних границ раздела между фазами, вдоль этих поверхностей раздела действуют силы поверхностного натяжения, которые могут оказаться значительными при большой площади поверхности границ между фазами. Силы поверхностного натяжения вкупе с

другими силами, действующими в многофазной жидкости, увеличивают силы сопротивления движению жидкости.

Примеров многофазных жидкостей в природе достаточно: эмульсии - смеси двух и более нерастворимых друг в друге жидкостей; газированные жидкости - смеси жидкости со свободным газом, окклюзии - смеси жидких и газообразных углеводородов; суспензии и пульпы - смеси жидкостей и твёрдых частиц, находящихся в жидкости во взвешенном состоянии и т.д.

1.4. Неньютоновские жидкости

Многокомпонентные жидкости как гомогенные, так и гетерогенные, в большей степени, могут содержать в своём составе компоненты, значительно изменяющие вязкость жидкости, и даже кардинально меняющие саму физическую основу и природу внутреннего трения. В таких жидкостях гипотеза вязкостного трения Ньютона (пропорциональность напряжений градиенту скорости относительного движения жидкости) неприменима. Соответственно такие жидкости принято называть неньютоновскими жидкостями.

Среди неньютоновских жидкостей принято выделять вязкопластичные жидкости, псевдопластичные жидкости и дилатантные жидкости. Для вязкопластичных жидкостей характерной особенностью является то, что они до достижения некоторого критического внутреннего напряжения τ_0 ведут себя как твёрдые тела и лишь при превышении внутреннего напряжения выше критической величины начинают двигаться как обычные жидкости. Причиной такого явления является то, что вязкопластичные жидкости имеют пространственную жёсткую внутреннюю структуру, сопротивляющуюся любым внутренним напряжениям меньшим критической величины, это критическое напряжение в литературе называют статическим напряжением сдвига. Для вязкопластичных жидкостей справедливы следующие соотношения Бингама:

$$\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad \tau \leq \tau_0,$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} (\tau - \tau_0) \quad \text{при} \quad \tau > \tau_0,$$

$$\text{или} \quad \tau = \tau_0 + \mu \frac{du}{dy}.$$

Для псевдопластичных жидкостей зависимость между внутренним напряжением сдвига и градиентом скорости относительного движения слоев жидкости в логарифмических координатах оказывается на некотором участке линейной. Угловой коэффициент соответствующей прямой линии заключён между 0 и 1 Поэтому зависимость между напряжением и градиентом скорости

можно записать в следующем виде:

$$\tau = k \left(\frac{du}{dy} \right)^n, \quad n < 1$$

где: k - мера консистенции жидкости,

n - показатель, характеризующий отличие свойств псевдопластичной жидкости от ньютоновской.

Для псевдопластичных жидкостей полезно ввести понятие кажущейся вязкости жид-

кости $\mu_* = \frac{\tau}{du/dy}$,

тогда: $\mu_* = \lambda \left(\frac{du}{dy} \right)^{n-1}$, т.е. величина кажущейся вязкости псевдопластичной жидко-

сти убывает с возрастанием градиента скорости.

Дилатантные жидкости описываются тем же самым уравнением, что и псевдопластичные жидкости, но при показателе $n > 1$. У таких жидкостей кажущаяся вязкость увеличивается при возрастании градиента скорости. Такая модель жидкости может быть применена при описании движения суспензий.

Неньютоновские жидкости обладают ещё одним свойством, их вязкость существенным образом зависит от времени. По этой причине (например, для вязкопластичных жидкостей) величина статического напряжения сдвига зависит от предыстории: чем более длительное время жидкость находилась в состоянии покоя, тем выше величина её статического напряжения сдвига. Если прервать движение такой жидкости (остановить её), то для начала движения такой жидкости потребуется развить в жидкости меньшее напряжение, чем и том случае, когда она находилась в покое длительное время. Следовательно, необходимо различать величину начального статического напряжения сдвига и динамическую величину этого показателя. Жидкости, которые обладают такими свойствами, называются тиксотропными. Жидкости, у которых наоборот динамические характеристики выше, чем начальные называются реопектическими неньютоновскими жидкостями. Такие явления объясняются тем, что внутренняя структура таких жидкостей способна упрочняться с течением времени, или (в другом случае) для восстановления начальных свойств им требуется некоторое время.

2. Основы гидростатики 2.1. Силы, действующие в жидкости

Поскольку жидкость обладает свойством текучести и легко деформируется под действием минимальных сил, то в жидкости не могут действовать сосредоточенные силы, а возможно существование лишь сил распределённых по объёму (массе) или по поверхности. В связи с этим действующие на жидкости распределённые силы являются по отношению к жидкости внешними. По характеру действия силы можно разделить на две категории: массовые силы и поверхностные.

Массовые силы пропорциональны массе тела и действуют на каждую жидкую частицу этой жидкости. К категории массовых сил относятся силы тяжести и силы инерции переносного движения. Величина массовых сил, отнесённая к единице массы жидкости, носит название единичной массовой силы. Таким образом, в данном случае понятие о единичной массовой силе совпадает с определением ускорения. Если жидкость, находится под действием только сил тяжести, то единичной силой является ускорение свободного падения:

$$g = \frac{Mg}{M}$$

где M' - масса жидкости

Если жидкость находится в сосуде, движущимся с некоторым ускорением a , то жидкость в сосуде будет обладать таким же ускорением (ускорением переносного движения):

$$a = \frac{Ma}{M}$$

Поверхностные силы равномерно распределены по поверхности и пропорциональны площади этой поверхности. Эти силы, действуют со стороны соседних объёмов жидкой среды, твёрдых тел или газовой среды. В общем случае поверхностные силы имеют две составляющие нормальную и тангенциальную. Единичная поверхностная сила называется напряжением. Нормальная

составляющая поверхностных сил называется силой давления P , а напряжение (единичная сила) называется давлением:

$$p = \frac{P}{S}$$

где: S - площадь поверхности.

Напряжение тангенциальной составляющей поверхностной силы T (касательное напряжение τ) определяется аналогичным образом (в покоящейся жидкости $T=0$).

$$\tau = \frac{T}{S}$$

Величина давления (иногда в литературе называется гидростатическим давлением) в системе СИ измеряется в паскалях.

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2.$$

Поскольку эта величина очень мала, то величину давления принято измерять в мега-паскалях МПа
 $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}.$

В употребляемой до сих пор технической системе единиц давление измеряется в технических атмосферах, ат .

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кг/см}^2 = 0,1 \text{ МПа}, \quad 1 \text{ МПа} = 10 \text{ ат}.$$

В технической системе единиц давление кроме технической атмосферы измеряется также в физических атмосферах, А .

$$1 \text{ А} = 1,033 \text{ ат}.$$

Различают давление абсолютное, избыточное и давление вакуума. Абсолютным давлением называется давление в точке измерения, отсчитанное от нуля. Если за уровень отсчёта принята величина атмосферного давления, то разница между абсолютным давлением и атмосферным называется избыточным давлением.

$$p_{\text{изб}} = p_{\text{абс}} - p_{\text{А}}$$

Если давление, измеряемое в точке ниже величины атмосферного давления, то разница между замеренным давлением и атмосферным называется давлением вакуума

$$p_{\text{вак}} = p_{\text{А}} - p_{\text{абс}}$$

Избыточное давление в жидкостях измеряется манометрами. Это весьма обширный набор измерительных приборов различной конструкции и различного исполнения. **2.2. Свойства гидростатического давления**

В неподвижной жидкости возможен лишь один вид напряжения - напряжение сжатия. Как отмечалось ранее, жидкость в общем случае может находиться под действием двух сил - силы давления равномерно распределённой по всей внешней поверхности выделенного жидкого тела и массовых сил, определяемых характером переносного движения. Под внешней границей жидкого тела могут пониматься как соседние тела: твёрдые (стенки сосуда или трубы, в которые помещена жидкость), газообразные (поверхность раздела между жидкостью и газовой средой), так и условные поверхности, мысленно выделяемые внутри самой жидкости. Действующее на внешнюю поверхность жидкости давление обладает двумя основными свойствами:

1. Давление всегда направлено по внутренней нормали к выделенной поверхности. Это свойство вытекает из самой сущности давления и доказательств не требует. Тем не менее, поясним этот постулат простым примером. Отсечём от жидкого тела часть его объёма и для сохранения равновесия оставшейся части жидкости приложим к образовавшемуся сечению систему распределённых сил. По своей величине и направлению действия эти силы должны

обеспечить эк



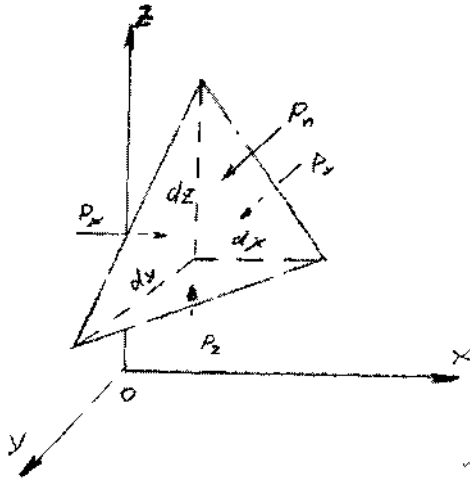
вивалентное влияние на оставшийся объём жидкости со стороны

отсечённой части жидкого тела. Поскольку в покоящейся

жидкости не могут существовать касательные напряжения, то приложенные к сечению силы могут быть направлены лишь по внутренней нормали к площади сечения.

2. В любой точке внутри жидкости давление по всем направлениям одинаково. Другими словами

величина давления в точке не зависит от ориентации площадки, на которую действует давление. Для доказательства этого положения выделим в районе произвольно выбранной точки находящейся внутри жидкости малый отсек жидкости в виде тетраэдра. Три взаимно перпендикулярные грани отсека будут параллельны координатным плоскостям, четвёртая грань расположена под произвольным углом (по отношению к одной из координатных плоскостей). От-



бросим массу жидкости, находящуюся с внешней стороны поверхности тетраэдра, а действие отброшенной массы жидкости на выделенный отсек заменим силами, которые обеспечат равновесие в покоящейся жидкости. При такой замене мы сделали некоторое допущение, ввели сосредоточенные силы, действующие на грани отсека. Однако это допущение можно считать справедливым ввиду малости отсека. Тогда для обеспечения равновесия на отсек жидкости должны действовать силы давления нормальные к граням отсека P_x, P_y, P_z , и P_n ; кроме того, на этот же

$$F (F_x, F_y, F_z)$$

отсек жидкости будут действовать массовые силы характер действия которых определяется переносным движением, т.е. движением сосуда, относительно которого покоится жидкость. Величина массовых сил будет пропорциональна массе жидкости в отсеке: $\rho \frac{1}{6} dx dy dz$.

Запишем уравнение равновесия отсека жидкости в проекциях на оси координат.

$$P_x - P_n \cos(n, x) + F_x = 0$$

$$P_y - P_n \cos(n, y) + F_y = 0$$

$$P_z - P_n \cos(n, z) + F_z = 0$$

Выразив силы через напряжения, уравнения равновесия будут иметь следующий вид:

$$p_x \frac{1}{2} dy dz - p_n dS \cos(n, x) + \rho \frac{1}{6} dx dy dz \cdot j_x = 0$$

$$p_y \frac{1}{2} dx dz - p_n dS \cos(n, y) + \rho \frac{1}{6} dx dy dz \cdot j_y = 0$$

$$p_z \frac{1}{2} dx dy - p_n dS \cos(n, z) + \rho \frac{1}{6} dx dy dz \cdot j_z = 0$$

где: dS - площадь наклонной грани отсека, j_x, j_y, j_z - проекции ускорения переносного движения на оси координат.

$$dS \cos(n, x) = \frac{1}{2} dy dz$$

учитывая, что: $dS \cos(n, y) = \frac{1}{2} dx dz$

$$dS \cos(n, z) = \frac{1}{2} dx dy$$

Уравнения равновесия примут вид:

$$p_x - p_n + \frac{1}{3} dx \cdot j_x = 0$$

$$p_y - p_n + \frac{1}{3} dy \cdot j_y = 0$$

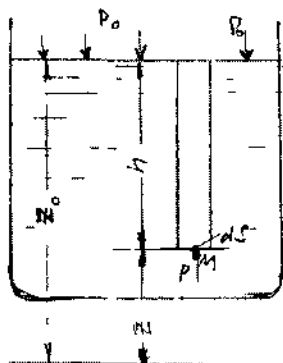
$$p_z - p_n + \frac{1}{3} dz \cdot j_z = 0$$

Пренебрегая малыми величинами, получим: $p_x = p_y = p_z = p_n$

3. Для жидкости находящейся в состоянии равновесия справедлив так называемый закон Паскаля утверждающий, что всякое изменение давления в какой-либо точке жидкости передаётся мгновенно и без изменения во все остальные точки жидкости.

2.3. Основное уравнение гидростатики

Рассмотрим случай равновесия жидкости в состоянии «абсолютного покоя», т.е. когда на жидкость действует только сила тяжести. Поскольку объём жидкости в сосуде мал по сравнению с объёмом Земли, то уровень свободной поверхности жидкости в сосуде можно считать горизонтальной плоскостью. Давление на свободную поверхность жидкости равно атмосферному давлению p_0 .



Определим давление p в произвольно выбранной точке M , расположенной на глубине h . Выделим

около точки M горизонтальную площадку площадью dS . Построим на данной площадке вертикальное тело, ограниченное снизу самой площадкой, а сверху (в плоскости свободной поверхности жидкости) её проекцией. Рассмотрим равновесие полученного жидкого тела. Давление на основание выделенного объёма будет внешним по отношению к жидкому телу и будет направлено вертикально вверх. Запишем уравнение равновесия в проекции на вертикальную ось тела.

$$pdS - p_0 dS - \rho g h dS = 0.$$

Сократив все члены уравнения на dS , получим:

$$p = p_0 + \rho g h = p_0 + \gamma h$$

Давление во всех точках свободной поверхности одинаково и равно p_0 , следовательно, давление во всех точках жидкости на глубине h также одинаково согласно основному уравнения гидростатики. Поверхность, давление на которой одинаково, называется поверхностью уровня. В данном случае поверхности уровня являются горизонтальными плоскостями.

Выберем некоторую горизонтальную плоскость сравнения, проходящую на расстоянии z_0 от свободной поверхности, тогда можно записать уравнение гидростатики в виде:

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g} \quad \text{или} \quad z + \frac{p}{\gamma} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma}$$

Все члены уравнения имеют линейную размерность и носят название:

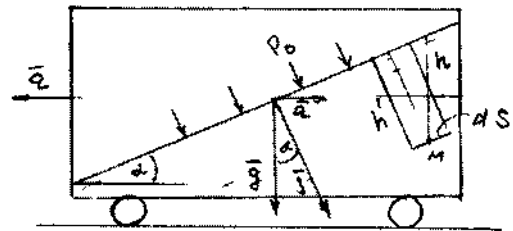
- геометрическая высота,
 z

$\frac{p}{\gamma}$ - пьезометрическая высота

Величина $z + \frac{p}{\gamma}$ носит название гидростатического напора.

Основное уравнение гидростатики, доказанное на примере жидкости находящейся под действием

только сил тяжести, будет справедливо и для жидкости, которое испытывает на себе ускорение переносного движения. Под действием сил инерции переносного движения будет меняться положение свободной поверхности жидкости и поверхностей равного давления относительно стенок сосуда и относительно горизонтальной плоскости. Вид этих поверхностей целиком зависит от комбинации ускорений переносного движения и ускорения сил тяжести. В литературе состояние равновесия жидкости при наличии переносного движения называется относительным покоем жидкости. Любые комбинации ускорений сводятся к двум возможным видам равновесия жидкости Равновесие жидкости при равномерно ускоренном прямолинейном движении сосуда. Примером может быть равновесие жидкости в цистерне, движущейся с некоторым ускорением a . В этом



случае на жидкость будут действовать силы тяжести и сила инерции равномерно ускоренного движения цистерны $F = aM$. Тогда равнодействующая единичная массовая сила определится как сумма векторов ускорения переносного движения и ускорения свободного падения.

$$\vec{j} = \vec{a} + \vec{g}.$$

При данных условиях вектор единичной массовой силы переносного движения a будет направлен в сторону противоположную движению цистерны, ускорение свободного падения g , как всегда ориентировано вертикально вниз, т.е. как показано на рисунке. При движении цистерны начальное положение свободной поверхности жидкости изменится. Новое положение свободной поверхности жидкости, согласно основному условию равновесия жидкости будет направлена перпендикулярно вектору $\vec{j}$, т.к., равнодействующий вектор массовых сил должен быть направлен по внутренней нормали к свободной поверхности жидкости. Наклон свободной поверхности жидкости к горизонтальной плоскости определяется соотношением ускорений a/g .

Выберем некоторую точку M расположенную внутри жидкости на глубине h' под уровнем свободной поверхности (расстояние до свободной поверхности жидкости измеряется по нормали к этой поверхности). В точке M выделим малую площадку dS параллельную свободной поверхности жидкости. Тогда уравнение равновесия жидкости запишется в следующем виде:

$$pdS = p_0dS + j\rho h'dS$$

$$p = p_0 + j\rho h'$$

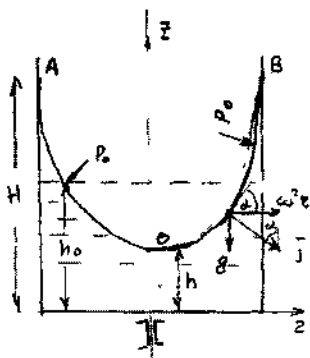
Величину jh' заменим эквивалентной величиной gh , где h -погружение точки M под уровень свободной поверхности жидкости (измеряется по вертикали). Эти две величины

одинаковы, т.к. $j = \frac{g}{\sin \alpha}$, $h' = h \sin \alpha$. После этих преобразований уравнение равновесия жидкости в цистерне примет привычный вид, соответствующий записи основного закона гидростатики:

$$p = p_0 + \rho gh.$$

Таким образом, давление в любой точке жидкости будет зависеть только от положения этой точки относительно уровня свободной поверхности жидкости. Поверхности равного давления будут параллельны свободной поверхности жидкости, и иметь такой же уклон $\frac{a}{g}$.

Равновесие жидкости в равномерно вращающемся сосуде. Свободная поверхность жидкости, залитой в цилиндрический сосуд и находящейся под действием сил тяжести примет форму горизонтальной плоскости на некотором уровне h_0 относительно дна сосуда. После того как мы приведём сосуд во вращение вокруг его вертикальной оси с некоторой постоянной угловой скоростью $\omega = const$, начальный уровень свободной поверхности жидкости изменится: в центре сосуда он понизится, а по краям сосуда повысится. При этом форма свободной поверхности примет явно вид криволинейной поверхности вращения. Это явление объясняется тем, что



при вращении сосуда вокруг своей оси жидкость в нём будет испытывать

ускорение переносного движения $\omega^2 r$ направленное в сторону стенок сосуда. Поскольку равнодействующая двух сил: силы тяжести и центробежной силы должна быть направлена по нормали к свободной поверхности жидкости в каждой точке поверхности, то эта равнодействующая будет иметь, как было сказано выше, две составляющие соответственно силу тяжести, направленную вертикально вниз и центробежную, направленную в горизонтальной плоскости.

$$\vec{j} = \vec{g} + \omega^2 r$$

В каждой точке свободной поверхности жидкости AOB вектор углового ускорения $\omega^2 r$ будет направлен под некоторым углом α по отношению к касательной плоскости, проходящей через данную точку свободной поверхности.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

Отсюда:

$$dz = \frac{\omega^2 r}{g} dr,$$

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C$$

В центре на оси вращения, на расстоянии $h = h_{\min}$ от дна сосуда будет расположена самая низкая точка свободной поверхности жидкости, т.е. $C = h_{\min}$

$$z = h_{\min} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Отсюда: свободная поверхность жидкости находящейся в равномерно вращающемся вокруг его вертикальной оси сосуда будет иметь вид параболоида вращения (кривая AOB -парабола).

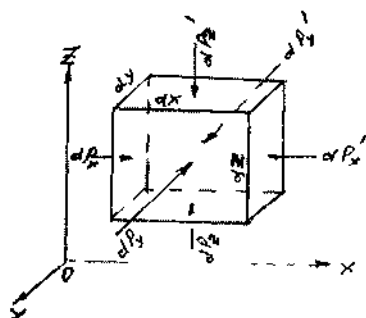
Выберем любую точку жидкости на глубине под свободной поверхностью h (в частности точка находится на дне сосуда), тогда давление в ней будет равно:

$$p = p_0 + \rho gh$$

Этот вывод можно распространить и на более сложные случаи вращения сосуда, наклоня ось его вращения под углом к горизонту; результат получим тот же, что подтверждает универсальность формулы основного уравнения гидростатики.

2.4. Дифференциальное уравнение равновесия жидкости

После рассмотрения некоторых частных случаев равновесия жидкости рассмотрим общее диф-



ференциальное равновесия в самом общем виде. Для этой цели выделим

отсек жидкости малых размеров в виде параллелепипеда. Масса жидкости в выделенном объёме:

$$dM = \rho dW = \rho dx dy dz$$

На боковые грани параллелепипеда действуют силы давления: (на левую и правую грани соответственно): dP_x и dP'_x . На переднюю и заднюю грани: dP_y и dP'_y , на нижнюю и верхнюю грани: dP_z и dP'_z

$$dP_x = p dS = p dy dz$$

Поскольку давление на правую грань больше, то $dP'_x = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz$

По аналогии можно записать силы давления на остальные пары граней.

на переднюю $dP_y = p dS = p dx dz$, на заднюю $dP'_y = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dx dz$, на нижнюю

$dP_z = p dS = p dx dy$, на верхнюю $dP'_z = -\left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dx dy$ Проекции массовых сил на координатные

оси:

на ось OX будет на ось OY будет

$$F_x = \rho dW \cdot j_x = \rho dx dy dz \cdot j_x,$$

$$F_y = \rho dW \cdot j_y = \rho dx dy dz \cdot j_y,$$

на ось OZ будет $F_z = \rho dW \cdot j_z = \rho dx dy dz \cdot j_z$. Тогда сумма сил действующих вдоль оси OX :

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz + \rho dx dy dz \cdot j_x,$$

сумма сил действующих вдоль оси OY :

$$p dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dx dz + \rho dx dy dz \cdot j_y,$$

сумма сил действующих вдоль оси OZ :

$$p dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dx dy + \rho dx dy dz \cdot j_z,$$

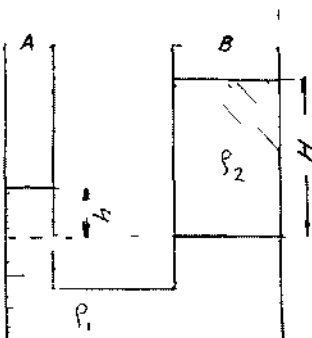
где: j_x , j_y и j_z , проекции ускорения массовых сил на координатные оси.

После преобразования получим систему дифференциальных уравнений равновесия жидкости:

$$\begin{cases} j_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ j_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ j_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

2.5. Сообщающиеся сосуды

В своей практической деятельности человек часто сталкивается с вопросами равновесия жидкости в сообщающихся сосудах, когда два сосуда A и B соединены между собой жёстко или гибким шлангом. Сами сосуды (A и B) обычно называются коленами. Такой гидравлический элемент часто используется в различных гидравлических машинах (гидравлические прессы и др.), системах гидропривода и гидроавтоматики, различных измерительных приборах и в ряде других случаев. С



природными сообщающимися сосудами человек встречается с давних пор: сообщающимися сосудами больших размеров являются водонасыщенные пласты горных пород с

системой колодцев, играющих роль отдельных колен природной гидродинамической системы. В открытых сообщающихся сосудах, заполненных однородной жидкостью свободный уровень жидкости устанавливается на одном и том же уровне в обоих коленах. Если в коленах сосудов залиты две несмешивающиеся жидкости с различной плотностью, то свободные уровни жидкости в правом и левом коленах устанавливаются на разных высотах в зависимости от соотношения плотностей жидкостей.

Для типичного случая, изображённого на рисунке, запишем уравнение равновесия жидкости относительно уровня раздела жидкостей.

$$p_0 + \rho_1 gh = p_0 + \rho_2 gH$$

$$\rho_1 h = \rho_2 H$$

или:

$$H = \frac{\rho_1}{\rho_2} h.$$

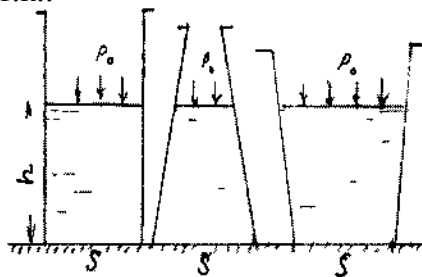
В закрытых сообщающихся сосудах давления на свободную поверхность могут быть разными, тогда уравнение равновесия будет иметь следующий вид:

$$p_1 + \rho_1 gh = p_2 + \rho_2 gH.$$

2.6. Сила давления жидкости на плоскую поверхность, погружённую в жидкость

Согласно основному закону гидростатики величина давления p определяется глубиной погружения точки под уровень свободной поверхности h жидкости и величиной плотности жидкости ρ .

Для горизонтальной поверхности величина давления одинакова во всех точках этой поверхности, т.к.:



$$p = p_0 + \rho gh$$

Отсюда:

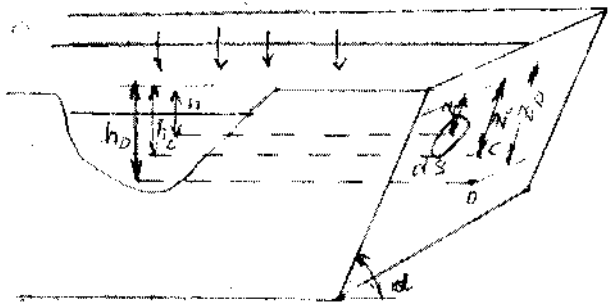
$$P = (p_0 + \rho gh)S$$

Таким образом, Сила давления жидкости на горизонтальную поверхность (дно сосуда) равно произведению площади этой поверхности на величину давления на глубине погружения этой поверхности. На рисунке показан так называемый «гидравлический парадокс», здесь величины силы давления на дно всех сосудов одинаковы, независимо от формы стенок сосудов и их физической высоты, т.к. площади доньев у всех сосудов одинаковы, одинаковы и величины давлений.

Сила давления на наклонную поверхность, погружённую в жидкость. Практическим примером такой поверхности может служить наклонная стенка сосуда. Для вывода уравнения и вычисления силы давления на стенку выберем следующую систему координат: ось OX направим вдоль пересечения плоскости свободной поверхности жидкости с наклонной стенкой, а ось OZ направим вдоль этой стенки перпендикулярно оси OX . Тогда в качестве координатной плоскости XOZ будет выступать сама наклонная стенка. На плоскости стенки выделим малую площадку dS , которую, в связи с малыми размерами можем считать горизонтальной. Величина давления на глубине площадки будет равна:

$$p = p_0 + \rho gz \sin \alpha = p_0 + \rho gh$$

где: h - глубина погружения площадки относительно свободной поверхности жидкости (по вертикали).



$$h = z \sin \alpha$$

Сила

давления

dP на

$$dP = p dS = (p_0 + \rho g h) dS$$

площадку:

Для определения силы давления

на всю смоченную часть наклонной стенки (часть площади стенки сосуда, расположенная ниже уровня свободной поверхности жидкости) необходимо проинтегрировать это уравнение по всей смоченной части площади стенки S .

$$P = \int_S (p_0 + \rho g h) dS = p_0 S + \rho g \int_S h dS = p_0 S + \rho g \sin \alpha \int_S z dS$$

Интеграл $\int_S z dS$ представляет собой статический момент площади S относительно

оси OX . Он, как известно, равен произведению этой площади на координату её центра тяжести z_c . Тогда окончательно:

$$P = p_0 S + \rho g \sin \alpha z_c S = (p_0 + \rho g h_c) S = p_c S.$$

Таким образом, сила давления на наклонную плоскую поверхность, погружённую в жидкость равна смоченной площади этой поверхности на величину давления в центре тяжести этой площади. Сила давления на плоскую стенку кроме величины и направления характеризуется также и точкой приложения этой силы, которая называется центром давления.

Центр давления силы атмосферного давления $p_0 S$ будет находиться в центре тяжести площадки, поскольку атмосферное давление передаётся на все точки жидкости одинаково. Центр давления самой жидкости на площадку можно определить исходя из теоремы о моменте равнодействующей силы.

Согласно этой теореме момент равнодействующей

силы относительно оси OX будет равен сумме моментов составляющих сил относительно этой же оси.

$$P_{изб} \cdot z_D = \int_S z \cdot dP_{изб},$$

$$\rho g \cdot \sin \alpha \int_S z^2 dS$$

$$\text{откуда: } z_D = \frac{\rho g \cdot \sin \alpha \int_S z^2 dS}{\rho g \cdot \sin \alpha \cdot z_c \cdot S} = \frac{J_x}{z_c \cdot S},$$

где: - положение центра избыточного давления на вертикальной оси,

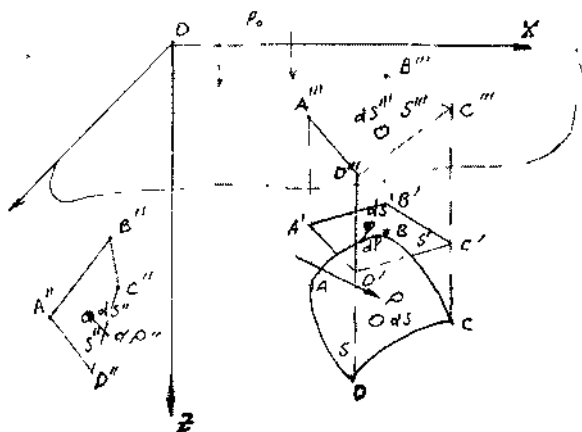
z_D

J_x - момент инерции площадки S относительно оси OX .

Отсюда центр давления (точка приложения равнодействующей силы избыточного давления) расположен всегда ниже центра тяжести площадки. В случаях, когда внешней действующей силой на свободную поверхность жидкости является сила атмосферного давления, то на стенку сосуда будут одновременно действовать две одинаковые по величине и противоположные по направлению силы обусловленные атмосферным давлением (на внутреннюю и внешнюю стороны стенки). По этой причине реальной действующей несбалансированной силой остаётся сила избыточного давления.

2.7. Сила давления на криволинейную поверхность, погружённую в жидкость Выберем внутри покоящейся жидкости криволинейную поверхность **ABCD**, которая может быть частью поверхности некоторого тела погруженного в жидкость. Построим проекции этой поверхности на координатные плоскости. Тогда в координатной плоскости XOZ проекцией этой поверхности будет плоская поверхность $A'B'C'D'$, в координатной плоскости YOZ — плоская поверхность $A''B''C''D''$ и в плоскости свободной поверхности жидкости (координатная плоскость XOT) - плоская поверхность $A'''B'''C'''D'''$. На криволинейной поверхности выделим малую площадку dS , проекции которой на координатные

плоскости будут соответственно dS' , dS'' и dS''' . Сила давления на криволинейную поверхность dP будет направлена по внутренней нормали к этой поверхности и может быть представлена в виде: Горизонтальные составляющие могут быть определены, как силы давления



на

$$dP = \sqrt{dP_x^2 + dP_y^2 + dP_z^2},$$

проекции малой площадки dS на соответствующие координатные плоскости:

$$dP_x = (p_0 + \rho gh) dS \cos(\overline{dP}, OX),$$

$$\text{т.е. } dP_x = (p_0 + \rho gh) dS'$$

$$\text{и } dP_y = (p_0 + \rho gh) dS''$$

Интегрируя эти уравнения, получим (как в случае с давлением на наклонную поверхность):

$$P_x = (p_0 + \rho gh_c) S'$$

$$P_y = (p_0 + \rho gh_c) S''$$

Вертикальная составляющая силы давления:

$$P_z = \int_V p_0 dS''' + \rho g \int_V h dS'''$$

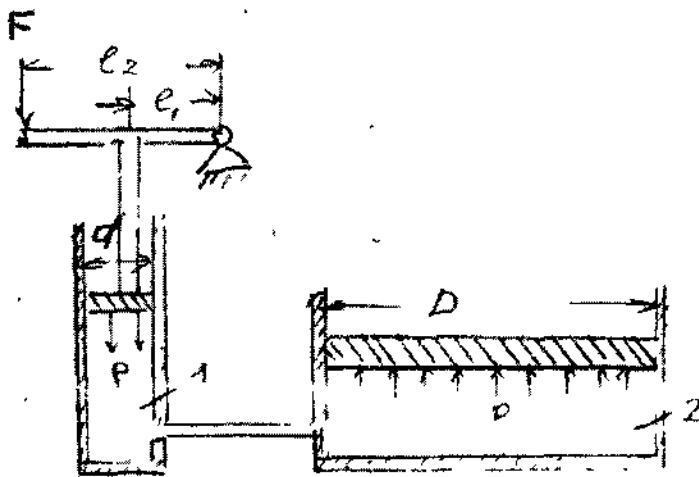
Второй интеграл в этом равенстве представляет собой объём образованный рассматриваемой криволинейной поверхностью $ABCD$ и её проекцией на свободную поверхность жидкости $A'''B'''C'''D'''$ (т.е. S и S'''). Этот объём принято называть телом давления $W_{то}$.

$$P_z = p_0 S''' + \rho g W_{то}.$$

Таким образом, горизонтальные составляющие силы давления на криволинейную поверхность равны давлениям на вертикальные проекции этой поверхности, а вертикальная составляющая равна весу тела давления, и силе внешнего давления на горизонтальную проекцию криволинейной поверхности.

Основные уравнения гидростатики широко используются на практике. Примерами могут служить простейшие гидравлические машины - гидравлический пресс, построенный по принципу сообщающихся сосудов и гидравлический аккумулятор.

Гидравлический пресс состоит из двух цилиндров приводного (1) и рабочего (2) соединенных между собой трубопроводом и представляет систему сообщающихся сосудов. В приводном цилиндре перемещается плунжер малого диаметра d , в рабочем цилиндре находится поршень с большим диаметром D . Связь между плунжером и рабочим поршнем осуществ-



ляется через рабочую жидкость, заполняющую гидравлическую систему (сообщающиеся сосуды). Усилие F через рычаг передаются рабочей жидкостью.

Сила давления на жидкость под плунжером P_1 передаёт жидкости давление p , которое, в свою очередь, передаётся во все точки рабочего поршня.

$$P_1 = F \frac{l_2}{l_1}$$

$$p = \frac{P_1}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

Тогда сила давления на поверхность рабочего поршня будет равна'

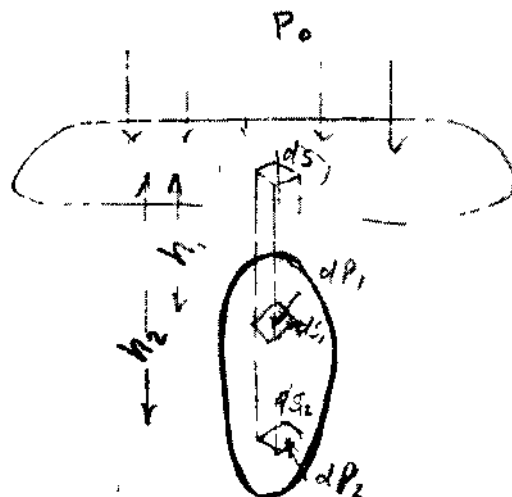
$$P_2 = p \frac{\pi D^2}{4}$$

Таким образом, с помощью гидравлического пресса, приложенная к концу рычага

сила, увеличивается в $\frac{l_2}{l_1} \left(\frac{D}{d} \right)^2$ раз.

2.8. Равновесие твёрдого тела в жидкости

Определим силу давления на твёрдое тело, погружённое в жидкость. На замкнутую криволинейную поверхность, являющуюся поверхностью твердого тела погружённого в жидкость будут действовать массовые силы (в данном случае силы тяжести) и поверхностные, силы давления на поверхность тела. Рассмотрим действие сил давления. Как известно, горизонтальные составляющие силы давления будут взаимно уравновешены. Так как проекции тела на



координатную плоскость XOZ с его левой и правой сторон

совпадут; то совпадут и координаты центров тяжести этих проекций. Тогда проекции сил давления на ось

OX будут одинаковыми по величине, но противоположными по направлению ($P'_x = -P''_x$)

Аналогично можно записать и для проекций сил давления на ось OY (давление на проекции поверхностей в координатной плоскости YOZ), $P'_y = -P''_y$. Неуравновешенными будут

лишь вертикальные составляющие силы давления, действующие на верхнюю и нижнюю стороны

поверхности тела.

Вертикальными сечениями выделим на верхней и нижней половинах тела малые площадки. Тогда вертикальные составляющие на верхнюю и нижнюю площадки будут равны:

$$dP_1 = p_0 dS + \rho_{ж} g h_1 dS$$

$$dP_2 = -p_0 dS - \rho_{ж} g h_2 dS$$

После интегрирования по объёму тела найдём равнодействующую сил давления. Она окажется равной разности весов двух тел давления, ограниченных свободной поверхностью жидкости и верхней и нижней поверхностями тела.

$$R = -\rho_{ж} g \cdot W_m$$

Равнодействующая сил давления носит название выталкивающей силы, эта сила направлена вертикально вверх и численно равна весу жидкости в объёме вытесненной телом. Последнее положение получило название закона Архимеда. Закон Архимеда часто формулируют несколько иначе: «тело, погружённое в жидкость теряет в своём весе столько сколько весит вытесненная им жидкость».

Таким образом, На погружённое в жидкость тело действуют две силы:

вес тела $G = \rho_m g \cdot W_m$ и выталкивающая сила $R = -\rho_{ж} g \cdot W_m$

Если $\rho_m > \rho_{ж}$, то $G_m > R$. Тело будет тонуть.

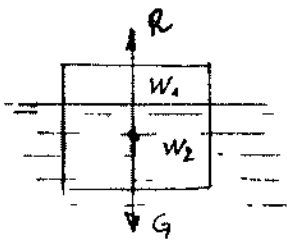
Если $\rho_m < \rho_{ж}$, то $G_m < R$. Тело будет всплывать до тех пор пока вес тела и величина выталкивающей силы, действующей на погружённую часть объёма тела не уравниваются.

Если $\rho_m = \rho_{ж}$, то $G_m = R$. Тело будет находиться во взвешенном состоянии в жидкости, т.е. плавать внутри жидкости на любой заданной глубине.

Для тела плавающего на поверхности жидкости должно, таким образом выполняться условие:

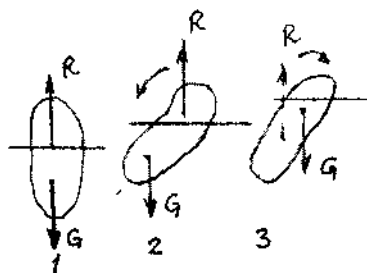
$$\rho_m g \cdot W_m = \rho_{ж} g \cdot W_2$$

Другими словами, степень погружения плавающего на поверхности тела под уровень жидкости

зависит от со  отношения плотности тела и жидкости:

$$W_m = W_1 + W_2 \quad \frac{W_2}{W_1 + W_2} = \frac{\rho_m}{\rho_{ж}}$$

Если тело однородное, то точка приложения силы тяжести тела и точка приложения выталкивающей силы совпадают. В тех случаях, когда плавающее на поверхности жидкости тело не однородно по своему составу (корабль с грузом) в условиях равновесия точки приложения действующих на тело сил располагаются в разных местах на прямой вертикальной линии. В таких случаях на плавающее в жидкости тело действует пара сил, от действия которой зависит положение тела относительно жидкости. Такие плавающие тела могут находиться в остойчивом и не остойчивом состоянии. Так тело 1 под действием пары сил находится в состоянии равновесия. На тело 2 действует пара сил, стремящаяся уменьшить угол крена (угол



между осью плавания тела и плоскостью свободной поверхности жидкости) Такое положение плавающего тела называется остойчивым. На тело 3 действует пара сил, стремящаяся увеличить угол крена (перевернуть тело), такое положение тела называется не остойчивым положением.

3. Элементы кинематики жидкости

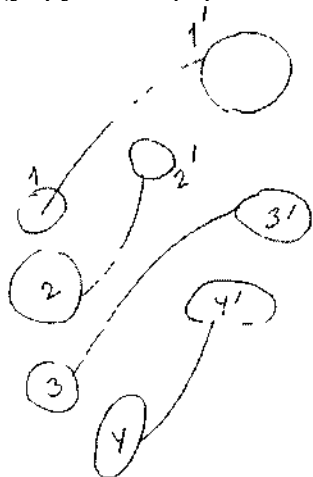
Кинематикой называют раздел механики, изучающий движение физических тел вообще, вне связи с

источником движения (силами). Это определение справедливо и для кинематики жидкости как отдельного раздела гидравлики. **3.1. Методы изучения движения жидкости.**

Жидкость представляет собой физическое тело, состоящее из бесконечно большого числа бесконечно малых частиц. С большой степенью точности мы можем рассматривать жидкое тело как сплошную среду, эта модель позволяет значительно упростить решение большинства гидравлических задач. Тем не менее, нередко случаи, когда уровень исследования движения жидкого тела требует глубокого знания физических процессов происходящих в движущейся жидкости на молекулярном уровне. В таких случаях вполне удобная модель сплошной среды может оказаться неприемлемой.

Исходя из практики изучения гидравлики как прикладной дисциплины, можно упомянуть два метода изучения движения жидкости: метод Лагранжа и метод Эйлера.

Описание движения жидкости методом Лагранжа сводится к рассмотрению положения частиц жидкости (в полном смысле слова) в любой момент времени. Так в начальный момент времени частицы находились в точках 1, 2, 3 и 4. По истечении некоторого времени они переместились в точки: 1', 2', 3' и 4', причём это перемещение сопровождалось изменением объёмов и форм частиц (упругой деформацией). Тогда можно утверждать, что частицы жидкости при



своём движении участвуют в трёх видах движения (поступательном, вращательном и деформации). Для описания такого сложного движения жидкости необходимо, таким образом, определить как траектории частиц, так и гидравлические характеристики частиц (плотность ρ , температуру T и скорость u) в функции времени и координат.

$$\begin{cases} x = x(a, b, c, t) \\ y = y(a, b, c, t) \\ z = z(a, b, c, t) \\ \rho = \rho(a, b, c, t) \\ T = T(a, b, c, t) \\ u = u(a, b, c, t) \end{cases}$$

Переменные a , b , c , и t носят название переменных Лагранжа. Задача сводится к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных для каждой частицы жидкости. Метод Лагранжа ввиду громоздкости и трудности решения может использоваться в случаях детального изучения поведения лишь отдельных частиц жидкости. Использование этого метода для инженерных расчётов не рентабельно.

Суть другого метода, метода Эйлера заключается в том, что движение жидкости подменяется изменением поля скоростей. Под полем скоростей понимают некоторую достаточно большую совокупность точек бесконечного пространства занятого движущейся жидкостью, когда в каждой точке пространства в каждый момент времени находится частица жидкости с определённой скоростью (вектором скорости). Припишем неподвижным точкам пространства скорость частиц жидкости, которые в данный момент времени находятся в этих точках. Поскольку пространство бесконечно и непрерывно, то мы имеем массив данных о скоростях достаточно полный, чтобы определить (задать) поле в каждой его точке. Условно, нос достаточной точностью такое поле можно считать непрерывным.

Несмотря на то, что исходные условия создания модели движущейся жидкости довольно сложные,

тем не менее, метод Эйлера весьма удобен для расчётов.

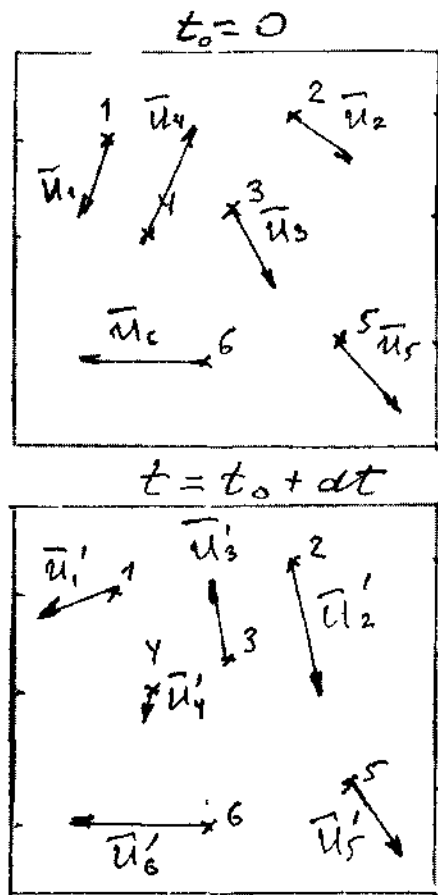
Построение поля скоростей осуществляется следующим образом:

На некоторый момент времени (например, t_0) произвольным образом выберем необходимое число точек, в которых находятся частицы жидкости. Приписав их скорости

$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_5$ и $\bar{u}_6$ точкам неподвижного пространства (1, 2, 3, 4, 5 и 6) мы сделаем «моментальную фотографию» поля скоростей на выбранный момент времени. В следующий момент времени

$t = t_0 + dt$ в тех же выбранных точках

неподвижного пространства будут находиться другие частицы жидкости, имеющие другие скорости $\bar{u}'_1, \bar{u}'_2, \bar{u}'_3, \bar{u}'_4, \bar{u}'_5$ и $\bar{u}'_6$. Выполнив уже



известную процедуру второй раз, получим новую «моментальную фотографию» поля скоростей на момент времени $t = t_0 + dt$. Теперь вместо изучения траекторий частиц жидкости

будем сравнивать поля скоростей. Тогда система уравнений примет вид:

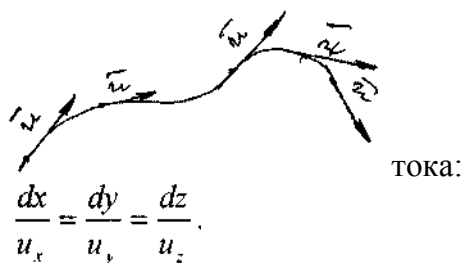
$$\begin{cases} \rho = \rho(x, y, z, t) \\ u = u(x, y, z, t) \\ T = T(x, y, z, t) \end{cases}$$

Поле скоростей движения жидкости иногда называют гидродинамическим полем по аналогии с электромагнитным, тепловым и др. полями. Это определение не противоречит физической стороне процесса движения жидкости. Анализируя состояние гидродинамического поля на разные моменты времени $t = t_0$ и $t = t_0 + dt$, можно отметить, что с течением времени поле изменилось, несмотря на то, что в отдельных точках 5 и 6 скорости остались постоянными ($\bar{u}_5 = \bar{u}'_5$ и $\bar{u}_6 = \bar{u}'_6$). Такое поле называют нестационарным гидродинамическим полем. В частном случае, когда во всех точках неподвижного пространства с течением времени предыдущие частицы жидкости сменяются другими с такими же скоростями, то поле скоростей во времени не меняется. Такое гидродинамическое поле называют стационарным. В соответствии с этим различают и два вида движения жидкости: установившееся, когда поле скоростей является стационарным и неустановившееся при нестационарном гидродинамическом поле.

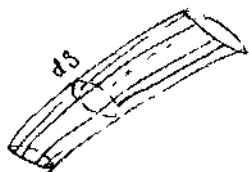
3.2. Кинематические элементы движущейся жидкости

Основной кинематической характеристикой гидродинамического поля является линия тока - кривая, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной к кривой. Иходя из

данного определения можно записать дифференциальное уравнение линии



Если через некоторую неподвижную в пространстве кривую провести линии тока, то полученная поверхность называется поверхностью тока, а образованное этой поверхностью тело будет называться трубкой тока. Жидкость, наполняющая трубку тока, называется элементарной струйкой. Поскольку линии тока никогда не пересекаются, то поверхность трубки тока является



непроницаемой внешней границей для элементарной струйки жидкости. Сечение трубки тока, нормальное к линиям тока называется живым сечением элементарной струйки dS . При установившемся движении жидкости понятия линии тока и траектории движения частицы жидкости совпадают. Объём жидкости протекающий через живое сечение элементарной струйки в единицу времени называется расходом элементарной струйки.

$$dQ = \frac{dW}{dt},$$

где: dW объём жидкости, протекающий через живое сечение трубки тока за время dt ,

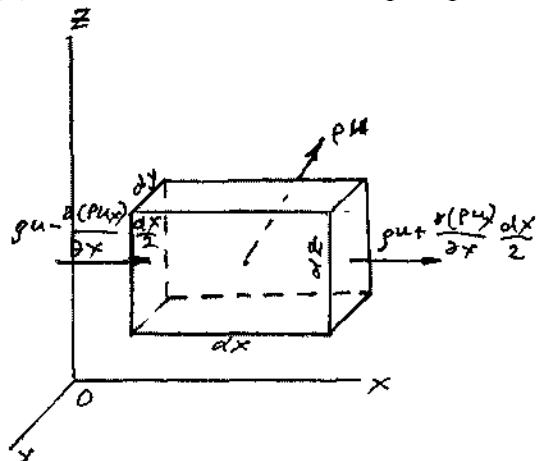
dQ расход жидкости в живом сечении трубки тока. Размерность расхода жидкости в системе СИ - $м^3/с$.

Гидродинамическое поле считается потенциальным (безвихревым), если в этом поле отсутствует вихревое движение жидкости. В потенциальном поле может существовать лишь поступательное или криволинейное движение жидкости.

3.3 Уравнение неразрывности жидкости

Если в гидродинамическом поле отсутствуют вихри, то; для такого поля можно записать уравнение, связывающее параметры движущейся жидкости (плотность жидкости) с параметрами, характеризующими условия движения жидкости. Вывод такого уравнения основан на представлении жидкости как сплошной непрерывной среды, в силу чего такое уравнение получило название уравнения неразрывности.

Для этой цели выделим в пространстве малый элемент жидкой среды в виде па-



раллелепипеда, стороны которого будут равны

соответственно dx, dy и dz . Грани

параллелепипеда пусть будут параллельны координатным плоскостям. В центре элемента в данный момент времени будет находиться частица жидкости, плотность которой равна ρ , а вектор скорости движения u направлен таким образом, что жидкость втекает внутрь элемента через левую, нижнюю

и переднюю грани элемента и вытекает через противоположные грани. Будем считать также, что размер элемента достаточно мал, и можно допустить, что в пределах этого элемента изменение плотности жидкости и скорости её движения будет прямо пропорционально расстоянию от центра элемента. Одновременно размеры граней будут достаточно велики по сравнению с точкой, что позволит утверждать, что плотность жидкости и скорость во всех точках граней будут одинаковыми, как и плотность жидкости в пределах соответствующих граней. Тогда произведение плотности жидкости на вектор скорости (импульс) в специальной литературе часто называют вектором

массовой скорости ρu .

В таком случае проекция вектора массовой скорости в центре левой грани элемента на ось OX будет равна:

$$\rho u_x - \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

а проекция вектора массовой скорости в центре правой грани элемента на ось OX :

$$\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

Масса жидкости, поступившая через левую грань элемента за малый интервал времени dt :

$$dM'_x = \left[\rho u_x - \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz dt,$$

масса жидкости, вытекшая через правую грань элемента за малый интервал времени dt :

$$dM''_x = \left[\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz dt$$

Изменение массы жидкости внутри элемента при движении жидкости вдоль оси OX :

$$dM_x = dM''_x - dM'_x = - \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx dy dz dt$$

Аналогично, изменение массы жидкости внутри элемента при движении жидкости вдоль оси OY :

1,

$$dM_y = dM''_y - dM'_y = - \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dx dy dz dt$$

и вдоль оси OZ :

$$dM_z = dM''_z - dM'_z = - \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dx dy dz dt$$

Окончательно, изменение массы жидкости внутри элемента при движении жидкости в произвольном направлении:

$$dM = dM_x + dM_y + dM_z \quad ? \text{ или}$$

$$dM = - \left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt$$

Величина плотности жидкости в начальный момент (до начала движения жидкости $t = 0$) - ρ , а по истечении бесконечно малого интервала времени (т.е. $t = 0 + dt$)

$$\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$$

Масса жидкости в объёме выделенного элемента в начальный момент времени:

$$dM_1 = \rho dW = \rho dx dy dz,$$

для времени $t = 0 + dt$:

$$dM_2 = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz$$

Изменение массы жидкости за бесконечно малый интервал времени dt :

$$dM = dM_2 - dM_1 = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz \quad \bullet > \text{ или:}$$

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt ,$$

откуда для наиболее общего случая нестационарного поля ($\rho = \text{var}$) дифференциальное уравнение неразрывности запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

и для частного случая - стационарного поля ($\rho = \text{const}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \ll$$

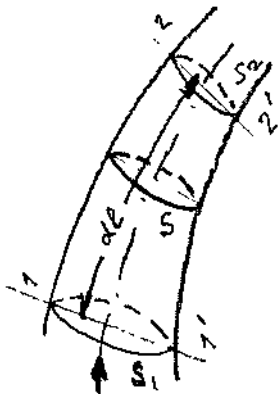
В векторной форме уравнения неразрывности жидкости запишутся в следующем виде:

$$\text{div}(\rho \vec{u}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} ,$$

$$\text{div} \vec{u} = 0 .$$

3.4 Уравнение неразрывности для элементарной струйки жидкости

Выделим в элементарной струйке жидкости двумя сечениями 1 - Γ и 2 - 2' малый отсек жидкости длиной dl . Объём жидкости внутри выделенного отсека Sdl .¹



Масса жидкости, вошедшая в элементарную трубку тока за временной

интервал dt , будет равна:

$$dM_1 = \rho Q dt .$$

Масса жидкости, вытекшая за это же время через противоположное сечение отсека:

¹ В данном разделе для удобства записи вместо принятых ранее обозначений площади сечения элементарной струйки жидкости dS и элементарного расхода жидкости dQ используются обозначения: S и Q .

$$dM_2 = \left[\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} dl \right] dt$$

За тот же интервал времени масса жидкости внутри отсека изменится на величину:

^ * откуда

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} dt \cdot dl , \text{ тогда}$$

$$\rho Q dt - \left[\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} dl \right] dt = \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} dt \cdot dl ,$$

$$-\frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} dl \cdot dt = \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} dt \cdot dl ,$$

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial l} + \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = 0$$

Окончательно формула может быть представлена в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial l} + \frac{\partial S}{\partial t} \right) = 0$$

При установившемся движении жидкости ($\rho = \text{const}$) уравнение неразрывности примет вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

3.5 Элементы кинематики вихревого движения жидкости

Поступательному движению жидкости часто сопутствует вихревое движение, вызванное вращением элементарного объёма жидкости вокруг некоторой оси. Такое вращение жидкости называется вихрем; угловая скорость этого элементарного объёма является основной характеристикой вихря. Касательная в любой точке вектора вихря - вихревая линия. Поверхность образованная вихревыми линиями, проведенными через точки замкнутого контура, называется вихревой трубкой. Прямолинейную вихревую трубку с бесконечно малой площадью сечения можно рассматривать как вращающийся твердый цилиндр, окружная скорость которого пропорциональна радиусу. Кинематической характеристикой вихревого течения жидкости является циркуляция скорости, которая служит мерой завихренности.

$$\Gamma = \oint u_i dl_i$$

где: Γ - циркуляция вектора скорости,

- проекция вектора скорости на касательную к этому контуру в i -той точке u_i

dl - элемент длины контура

В тех случаях, когда вращение жидкости в определённых точках пространства происходит с постоянной скоростью и положение вихря с течением времени не меняется, то такое вихревое движение принято называть стационарным вихрем. В иных случаях вихревое движение следует считать не стационарным.

3.6. Поток жидкости

Поток жидкости представляет собой совокупность элементарных струек жидкости. По этой причине основные кинематические характеристики потока во многом совпадают по своему смыслу с аналогичными характеристиками для элементарной струйки жидкости. Тем не менее, различия всё же имеются. Так в отличие от элементарной струйки, которая отделена от остальной жидкости поверхностью трубки тока, образованной линиями тока, поток жидкости имеет реальные границы в виде твёрдой среды, газообразной или жидкой сред. По типу границ потоки можно разделить на следующие виды:

напорные, когда поток ограничен твёрдой средой по всему периметру сечения,

безнапорные, когда часть сечения потока представляет собой свободную поверхность жидкости,

гидравлические струи, когда поток ограничен только жидкой или газообразной средой. Если гидравлическая струя ограничена со всех сторон жидкостью, то она называется затопленной гидравлической струёй, если гидравлическая струя ограничена со всех сторон газовой средой, то такая струя называется незатопленной.

Поперечное сечение потока, расположенное нормально к линиям тока, называется живым сечением потока. Площадь живого сечения потока определяется соотношением:

$$S = \sum dS_i$$

Расход жидкости в потоке определяется как отношение объёма жидкости протекающего через живое сечение потока к интервалу времени или определяется следующим соотношением:

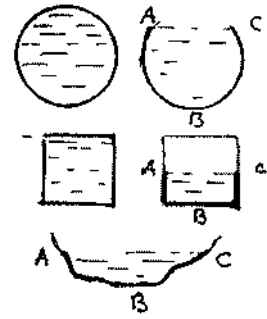
$$Q = \int u dS$$

Кроме известной размерности расхода в системе СИ $\text{м}^3/\text{с}$ имеется целый набор внесистемных единиц для измерения расхода жидкости в потоке: $\text{м}^3/\text{сут}$, $\text{л}/\text{ч}$, $\text{л}/\text{с}$, и др.

Средней скоростью в живом сечении потока называется величина:

$$v = \frac{Q}{S}$$

Смоченным периметром живого сечения потока Π называется часть контура живого сечения



потока, которая ограничена твёрдой средой. (На рисунке смоченный периметр выделен жирной линией).

Отношение площади живого сечения потока к длине смоченного периметра называется гидравлическим радиусом живого сечения.

$$R_h = \frac{S}{\Pi}$$

Величина гидравлического радиуса круглого сечения радиуса r :

$$R_h = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}$$

равна половине величины его геометрического радиуса. Величина гидравлического радиуса трубы квадратного сечения со стороной a , (полностью заполненной жидкостью)

равна $\frac{a}{4}$.

4. Динамика идеальной жидкости

4.1. Дифференциальное уравнение движения идеальной жидкости (при установившемся движении) и его интегрирование

Для вывода уравнения движения жидкости обратимся к записанному ранее уравнению равновесия жидкости (в проекциях на координатные оси), иначе говоря: $d\vec{F} + d\vec{P} = d\vec{R} = 0$. Поскольку в идеальной жидкости никаких сосредоточенных сил действовать не может, то последнее уравнение чисто условное. Когда равнодействующая отлична от 0, ($d\vec{R} \neq 0$) то жидкость начнёт двигаться с некоторой скоростью, т.е. в соответствии со вторым законом Ньютона, частицы жидкости, составляющие жидкое тело получают ускорение.

$$d\vec{R} = \frac{d\vec{u}}{dt} dM$$

Тогда уравнение движения жидкости в проекциях на координатные оси можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = j_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{du_y}{dt} = j_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{du_z}{dt} = j_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Согласно основному положению о поле скоростей (метод Эйлера) для проекций скоростей движения жидкости можно записать следующее:

$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t) \\ u_y = u_y(x, y, z, t) \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

или (для установившегося движения жидкости):

$$\begin{cases} u_x = u_x[x(t), y(t), z(t)] \\ u_y = u_y[x(t), y(t), z(t)] \\ u_z = u_z[x(t), y(t), z(t)] \end{cases}$$

Найдём первые производные от скоростей по времени, т.е. определим ускорения вдоль осей координат:

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \end{cases}$$

отметим, что: $\frac{\partial x}{\partial t} = u_x$, $\frac{\partial y}{\partial t} = u_y$, $\frac{\partial z}{\partial t} = u_z$

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot u_z \\ \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot u_z \\ \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot u_z \end{cases}$$

Теперь подставив выражения для ускорений в исходную систему дифференциальных уравнений движения жидкости, получим систему уравнений Эйлера в окончательном виде²:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot u_z = j_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot u_z = j_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot u_z = j_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Теперь вновь обратимся к системе дифференциальных уравнений движения жидкости, умножив обе части 1-го уравнения на dx , 2-го уравнения на dy , 3-го уравнения на dz , получим:

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} dx = j_x dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx \\ \frac{du_y}{dt} dy = j_y dy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy \\ \frac{du_z}{dt} dz = j_z dz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz \end{cases}$$

и просуммировав эти уравнения по частям, получим:

$$\frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz = j_x dx + j_y dy + j_z dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right)$$

² При неустановившемся движении жидкости уравнения Эйлера дополняются первыми слагаемыми.

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}, \frac{\partial u_y}{\partial t}, \frac{\partial u_z}{\partial t}$$

Преобразуем левую часть полученного уравнения, полагая, что $dx = u_x dt$, $dy = u_y dt$, $dz = u_z dt$ в результате запишем

$$\frac{du_x}{dt} u_x dt + \frac{du_y}{dt} u_y dt + \frac{du_z}{dt} u_z dt = u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} d(u^2).$$

Слагаемые в правой части уравнения являются полными дифференциалами функций.

$$j_x dx + j_y dy + j_z dz = dU,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp$$

Теперь уравнение примет вид

$$\frac{1}{2} d(u^2) = dU - \frac{1}{\rho} dp$$

Если из массовых сил на жидкость действует только сила тяжести, то $dU = -gdz$, и

тогда получим:

$$\frac{1}{2} d(u^2) = -gdz - \frac{1}{\rho} dp$$

После интегрирования получим:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C,$$

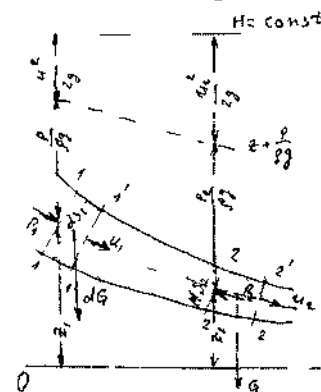
разделив почленно все члены уравнения на g , получим так называемое уравнение Бернулли

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = H$$

Здесь величина H называется гидродинамическим напором. Величина гидродинамического напора постоянна для всех живых сечений элементарной струйки идеальной жидкости.

4.2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости

Выделим двумя нормальными к линиям тока сечениями 1-1 и 2-2 отсек жидкости, который будет находиться под действием сил давления P_1 и P_2 и сил тяжести dG . Под действием этих сил через малый промежуток времени отсек жидкости из своего первоначального положения переместится в



положение между сечениями 1'-1' и 2'-2'. Силы давления, приложенные к живым сечениям отсека с правой и с левой сторон имеют противоположные друг другу направления.

$$p_1 dS_1 \text{ и } -p_2 dS_2.$$

Перемещение всего отсека жидкости можно заменить перемещением массы жидкости между сечениями: 1-1 и 2-2. При этом центральная часть отсека жидкости (можно утверждать) своего первоначального положения не меняет и в движении жидкости участия не принимает.

Тогда работа сил давления по перемещению жидкости dA_p можно определить следующим образом:

$$dA_{p1} = p_1 u_1 dS_1 dt$$

$$dA_{p2} = -p_2 u_2 dS_2 dt$$

$$dA_p = dA_{p1} + dA_{p2} = p_1 u_1 dS_1 dt - p_2 u_2 dS_2 dt$$

Работа сил тяжести будет равна работе по перемещению веса отсека жидкости на разницу уровней $(z_1 - z_2)$. $dG = \rho g u_1 dS_1 dt = \rho g u_2 dS_2 dt$

$$dA_G = (z_1 - z_2) \cdot dG.$$

При перемещении отсека жидкости кинетическая энергия изменится на величину:

$$dE_k = \frac{(u_2^2 - u_1^2) \cdot dM}{2} = \frac{(u_2^2 - u_1^2) \cdot dG}{2g}.$$

Теперь запишем общее уравнение баланса энергии:

$$p_1 u_1 dS_1 dt - p_2 u_2 dS_2 dt + (z_1 - z_2) \cdot dG = \frac{(u_2^2 - u_1^2) \cdot dG}{2g}.$$

Разделив все элементы уравнения на dG и, переместив в левую часть уравнения величины с индексами «1» а в правую - с индексом «2», получим:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} = H.$$

Это последнее уравнения носит название уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости.

4.3. Интерпретация уравнения Бернулли

Все члены уравнения Бернулли имеют линейную размерность и представляют собой напоры: z - называется геометрическим напором (геометрической высотой), представляет собой место положения центра тяжести живого сечения элементарной струйки относительно плоскости сравнения,

$z + \frac{p}{\rho g}$ - называется пьезометрическим напором (пьезометрической высотой),

представляет собой высоту, на которую могла бы подняться жидкость при отсутствии движения

$\frac{u^2}{2g}$ - носит название скоростного напора.

$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$ - носит название гидродинамического напора

Уравнение Бернулли является выражением закона сохранения механической энергии движущейся жидкости, по этой причине все части уравнения представляют собой величины удельной энергии жидкости:

z - удельная энергия положения,

$\frac{p}{\rho g}$ - удельная энергия давления,

$z + \frac{p}{\rho g}$ - удельная потенциальная энергия,

$\frac{u^2}{2g}$ - удельная кинетическая энергия

$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$ - удельная механическая энергия.

5. Динамика реальной (вязкой жидкости)

При изучении движения реальной (вязкой жидкости) можно пойти двумя разными путями: воспользоваться готовыми дифференциальными уравнениями и их решениями, полученными для идеальной жидкости. Учёт проявления вязких свойств осуществляется с помощью введения в уравнения дополнительных поправочных членов уравнения, вывести новые уравнения для вязкой жидкости.

Для практической инженерной деятельности более приемлемым следует считать первый полуэмпирический путь, второй следует использовать лишь в тех случаях, когда требуется детальное изучение процесса движения вязкой жидкости. По этой причине ограничимся лишь записью систем дифференциальных уравнений Навье - Стокса и поверхностным анализом этих уравнений.

5.1. Система дифференциальных уравнений Навье - Стокса

$$\begin{aligned} \rho \frac{du_x}{dt} &= \rho j_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] - \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\zeta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right], \\ \rho \frac{du_y}{dt} &= \rho j_y - \frac{\partial p}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] - \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\zeta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right], \\ \rho \frac{du_z}{dt} &= \rho j_z - \frac{\partial p}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right] - \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\zeta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned}$$

При $\mu = \text{const}$ и $\zeta = \text{const}$ система уравнений значительно упростится:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= j_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \frac{du_y}{dt} &= j_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ \frac{du_z}{dt} &= j_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

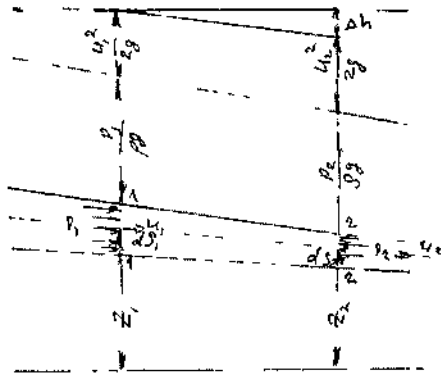
Пренебрегая величинами вторых вязкостей ($\zeta = 0$) и считая жидкость несжимаемой ($\rho = \text{const}$), уравнения Навье - Стокса запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= j_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{du_y}{dt} &= j_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{du_z}{dt} &= j_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

К уравнениям Навье - Стокса в качестве дополнительного уравнения принимается уравнение неразрывности. Учитывая громоздкость и трудность прямого решения задачи в практической деятельности (в случаях, когда это считается допустимым) решение достигается первым методом (по аналогии с движением идеальной жидкости).

5.2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости

Выделим в элементарной струйке жидкости двумя сечениями 1 - 1 и 2 - 2 отсек жидкости. Отсек жидкости находится под действием сил давления ($P_1 - P_2$) и сил тяжести на жидкость в отсеке действуют также силы инерции самой движущейся жидкости, а также силы трения,



препятствующие перемещению жидкости. В результате действия сил внутреннего трения часть механической энергии жидкости расходуется на преодоление возникающих сопротивлений. По этой причине величины гидродинамических напоров в сечениях будут неодинаковы. Естественно, что $H_1 > H_2$. Тогда разность гидродинамических напоров в крайних сечениях отсек $H_1 - H_2 = \Delta h$ будут как раз характеризовать потери напора на преодоление сил трения. Эта величина носит название потерь напора на трение $\Delta h = h_{mp}$.

В этом случае уравнение Бернулли примет следующий вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_{mp}.$$

h_{mp} - потери удельной энергии (преобразование потенциальной энергии жидкости в тепловую энергию при трении).

Величина $\frac{h_{mp}}{l}$ носит название гидравлического уклона.

5.3. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости

При массовом расходе в живом сечении элементарной струйки $dQ_u = \rho u dS$ кинетическая энергия жидкости проходящей через это сечение в единицу времени будет равна:

$$dE_k = \frac{\rho u dS \cdot u^2}{2} = \frac{\rho}{2} u^3 dS.$$

Суммируя величины кинетической энергии всех элементарных струек проходящих через живое сечение потока жидкости, найдём полную кинетическую энергию для всего

живого сечения потока

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int u^3 dS.$$

С другой стороны, полагая, что скорости во всех элементарных струйках одинаковы и равны средней скорости движения жидкости в живом сечении потока, таким же образом вычислим полную кинетическую энергию в этом же живом сечении потока.

$$E_{cp} = \frac{\rho}{2} \int v^3 dS.$$

Вполне очевидно, что величины этих энергий не равны, т.е.

$$E_k > E_{cp}$$

Тогда коэффициент, учитывающий неравномерность распределения скоростей по сечению (коэффициент Кориолиса) можно определить как соотношение кинетических энергий:

$$\alpha = \frac{E_k}{E_{cp}} = \frac{\int u^3 dS}{\int v^3 dS}$$

Внося эту поправку в уравнение для элементарной струйки жидкости, получим уравнение для потока конечных размеров. Практически $\alpha = 1.0 - 2.0$.

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_{mp}$$

Кроме коэффициента Кориолиса, учитывающего неравномерность распределения кинетической энергии по живому сечению потока, существует аналогичный показатель для величины количества движения, коэффициент Буссинэ α' .

Секундное количество движения для потока жидкости можно определить как интегральную сумму

количества движения элементарных масс жидкости, протекающих через бесконечно малые площадки ds в пределах площади всего живого сечения S , т.е.

$$\Theta = \int \rho u \cdot ds \cdot u = \rho \int u^2 ds.$$

Аналогичным образом, величина количества движения жидкости в живом сечении при условии равномерного распределения скоростей по сечению потока будет:

$$\Theta_{cp} = \rho v \cdot S \cdot v = \rho \cdot S \cdot v^2.$$

Отсюда коэффициент Буссинэ определится следующим образом:

$$\alpha' = \frac{\Theta}{\Theta_{cp}} = \frac{\rho \int u^2 ds}{\rho \cdot S \cdot v^2} = \frac{1}{S} \int \left(\frac{u}{v} \right)^2 ds$$

В связи с тем, что величина коэффициента количества движения (коэффициент Буссинэ) невелика и не превышает 1,05, поправкой в расчётах обычно пренебрегают,

5.4. Гидравлические сопротивления

Потери удельной энергии в потоке жидкости, безусловно, связаны с вязкостью жидкости, но сама вязкость - не единственный фактор, определяющий потери напора. Но можно утверждать, что величина потерь напора почти всегда пропорциональны квадрату средней скорости движения жидкости. Эту гипотезу подтверждают результаты большинства опытных работ и специально поставленных экспериментов. По этой причине потери напора принято исчислять в долях от скоростного напора (удельной кинетической энергии потока). Тогда:

$$h_{mp} = \xi_{mp} \frac{v^2}{2g}.$$

Потери напора принято подразделять на две категории:

потери напора, распределённые вдоль всего канала, по которому перемещается жидкость (трубопровод, канал, русло реки и др.), эти потери пропорциональны длине канала и называются потерями напора по длине h_{dl} сосредоточенные потери напора: потери напора на локальной длине потока (достаточно малой по сравнению с протяжённостью всего потока). Этот вид потерь во многом зависит от особенностей преобразования параметров потока (скоростей, формы линий тока и др.). Как правило, видов таких потерь довольно много и их расположение по длине потока зачастую далеко не закономерно. Такие потери напора называют местными потерями или потерями напора на местных гидравлических сопротивлениях. Это вид потерь напора

$$\text{также принято исчислять в долях от скоростного напора } h_u = \xi_u \frac{v^2}{2g}.$$

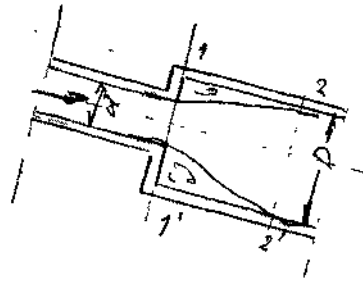
Тогда полные потери напора можно представить собой как сумму всех видов потерь напора:

$$h_{mp} = h_{dl} + \sum h_u.$$

Оценка величины местных потерь напора практически всегда базируются на результатах экспериментов, по результатам таких экспериментов определяются величины коэффициентов потерь. Для вычисления потерь напора по длине имеются более или менее надёжные теоретические предпосылки, позволяющие вычислять потери с помощью привычных формул.

5.5. Потери напора на местных гидравлических сопротивлениях Несмотря на многообразие видов местных гидравлических сопротивлений, их всё же можно при желании сгруппировать: потери напора в руслах при изменении размеров живого сечения, потери напора на местных гидравлических сопротивлениях, связанных с изменением направления движения жидкости, потери напора при обтекании преград.

Внезапное расширение русла. Внезапное расширение русла чаще всего наблюдается на стыке участков трубопроводов, когда один трубопровод сочленяется с магистральным трубопроводом большего диаметра. Величина коэффициента потерь напора в данном случае определяется с достаточной точностью на теоретическом уровне. Поток жидкости движущейся в



трубопроводе меньшего диаметра d , попадая в трубу большего диаметра, касается стенок нового участка трубопровода не сразу, а лишь в сечении 2-2'. На участке между сечениями 1-1' и 2-2' образуется зона, в которой жидкость практически не участвует в движении по трубам, образуя локальный вихревой поток, где претерпевает деформацию. По этой причине часть кинетической энергии движущейся жидкости тратится на поддержание «паразитного» сращения и деформации жидкости. Величины средних скоростей жидкости в сечениях можно определить из условия неразрывности.

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

$$S_1 = \frac{\pi d^2}{4}, \quad S_2 = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Тогда величина потерь напора при внезапном расширении русла определится:

$$\Delta h_{\text{вп}} = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right)^2 = \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g}.$$

$$\xi_{\text{вп}} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2.$$

Таким образом, можно сказать, что потеря напора при внезапном расширении потока равна скоростному напору, соответствующему потерянной скорости.

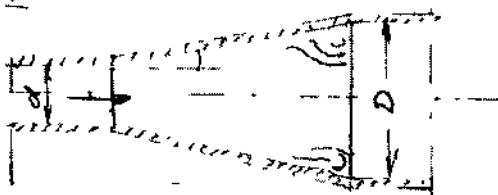
$$\Delta h_{\text{вп}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

Плавное расширение русла (диффузор). Плавное расширение русла называется диффузором.

Течение жидкости в диффузоре имеет

сложный характер. Поскольку живое сечение

потока постепенно увеличивается, то, соответственно, снижается скорость движения



жидкости и увеличивается давление. Поскольку, в этом случае,

в слоях жидкости у стенок

диффузора кинетическая энергия минимальна (мала скорость), то возможна остановка жидкости и интенсивное вихреобразование. По этой причине потери энергии напора в диффузоре будут зависеть от потерь напора на трение и за счёт потерь при расширении:

$$\Delta h_{\text{диф}} = \Delta h_{\text{тр}} + \Delta h_{\text{вп}}.$$

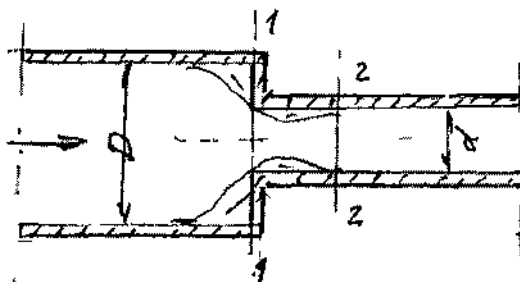
$$\xi_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2} \right) + k_o \left(1 - \frac{1}{\frac{S_2}{S_1}} \right)^2$$

где: S_1 - площадь живого сечения на входе в диффузор,

S_2 - площадь живого сечения на выходе из диффузора, α - угол конусности диффузора,

$k_o = 3,2 \lg \frac{\alpha}{2} \sqrt{\lg \frac{\alpha}{2}}$ - поправочный коэффициент, зависящий от условий расширения потока в диффузоре.

Внезапное сужение канала. При внезапном сужении канала поток жидкости отрывается от стенок входного участка и лишь затем (в сечении 2 - 2) касается стенок канала меньшего размера. В этой области потока — * образуются две зоны интенсивного вихреобразования (как в широком участке трубы, так и в узком), в результате чего, как и в предыдущем



случае, потери напора складываются из двух составляющих (потерь на трение и при сужении). Коэффициент потерь напора при гидравлическом сопротивлении внезапного сужения потока можно определить по эмпирической зависимости, предложенной И.Е. Идельчиком:

$$\xi_{\text{вс}} = 0,5 \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right)$$

или взять по таблице:

$\frac{S_2}{S_1}$	0,01	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80
$\xi_{\text{вс}}$	0,50	0,45	0,40	0,30	0,20	0,10

Плавное

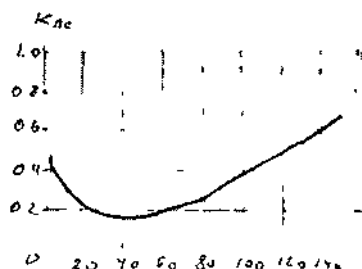
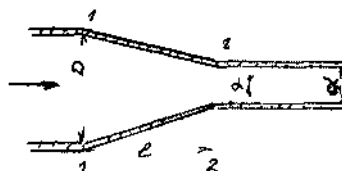
сужение канала.

Плавное сужение канала достигается с помощью конического участка называемого конфузуром. Потери напора в конфузуре образуются практически за счёт трения, т.к. вихреобразование в конфузуре практически отсутствует. Коэффициент потерь напора в конфузуре можно определить по формуле:

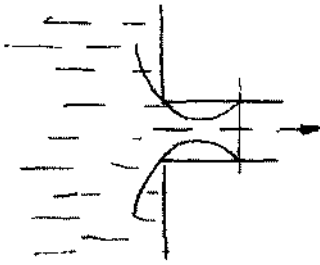
$$\xi_{\text{конф}} = \frac{\lambda}{8 \sin \alpha} \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right)$$

При большом угле конусности $\alpha > 50^\circ$ коэффициент потерь напора можно определять по формуле с внесением поправочного коэффициента $k_{\text{пк}}$

Нормальный вход в трубу. Из резервуаров, где хранятся жидкости вход в выкидной трубопровод осуществляется в так называемом нормальном исполнении, т.е. когда осевая линия патрубка трубопровода располагается по нормали к боковой стенке резервуара. Этот вид гидравлических сопротивлений также можно отнести к сопротивлениям связанным с изменением размеров русла,



просто здесь размеры нового русла бесконечно малы по сравнению с размерами исходного русла с сечением резервуара. В этом случае внутри выкидного патрубка вытекающая из резервуара жидкость заполняет всё сечение трубы не сразу, а лишь на некотором расстоянии от входа. В этой области в застойной зоне часть жидкости совершает вращательное движение и созданный таким образом вихрь порождает дополнительные г



гидравлические сопротивления. Коэффициент потерь напора при этом приблизительно составляет половину скоростного напора:

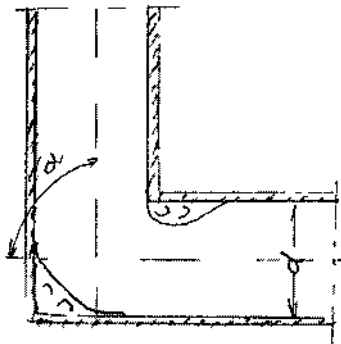
$$\xi_{\text{ex}} = 0,5$$

Выход из трубы в покоящуюся жидкость. Это обычный элемент стыковки напорной части трубопровода с резервуаром. Входной патрубок трубопровода располагается нормально к боковой



стенке резервуара. Этот вид гидравлических сопротивлений также можно рассматривать как разновидность внезапного расширения потока жидкости до бесконечно большого сечения. Величина коэффициента потерь напора, в большинстве случаев, принимается равной одному скоростному напору.

Внезапный поворот канала. Под таким гидравлическим сопротивлением будем понимать место



$$\xi_{\text{вых}} = 1$$

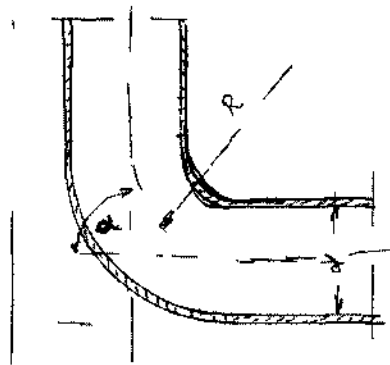
соединения трубопроводов одинакового диаметра, при котором осевые линии трубопроводов не совпадают, т.е. составляют между собой некоторый угол α . Этот угол называется углом поворота русла, т.к. здесь изменяется направление движения жидкости. Физические основы процесса преобразования кинетической энергии при повороте потока достаточно сложны и следует рассмотреть лишь результат этих процессов. Так при прохождении участка внезапного поворота образуется сложная форма потока с двумя зонами вихревого движения жидкости. На практике такие элементы соединения трубопроводов называют коленами. Следует отметить, что колено как соединительный элемент является крайне нежелательным ввиду значительных потерь напора в данном виде соединения. Величина коэффициента потерь напора будет, в первую очередь, зависеть от угла поворота русла и может быть определена по эмпирической формуле или по таблице:

$$\xi_{\text{em}} = 0,95 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2,05 \sin^4 \frac{\alpha}{2}.$$

α°	30	40	50	60	70	80	90
ξ_{em}	0,20	0,30	0,40	0,55	0,70	0,90	1,10

Плавный поворот канала Этот вид гидравлических сопротивлений можно считать более благоприятным (экономичным) с точки зрения величины потерь напора, т.к. в данном случае опасных зон для образования интенсивного вихревого движения жидкости практически нет. Тем не менее, под действием того, что при повороте потока возникают центробежные силы, способствующие отрыву частиц жидкости от стенки трубы, вихревые зоны всё же возникают. Кроме того, при этом возникают встречные потоки жидкости направленные от внутренней стенки трубы к внешней стенке трубы. Коэффициент потерь напора определяется по эмпирическим формулам или по таблицам. При угле поворота русла на 90° и $\frac{R}{d} > 1,0$:

При угле поворота русла а) 100° :



При $\alpha \leq 70^\circ$:

$$\xi_{n1} = \left(0,70 + 0,35 \frac{\alpha}{90} \right) \xi_{90^\circ}$$

$$\xi_{n1} = 0,51 + 0,19 \frac{d}{R}$$

i

$$\xi_{n1} = 0,9 \sin \alpha \xi_{90^\circ}$$

при $\alpha = 90^\circ$

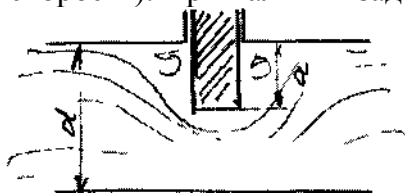
r/R	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ξ_{n1}	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

Здесь: R - радиус закругления трубы, r - радиус трубы.

Если $\alpha \neq 90^\circ$, то данные таблицы следует умножать на коэффициент: $\frac{\alpha}{90}$.

Кроме приведённых зависимостей имеются и другие справочные сведения. Наличие обширного набора сведений по этим вопросам объясняется тем, что колена в закруглённом исполнении весьма широко применяются в строительстве трубопроводов и в различных гидравлических системах.

Задвижки. Задвижки часто используют как средство регулирования характеристик потока жидкости (расход, напор, скорость). При наличии задвижки в трубопроводе поток обтекает находящиеся в



трубе плашки

затвижки, наличие которых ограничивает живое сечение потока, а также приводит к возникновению вихревых

потоков жидкости около плашек задвижки. Коэффициент потерь напора зависит от степени закрытия задвижки a/d .

a/d	Полное открытие	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8
ξ	0,12	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

Краны. Краны также могут использоваться в качестве средств регулирования параметров потока. В этих случаях коэффициент потерь напора зависит от степени закрытия крана (угла поворота).

α	5	10	20	30	40	50	60	70
$\xi_{\lambda p}$	0,05	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486

Обратные клапаны и фильтры. Коэффициенты потерь напора определяются, как правило, экспериментально.

5.6. Потери напора по длине

При установившемся движении реальной жидкости основные параметры потока: величина средней скорости в живом сечении (v) и величина перепада давления (Δp) зависят от физических свойств, движущейся жидкости и от размеров пространства, в котором жидкость движется. В целом, физические свойства жидкости определяются через размерные величины, называемые физическими параметрами жидкости.

Можно установить взаимосвязь между всеми параметрами, от которых зависит движение жидкости. Условно эту зависимость можно записать как некоторую функцию в неявном виде.

$$f(l_1, l_2, l_3, \Delta, v, \Delta p, \gamma, \rho, \mu, \sigma, K) = 0,$$

где: l_1, l_2 и l_3 - линейные величины, характеризующие трёхмерное пространство,

Δ - линейная величина, характеризующая состояние стенок канала (шероховатость), величина выступов,

v - средняя скорость движения жидкости в живом сечении потока,

Δp - разность давления между начальным и конечным живыми сечениями потока (перепад давления),

γ - удельный вес жидкости,

ρ - плотность жидкости,

μ - динамический коэффициент вязкости жидкости,

σ

μ

σ - поверхностное натяжение жидкости, K - модуль упругости жидкости.

Для установления зависимости воспользуемся выводами так называемой π -теоремы. Суть её заключается в том, что написанную выше зависимость, выраженную в неявном виде, можно представить в виде взаимозависимых безразмерных комплексов. Выберем три основных параметра с независимыми размерностями (l, v и ρ), остальные параметры выразим через размерности основных параметров.

Эта операция выполняется следующим образом: пусть имеется некоторый параметр i , выразим его размерность через размерности основных параметров; это будет означать:

$$[i] = [l]^x [v]^y [\rho]^z,$$

т.е. размерности левой и правой частей равенства должны быть одинаковыми. Тогда можно записать:

$$\frac{[l]^x [v]^y [\rho]^z}{[i]} = L^0 M^0 T^0,$$

$$[l]^x [v]^y [\rho]^z [i]^{-1} = L^0 M^0 T^0$$

Полученные в результате такой операции безразмерные параметры будут называться π -членами. Эти безразмерные комплексы имеют глубокий физический смысл, они представляют собой критерии подобия различных сил, действующих в тех или иных процессах.

Проведем такую операцию с некоторыми из параметров.

Параметр A .

$$L^x \left(\frac{L}{T} \right)^y \left(\frac{M}{L^3} \right)^z (L)^{-1} = L^0 M^0 T^0$$

Теперь запишем показательные уравнения по размерностям последовательно в следующем порядке: L (длина), M (масса), и T (время):

$$x + y - 3z - 1 = 0,$$

$$z = 0,$$

$$-y = 0.$$

Из этой системы уравнений: $x = 1, y = 0, z = 0$. Таким образом, безразмерным

комплексом по этому параметру может быть: $\Pi_\Delta = \frac{l}{\Delta}$ или $\frac{\Delta}{l}$ Параметр y .

$$L^x \left(\frac{L}{T} \right)^y \left(\frac{M}{L^3} \right)^z \left(\frac{M}{L^2 T^2} \right)^{-1} = L^0 M^0 T^0, > * \quad \text{откуда получим:}$$

$$x + y - 3z + 2 = 0,$$

$$z - 1 = 0$$

$$-y + 2 = 0$$

и найдём: $x = -1, y = 2, z = 1$. Таким образом, безразмерным комплексом по

этому параметру может быть: $\Pi_y = \frac{\rho v^2}{\mu} = \frac{v^2}{gl}$. Эта безразмерная величина называется

числом Фруда, Fr. Параметр u .

$$L^x \left(\frac{L}{T} \right)^y \left(\frac{M}{L^3} \right)^z \left(\frac{M}{L T} \right)^{-1} = L^0 M^0 T^0$$

$$x + y - 3z + 1 = 0,$$

$$z - 1 = 0$$

$$-y + 1 = 0$$

и найдём: $x = 1, y = 1, z = 1$.

$$\Pi_\mu = \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu}$$

Полученный безразмерный комплекс называется числом Рейнольдса, Re. Выполняя аналогичные операции с остальными параметрами можно найти:

$$\Pi_{\Delta p} = \frac{\rho v^2}{\Delta p} \quad \text{или} \quad \text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho v^2} \quad \text{число Эйлера, число Вебера, We.}$$

$$\Pi_\sigma = \frac{v^2 l}{\frac{\sigma}{\rho}}$$

$$\Pi_K = \frac{v^2}{\frac{K}{\rho}} \quad \text{число Коши, Ca. В итоге получим как результат:}$$

$$f\left(\frac{l_1}{l}, \frac{l_2}{l}, \frac{l_3}{l}, \frac{\Delta}{l}, \text{Eu}, \text{Fr}, \text{Re}, \text{We}, \text{Ca}\right) = 0$$

Поскольку, в большинстве случаев силами поверхностного натяжения можно пренебречь, а жидкость считать несжимаемой средой, можно упростить запись предыдущего выражения, решив последнее уравнение относительно Ей:

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = f\left(\frac{l_1}{l}, \frac{\Delta}{l}, \text{Fr}, \text{Re}\right).$$

Считая канал круглой цилиндрической трубой, и принимая $d = 4R$, получим:

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = f\left(\frac{l}{4R_s}, \frac{\Delta}{4R_s}, \text{Fr}, \text{Re}\right) = f\left(\frac{\Delta}{4R_s}, \text{Fr}, \text{Re}\right) \frac{l}{4R_s}$$

Множитель был вынесен за скобки ввиду того, что потери напора по длине пропорциональны длине канала конечных размеров. Далее учитывая, что: $\frac{\Delta p}{\rho} = g \frac{\Delta p}{\gamma} = gh_{mp}$, получим:

$$h_{mp} = 2f\left(\frac{\Delta}{4R_s}, \text{Fr}, \text{Re}\right) \frac{l}{4R_s} \frac{v^2}{2g}.$$

Обозначим: $2f\left(\frac{\Delta}{4R_s}, \text{Fr}, \text{Re}\right) = \lambda$. Эту величину принято называть коэффициен-

том сопротивления трения по длине или коэффициентом Дарси. Окончательно для круглых труб,

учитывая, что $h_{np} = h_{от}$:

$$h_{от} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

Эта формула носит название формулы Дарси-Вейсбаха и является одной из основных формул гидродинамики.

Коэффициент потерь напора по длине будет равен:

$$\xi_{от} = \lambda \frac{l}{d}$$

Запишем формулу Дарси-Вейсбаха в виде:

$$v = \sqrt{\frac{8gR_z}{\lambda} \frac{h_{от}}{L}}$$

Величину $i = \frac{h_{от}}{L}$ называют гидравлическим уклоном, а величину $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ называют коэффициентом Шези.

$$v = C \sqrt{R i}$$

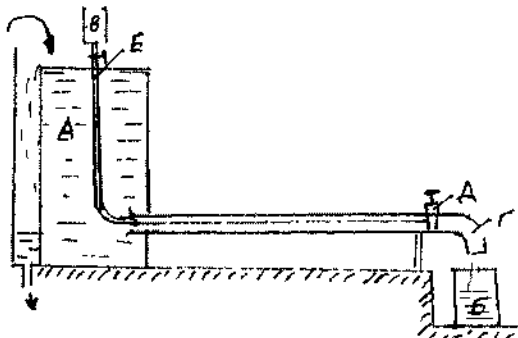
Величина $\sqrt{gR i} = u_*$ имеет размерность скорости и носит название динамической скорости жидкости.

Тогда коэффициент трения (коэффициент Дарси): $\lambda = 8 \left(\frac{u_*}{v} \right)^2$

6. Режимы движения жидкости

6.1. Экспериментальное изучение движения жидкости

При проведении многочисленных экспериментов с потоками движущейся жидкости было неоднократно подмечено, что на величину гидравлических сопротивлений кроме физических свойств самой жидкости, формы и размеров каналов, состояния их стенок, существенное влияние



оказывает особенности движения частиц жидкости в

потоке. Впервые дал теоретическое обоснование этой зависимости английский физик Осборн Рейнольдс. Суть его эксперимента заключалась в следующем.

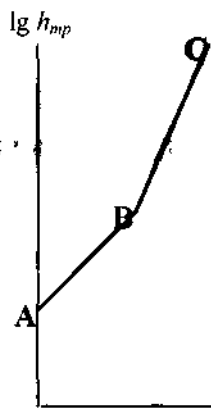
В ёмкость А достаточного большого объёма была вставлена длинная (не менее 20 диаметров) стеклянная трубка Г. На конце этой трубки устанавливался кран Д для регулирования расхода жидкости. Измерение расхода жидкости осуществлялось с помощью мерной ёмкости Б, расположенной в конце трубки. Из малого бачка В с помощью тонкой изогнутой трубки Е по центру основной трубки вводилась подкрашенная жидкость. Её расход также регулировался с помощью краника. Уровень жидкости в основном баке А поддерживался постоянным. Плавно меняя расход жидкости в трубке, Рейнольдс отметил, что при малых скоростях движения жидкости подкрашенная струйка жидкости текла по центру потока жидкости, не смешиваясь с остальной жидкостью потока. Однако при определённой скорости жидкости подкрашенная струйка жидкости теряла свою устойчивость и, в конечном итоге, частицы окрашенной жидкости перемешивались с остальной жидкостью. При снижении скорости движения жидкости положение восстанавливалось: хаотичное движение частиц жидкости снова становилось упорядоченным. Рейнольдс менял длину и диаметр трубки, вязкость жидкости, количество подкрашенных струек жидкости и установил, что эффект перемешивания (смена режима течения жидкости) зависит от скорости движения жидкости, её вязкости и от диаметра трубки, причём при увеличении вязкости жидкости для смены режима течения жидкости требовалась большая скорость. Отсюда Рейнольдс сделал вывод, что смена режима движения жидкости зависит от целого комплекса параметров потока, а именно от

соотношения:

$$Re = \frac{vd}{\nu},$$

которое получило название числа Рейнольдса. Число Рейнольдса оказалось безразмерной величиной, представлявшей собой отношение сил инерции к силам вязкостного трения. Была установлена и критическая величина числа Рейнольдса, при котором происходила смена режима движения жидкости $Re_{кр}$, она оказалась равной 2320.

Режим движения жидкости, при котором наблюдалось плавное, слоистое движение жидкости был назван ламинарным (слоистым) режимом движения жидкости. Режим движения жидкости сопровождавшийся хаотическим движением частиц жидкости в потоке был назван турбулентным



(беспо рядочным). Важным оказалось то обстоятельство, что при смене режима движения существенно менялась зависимость величины гидравлических сопротивлений от скорости движения жидкости. Этот факт можно проиллюстрировать на графике зависимости потерь напора от скорости, построенных в билогарифмической системе координат.

$$\lg h_{mp} = \lg b + k \lg v$$

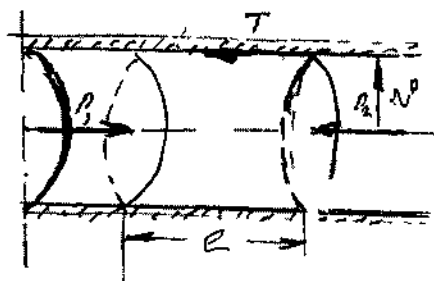
Зависимость состоит из двух участков: ламинарного (AB) и турбулентного (BC) режимов движения жидкости. Каждому из участков соответствует уравнение:

$$h_{mp} = bv^k.$$

Для ламинарного участка (AB) наклон линии к оси абсцисс $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$, для турбулентного участка (BC) наклон линии превышает 1 и изменяется в пределах 1,75 - 2,0.

6.2. Ламинарное движение жидкости

Касательные напряжения. Рассмотрим правила определения величины касательных напряжений на примере потока жидкости в круглой цилиндрической трубе. Двумя сечениями выделим в потоке жидкости отсек длиной l . На данный отсек жидкости будут действовать силы



давления, приложенные к площадям жидкости слева и справа и сила трения, направленная в сторону обратную движению жидкости. Поскольку движение жидкости установившееся, то все действующие на отсек жидкости силы должны быть уравновешены.

$$P_1 - P_2 - T = 0$$

$$p_1 \cdot \pi r_0^2 - p_2 \cdot \pi r_0^2 - \tau_0 \cdot 2\pi r_0 l = 0,$$

где: τ_0 — касательные напряжения на боковой поверхности отсека жидкости.

Касательные напряжения на периферии отсека жидкости (у стенки трубы) будут равны:

$$\tau_0 = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{r_0}{2}$$

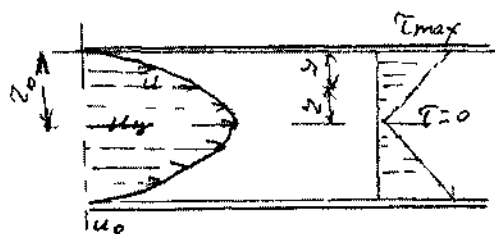
Очевидно, это будут максимальная величина касательных напряжений в отсеке жидкости. Вычислим величину касательных напряжений на расстоянии z от оси трубы.

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{l} \cdot \frac{r}{2}$$

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}$$

Таким образом, касательные напряжения по сечению трубы изменяются по линейному закону; в центре потока (на оси трубы) $r=0$ касательные напряжения $\tau = 0$.

Распределение скоростей в ламинарном потоке. Поскольку ламинарный поток жидкости в круглой цилиндрической трубе является осе симметричным, рассмотрим, как и ранее, лишь одно (вертикальное сечение трубы). Тогда, согласно гипотезе Ньютона:



$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{l} \frac{r}{2} = -\mu \frac{du}{dr}$$

$$\rho g \frac{r}{2} = -\mu \frac{du}{dr}$$

$$\int_0^u du = -\rho g \frac{1}{2\mu} \int_{r_0}^r r dr$$

$$u = \rho g \frac{i}{4\mu} (r_0^2 - r^2)$$

Отсюда видно, что распределение скоростей в круглой цилиндрической трубе соответствует параболическому закону. Максимальная величина скорости будет в центре трубы, где $r = 0$

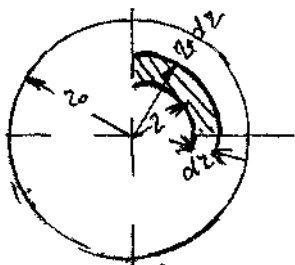
$$u_{\max} = \rho g \frac{i}{4\mu} r_0^2$$

Средняя скорость движения жидкости в ламинарном потоке. Для определения величины средней скорости рассмотрим живое сечение потока жидкости в трубе. Затем проведём в сечении потока две концентрические окружности, отстоящие друг от друга на бесконечно малое расстояние dr . Между этими окружностями мы, таким образом, выделили малую кольцевую зону, малую часть живого сечения потока жидкости. Расход жидкости через выделенную кольцевую зону:

$$dQ = u dS = u \cdot 2\pi r \cdot dr$$

Расход жидкости

через полное живое



$$Q = \int_0^{r_0} u \cdot 2\pi r \cdot dr = \int_0^{r_0} \rho g \frac{i}{4\mu} (r_0^2 - r^2) \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$Q = \rho g \frac{i \cdot 2\pi}{4\mu} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) \cdot r dr = \rho g \frac{\pi \cdot i}{8\mu} r_0^4$$

сечение трубы:

величина средней скорости в сечении:

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{\rho g d^2}{32\mu} i \quad \text{или} \quad v = 0,5 u_{\max}$$

Потери напора в ламинарном потоке жидкости. Для ламинарного потока жидкости в круглой трубе можно определить коэффициент трения через число Рейнольдса. Вычислим величину гидравлического уклона из средней скорости жидкости.

$$i = \frac{32\rho v}{gd^2} = \frac{8\nu}{gdR_e}$$

Отсюда:

$$gR_{\epsilon} l = \frac{8\nu}{d} = u_*^2$$

Тогда:

$$\lambda = 8 \left(\frac{u_*}{\nu} \right)^2 = \frac{64\nu}{vd} = \frac{64}{\text{Re}}$$

Окончательно потери напора при ламинарном движении жидкости в трубе:

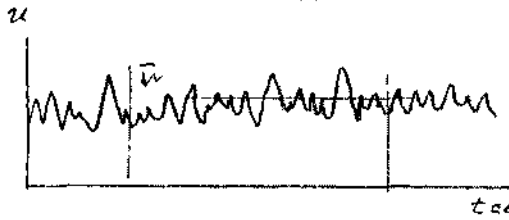
$$h_{\text{от}} = \frac{64}{\text{Re}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Несколько преобразовав формулу для определения потерь напора, получим формулу Пуазейля:

$$h_{\text{от}} = \frac{32 \cdot \nu \cdot l \cdot v}{gd^2}$$

6.3. Турбулентное движение жидкости

Структура турбулентного потока. Отличительной особенностью турбулентного движения жидкости является хаотическое движение частиц в потоке. Однако при этом часто можно на-



блюдать и некоторую закономерность в таком

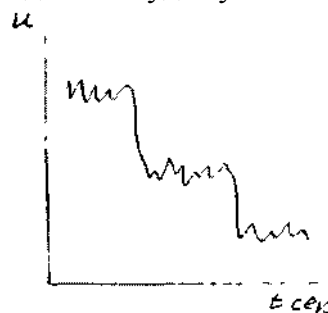
движении. С помощью термогидрометра, прибора позволяющего фиксировать изменение скорости в точке замера, можно снять кривую скорости. Если выбрать интервал времени достаточной продолжительности, то окажется, что колебания скорости наблюдаются около некоторого уровня и этот уровень сохраняется постоянным при выборе различных интервалов времени. Величина скорости в данной точке в данный момент времени носит название мгновенной скорости. График изменения мгновенной скорости во времени $u(t)$ представлена на рисунке. Если выбрать на кривой скоростей некоторый интервал времени и провести интегрирование кривой скоростей, а затем найти среднюю величину, то такая величина носит название осреднённой скорости $\bar{u}$

$$\bar{u} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt$$

Разница между мгновенной и осреднённой скоростью называется скоростью пульсации u' .

$$u' = u - \bar{u}$$

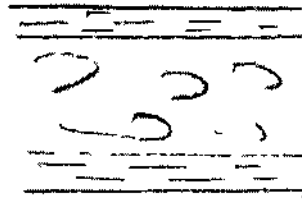
Если величины осреднённых скоростей в различные интервалы времени будут оставаться постоянными, то такое турбулентное движение жидкости будет установившемся.



При неустоявшемся турбулентном движении

средних скоростей меняются во времени

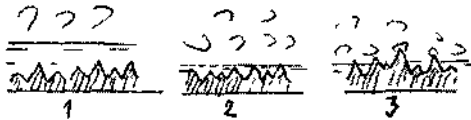
Пульсация жидкости является причиной перемешивания жидкости в потоке. Интенсивность перемешивания зависит, как известно, от числа Рейнольдса, т.е. при сохранении прочих условий от скорости движения жидкости. Таким образом, в конкретном потоке жидкости (вязкость жидкости и размеры сечения определены первичными условиями) характер её движения зависит от скорости. Для турбулентного потока это имеет решающее значение. Так в периферийных слоях жидкости скорости всегда будут минимальными, и режим движения в этих



слоях естественно будет ламинарным. Увеличение скорости до критического значения приведёт к смене режима движения жидкости с ламинарного режима на турбулентный режим. Т.е. в реальном потоке присутствуют оба режима как ламинарный, так и турбулентный.

Таким образом, поток жидкости состоит из ламинарной зоны (у стенки канала) и турбулентного ядра течения (в центре) и, поскольку скорость к центру турбулентного потока нарастает интенсивно, то толщина периферийного ламинарного слоя чаще всего незначительна, и, естественно, сам слой называется ламинарной плёнкой, толщина которой δ зависит от скорости движения жидкости.

Гидравлически гладкие и шероховатые трубы. Состояние стенок трубы в значительной мере влияет на поведение жидкости в турбулентном потоке. Так при ламинарном движении



жидкость движется медленно и плавно, спокойно обтекая на

своём пути незначительные препятствия. Возникающие при этом местные сопротивления настолько ничтожны, что их величиной можно пренебречь. В турбулентном же потоке такие малые препятствия служат источником вихревого движения жидкости, что приводит к возрастанию этих малых местных гидравлических сопротивлений, которыми мы в ламинарном потоке пренебрегли. Такими малыми препятствиями на стенке трубы являются её неровности. Абсолютная величина таких неровностей зависит от качества обработки трубы. В гидравлике эти неровности называются выступами шероховатости, они обозначаются литерой Δ .

В зависимости от соотношения толщины ламинарной плёнки и величины выступов шероховатости будет меняться характер движения жидкости в потоке. В случае, когда толщина ламинарной плёнки велика по сравнению с величиной выступов шероховатости ($\delta \gg \Delta$), выступы шероховатости погружены в ламинарную плёнку и турбулентному ядру течения они недоступны (их наличие не сказывается на потоке). Такие трубы называются гидравлически гладкими (схема 1 на рисунке). Когда размер выступов шероховатости превышает толщину ламинарной плёнки, то плёнка теряет свою сплошность, и выступы шероховатости становятся источником многочисленных вихрей, что существенно сказывается на потоке жидкости в целом. Такие трубы называются гидравлически шероховатыми (или просто шероховатыми) (схема 3 на рисунке). Естественно, существует и промежуточный вид шероховатости стенки трубы, когда выступы шероховатости становятся соизмеримыми с толщиной ламинарной плёнки $\delta \approx \Delta$ (схема 2 на рисунке). Толщину ламинарной плёнки можно оценить исходя из эмпирического уравнения

$$\frac{\delta}{d} = \frac{32,5}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}$$

Касательные напряжения в турбулентном потоке. В турбулентном потоке величина касательных напряжений должна быть больше, чем в ламинарном, т.к. к касательным напряжениям, определяемым при перемещении вязкой жидкости вдоль трубы следует добавить дополнительные касательные напряжения, вызываемые перемешиванием жидкости.

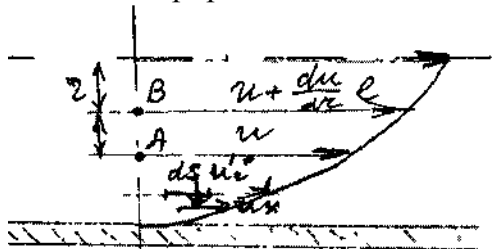
Рассмотрим этот процесс подробнее. В турбулентном потоке вместе с перемещением частицы жидкости вдоль оси трубы со скоростью u эта же частица жидкости одновременно переносится в перпендикулярном направлении из одного слоя жидкости в другой со скоростью равной скорости пульсации u' . Выделим элементарную площадку dS , расположенную параллельно оси трубы. Через эту площадку из одного слоя в другой будет перемещаться жидкость со скоростью пульсации u' , ($u' = u'_r + u'_x$), при этом расход жидкости составит:

$$dQ_r = u' \cdot dS$$

Масса жидкости dM_r , переместившаяся через площадку за время dt будет:

$$dM_r = \rho dQ_r \cdot dt$$

За счёт горизонтальной составляющей скорости пульсации u'_x эта масса получит в новом слое жидкости приращение количества движения dM, u'_x



$$dM, u'_x = \rho dQ, \cdot dt \cdot u'_x = \rho \cdot u'_x u'_x dS \cdot dt.$$

Если переток жидкости осуществлялся в слой,двигающийся с большей скоростью, то, следовательно, приращение количества движения будет соответствовать импульсу силы dT , направленной в сторону противоположную движению жидкости, т.е. скорости u'_x :

Тогда:

$$-dT \cdot dt = \rho \cdot u'_x u'_x dS \cdot dt.$$

$$\tau \cdot dS \cdot dt = -\rho \cdot u'_x u'_x dS \cdot dt,$$

$$\tau = -\rho u'_x u'_x.$$

Для осреднённых значений скорости: $\bar{\tau} = -\rho \overline{u'_x u'_x}.$

Следует отметить, что при перемещении частиц жидкости из одного слоя в другой они не мгновенно приобретают скорость нового слоя, а лишь через некоторое время; за это время частицы успеют углубиться в новый слой на некоторое расстояние l , называемое длиной пути перемешивания.

Теперь рассмотрим некоторую частицу жидкости находящуюся в точке A Пусть эта частица переместилась в соседний слой жидкости и углубилась в него на длину пути перемешивания, т.е. оказалась в точке B . Тогда расстояние между этими точками будет равно l . Если скорость жидкости в точке A будет равна u , тогда скорость в точке

$$B \text{ будет равна } u + \frac{du}{dr} l.$$

Сделаем допущения, что пульсации скорости пропорциональны приращению скорости объёма жидкости. Тогда:

$$\bar{\tau} = -\rho \overline{u'_x u'_x} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dr} \right)^2.$$

Полученная зависимость носит название формулы Прандтля и является законом в теории турбулентного трения так же как закон вязкостного трения для ламинарного движения жидкости. , Перепишем последнюю зависимость в форме:

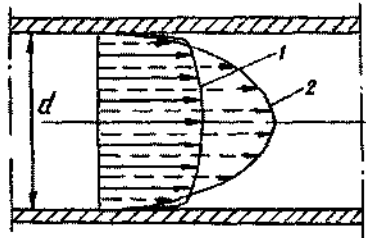
$$\bar{\tau} = \rho l^2 \frac{d\bar{u}}{dr} \frac{d\bar{u}}{dr} = C, \frac{d\bar{u}}{dr}.$$

Здесь коэффициент C , называемый коэффициентом турбулентного обмена играет роль динамического коэффициента вязкости, что подчёркивает общность основ теории Ньютона и Прандтля. Теоретически полное касательное напряжение должно быть равно:

$$* \quad \bar{\tau} = -\mu \frac{d\bar{u}_x}{dr} + \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dr} \right)^2,$$

но первое слагаемое в правой части равенства мало по сравнению со вторым и его величиной можно пренебречь

Распределение скоростей по сечению турбулентного потока. Наблюдения за величинами осреднённых скоростей в турбулентном потоке показали, что эпюра осреднённых скоростей в турбулентном потоке в значительной степени сглажена и практически скорости в



разных точках живого

сечения равны средней скорости. Сопоставляя

эпюры скоростей турбулентного потока (эпюра 1) и ламинарного потока позволяют сделать вывод о практически равномерном распределении скоростей в живом сечении. Работами Прандтля было установлено, что закон изменения касательных напряжений по сечению потока близок к логарифмическому закону. При некоторых допущениях: течение вдоль бесконечной плоскости и равенстве касательных напряжений во всех точках на поверхности τ_0

$$du = \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}{\chi \cdot r} dr,$$

После интегрирования: $u = \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln r + C.$

Последнее выражение преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{u_* r}{\nu} + const$$

Развивая теорию Прандтля, Никурадзе и Рейхардт предложили аналогичную зависимость для круглых труб.

$$\varphi = \frac{1}{\chi} \ln[\chi(\eta - \alpha) + 1] + \alpha.$$

Потери напора на трение в турбулентном потоке жидкости. При исследовании вопроса об определении коэффициента потерь напора на трение в гидравлически гладких трубах можно прийти к мнению, что этот коэффициент целиком зависит от числа Рей-нольдса. Известны эмпирические формулы для определения коэффициента трения, наиболее широкое распространение получила формула Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}.$$

По данным многочисленных экспериментов формула Блазиуса подтверждается в пределах значений числа Рейнольдса от $Re_{кр}$ до 10^5 . Другой распространённой эмпирической формулой для определения коэффициента Дарси является формула П.К. Конакова:

$$\lambda = \frac{1}{(1,81 \lg Re - 1,5)^2}$$

Формула П.К. Конакова имеет более широкий диапазон применения до значений числа Рейнольдса в несколько миллионов. Почти совпадающие значения по точности и области применения имеет формула Г.К. Филоненко:

$$\lambda = \left(\frac{0,55}{\lg \frac{Re}{8}} \right)^2.$$

Изучение движения жидкости по шероховатым трубам в области, где потери напора определяются только шероховатостью стенок труб, $\lambda = f\left(\frac{\Delta}{d}\right)$ и не зависят от скорости

движения жидкости, т.е. от числа Рейнольдса осуществлялось Прандтлем и Никурадзе. В результате их экспериментов на моделях с искусственной шероховатостью была установлена зависимость для коэффициента Дарси для этой так называемой квадратичной области течения жидкости:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{3,7d}{\Delta} = -2 \lg 0,27 \frac{\Delta}{d},$$

$$\text{или: } \lambda = \left(1,14 + 2 \lg \frac{d}{\Delta} \right)^{-2}.$$

Для труб с естественной шероховатостью справедлива формула Шифринсона

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta_2}{d} \right)^{0,25}$$

где: Δ_2 - эквивалентная величина выступов шероховатости. Ещё более сложная обстановка связана с изучением движения жидкости в переходной области течения, когда величина потерь напора зависит от обоих факторов,

$$\lambda = f \left(\text{Re}, \frac{\Delta}{d} \right). \text{ Наиболее приемлемых результатов добились Кёллбрук - Уайт:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + 0,27 \frac{\Delta}{d} \right)$$

Несколько отличная формула получена Н.З. Френкелем:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\left(\frac{6,81}{\text{Re}} \right)^{0,9} + 0,27 \frac{\Delta}{d} \right].$$

Формула Френкеля хорошо согласуется с результатами экспериментов других авторов с отклонением (в пределах 2 - 3%). Позднее А.Д. Альтшуль получил простую и удобную для расчётов формулу:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta_2}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}$$

Обобщающие работы, направленные на унификацию результатов экспериментов, проведенных разными авторами, ставили перед собой цель связать воедино исследования потоков жидкости в самых разнообразных условиях. Результаты представлялись в графич-

$\lg(1000\lambda)$

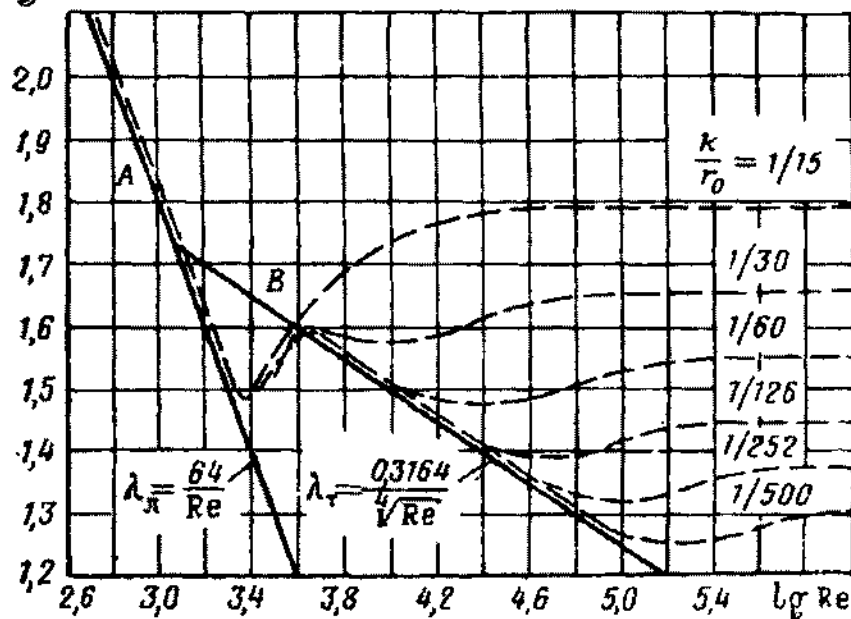


График И.И. Никурадзе

ческой форме (широко известны графики Никурадзе, Зегжда, Мурина, опубликованные в специальной литературе и учебных пособиях). Графики Никурадзе построены для труб с искусственной шероховатостью, графики Зегжда для прямоугольных лотков с искусственно приданной равномерной шероховатостью. Наиболее часто употребляемыми являются графики построенные Никурадзе.

На графике зависимости легко различимы все четыре области течения жидкости.

I ламинарное течение жидкости (прямая А), $\lg Re = 2,6 - 3,1$

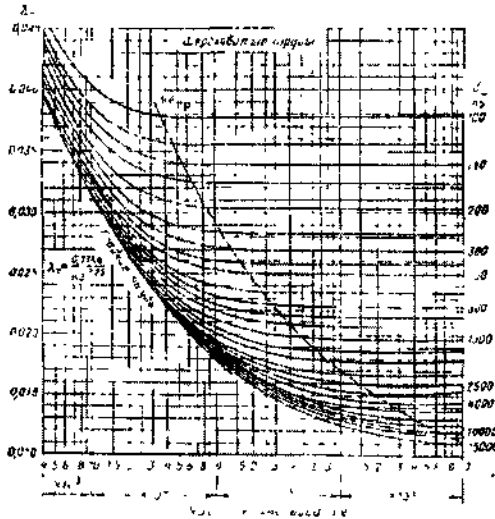
II турбулентное течение жидкости в гидравлически гладких трубах (прямая В), $\lg Re = 3,1 - 3,5$

III переходная область течения жидкости, $\lg Re = 3,5 - 5,0$

IV квадратичная область течения жидкости, $\lg Re > 4,6 - 5,0$.

6.4. Кавитационные режимы движения жидкости

В жидкости при любом давлении и температуре всегда растворено какое-либо количество газов. Уменьшение давления в жидкости ниже давления насыщения жидкости газом сопровождается



выделением рас

ГпасЬики Г.А. Муоина

творённых газов в свободное состояние, и, наоборот, при повышении давления, выде-

лившиеся из жидкости газы, вновь переходят в растворённое состояние. Изменение давления в жидкости может приводить и к изменению агрегатного состояния жидкости (переход жидкости в пар и пара в жидкое состояние). Если жидкость движется в закрытой системе, то колебания давления в потоке могут приводить к образованию локальных зон низкого давления и как следствие, в этих зонах происходят процессы образования паров жидкости («холодное» кипение жидкости) и её разгазирование. При этом, процесс разга-зирования, как правило - процесс более медленный, чем процесс парообразования. Однако и в том и в другом случае появление свободного газа и, тем более пара, в замкнутом пространстве крайне не желательно. Появление пузырьков газовой фазы говорит о том, что в жидкости появился разрыв. Далее эти пузырьки переносятся движущейся жидкостью. Процесс образования пузырьков пара в жидкости носит название паровой кавитации, образование пузырьков газа вызывает газовую кавитацию. При попадании в зону высокого давления пузырьки газа растворяются в жидкости, а пузырьки пара конденсируются. Поскольку последний процесс происходит почти мгновенно, говорят о том, что пузырьки схлопываются. Особенно интенсивно процессы схлопывания пузырьков пара происходит в месте контакта их с твёрдыми телами (стенки труб, элементы гидромашин и т.д.). Отрицательное воздействие пузырьков пара на элементы гидросистем заключается в особенности их контакта с твёрдыми телами: при приближении к твёрдой границе пузырьки пара деформируются, что приводит к явлению подобному детонации. При таком воздействии свободного пара и газа на твердые элементы внутренних конструкций гидромашин, они разрушаются и выходят из строя. Для оценки режима течения жидкости вводят специальный критерий; число кавитации K_f

$$K_f = \frac{P_0 - P_{нас}}{\rho \frac{v_0^2}{2g}}$$

7. Истечение жидкости из отверстий и насадков >

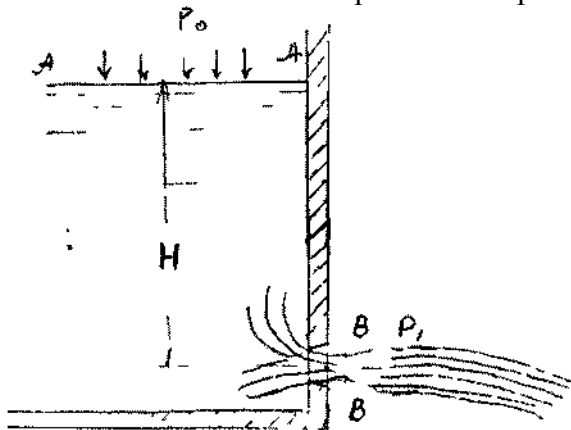
7.1. Отверстие в тонкой стенке

Одной из типичных задач гидравлики, которую можно назвать задачей прикладного характера, является изучение процессов, связанных с истечением жидкости из отверстия в тонкой стенке и через насадки. При таком движении вся потенциальная энергия жидкости находящейся в ёмкости (резервуаре) в конечном итоге расходуется на кинетическую энергию струи, вытекающей в газообразную среду, находящуюся под атмосферным давлением или (в отдельных случаях) в жидкую

среду при определённом давлении. Отверстие будет считаться малым, если его размеры несоизмеримо малы по сравнению с размером свободной поверхности в резервуаре и величиной напора. Стенка называется тонкой, если величиной гидравлических сопротивлений по длине канала в тонкой стенке можно пренебречь. В таком случае частицы жидкости со всех сторон по криволинейным траекториям движутся с некоторым ускорением к отверстию. Дойдя до отверстия, струя жидкости отрывается от стенки и испытывает преобразования уже за пределами отверстия.

7.2. Истечение жидкости из отверстия в тонкой стенке при установившемся движении (жидкости).

Истечение жидкости в газовую среду при атмосферном давлении. При истечении из отверстия в тонкой стенке криволинейные траектории частиц жидкости сохраняют свою форму и за пределами отверстия, т.е. после выхода из отверстия сечение струи уменьшается и достигает минимальных значений на расстоянии равном $0,5d$ (d - диаметр отверстия). Таким образом, в сечении



В - В будет находиться как называемое сжатое сечение

струи жидкости. Отношение площади сечения струи к площади отверстия называется коэффициентом сжатия струи, где:

$$\varepsilon = \frac{S_{сж}}{S},$$

где: S - площадь отверстия,

$S_{сж}$ - площадь сжатого сечения струи, ε - коэффициент сжатия струи.

Запишем уравнение Бернулли для двух сечений А - А и В - В. В связи с тем, что отверстия в стенке является малым сечением В - В можно считать «горизонтальным» (ввиду малости отверстия), проходящим через центр тяжести сжатого сечения струи.

$$H + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = 0 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_{mp}.$$

Поскольку величина скоростного напора на свободной поверхности жидкости (сечение А - А) мала из-за малости скорости, то её величиной можно пренебречь. В данном случае истечение жидкости происходит в атмосферу, следовательно $p_1 = p_0$. Тогда:

$$H = \frac{\alpha v^2}{2g} + h_{mp},$$

$$H = \frac{\alpha v^2}{2g} + \sum \xi \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} (\alpha + \sum \xi)$$

Поскольку в тонкой стенке потери напора по длине бесконечно малы, то

$$\sum \xi = \xi_{mc}$$

где ξ_{mc} - коэффициент потерь напора в тонкой стенке. Следовательно, скорость в сжатом сечении струи будет равна:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi_{mc}}} \sqrt{2gH}$$

Первый множитель в равенстве носит название коэффициента скорости'

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi_{m\epsilon}}}, \text{ тогда:}$$

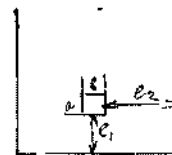
$$v = \varphi \sqrt{2gH}.$$

Определим расход жидкости при её истечении из отверстия (заметим, что скорость истечения жидкости у нас относится к площади сжатого живого сечения струи):

$$Q = s_{сж} v = \epsilon s \cdot v = \mu s \sqrt{2gH},$$

где: $\mu = \epsilon \cdot \varphi$ - называется коэффициентом расхода.

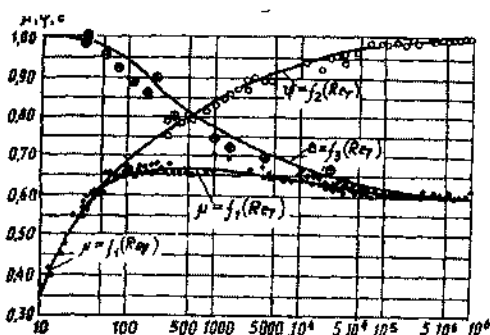
При изучении процесса истечения жидкости предполагалось, что ближайшие стенки и дно сосуда



находятся на достаточно большом удалении от отверстия: $l_1 \gg 3a$, $l_2 \gg 3b$, т.е. не ближе тройного расстояния от направляющих стенок. В этом случае все линии тока имеют одинаковую кривизну, и такое сжатие струи

называется совершенным сжатием. В иных случаях близко расположенные стенки являются для струи направляющими элементами, и её сжатие будет несовершенным (не одинаковым со всех сторон). В тех случаях, когда отверстие непосредственно примыкает к одной из сторон отверстия (сечение отверстия не круглое), сжатие струи будет неполным. При неполном и несовершенном сжатии струи наблюдается некоторое увеличение коэффициента расхода. При полном совершенном сжатии струи коэффициент сжатия достигает 0,60 - 0,64. Величины коэффициентов сжатия струи, коэффициента расхода зависят

от числа Рейнольдса (см. рисунок), причём коэффициенты сжатия и скорости в разных направлениях: с возрастанием числа Рейнольдса коэффициент скорости увеличивается, а коэффициент сжатия струи убывает. В результате этого коэффициент расхода оста-



ётся практически неизменным (исключением являются потоки жидкости с весьма малыми числами Рейнольдса).

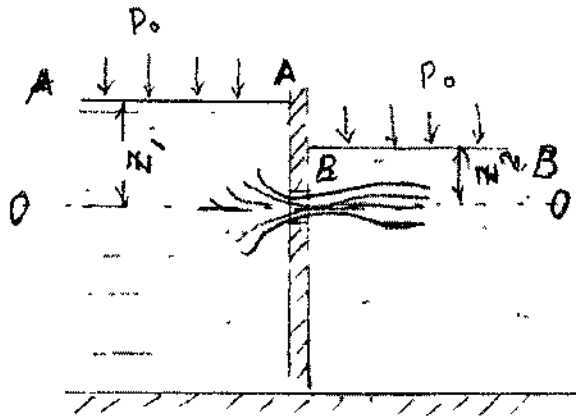
Величины коэффициента расхода измеряются простым замером фактического расхода жидкости через отверстие и сопоставлением его с теоретически вычисленным значением.

$$\mu = \frac{Q_{\text{факт}}}{s \sqrt{2gH}}$$

Коэффициент сжатия струи измеряется путём непосредственного определения сжатого сечения струи, коэффициент скорости - по траектории струи.

Истечение жидкости через затопленное отверстие. Истечение через затопленное отверстие в тонкой стенке, т.е. под уровень жидкости ничем существенным не отличается от истечения в атмосферу.

Пусть в резервуаре имеется перегородка с отверстием, уровни жидкости находятся на отметках z_1 и z_2 относительно плоскости сравнения, проходящей через центр тяжести отверстия. Запишем уравнение Бернулли для свободных поверхностей жидкости (сечение А - А и сечение В -



В относительно

плоскости сравнения О - О).

$$z_1 = z_2 + \sum h_{mp}$$

$$z = z_1 - z_2 = \sum \xi_{mp} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Потери напора состоят из двух частей: потеря напора при истечении из отверстия в тонкой стенке (как при истечении в атмосферу):

$$h_1 = \xi_{mc} \frac{v^2}{2g},$$

и потеря на внезапное расширение струи от сжатого сечения до сечения резервуара:

$$h_2 = \frac{\alpha_1 v^2}{2g}$$

*

Подставив полученные выражения для видов потерь в предыдущее уравнение, получим:

$$z = \sum \xi_{mp} \cdot \frac{v^2}{2g} = (\alpha_1 + \xi_{mc}) \frac{v^2}{2g}.$$

В данном случае действующим напором является разность уровней свободных поверхностей жидкости z. Скорость истечения будет равна:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 + \xi_{mc}}} \sqrt{2gz}$$

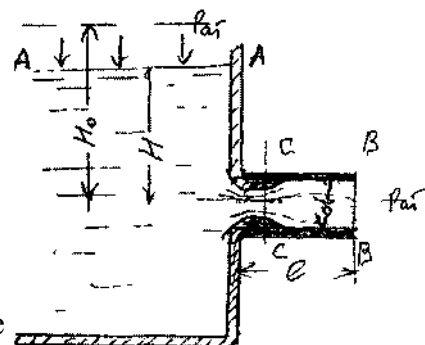
Обозначив: $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 + \xi_{mc}}}$ получим выражение для расхода жидкости¹

$$Q = \varepsilon \cdot \varphi \cdot s \sqrt{2gz},$$

$$Q = \mu \cdot s \sqrt{2gz}.$$

7.3. Истечение жидкости через насадки.

Насадками называются короткие трубки, монтируемые, как правило, с внешней стороны резервуара таким образом, чтобы внутренний канал насадка полностью соответствовал размеру отверстия в



тонкой стенке. Наличие такой направляющей трубки приве

дет к

увеличению расхода жидкости при прочих равных условиях. Причины увеличения следующие При отрыве струи от острой кромки отверстия струя попадает в канал насадка, а поскольку струя испытывает сжатие, то стенок насадка она касается на расстоянии от 1,0 до 1,5 его диаметра.

Воздух, который первоначально находится в передней части насадка, вследствие неполного заполнения его жидкостью постепенно выносится вместе с потоком жидкости. Таким образом, в этой области образуется «мёртвая зона», давление в которой ниже, чем давление в окружающей среде (при истечении в атмосферу в «мёртвой зоне» образуется вакуум). За счёт этих факторов увеличивается перепад давления между резервуаром и областью за внешней его стенкой и в насадке генерируется так называемый эффект подсосывания жидкости из резервуара. Однако наличие самого насадка увеличивает гидравлическое сопротивление для струи жидкости, т.к. в самом насадке появляются потери напора по длине трубки. Если трубка имеет ограниченную длину, то влияние подсосывающего эффекта с лихвой компенсирует дополнительные потери напора по длине. Практически эти эффекты (подсосывание и дополнительные сопротивления по длине) компенсируются при соотношении: $l = 55 d$. По этой причине длина насадков ограничивается $l = (3 - 5)d$. По месту расположения насадки принято делить на внешние и внутренние насадки. Когда насадок монтируется с внешней стороны резервуара (внешний насадок), то он оказывается более технологичным, что придаёт ему преимущество перед внутренними насадками. По форме исполнения насадки подразделяются на цилиндрические и конические, а по форме входа в насадок выделяют ещё коноидальные насадки, вход жидкости в которые выполнен по форме струи.

Внешний цилиндрический насадок. При истечении жидкости из цилиндрического насадка сечение выходящей струи и сечение отверстия одинаковы, а это значит, что коэффициент сжатия струи $\epsilon = 1$. Скорость истечения:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\xi_{\text{эк}} + \lambda \frac{l}{d}}} \sqrt{2gH_0} = \varphi \sqrt{2gH_0}$$

Приняв $\frac{l}{d} = 3 - 5$, коэффициенты скорости и расхода: $\varphi = \mu = 0,82$

Для вычисления степени вакуума в «мёртвой зоне» запишем уравнение Бернулли для двух сечений относительно плоскости сравнения проходящей через ось насадка: А - А и С - С (ввиду малости поперечного размера насадка сечение С - С будем считать «горизонтальным», ^ плоским):

$$H + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = 0 + \frac{p_c}{\rho g} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h_{\text{мп}}$$

Величину $H_0 = H + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$ часто называют действующим напором, что соответствует

избыточному давлению. Приняв, $\alpha_0 = \alpha_c = 1$ получим:

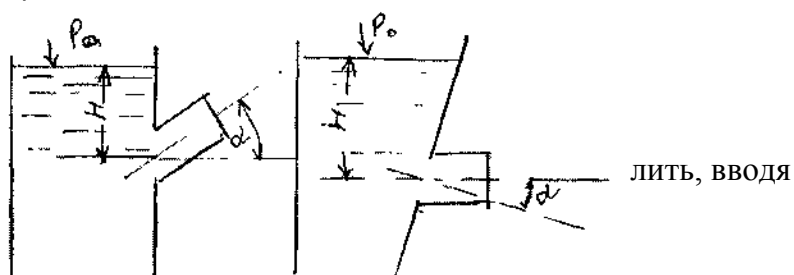
$$\frac{p_0 - p_c}{\rho g} = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{\xi_{\text{м.с.}}}{\epsilon^2} \right) - H_0$$

Учитывая, что для цилиндрического насадка $\varphi_{\text{н.н.}} = \mu_{\text{н.н.}} = 0,82$, получим:

$$h_{\text{вкл.}} = \frac{p_0 - p_c}{\rho g} \approx 0,74 H_0$$

Для затопленного цилиндрического насадка все приведенные выше рассуждения остаются в силе, только за величину действующего напора принимается разность уровней свободных поверхностей жидкости между питающим резервуаром и приёмным резервуаром.

Если цилиндрический насадок расположен под некоторым углом к стенке резервуара (под углом к вертикальной стенке резервуара или горизонтальный насадок к наклонной стенке резервуара), то коэффициент скорости и расхода можно вычис-



соответствующую

поправку:

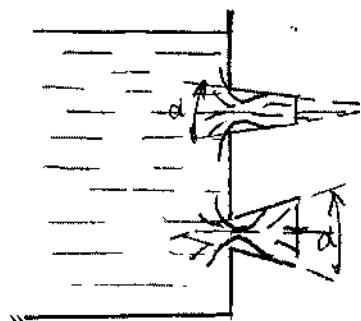
$$\mu = \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{нак}}},$$

где: $\xi_{нак} = 0,505 + 0,303 \sin \alpha + 0,226 \sin^2 \alpha$.

Значения коэффициента расхода можно взять из следующей таблицы:

α°	0	10	20	30	40	50	60
μ	0,82	0,80	0,78	0,76	0,75	0,73	0,72

Сходящиеся насадки. Если придать насадку форму конуса, сходящемуся по направлению к его выходному отверстию, то такой насадок будет относиться к группе сходящихся конических насадков. Такие насадки характеризуются углом конусности α . От величины этого угла зависят все характеристики насадков. Как коэффициент скорости, так и коэффициент расхода увеличиваются с увеличением угла конусности, при угле



конусности в 13° достигается максимальное значение коэффициента расхода превышающее 0,94. При дальнейшем увеличении угла конусности насадок начинает работать как отверстие в тонкой стенке, при этом коэффициент скорости продолжает увеличиваться, а коэффициент расхода начинает убывать. Это объясняется тем, что уменьшаются потери на расширение струи после её сжатия. Область применения сходящихся насадков связана с теми случаями, когда необходимо иметь большую выходную скорость струи жидкости при значительном напоре (сопла турбин, гидромониторы, брандспойты).

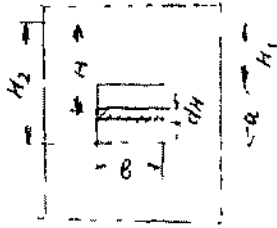
•
Расходящиеся насадки. Вакуум в сжатом сечении расходящихся насадков больше, чем у цилиндрических насадков и увеличивается с возрастанием угла конусности, что увеличивает расход жидкости. Но с увеличением угла конусности расходящихся насадков возрастает опасность отрыва струи от стенок насадков. Необходимо отметить, что потери энергии в расходящемся насадке больше, чем в насадках других типов. Область применения расходящихся насадков охватывает те случаи, где требуется большая пропускная способность при малых выходных скоростях жидкости (водоструйные насосы, эжекторы, гидроэлеваторы и др.)

Коноидальные насадки. В коноидальных насадках вход в насадки выполнен по профилю входящей



струи. Это обеспечивает уменьшение потерь напора до минимума. Так значение коэффициентов скорости и расхода в коноидальных цилиндрических насадках достигает 0,97 - 0,99.

7.4. Истечение жидкости через широкое отверстие в боковой стенке. Истечение жидкости через большое отверстие в боковой стенке сосуда отличается от истечения через малое отверстие тем, что величина напора будет различной для различных площадок в сечении отверстия. Максимальным напором будет напор в площадках примыкающих к нижней кромке отверстия. В связи с этим и скорости в различных элементарных струйках



проходящих через сечение отверстия также будут неодинаковы. В то же время давление во внешней среде, в которую происходит истечение жидкости одинаково и равно атмосферному давлению.

Выделим в площади сечения отверстия малый элемент его сечения высотой dH , расположенный на глубине H под уровнем свободной поверхности жидкости.

Тогда расход жидкости через этот элемент сечения отверстия будет равен:

$$dQ = \mu v \cdot ds = \mu b \sqrt{2gH} \cdot dH,$$

где H - глубина погружения центра тяжести элемента площади сечения отверстия $ds = b \cdot dH$ под уровень свободной поверхности жидкости. Полный расход жидкости через всё сечение отверстия будет:

$$Q = \int_{H_1}^{H_2} \mu b \sqrt{2gH} \cdot dH = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}).$$

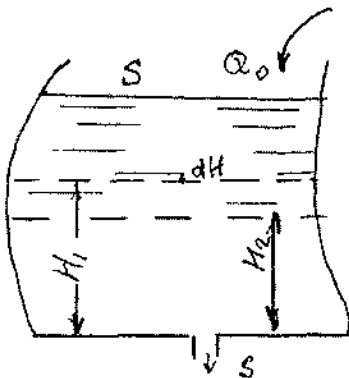
Данное выражение будет справедливым, если величиной скоростного напора на свободной поверхности жидкости можно пренебречь.

7.5. Неустановившееся истечение жидкости из резервуаров.

Истечение из резервуара произвольной формы с постоянным притоком. Резервуары являются наиболее распространёнными хранилищами различных жидкостей. К наиболее существенным технологическим операциям с резервуарами относятся операции заполнения резервуаров и операции опорожнения. Если операция заполнения никаких существенных проблем перед гидравликой не ставит, то опорожнение резервуара может рассматриваться как прямая гидравлическая задача.

Пусть, в самом общем случае, имеем резервуар произвольной формы (площадь горизонтального сечения резервуара является некоторой функцией его высоты). В резервуар поступает жидкость с постоянным расходом Q_0 . Задача сводится к нахождению времени необходимого для того, чтобы уровень жидкости в резервуаре изменился с высоты взлива H_1 до H_2 . Отметим, что площадь горизонтального сечения резервуара несоизмеримо велика по сравнению с площадью живого сечения вытекающей струи жидкости, т. е. величиной скоростного напора в резервуаре можно пренебречь (уровень жидкости в резервуаре меняется с весьма малой скоростью). Величина расхода при истечении жидкости является переменной и зависит от напора, т.е. текущей высоты взлива жидкости в резервуаре $Q = f(H)$. Уровень жидкости в резервуаре будет подниматься, если $Q_0 > Q$ и снижаться когда $Q_0 < Q$, при притоке

$Q_0 = Q$ уровень жидкости в резервуаре будет постоянным. Поскольку движение жидкости при



истечении из отверстия является неустановившемся, решение поставленной задачи осуществляется методом смены стационарных состояний. Зафиксируем уровень жидкости в резервуаре на отметке H_1 . Этому уровню будет соответствовать расход жидкости при истечении из отверстия:

$$Q = \mu s \sqrt{2gH}.$$

За бесконечно малый интервал времени из резервуара вытечет объем жидкости равный:

$$dW = Qdt = \mu s \sqrt{2gH} dt$$

За этот же интервал времени в резервуар поступит объем жидкости равный:

$$dW_0 = Q_0 dt$$

Тогда объем жидкости в резервуаре изменится на величину SdH :

$$SdH = (Q_0 - \mu s \sqrt{2gH}) dt$$

Выразив величину притока жидкости в резервуар Q_0 подобно расходу Q , получим:

$$Q_0 = \mu s \sqrt{2gH_0}$$

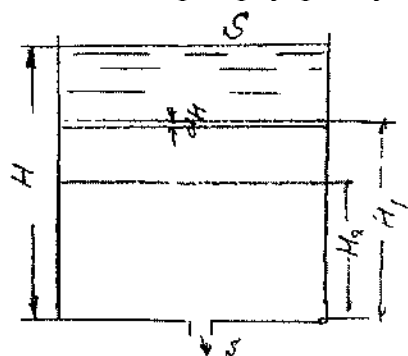
Тогда время, за которое уровень жидкости изменится на величину dH :

$$dt = \frac{S}{\mu s \sqrt{2g}} \cdot \frac{dH}{\sqrt{H_0} - \sqrt{H}}$$

Для дальнейшего решения резервуар следует разбить на бесконечно тонкие слои, для которых можно считать, что площадь сечения резервуара в пределах слоя постоянна.

Тем не менее, практического значения задача (в общем виде) не имеет. Чаще всего требуется искать время полного опорожнения резервуара правильной геометрической формы: вертикальный цилиндрический резервуар (призматический), горизонтальный цилиндрический, сферический.

Истечение жидкости из вертикального цилиндрического резервуара. Вертикальный цилиндрический резервуар площадью поперечного сечения S заполнен жидкостью до уровня H . Приток жидкости в резервуар отсутствует. Тогда дифференциальное уравнение истечения жидкости будет



иметь вид:

$$S dt = - \frac{S}{\mu s \sqrt{2g}} \cdot \frac{dH}{\sqrt{H}}$$

Для начала определим время необходимое для перемещения уровня жидкости с отметки H_1 до H_2 .

$$t = \frac{S}{\mu s \sqrt{2g}} \cdot \int_{H_1}^{H_2} \frac{dH}{\sqrt{H}} = \frac{2S}{\mu s \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})$$

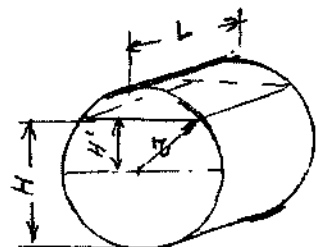
Когда $H_1 = H$ а $H_2 = 0$, то время полного опорожнения резервуара составит:

$$t = \frac{2SH}{\mu s \sqrt{2gH}}$$

Таким образом, время полного опорожнения резервуара в два раза больше, чем время истечения этого же объема жидкости при постоянном напоре равном максимальному напору H .

Истечение жидкости из горизонтального цилиндрического резервуара. В отличие от вертикального резервуара, площадь сечения свободной поверхности и горизонтального сечения резервуара - величина переменная и зависит от уровня жидкости в резервуаре.

$$S = L \cdot x,$$



$$\text{где: } x = 2\sqrt{r^2 - (H - r)^2} = 2\sqrt{H(2r - H)}$$

Тогда уравнение истечения примет вид:

$$dt = - \frac{2L\sqrt{H(2r - H)} dH}{\mu \cdot s \sqrt{2g} \sqrt{H}} = - \frac{2L}{\mu \cdot s \sqrt{2g}} \sqrt{2r - H} \cdot dH$$

Время полного опорожнения резервуара:

$$t = \frac{2L}{\mu \cdot s \sqrt{2g}} \int_{2r}^0 \sqrt{2r - H} \cdot d(2r - H) = \frac{2L}{\mu \cdot s \sqrt{2g}} \cdot \frac{4r \sqrt{2r}}{3},$$

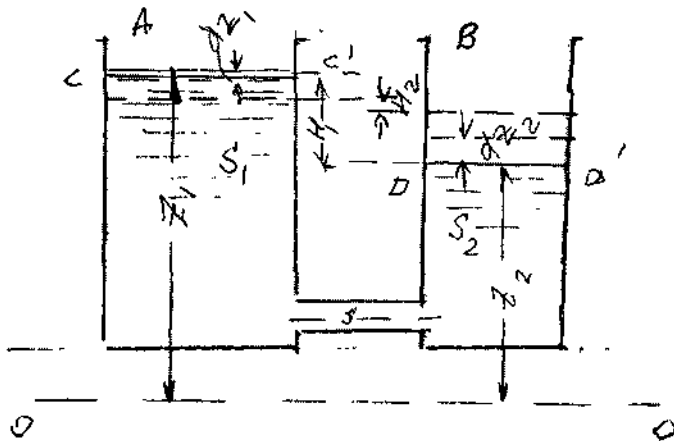
или, обозначив: $D = 2r$ получим:

$$t = \frac{4LD\sqrt{D}}{3\mu \cdot s \sqrt{2g}}$$

Переток жидкости между резервуарами при переменных уровнях жидкости. Если два резервуара соединены между собой, то при разных уровнях жидкости в этих резервуарах будет происходить переток жидкости из резервуара с более высоким положением уровня свободной поверхности в резервуар, где эта поверхность будет расположена на более низкой отметке. Переток будет осуществляться при переменном (убывающем) расходе и продолжаться до тех пор, пока уровни жидкости в обоих резервуарах не сравняются.

Рассмотрим два резервуара A и B , соединённые между собой трубопроводом с площадью сечения s . Питающий резервуар A имеет более высокий уровень жидкости

$C - C'$ относительно плоскости сравнения $O - O$, который равен z_1 , площадь сечения резервуара A равна S_1 . Приёмный резервуар B имеет более низкий уровень жидкости $D - D'$, который



относительно плоскости сравнения равен z_2 ,

площадь сечения этого резервуара - S_2 . Переток жидкости

обеспечивается переменным действующим напором равным $H = z_1 - z_2$. Поскольку оба этих уровня меняются во времени, то и действующий напор H тоже будет переменным.

Пусть начальный действующий напор будет равен $H_1 = z_1 - z_2$, а действующий напор на конец интересующего нас периода будет равным H_2 (в общем случае он может быть не равен 0). Тогда за время dt из резервуара A в резервуар B при некотором напоре H через соединительный трубопровод перетечёт объём жидкости равный:

$$dW = \mu_{\text{сист}} s \sqrt{2gH} \cdot dt$$

где: $\mu_{\text{сист}}$ - коэффициент расхода системы, т.е. соединительного трубопровода.

При этом в резервуаре A уровень жидкости понизится на величину dz_1 , а в резервуаре B , наоборот, повысится на величину dz_2 . При этом действующий напор также изменится на величину:

$$dH = dz_1 - dz_2$$

Изменения уровней жидкости в резервуарах будут связаны между собой:

$$-S_1 dz_1 = S_2 dz_2 = dW$$

Тогда:

$$\mu_{\text{сист}} s \sqrt{2gH} \cdot dt = -S_1 dz_1$$

откуда:

$$dt = -\frac{1}{\mu_{\text{сист}} s \sqrt{2g}} \cdot \frac{S_1 dz_1}{\sqrt{H}}$$

Поскольку площадь сечения резервуара постоянная, то необходимо лишь выразить dz_1 через действующий напор H .

$$dz_2 = -\frac{S_1}{S_2} dz_1, \text{ тогда: } dH = dz_1 + \frac{S_1}{S_2} dz_1 = \frac{S_1 + S_2}{S_2} dz_1, \text{ откуда:}$$

$$dz_1 = \frac{S_2}{S_1 + S_2} dH$$

Окончательно:

$$t = - \frac{1}{\mu_{\text{сис}} s \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{S_1 \cdot S_2}{S_1 + S_2} \cdot \frac{dH}{\sqrt{H}} = \frac{S_1 \cdot S_2}{(S_1 + S_2) \mu_{\text{сис}} s \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dH}{\sqrt{H}} > \text{или:}$$

$$t = \frac{S_1 \cdot S_2}{S_1 + S_2} \cdot \frac{\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}}{\mu_{\text{сис}} s \sqrt{2g}}$$

В том случае, когда уровни в резервуарах сравняются $H_2=0$:

$$t = \frac{2S_2}{S_1 + S_2} \cdot \frac{S_1 H_1}{\mu_{\text{сис}} s \sqrt{2g H_1}}$$

8. Движение жидкостей в трубопроводах

8.1. Классификация трубопроводов

Роль трубопроводных систем в хозяйстве любой страны, отдельной корпорации или просто отдельного хозяйства трудно переоценить. Системы трубопроводов в настоящее время являются самым эффективным, надёжным и экологически чистым транспортом для жидких и газообразных продуктов. Со временем их роль в развитии научно-технического прогресса возрастает. Только с помощью трубопроводов достигается возможность объединения стран производителей углеводородного сырья со странами потребителями. Большая доля в перекачке жидкостей и газов по праву принадлежит системам газопроводов и нефтепроводов, но значительную роль играют такие системы как водоснабжение и канализация, теплоснабжение и вентиляция, добыча некоторых твёрдых ископаемых и их гидротранспорт. Практически в каждой машине и механизме значительная роль принадлежит трубопроводам.

По своему назначению трубопроводы принято различать по виду транспортируемой по ним продукции:

газопроводы,

- нефтепроводы,
- водопроводы, воздухопроводы,
- продуктопроводы.

По виду движения по ним жидкостей трубопроводы можно разделить на две категории:

напорные трубопроводы,

безнапорные (самотёчные) трубопроводы.

Также трубопроводы можно подразделить по виду сечения: на трубопроводы круглого и не круглого сечения (прямоугольные, квадратные и другого профиля). Трубопроводы можно разделить и по материалу, из которого они изготовлены: стальные трубопроводы, бетонные, пластиковые и др.

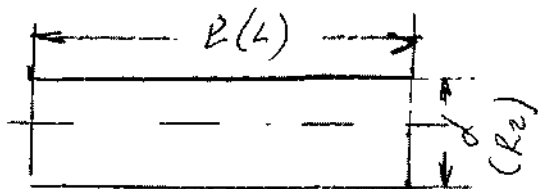
Дать полную и исчерпывающую классификацию трубопроводов вряд ли удастся из-за многообразия их функций и областей использования. Нас будут интересовать лишь те классификации, которые влияют на принятые методы и способы описания движения по ним жидкостей и газов.

8.2. Простой трубопровод

Основным элементом любой трубопроводной системы, какой бы сложной она ни была, является простой трубопровод. Классическим определением его будет- простым трубопроводом является трубопровод, собранный из труб одинакового диаметра и качества его внутренних стенок, в котором движется транзитный поток жидкости, и на котором нет местных гидравлических сопротивлений.

При напорном движении жидкости простой трубопровод работает полным

сечением $S = \frac{\pi d^2}{4} = 4\pi R_c^2 = \text{const.}$ Размер



$$Q = \text{const}$$

сечения трубопровода (диаметр или величина

гидравлического радиуса), а также его протяжённость (длина) трубопровода (l , L) являются основными геометрическими характеристиками трубопровода. Основными технологическими характеристиками трубопровода являются расход жидкости в трубопроводе Q и напор H (на головных сооружениях трубопровода, т.е. в его начале). Большинство других характеристик простого трубопровода являются, не смотря на их важность, производными характеристиками. Поскольку в простом трубопроводе расход жидкости транзитный (одинаковый в начале и конце трубопровода), то средняя скорость движения жидкости в трубопроводе постоянна $v = \text{const}$. Для установившегося движения жидкости по трубопроводу средняя скорость движения жидкости определяется по формуле Шези:

$$v = C \sqrt{R_2 \cdot i},$$

где: $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ - скоростной коэффициент Шези,

$R_2 = \frac{S}{\Pi}$ - гидравлический радиус сечения, для круглого сечения при полном заполнении

жидкостью $R_2 = \frac{d}{4}$,

$i = \frac{h_{mp}}{l}$ - гидравлический уклон.

Полагая, что весь имеющийся напор на головных сооружениях (в начале) трубопровода тратится на преодоление сил трения в трубопроводе (в простом трубопроводе это потери напора по длине h_{d1}), уравнение движения жидкости (Бернулли) примет вид:

$$H = h_{d1} = \frac{v^2 l}{C R_2}.$$

Расход жидкости в трубопроводе:

$$Q = v \cdot S = S C \sqrt{R_2 \cdot i}.$$

Обозначив: $S C \sqrt{R_2} = K$, получим основное уравнение простого трубопровода:

$$Q = K \sqrt{i},$$

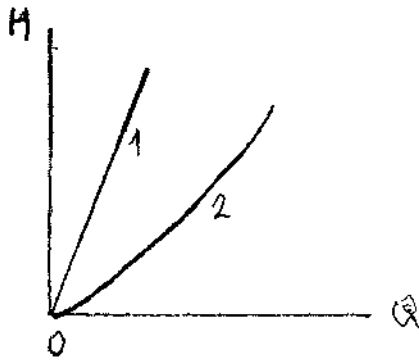
где: K - модуль расхода - расход жидкости в русле заданного сечения при гидравлическом уклоне равном единице (иначе модуль расхода называют расходной характеристикой трубопровода).

Другой и более известный вид основного уравнения простого трубопровода получим, решив уравнение относительно напора:

$$H = Q^2 \frac{l}{K^2} \text{ или } H = R \cdot Q^2$$

Величину $\frac{1}{K^2}$ называют удельным сопротивлением трубопровода, $R = \frac{l}{Q^2}$ - его полным сопротивлением

График уравнения простого трубопровода $H = f(Q)$ носит название его гидравлической харак-



теристики. Вид гидравлической характеристики зависит от режима движения жидкости в трубопроводе: при ламинарном движении жидкости гидравлическая характеристика трубопровода - прямая линия, проходящая через начало координат (1). При турбулентном режиме гидравлическая характеристика - парабола (2).

Если на трубопроводе собранном из труб одинакового диаметра имеются местные сопротивления, то такой трубопровод можно привести к простому трубопроводу эквивалентной длины $l_{\text{экв}}$

$$\lambda \frac{l_{\text{экв}}}{d} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \xi_u \frac{v^2}{2g},$$

$$\lambda \frac{l_{\text{экв}}}{d} = \lambda \frac{l}{d} + \sum \xi_u$$

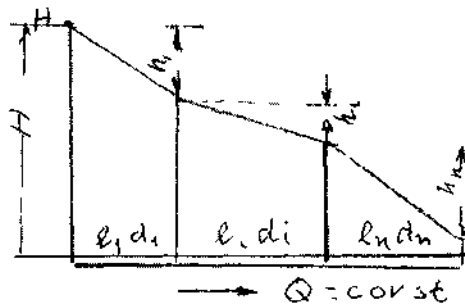
$$l_{\text{экв}} = l + \frac{d}{\lambda} \cdot \sum \xi_u$$

8.3. Сложные трубопроводы

К сложным трубопроводам следует относить те трубопроводы, которые не подходят к категории простых трубопроводов, т.е к сложным трубопроводам следует отнести:

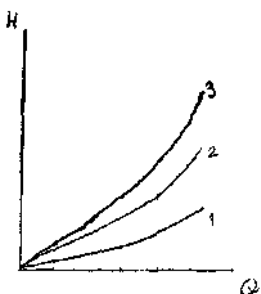
трубопроводы, собранные из труб разного диаметра (последовательное соединение трубопроводов), трубопроводы, имеющие разветвления: параллельное соединение трубопроводов, сети трубопроводов, трубопроводы с непрерывной раздачей жидкости.

Последовательное соединение трубопроводов. При последовательном соединении трубопроводов конец предыдущего простого трубопровода одновременно является началом следующего простого трубопровода. В сложном трубопроводе, состоящем из последовательно



соединённых простых трубопроводов, последние в литературе называются участками этого трубопровода. Расход жидкости во всех участках сложного трубопровода остаётся одинаковым $Q = \text{const}$. Общие потери напора во всём трубопроводе будут равны сумме потерь напора во всех отдельных его участках.

$$H = \sum_{i=1}^n h_i = Q^2 \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{K_i^2}.$$



где $h_i = Q^2 \frac{l_i}{K_i^2}$ - потери напора на i - том участке трубопро-

вода.

Таким образом, потери напора в трубопроводе, состоящем из последовательно соединённых друг с другом участков равны квадрату расхода жидкости в трубопроводе умноженному на сумму удельных сопротивлений всех участков.

Гидравлическая характеристика трубопровода состоящего из последовательно соединённых участков представляет собой графическую сумму (по оси напоров) гидравлических характеристик всех отдельных участков. На рисунке кривая 1 представляет гидравлическую характеристику 1-го участка трубопровода, кривая 2 - гидравлическую характеристику 2-го участка, кривая 3 - сумму гидравлических характеристик обоих участков.

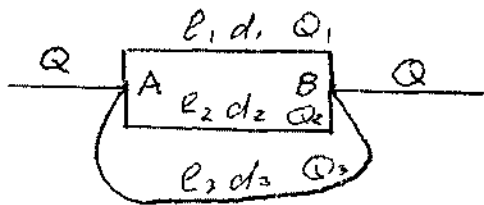
Сложный трубопровод, состоящий из последовательно соединённых простых трубопроводов можно свести к простому трубопроводу с одинаковым (эквивалентным) диаметром, при этом длины участков будут пересчитываться, чтобы сохранить реальные гидравлические сопротивления участков трубопровода.

Так приведённая длина l_{np} того участка l_i будет:

$$l_{np} = l_i \cdot \frac{d_{экв}^5}{d_i^5}.$$

Следует отметить, что величина скоростного напора также зависит от диаметра трубопровода, и при определении приведённой длины участка мы вносим некоторую ошибку, которая будет тем большей, чем больше разница в величинах фактического и эквивалентного диаметров. В таких случаях можно рекомендовать другой, более сложный способ.

Параллельное соединение трубопроводов. Схема прокладки параллельных трубопроводов используется в тех случаях, когда на трассе магистрального трубопровода есть участки, где требуется уменьшить гидравлические сопротивления трубопровода (высокие перевальные точки трубопровода) или при заложении трубопровода в трудно-



доступных местах (переход через реки и др.). При параллельном

соединении трубопроводов имеются две особые точки, называемые точками разветвления. В этих точках находятся концы параллельных ветвей трубопровода (точки A и B). Будем считать, что жидкость движется слева направо, тогда общий для всех ветвей напор в точке A будет больше напора в другой общей для всех ветвей трубопровода точке B ($H_A > H_B$). В точке A поток жидкости растекается по параллельным ветвям, а в точке B вновь собирается в единый трубопровод. Каждая ветвь может иметь различные геометрические размеры: диаметр и протяжённость (длину).

Поскольку вся система трубопроводов является закрытой, то поток жидкости в данной системе будет транзитным, т.е.

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = Q.$$

Жидкость движется по всем ветвям при одинаковой разности напоров:

$H_{AB} = H_A - H_B > 0$ тогда расход жидкости по каждой ветви можно записать в виде:

$$Q_i = K_i \sqrt{\frac{H_{AB}}{l_i}}.$$

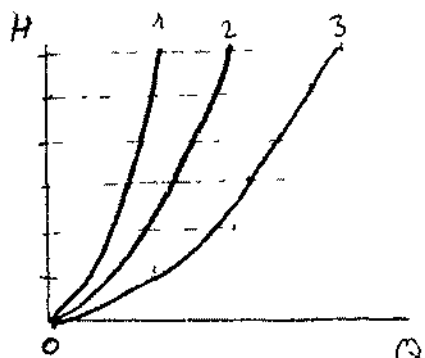
Поскольку ветвей в системе n , а число неизвестных в системе уравнений будет $n+1$, включая напор, затрачиваемый на прохождение жидкости по всем ветвям H_{AB} , то в качестве дополнительного уравнения в системе будет использовано уравнение неразрывности:

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i$$

При решении системы уравнений можно воспользоваться соотношением:

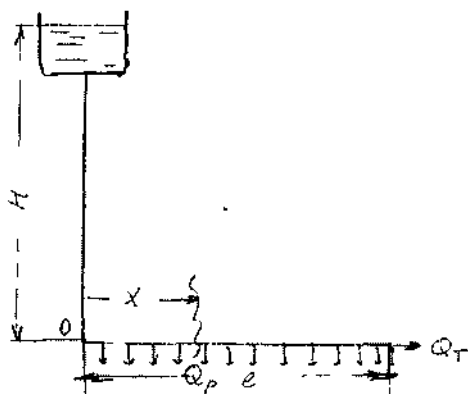
$$\frac{Q_i}{Q_{i+1}} = \frac{K_i}{K_{i+1}} \sqrt{\frac{l_{i+1}}{l_i}}.$$

Для построения гидравлической характеристики системы параллельных трубопроводов можно воспользоваться методом графического суммирования. Суммирование осуществляется по



оси расходов Q . т.к. $Q = \sum Q_i$

Трубопроводы с непрерывным (распределённым расходом). В данном случае предполагается, что вдоль всей длины трубопровода располагаются одинаковые равномерно распределённые потребители жидкости. Классическим примером такого трубопровода может служить оросительная система. В начальной точке трубопровода напор составляет H . В общем случае, расход по трубопроводу состоит из транзитного Q_m и расхода Q_p , который непрерывно раз-



даётся по всей длине трубопровода.

Тогда в некотором сечении трубопровода на расстоянии x от его начала расход будет равен:

$$Q_x = Q_m + Q_p - \frac{Q_p}{l} x.$$

Тогда гидравлический уклон в сечении x на малом отрезке dx :

$$i_x = \frac{Q_x^2}{K^2} = \frac{\left(Q_m + Q_p - \frac{Q_p}{l} x \right)^2}{K^2}$$

Уравнение падения напора вдоль элемента dx запишется следующим образом:

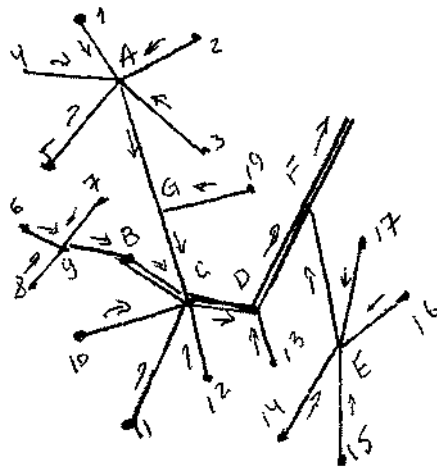
$$dH = i \cdot dx = \left[\frac{(Q_m + Q_p)^2}{K^2} - \frac{2Q_p}{l \cdot K^2} (Q_m + Q_p) x + \frac{Q_p^2}{l^2 \cdot K^2} x^2 \right] dx$$

После интегрирования от 0 до l получим:

$$H = \frac{l}{K^2} \left(Q_m^2 + Q_m Q_p + \frac{1}{3} Q_p^2 \right)$$

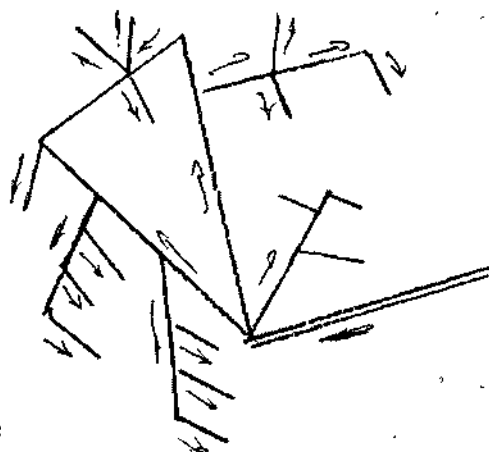
и при $Q_m = 0$: $H = \frac{1}{3} Q_p^2 \frac{l}{K^2}$

Сети трубопроводов. Если магистральные трубопроводы принято рассматривать как средства внешнего транспорта жидкостей и газов, то сети используются в качестве оборудования для внутреннего транспорта жидких или газообразных продуктов. По направлению движения жидкости (газа) сети различают на сборные и раздаточные (распределительные). В сборных сетях имеется



группа источников возникнове

этих источников направляется в своеобразные узлы сбора и оттуда - в магистральный трубопровод. Классическим примером сборной сети может служить неф-тесборная система со скважин, канализационная сеть. В раздаточных (распределительных) сетях жидкость или газ поступает из магистрального трубопровода и по сети распределяется по потребителям (абонентам).



Распространённым приме

ром распределительной сети является

система водоснабжения. К такому же типу сетей можно также отнести систему принудительной вентиляции,

где воздух подаётся в служебные помещения или на рабочие места. К такому же типу сетей можно отнести систему теплоснабжения и др. Сети строятся в населённых пунктах, на предприятиях, отдельных территориях. Трубы в таких системах могут изготавливаться из различных материалов в зависимости от технологических требований, предъявляемых к сетям. В сборных сетях источники жидкости и газа располагают напором, обеспечивающим движение жидкости (газа) до магистралей. Если напоры недостаточны, то создаются специальные, узлы, где напор обеспечивается принудительным образом. Имеется, по крайней мере, две группы задач для гидравлического расчёта сетей: проектирование новых сетей и расчёт пропускной способности существующих сетей. Принципы расчёта похожи. В основе расчётных формул положены уравнения Дарси-Вейсбаха и Шези. Предварительно в сети выбирается ветвь с наибольшей нагрузкой (расход и напор). Эта ветвь рассматривается как своеобразный трубопровод, который, в общем случае можно отнести к категории последовательного соединения простых трубопроводов. Другие участки рас- считываются самостоятельно. После завершения расчётных работ, осуществляется проверка соответствия результатов расчётов в узлах сети. После анализа расхождений результатов решений в узлах сети осуществляется корректировка исходных данных. Таким образом, метод итераций является наиболее приемлемым для расчёта сетей.

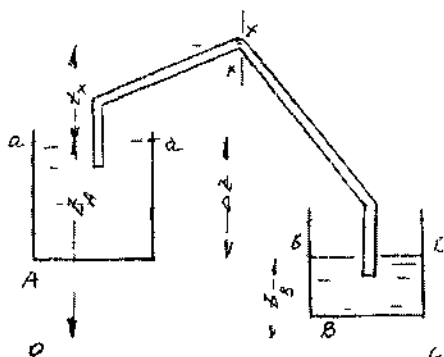
Трубопроводы некруглого профиля. Подавляющее большинство трубопроводов собирается из круглых труб. Преимущество круглого сечения очевидно: круглое сечение обладает максимальной пропускной способностью и минимальным гидравлическим сопротивлением. Так гидравлический радиус для круглого сечения: $R = \frac{r}{2}$,

для треугольного сечения $R_s = \frac{a\sqrt{3}}{12}$ для квадратного сечения $R_s = \frac{a}{4}$,

для шестиугольного сечения $R_c = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Тем не менее, трубы некруглого сечения применяются в промышленности там, где потери напора не играют особой роли. Это, в первую очередь, воздухопроводы с малыми скоростями движения воздуха, и т.д.

Трубопроводы, работающие под вакуумом (сифоны). Сифоном называется такой самотёчный трубопровод, часть которого располагается выше уровня жидкости в резервуаре. Действующий напор представляет собой разницу уровней в резервуарах Δz . Для приведения сифона в действие необходимо предварительно откачать из сифона воздух и создать в нём разряжение. При этом жидкость поднимется из резервуара A до верхней точки сифона, после чего жидкость начнёт двигаться по ниспадающей части трубопровода в резервуар B . Другой ме-



тод запуска сифона - заполнить его жидкостью извне. Запишем

уравнение Бернулли для двух сечений $a-a$ и $b-b$ относительно плоскости сравнения $O-O$.

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + \sum h_{mp}$$

Поскольку: $p_A = p_B = p_{atm}$ и $\frac{v_A^2}{2g} = \frac{v_B^2}{2g}$, то:

$$\Delta z = z_A - z_B = \sum h_{mp} \quad ?$$

$$Q = K \sqrt{\frac{\Delta z}{l}}$$

Критическим сечением в сифоне будет сечение $x-x$ в верхней точке сифона. Давление в этой точке будет минимальным и для нормальной работы сифона необходимо, чтобы оно было выше упругости паров перекачиваемой по сифону жидкости.

$$\frac{p_{min}}{\rho g} > \frac{p_v}{\rho g}$$

Трубопроводы со стенками из упругого материала. В практике предприятий нефтяной отрасли нередки случаи использования специальных трубопроводов, стенки которых деформируются при изменении давления в перекачиваемой по ним жидкости. К трубопроводам такого типа относятся мягкие и гибкие рукава, резиновые и армированные шланги. Опыты Фримана показали, что в данных случаях можно пользоваться формулой аналогичной формуле Дарси-Вейсбаха:

$$h_{oi} = \eta \frac{v^2}{d}$$

где; η можно взять из таблицы:

Характеристика трубопровода

Величина η

Гладкие резиновые рукава

0,000860

Обыкновенные резиновые рукава

0,000899

Очень гладкие, прорезиненные внутри

0,000884

Шероховатые внутри

0,021300

Кожаные

0,013700

Для упругих деформируемых рукавов и шлангов в формулу Дарси-Вейсбаха следует ввести необходимые поправки.

$$h_{01} = \lambda_p \frac{l}{d_{расч}} \frac{v^2}{2g}$$

Характеристика трубопровода	Величина λ_p
Гладкие резиновые рукава	0,000860
Обыкновенные резиновые рукава	0,000899
Очень гладкие, прорезиненные внутри	0,000884
Шероховатые внутри	0,021300
Кожаные	0,013700

Для упругих деформируемых рукавов и шлангов В формулу Дарси-Вейсбаха следует ввести необходимые поправки.

Номинальный диаметр в мм	Средний внутренний диаметр в мм		λ_p
	При $p = 1 \text{ ат}$	$P_{нпр} = 3 \text{ ат}$	
25	24,42	24,79	0,055
32	31,84	32,53	0,060
38	39,84	40,80	0,080
50	54,00	55,40	0,090
65	65,93	67,73	0,095

9. Неустановившееся движение жидкости в трубопроводе 9.1. Постановка вопроса, требования к модели и допущения

Вопросы изучения неустановившегося движения реальной жидкости очень сложны. Если окажется необходимым получить самое общее решение поставленной задачи, то придётся рассматривать систему уравнений, в составе которой будут входить:

уравнение Навье-Стокса,

уравнение неразрывности,

уравнение состояния жидкости,

- уравнение термического состояния жидкости, уравнение первого закона термодинамики.

Следует отметить, что данная система настолько сложна и трудоёмка в своём решении, что сразу же стоит рассмотреть вопросы о необходимости принятия некоторых допущений и ограничений, облегчающих решение поставленной задачи. Другими словами, необходимо определить из соображений практики степень детальности построения модели, откуда станут очевидными требования к описанию объекта изучения. Так, рассматриваемый объект (жидкость) должна обладать упругими свойствами (быть сжимаемой), деформация жидкости должна происходить в пределах пропорциональности, что соответствует закону Гука. Следует также учитывать упругие свойства самого трубопровода, другие внешние среды не рассматриваются. Движение жидкости считается одномерным. Можно также пренебречь и теплопотерями во внешнюю среду.

Приняв такие ограничения, можно полную систему уравнений заменить на систему из двух дифференциальных уравнений

Н.Е. Жуковского:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -K_{*} \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

где: K_{*} - адиабатический модуль упругости жидкости.

Однако даже для решения этой довольно простой системы придётся преодолеть немалые трудности. По сути дела обычно рассматривают одну из хорошо известных моделей процесса

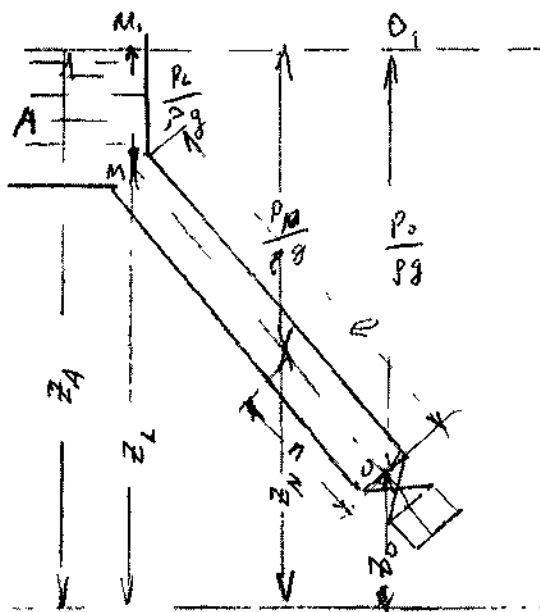
неустановившегося движения жидкости: модель несжимаемой жидкости,

- модель сжимаемой жидкости с сосредоточенными параметрами,
- модель сжимаемой жидкости с рассредоточенными параметрами.

Строго говоря, процесс изменения давления в жидкости во времени уподобляется волновым процессам в упругой среде, модель среды должна относиться к моделям с распределёнными параметрами. Однако подходить к выбору модели следует, прежде всего, исходя из практики работы предприятий горных отраслей промышленности. По этой причине остановимся на изучении проблем, связанных с явлением гидравлического удара в круглых трубах и на базе решения этой практической задачи рассмотрим основные уравнения неустановившегося движения жидкости. Явление гидравлического удара характеризуется большими скоростями распространения ударной волны и значительными величинами возникающих при этом давлений, периоды колебаний давления составляют доли секунды, благодаря чему действием сил трения можно пренебречь. **9.2.**

Явление гидравлического удара

Явление гидравлического удара возникает при резком изменении скорости движения жидкости в трубопроводе (вплоть до его мгновенного закрытия). В таких случаях происходит переход кинетической энергии движущейся жидкости в потенциальную энергию покоящейся жидкости. Однако такой переход не мгновенный, а протекает с определённой скоростью, зависящей от свойств жидкости и материала трубопровода. Кроме того, этот процесс носит волновой характер. Покажем на простом примере, что гидравлический удар - процесс колебательный, т.е. волновой. Резервуар A соединён с трубопроводом длиной l , на конце трубопровода установлена задвижка. Размеры резервуара таковы, что при отборе жидкости из него уровень жидкости в резервуаре практически не понижается. Также для упрощения модели пока будем считать саму трубу недеформируемой. Примем за начало отсчёта точку O , расположенную на оси трубы в плоскости задвижки. Если потерями напора на трение при движении жидкости пренебречь, то



пьезометрическая линия будет горизонтальной. Если бы жидкость была несжимаемой, то при резком закрытии задвижки мгновенно остановилась бы вся масса жидкости находящаяся в трубе, что вызвало бы мгновенный рост давления во всей жидкости. На самом деле в упругой жидкости процесс будет развиваться иначе. В момент резкого закрытия задвижки остановится только тонкий слой жидкости, непосредственно примыкающий к задвижке, остальная масса жидкости будет продолжать движение. За бесконечно малый промежуток времени (длительность процесса остановки) остановится масса жидкости в объеме первого тонкого слоя.

$$\Delta M = \rho \cdot S \cdot \Delta n,$$

где: Δn - толщина тонкого слоя жидкости,

S - площадь внутреннего сечения трубы.

Если обозначить давление в точке O до закрытия затвора через p_0 , а через $p_0 + \Delta p$ давление после мгновенного закрытия задвижки, то по теореме об изменении количества движения можно вычислить Δp .

$$\Delta p \Delta t = \rho v_0 \Delta n,$$

$$\text{или: } \Delta p = \rho \cdot c v_0, \quad \text{где: } c = \lim \frac{\Delta n}{\Delta t}$$

$$\text{Или: } \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{c v_0}{g}$$

Затем в следующий момент времени остановится следующий слой жидкости, потом третий и т.д. Так постепенно увеличенное давление у задвижки распространится по всему

трубопроводу в направлении против течения жидкости. Тогда величина $c = \frac{dn}{dt}$ представ-

ляет собой скорость распространения упругой (ударной) волны. По истечении времени $\frac{l}{c}$

вся жидкость в трубопроводе станет находиться в сжатом состоянии. Но теперь возник перепад давления между жидкостью в резервуаре и жидкостью в трубе, в результате чего начнётся движение упругой жидкости из трубопровода обратно в резервуар. По истечении

такого же временного интервала $\frac{l}{c}$, давление жидкости у задвижки понизится на величину Δp , т.е.

достигнет первоначального значения. При этом процесс движения жидкости в резервуар будет продолжаться, пока пониженное давление не распространится до конца трубопровода (до резервуара). Таким образом, давление у задвижки будет сохраняться на

постоянном уровне в течение времени $\frac{2l}{c}$, а продолжительность всего цикла гидравлического удара

будет равна $\frac{4l}{c}$. За это время давление у задвижки в течение половины этого

времени будет максимальным $p_0 + \Delta p$, в течение другой половины времени - минимальным $p_0 - \Delta p$.

9.3. Скорость распространения упругих волн в трубопроводе

Рассмотрим общую задачу о распространении упругой волны в трубопроводе с упругими стенками (т.е. с учётом сжимаемости материала труб). Выделим элемент трубопровода протяжённостью $\Delta n = c \cdot \Delta t$, в котором жидкость остановилась в течение времени Δt , а давление возросло на величину:

$$\Delta p = \rho \cdot c \cdot v_0.$$

В остальной части трубы жидкость продолжает двигаться и за время Δt в выделенный остановившийся элемент жидкости за счёт её сжатия и сжатия стенки трубы поступит дополнительный объём жидкости:

$$\Delta W = S_0 v_0 \Delta t,$$

где: S_0 и v_0 - начальная площадь трубы и скорость движения жидкости до момента удара.

Разделим этот дополнительный объём на два составляющих объёма (за счёт сжатия жидкости ΔW_1 и за счёт сжатия трубы ΔW_2).

$$\Delta W_1 = \beta_{ж} S_0 \Delta n \cdot \Delta p,$$

$$\text{или: } \Delta W_1 = S_0 \Delta n \frac{\Delta p}{K_{ж}}.$$

$$\Delta W_2 = \Delta S_0 \cdot \Delta n,$$

где: ΔS - увеличение площади сечения трубы за счёт упругости её материала.

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2,$$

$$S_0 v_0 \Delta t = S_0 \Delta n \frac{\Delta p}{K_{ж}} + \Delta S_0 \cdot \Delta n,$$

$$\text{или: } v_0 \frac{\Delta t}{\Delta n} = \frac{\Delta p}{K_{ж}} + \frac{\Delta S_0}{S_0}.$$

$$\frac{dp}{\rho \cdot c^2} = \frac{dp}{K_{ж}} + \frac{dS_0}{S_0}.$$

Отсюда скорость распространения упругой волны в жидкости:

$$c = \sqrt{\frac{\frac{dp}{\rho}}{\frac{dp}{K_{\kappa}} \left(1 + \frac{dS_0}{S_0} \cdot \frac{K_{\kappa}}{dp} \right)}}$$

Относительное удлинение размера трубы (её радиуса):

$$\frac{dS_0}{S_0} = \frac{d(\pi r^2)}{\pi r^2} = 2 \frac{dr}{r}$$

Принимая во внимание, что: $\frac{dr}{r} = \frac{d\sigma}{E}$, - (E- модуль Юнга материала трубы).

$$\sigma = \frac{p \cdot d}{2e},$$

где: σ - нормальное напряжение,
e - толщина стенки трубы.

$$d\sigma = \frac{d}{2e} dp$$

$$\frac{dS_0}{S_0} = \frac{dp}{E} \cdot \frac{d}{e}$$

тогда:

$$c = \sqrt{\frac{\frac{K_{\kappa}}{\rho}}{1 + \frac{d}{e} \frac{K_{\kappa}}{E}}}$$

Величину $K_0 = \frac{K_{\kappa}}{1 + \frac{d}{e} \frac{K_{\kappa}}{E}}$ называют приведённым модулем упругости. С учётом

принятых обозначений:

$$c = \sqrt{\frac{K_0}{\rho}}$$

9.4. Методы предотвращения негативных явлений гидравлического удара и его использование

Резкое увеличение давления, сопровождающее гидравлический удар - явление крайне негативное, т.к. гидравлический удар может разрушить трубопровод или какие-либо элементы гидравлических машин, испытывающие эффекты гидравлического удара. По этой причине разрабатываются методы предотвращения гидравлических ударов или уменьшить его негативное влияние. Поскольку мощность гидравлического удара напрямую зависит от массы движущейся жидкости, то для предотвращения гидравлического удара следует максимально уменьшить массу жидкости, которая будет участвовать в гидравлическом ударе. Для этого необходимо запорную арматуру монтировать в непосредственной близости к резервуару. В качестве меры уменьшения негативных последствий гидравлического удара используют замену прямого гидравлического удара на не прямой. Для этого достаточно запорную арматуру на напорных трубопроводах сделать медленно закрывающейся, что позволит уменьшить силу удара. Другой мерой борьбы с явлением гидравлического удара является установка на напорных линиях, работающих в условиях циклической нагрузки специальных компенсаторов с воздушной подушкой, которая принимает на себя удар

Однако в ряде случаев явление гидравлического удара успешно используется. К таким случаям использования гидравлического удара относятся производственные процессы по разрушению материалов и др. Известна специальная конструкция водоподъёмника, базирующаяся на использовании гидравлического удара.

10. Движение газа по трубам 10.1. Основные положения и задачи

Основной отличительной особенностью движения газа по трубам от движения капельных жидкостей заключается в том, что капельные жидкости характеризуются весьма малой сжимаемостью, а их вязкость практически не зависит от давления. По этой причине для решения большинства практических задач капельные жидкости можно считать не сжимаемыми, что позволяет значительно упростить уравнения движения такой жидкости. При движении газа таких допущений делать нельзя. Поскольку изучение общих решений уравнений газодинамики не является предметом настоящего курса, рассмотрим лишь частные задачи, встречающиеся в практике работы специалистов горных отраслей промышленности. К числу таких первоочередных задач относится изучение движения газов, включая воздух по газопроводам (воздуховодам). Газ двигается по газопроводу при переменном давлении, т.к. давление изменяется вдоль длины газопровода из-за неизбежных потерь напора по длине трубопровода. По этой причине плотность газа и его вязкость являются величинами переменными и неодинаковы в различных сечениях газопровода. Рассмотрим наиболее простой случай газопровода (воздуховода) собранного из труб одинакового диаметра (простой газопровод $S = const$) при установившемся движении газа. Тогда в соответствии с уравнением неразрывности потока газа массовый расход газа вдоль газопровода является величиной постоянной $Q_v = const$. При этом объёмный расход газа будет меняться от одного сечения газопровода к другому, т.к. плотность газа зависит от давления, которое по длине газопровода меняется.

$$Q(l) = \frac{Q_v}{\rho(l)} = var.$$

Тогда скорость движения газа также будет меняться вдоль длины газопровода:

$$v(l) = \frac{Q(l)}{S}.$$

При этом должна изменяться и температура газа по длине газопровода, и, как следствие, также и вязкость газа. Однако для решения практических задач движение газа по трубопроводу можно считать изотермическим (небольшие скорости движения, теплоизоляция газопровода, небольшие перепады давления). Это допущение не приведет к серьёзным погрешностям в расчётах, но оно позволяет пренебречь изменением вязкости газа при незначительных колебаниях температуры газа в газопроводе. Т.е. полагаем, что в газопроводе соблюдается условие: $T = const$ и $\mu = const$. При таких условиях будет постоянным для всего потока и число Рейнольдса, и как следствие будут одинаковыми коэффициенты трения и гидравлических сопротивлений по длине потока.

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4Q_v}{\rho \pi d^2},$$

$$Re = \frac{4Q_v}{\mu \pi d^2}.$$

Отметим, что в последнем выражении все величины, входящие в правую часть равенства являются величинами постоянными, отсюда: $Re = const$ и $1/l = const$. По этой причине для определения величины потерь напора и расхода газа можно воспользоваться обычным уравнением Бернулли.

10.2. Основные уравнения газодинамики для установившегося движения газа в простом газопроводе

Запишем уравнение Бернулли в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} dz + d\left(\frac{p}{\rho g}\right) + d\left(\frac{v^2}{2g}\right) &= -\lambda \left[d\left(\frac{l}{d}\right) \cdot \frac{v^2}{2g} \right], \\ -d\left(\frac{p}{\rho g}\right) &= \lambda \left[d\left(\frac{l}{d}\right) \cdot \frac{v^2}{2g} \right] + dz + d\left(\frac{v^2}{2g}\right). \end{aligned}$$

Последний член уравнения весь мал и его величиной можно пренебречь, тогда для горизонтального газопровода ($z = const$) можно записать:

$$-d\left(\frac{p}{\rho g}\right) = \lambda \left[d\left(\frac{l}{d}\right) \cdot \frac{v^2}{2g} \right]$$

Подставив в последнее уравнение значение средней скорости движения газа, выразив её через массовый расход, получим:

$$-d\left(\frac{p}{\rho g}\right) = \lambda \left[d\left(\frac{l}{d}\right)\right] \cdot \frac{Q_u^2}{2g\rho^2 S^2}$$

По принятым выше условиям процесс движения газа по газопроводу является изотермическим, тогда подставив в последнее уравнение значение ρ из уравнения Бойля-Мариотта:

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}, \text{ получим:}$$

$$-\frac{\rho_0}{p_0} \int_{p_0}^p p dp = \lambda \frac{Q_u^2}{2 \cdot d \cdot S^2} \int_0^l dl.$$

Решая последнее уравнение, получим основные расчётные формулы для определения потерь давления в газопроводе и формулу для определения массового расхода газа в газопроводе.

$$\frac{\rho_0}{p_0} \left(\frac{p_0^2 - p^2}{2} \right) = \lambda \frac{l}{d} \frac{Q_u^2}{2S^2} \Rightarrow$$

$$Q_u = S \sqrt{\frac{(p_0^2 - p^2) \rho_0 \cdot d}{\lambda \cdot l \cdot p_0}}.$$

я

Величина коэффициента трения λ определяется по формулам для жидкости в зависимости от режима её движения или же можно воспользоваться эмпирической формулой ВНИИГаза:

$$\lambda = \frac{0,0555}{d^{0,4}},$$

где d - диаметр газопровода в сантиметрах.

11. Безнапорное движение жидкости

При безнапорном движении жидкости часть периметра живого сечения потока жидкости ограничивается газовой средой, давление в которой равно атмосферному давлению. Типов безнапорных потоков достаточно много, это и безнапорное движение жидкости в трубах, и потоки жидкости в открытых руслах, и т.д. Тем не менее, несмотря на разнообразие таких потоков, с точки зрения гидравлики их можно разделить на установившиеся потоки с равномерным движением жидкости и неустановившиеся потоки, часто называемые быстотоками. Наибольший интерес для нас играют потоки первой группы, с которыми чаще всего приходится встречаться специалистам горной промышленности. Быстотоки, как правило, являются предметом изучения для специальных дисциплин гидротехнического профиля. Поскольку установившиеся потоки жидкости, независимо от их вида совершенно одинаковы, то расчёты параметров таких потоков общие и могут быть продемонстрированы на простом примере.

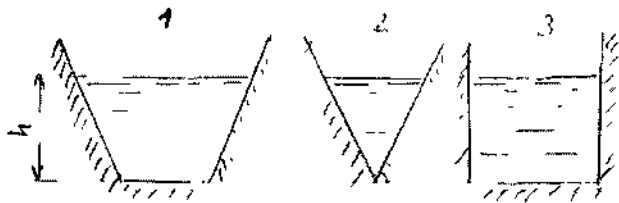
11.1. Классификация безнапорных потоков

Прежде всего, следует отметить, что сколь-нибудь совершенной и законченной классификации безнапорных потоков отвечающей их многообразию не существует, попытаемся выделить некоторые типы потоков по их основным признакам.

На начальной стадии разделим все потоки по их происхождению на две группы: естественные (природные) и искусственные (созданные человеком). К потокам первой группы будут относиться все реки и другие природные русла, отличающиеся от рек чаще всего лишь по названию, а не по своей сути.

Аналогичные две группы потоков можно выделить и по роли и назначению потоков: потоки жидкости, используемые как средство транспорта (естественные русла - реки и искусственные русла - каналы) и потоки жидкости как средство транспорта самой же жидкости (водоводы и др. гидротехнические сооружения).

Безнапорные потоки также можно разделить на заглублённые и наземные. К категории заглублённых относятся все виды безнапорных трубопроводов. Среди безнапорных трубопроводов можно выделить трубопроводы из стальных, бетонных, асбоцементных и другого типа труб; по сечению безнапорные трубопроводы можно разделить на круглые, некруглые и трубопроводы специального сечения.



Среди наземных безнапорных потоков можно выделить гидротехнические системы, сооружаемые из готовых элементов, когда водовод монтируется на трассе и обсаживаемые. При сооружении последних, как правило, предварительно сооружается земляное русло бедующего водовода (траншея, канава и др.), после чего такое русло обсаживается водоизоляционным материалом во избежание потерь при инфильтрации жидкости в почву. Наиболее часто встечающимися формами сечения таких водоводов являются водоводы трапецевидного (1), треугольного (2) и, реже всего, прямоугольного форм сечения (3).

подавляющее число наземных потоков являются открытыми, т.е. сообщаются с атмосферой, однако, в тех случаях, когда необходимо предотвратить потери транспортируемой жидкости от испарения (в странах с жарким климатом), водоводы перекрывают. В ряде случаев водоводы монтируются над поверхностью земли на специальных опорах и мостовых переходах, создавая тем самым акведуки.

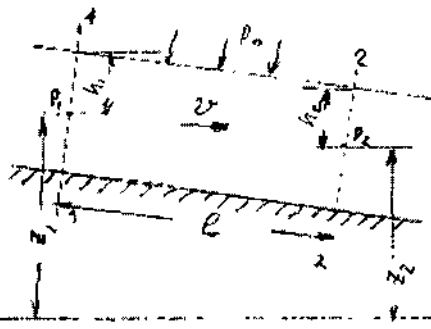
И, наконец, можно разделить безнапорные потоки на постоянно действующие и работающие в сезонном режиме.

11.2. Основные методы гидравлического расчёта безнапорных потоков Равномерное движение жидкости в безнапорном потоке поддерживается за счёт разницы в уровне свободной поверхности между начальным и конечным живыми сечениями потока. Чтобы движение жидкости в потоке было равномерным, должны быть выполнены следующие необходимые условия:

живые сечения потока вдоль всего русла должны быть одинаковыми как по размеру, так и по форме,

уровень свободной поверхности жидкости должен быть параллелен профилю дна русла, шероховатость стенок русла должна быть одинакова по всей длине русла. При выполнении этих условий гидравлический расчёт сводится в основном к определению расхода в потоке жидкости, а также некоторых параметров потока.

Выделим в потоке жидкости двумя живыми сечениями (1-1 и 2-2) отсек потока длиной l . Центры тяжести сечений будут находиться соответственно на уровнях z_1 и z_2 от произвольно выбранной



плоскости сравне $O-O$ и на глубинах соответственно h_1 и h_2 под уровнем свободной поверхности жидкости. Тогда запишем уравнение Бернулли для этих двух сечений потока.

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{oi}.$$

Поскольку по условиям равномерности потока $p_1 = p_2$ и $\alpha_1 v_1^2 = \alpha_2 v_2^2$, то уравнение Бернулли примет вид:

$$H_1 = H_2 + h_{oi} ?$$

$$\text{где: } H_1 = h_1 + z_1 \quad \text{и} \quad H_2 = h_2 + z_2;$$

h_{oi} - потери напора по длине отсека потока l . Согласно известному уравнению Шези средняя скорость в живом сечении потока:

$$v = C \sqrt{R_f \cdot i},$$

$$Q = S \cdot v = S \cdot C \sqrt{R_f \cdot i}.$$

Величина скоростного коэффициента Шези C определяется по экспериментальной формуле Маннинга:

$$C = \frac{R_z^{1/6}}{n},$$

где: n - величина шероховатости стенок русла. Или по формуле Павловского:

$$C = \frac{R_y}{n},$$

где: $y = 1,5\sqrt{n}$ при $R_z < 1\text{ м}$

$y = 1,3\sqrt{n}$ при $3\text{ м} < R < 1\text{ м}$

11.3. Движение жидкости в безнапорных (самотёчных) трубопроводах

Безнапорные самотёчные трубопроводы прокладываются, как правило, в заглублённом исполнении. Для строительства таких трубопроводов помимо труб круглого сечения (1) часто используются трубы овоидального (2) и лоткового (3) сечений.

При гидравлическом расчёте безнапорных трубопроводов независимо от вида их сечения при-



ходится решать задачи трёх основных типов:

определение расхода жидкости, пропускаемого данным трубопроводом,

определение уклона дна, необходимого для пропуска заданного расхода жидкости при заданном заполнении сечения,

определение степени наполнения трубопровода для пропуска заданного расхода жидкости при известном уклоне дна.

Решение всех этих задач сводится к решению уравнения Шези при различных вариантах задания исходных данных. Анализируя результаты решения таких задач нетрудно обнаружить, что для каждого сечения трубопровода существует так называемая эффективная степень заполнения русла, при которой достигается максимальный расход при условии минимально возможных потерях напора. Это объясняется тем, что при увеличении площади живого сечения потока увеличивается также и длина смоченного периметра. Начиная с некоторой величины (соответствующей эффективной степени заполнения русла), увеличение длины смоченного периметра начинает «обгонять» рост площади живого сечения. При этом дальнейшее увеличение расхода жидкости в трубопроводе будет сопряжено со значительными потерями напора.

12. Движение неньютоновских жидкостей 12.1. Некоторые характеристики и реограммы неньютоновских жидкостей.

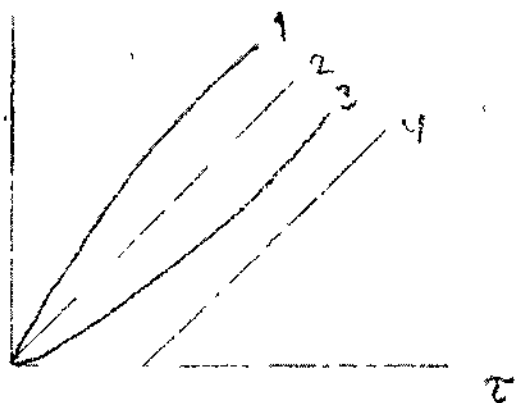
Изучение процесса движения неньютоновских жидкостей является весьма трудоёмкой задачей как с точки зрения полноты понимания всех физико-химических процессов сопровождающих такое движение сложного физического тела, так и с точки зрения математического описания этого явления. Как известно, все неньютоновские жидкости отличаются от классической ньютоновской жидкости видом зависимости градиента давления

от величины касательного напряжения. Графики таких зависимостей $\frac{dv}{dr} = f(\tau)$ носят на-

звание кривых течения неньютоновских жидкостей или реограмм. На рисунке представлены реограммы различных типов неньютоновских жидкостей (1 - дилатантная жидкость, 3 - псевдопластическая жидкость, 4 - вязкопластическая жидкость) по сравнению с аналогичной характеристикой классической ньютоновской жидкостью (линейная зависимость - 2).

Первые два вида неньютоновских жидкостей: дилатантные и псевдопластические описываются одинаковыми уравнениями реограмм с различными характеристиками коэффициентов k - меры консистенции жидкости и n - меры степени отличия поведения неньютоновской жидкости от классической ньютоновской жидкости.

$$\frac{dv}{dz}$$



$$\tau = k \left(\frac{dv}{dr} \right)^n$$

Для характеристики названных выше типов неньютоновских жидкостей часто используется ещё одна дополнительная мера - эффективная кажущаяся вязкость жидкости. Суть этой меры состоит в том, что для любой конкретной величины касательного напряжения в неньютоновской жидкости можно поставить в соответствии величину вязкости ньютоновской жидкости с одинаковой величиной касательных напряжений, т.е. реограмма реальной неньютоновской жидкости заменяется линейной зависимостью:

$$\tau = \pm \mu_e \frac{dv}{dr}$$

Естественно, что величина эффективной кажущейся вязкости жидкости будет зависеть от интервала значений касательного напряжения, на котором эта величина вычисляется.

Вязкопластические (бингамовские) жидкости обладают как свойствами твёрдого тела (при напряжениях меньших величины статического напряжения сдвига $\tau(\tau_0)$), так и свойствами жидкости (при касательных напряжениях в жидкости $\tau(\tau_0)$). Когда вязкопластическая жидкость проявляет свойства твёрдого пластичного тела, то роль кристаллической решётки в вязкопластической жидкости осуществляет образующаяся в ней жёсткая

$$\frac{dv}{dz}$$

0 τ_0 τ

$$\frac{dv}{dz}$$

0 τ

$$\frac{dv}{dz}$$

0 τ_0 τ

пространственная структура, приводящая к полной неподвижности жидкости. Поэтому реограмму вязкопластических жидкостей (в) принято рассматривать как некоторую сумму реограмм твёрдого пластичного тела (а) и классической ньютоновской жидкости (б). Уравнение такой реограммы можно представить в следующем виде:

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{dv}{dr}$$

Вид реограмм неньютоновских жидкостей, в том числе и вязкопластических жидкостей, осложняется проявлением тиксотропных свойств таких жидкостей. Принято считать, что величина статического напряжения сдвига вязкопластических жидкостей зависит от продолжительности нахождения такой жидкости в состоянии покоя, другими словами, прочность образующейся структурной решётки в вязкопластической жидкости увеличивается со временем. Повторное приведение жидкости в состояние движения происходит при значительно более низком статическом напряжении сдвига.

Поэтому принято различать величину начального статического напряжения сдвига (после длительной остановки жидкости) и динамическую величину (после кратковременных перерывов в работе). Тиксо-тропные свойства жидкостей обратимы, т.е. при восстановлении существовавшего ранее режима течения жидкости их действие прекращается.

Следует также отметить тот факт, что на величину статического напряжения сдвига в значительной степени влияет вибрация, разрушающая образующуюся в жидкости пространственную структуру.

При этом величина τ_0 может быть снижена практически до 0, и

поведение такой жидкости не будет отличаться от классической ньютоновской жидкости.

Особенности строения вязкопластических жидкостей приводят к некоторым парадоксам. Так, к примеру, в сообщающихся сосудах с вязкопластической жидкостью уровни в коленах сосудов устанавливаются на разных высотах, зависящих от свойств жидкости и

размеров сосудов.

! *

12.2. Движение вязкопластических жидкостей в трубах.

Для того, чтобы вязкопластичная жидкость начала перемещаться необходимо создать между начальным и конечным сечениями участка трубы длиной / некоторую разность напоров, при которой будет преодолена величина начального статического напряжения сдвига τ_0 . При этом жидкость отрывается от стенок трубы и первоначально движется на подвижном ламинарном слое, сохраняя свою прежнюю пространственную структуру, т.е. с одинаковыми скоростями по всему отсеку потока. Разрушение этой структуры происходит позже и при некотором превышении напора. Поскольку в начальный момент времени силы трения будут возникать только у стенок трубы, то уравнения равновесия можно записать в следующем виде:

$$P_1 - P_2 - T = 0,$$

$$P_1 \frac{\pi d^2}{4} - P_2 \frac{\pi d^2}{4} - \tau_0 \cdot \pi d \cdot l = 0.$$

Необходимая разность напоров между началом и концом участка трубы определится следующим образом:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = 4\tau_0 \rho g d.$$

Таким образом, при превышении разности напоров расчётную величину жидкость начнёт двигаться по трубе, причём характер (режим) её движения будет зависеть от величины Δh . При движении вязкопластичной жидкости возможны три режима течения её: структурный, ламинарный и турбулентный.

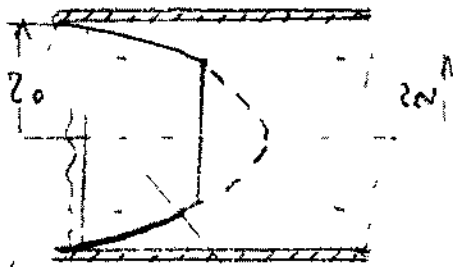
Условие $\Delta h = h_1 - h_2 > 4\tau_0 \rho g d$ является необходимым для начала движения жидкости в структурном режиме, при этом под величиной статического напряжения сдвига следует понимать величину соответствующую длительному покою жидкости, т.е. с учётом проявления тиксотропных свойств жидкости.

Структурный режим течения жидкости предполагает наличие вдоль стенок трубы сплошного ламинарного слоя жидкости; в центральной части трубы наблюдается ядро течения, где жидкость движется, сохраняя прежнюю свою структуру, т.е. как твёрдое тело. Размеры центрального ядра течения (радиус r_0) может быть определён исходя из следующего соотношения:

$$r_0 = \frac{2\tau_0 l}{\rho g \cdot \Delta h}.$$

При увеличении Δh размеры ламинарной зоны будут постепенно увеличиваться за счёт уменьшения размеров ядра течения пока структурный режим не перейдёт в полностью ламинарный режим движения жидкости. В дальнейшем ламинарный режим постепенно сменится турбулентным режимом движения жидкости.

Для определения закона распределения скоростей по сечению потока при структурном режиме движения жидкости запишем некоторую функцию для касательных напряжений в соответствии с



Ядро
течения

формулой Бингама:

$$f(\tau) = \frac{\tau - \tau_0}{\mu}$$

Тогда распределение скоростей по сечению трубы можно выразить следующим образом:

$$u(r) = \frac{r_0}{\tau_r} \int_{\tau_r}^{\tau} \frac{\tau - \tau_0}{\mu} d\tau ?$$

где: τ_r - касательное напряжение на стенке трубы радиуса r_0 ,

$u(r)$ - скорость жидкости на расстоянии r от центра трубы. После интегрирования этого уравнения получим:

$$u(r) = \frac{r_0 \cdot \tau_r}{\mu} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_r^2} \right) - \frac{\tau_0}{\tau_r} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_r} \right) \right].$$

И окончательно:

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu \cdot l} (r_0^2 - r^2) - \frac{\tau_0}{\mu} (r_0 - r),$$

$$\Delta p = \frac{\Delta h}{\rho g}.$$

Для определения скорости в ядре течения примем $r = \tilde{r}$, где $\tilde{r}$ - радиус ядра течения (структурной части потока жидкости). Тогда величина скорости в этом ядре течения (скорости в ядре течения одинаковые равны) $\tilde{u}$:

$$\tilde{u} = \frac{\Delta p}{4\mu \cdot l} (r_0^2 - \tilde{r}^2) - \frac{\tau_0}{\mu} (r_0 - \tilde{r})$$

Расход жидкости при структурном движении можно определить, используя известные соотношения для круглой трубы:

$$Q = \frac{\pi r_0^3}{\tau_r^3 \cdot \mu} \int (\tau - \tau_0) \cdot \tau^2 d\tau.$$

Интегрируя уравнение в пределах от $\tau = \tau_r$ до $\tau = \tau_0$, получим:

$$\frac{Q \tau_r^3}{\pi r_0^3} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\tau_r^4}{4} + \frac{\tau_0^4}{12} - \frac{\tau_0 \tau_r^3}{4} \right]$$

$$Q = \frac{\pi d^4 \cdot \Delta p}{128 \mu l} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{4 \tau_0 l}{d \cdot \Delta p} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{4 \tau_0 l}{d \cdot \Delta p} \right) \right].$$

Последнее уравнение, известное как формула Букингама, можно упростить:

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8 \mu l} \left(\Delta p + \frac{1}{3} \frac{\Delta p_0^4}{\Delta p^3} - \frac{4}{3} \Delta p_0 \right),$$

где: Δp_0 - разность давлений при начале движения жидкости, когда касательные напряжения в ней достигают величины касательного напряжения сдвига. Если пренебречь величиной второго члена ввиду его малости, получим:

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8 \mu l} \left(\Delta p - \frac{4}{3} \Delta p_0 \right).$$

$$h_{\text{нп}} = \frac{32\nu \cdot l}{gd^2} + \frac{16\tau_0 \cdot l}{3\rho gd} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

$$\lambda = \frac{64\mu}{\rho v d} + \frac{32\tau_0}{3\rho v^2} = \frac{64}{\text{Re}^*}, \quad * \text{ где: } \text{Re}^* - \text{обобщённый критерий Рейнольдса.}$$

$$\text{Re}^* = \frac{\text{Re}}{1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_0 d}{\mu v}}.$$

Комплексный параметр $\frac{\tau_0 d}{\mu v} = \text{Sen}$ носит название числа Сен-Венана.

Таким образом, при расчётах движения вязкопластических жидкостей можно пользоваться уравнениями для ньютоновских жидкостей, заменяя в уравнениях величину числа Рейнольдса Re на обобщённый критерий Рейнольдса Re^* .

Турбулентный режим течения жидкости. Характер течения вязкопластических жидкостей существенно не отличается от турбулентного потока ньютоновских жидкостей. Отличие состоит в количественных соотношениях между величинами коэффициентов трения и числом Рейнольдса. Так коэффициент трения может быть выражен как функция обобщённого числа Рейнольдса (в общем виде) следующим образом:

$$\lambda = \frac{B}{(\text{Re}^*)^n},$$

где: B и n - некоторые параметры, устанавливаемые по данным экспериментов. Так по данным экспериментов Б.С. Филатова величины коэффициентов B и n принимаются следующими:

- для неутяжелённого глинистого раствора $B = 0,1$ и $n = 0,15$,
- для утяжелённого глинистого раствора $B = 0,0025$ и $n = -0,2$.

Для расчёта трубопроводов при движении по ним глинистых и цементных растворов можно пользоваться формулой Б.И. Мительмана:

$$\lambda = 0,08(\text{Re}^*)^{-\frac{1}{7}}, \text{ при: } \text{Re}^* = 2500-40000. \quad \mathbf{12.3. Движение вязкопластических жидкостей в открытых каналах}$$

В практике работы горных предприятий не редки случаи, когда приходится транспортировать неньютоновские жидкости в безнапорных потоках (самотёком), в лотках, по желобным системам. Характер течения вязкопластических жидкостей в открытых каналах при структурном режиме идентичен аналогичному и напорному потокам такой жидкости в круглых трубах. Т.е. при структурном режиме течения жидкости также выделяется центральное ядро течения, где жидкость движется как твёрдое тело, сохраняя свою первоначальную структуру. Ядро течения подстигается непрерывным ламинарным слоем жидкости. Течению таких жидкостей по открытым каналам прямоугольного профиля посвящены работы Р.И. Шищенко. По данным его исследований расход вязкопластической жидкости при структурном режиме движения может быть определён по приближённой формуле:

$$Q = v_0 S \left[1 - \frac{h}{2R_c} \left(1 - \frac{i_0}{i} \right) \right],$$

$$\text{где: } v_0 - \text{ скорость течения ядра потока } v_0 = \frac{i \rho g R_c h^2}{2\mu} \left(1 - \frac{i_0^2}{i^2} \right) - \frac{\tau_0 R_c}{\mu} \left(1 - \frac{i_0}{i} \right),$$

$S = bh$ - площадь живого сечения канала шириной b и глубиной заполнения h ,

$i_0 = \frac{\tau_0}{\rho gh}$ - гидравлический уклон, соответствующий началу течения жидкости,

/ - уклон дна канала,

R_c - гидравлический радиус живого сечения потока. **12.4. Движение неньютоновских жидкостей, подчиняющихся степенному реологическому закону, по трубам**

Для жидкостей, подчиняющихся степенному реологическому закону, функция напряжения сдвига будет иметь следующий вид:

$$f(\tau) = \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Тогда распределение скоростей в сечении потока будет соответствовать следующей зависимости:

$$u(r) = \frac{r_0}{\tau_r} \int_{\tau}^{\tau_r} \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}} d\tau.$$

Интегрируя это уравнение, найдём:

$$u(r) = \frac{r_0}{k^{\frac{1}{n}} \cdot \tau_r} \int_{\tau}^{\tau_r} \tau^{\frac{1}{n}} d\tau = \frac{nr_0 (\tau_r)^{\frac{1}{n}}}{(n+1)k^{\frac{1}{n}}} \left[1 - \left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right], \text{ или:}$$

$$u(r) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\Delta p}{2kl}\right)^{\frac{1}{n}} \left(r_0^{\frac{1}{n+1}} - r^{\frac{1}{n+1}} \right).$$

Отсюда можно получить выражение для расхода жидкости:

$$Q = \frac{\pi nr_0^{\frac{3n+1}{n}}}{3n+1} \left(\frac{\Delta p}{2lk}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Отсюда определим величину перепада давления, обеспечивающую движение жидкости и соответствующую величину потерь напора на трение.

$$\Delta p = \frac{(3n+1)^n Q^n \cdot 2lk}{(\pi n)^n \cdot r_0^{3n+1}},$$

$$h_{mp} = \frac{(3n+1)^n Q^n \cdot 2lk}{\rho g \cdot (\pi n)^n \cdot r_0^{3n+1}}.$$

Сопоставляя полученное выражение с формулой Дарси-Вейсбаха, найдём величину коэффициента трения и обобщённый критерий Рейнольдса:

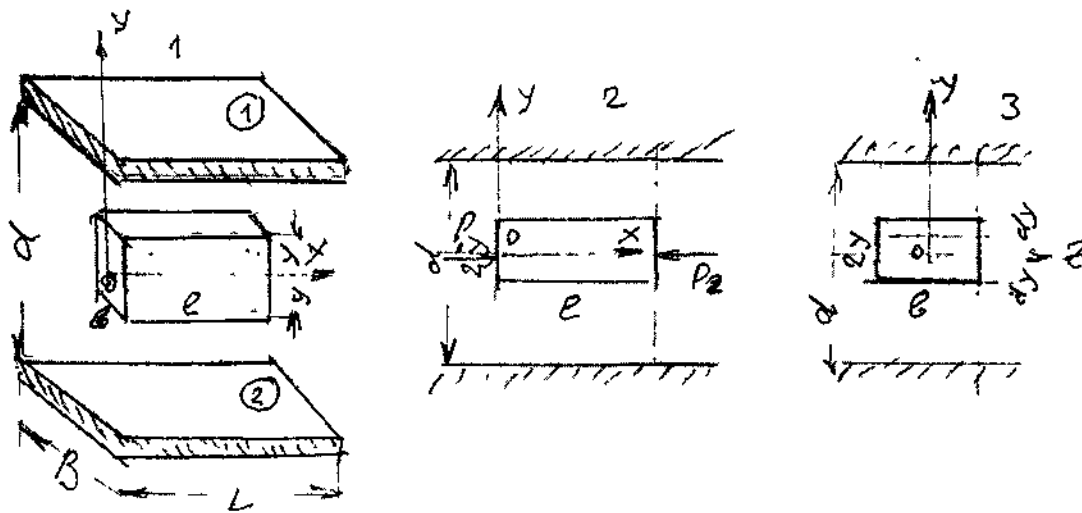
$$\lambda = \frac{(3n+1)^n 2^{n+3} k}{n^n \rho d^n v^{2-n}}$$

$$\text{Re}^* = \frac{64n^n \rho d^n v^{2-n}}{(3n+1)^n 2^{n+3} k}.$$

13. Гидравлическая теория смазки 13.1. Ламинарное движение жидкости в узких щелях

В большинстве машин и механизмов с целью снижения трения между движущимися узлами используются принципы гидравлической смазки, когда малые зазоры между соприкасающимися элементами заполняются низковязкой или другой жидкостью. В данном случае процесс сухого трения между твердыми движущимися телами заменяется скольжением. Гидравлическая смазка используется также и в случаях, когда необходимо выполнить изоляцию зазоров от проникновения через них жидкостей. Эти чисто практические задачи связаны с теорией течения жидкости в узких щелях, разработанных Буссинэ и Н.П. Петровым.

Эту задачу рассмотрим на классическом уровне. Возьмём две плоские одинаковые



пластины, расположенные параллельно друг другу на малом расстоянии друг от друга. Эти пластины образуют между собой тонкую щель (зазор) d .

Щель будет считаться тонкой, если её ширина d во много раз меньше размеров пластин $d \ll L$ и $d \ll B$, где L и B - размеры пластины. Проведем в потоке щели два параллельных друг другу сечения на расстоянии l и выделим малый отсек жидкости в виде параллелепипеда со сторонами: l, b и $2y$.

Жидкость движется вдоль оси Ox (на рисунке 2 слева на право). Грани, через которые жидкость втекает внутрь выделенного отсека и вытекает из него, имеют площадь $s = 2y \cdot b$. К этим граням приложены силы давления равные:

$$P_1 = p_1 \cdot s \text{ и } P_2 = p_2 \cdot s$$

Когда выделенный отсек жидкости будет находиться в состоянии равновесия под действием сил давления трения и силы тяжести.

$$\Delta P_x - T_r - G_r = 0$$

$$(p_1 - p_2) s + \mu \cdot S \cdot \frac{du}{dy} - 0 = 0$$

где: $S = l \cdot b$ - площадь верхней и нижней граней отсека жидкости.

Подставив в уравнение величины площади пластин и граней, и преобразовав уравнение, получим:

$$\rho g \frac{\Delta h}{l} \cdot l \cdot 2y \cdot b = -\nu \cdot \rho \cdot 2 \cdot l \cdot b \frac{du}{dy}$$

Тогда:

$$du = -\frac{ig}{\nu} y \cdot dy$$

где: $i = \frac{\Delta h}{l}$ - гидравлический уклон.

13.2. Распределение скоростей и касательных напряжений в щелевом зазоре

После интегрирования полученного дифференциального уравнения получим:

$$u = -\frac{ig}{2\nu} y^2 + C$$

Величина постоянной интегрирования может быть получена исходя из условия, что скорость на грани пластины равна 0, т.е. при $y = \frac{d}{2}$, $u = 0$.

$$C = \frac{ig}{2\nu} \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$u = \frac{ig}{2\nu} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right)$$

В центре потока скорость будет максимальной, т.е. при $y = 0$

$$u_{\max} = \frac{ig}{8\nu} d^2$$

Вычислим величину средней скорости потока, для чего найдём величину расхода через щель.

Элементарный поток жидкости dQ в тонком слое dy будет равен:

$$dQ = u \cdot b \cdot 2dy = \frac{1g}{2\nu} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right) \cdot 2b \cdot dy,$$

откуда:

$$Q = \frac{1g}{\nu} b \int_0^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right) \cdot dy = \frac{1g}{\nu} \cdot b \cdot \left(\frac{d^2}{4} \cdot \frac{d}{2} - \frac{d^3}{3 \cdot 8} \right)$$

$$Q = \frac{1gbd^3}{12\nu},$$

откуда средняя скорость в потоке.

$$v = \frac{Q}{b \cdot d} = \frac{1gd^2}{12\nu},$$

т.е. для потока в тонкой щели соотношение между средней скоростью и максимальной иное, чем в круглой трубе: $\frac{v}{u_{\max}} = \frac{2}{3}$.

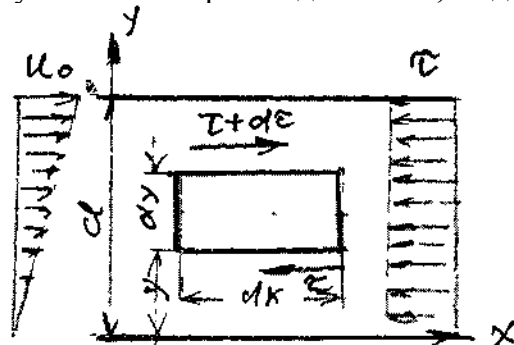
Потери напора будут равны.

$$h = \frac{12l \cdot \nu \cdot v}{gd^2}.$$

Если одна из пластин будет двигаться относительно другой неподвижной пластины с постоянной скоростью, а давление в щели будет постоянным по всей длине, то при таком параллельном перемещении движущаяся пластина будет увлекать за собой жидкость. Такое перемещение жидкости называется безнапорным фрикционным движением. Выделим в этом потоке элементарный объём жидкости также в виде параллелепипеда.

$$dW = b \cdot dx \cdot dy$$

Поскольку величины сил давления на левую и правую боковые грани одинаковы, то для равновесия



вдоль

необходимо, чтобы и силы трения, действующие верхней и нижней граней выделенного отсека тоже были одинаковыми.

$$-\tau \cdot b \cdot dx = (\tau + d\tau) b \cdot dx, \text{ т.е. } d\tau = 0.$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \nu \rho \frac{du}{dy} = C$$

После интегрирования получим:

$$u = \frac{C}{\nu \rho} y + C_1$$

Величины постоянных интегрирования получим при следующих условиях:

при $y = 0$ $u = 0$, при $y = d$ $u = u_{\max} = u_0$

Следовательно: $C_1 = 0$ и, $C = \frac{\nu \cdot \rho \cdot u_0}{d}$ т.е. будем иметь закон распределения

скоростей по сечению зазора

$$u = u_{\max} \frac{y}{d}$$

Таким образом, скорость по сечению зазора распределяется по линейному закону. Величина касательных напряжений постоянна по сечению зазора:

$$\tau = \nu \rho \frac{du}{dy} = \nu \rho \frac{u_0}{d}$$

Тогда сила трения, действующая на пластину, будет равна:

$$T = \nu \rho \frac{u_0}{d} B \cdot L,$$

расход жидкости через зазор:

$$Q = \int_0^d u B dy = \frac{u_0}{2} B \cdot d,$$

т.е. средняя скорость фрикционного потока равна половине максимальной скорости:

$$v = \frac{u_0}{2}.$$

Выводы, полученные для плоских пластин легко перенести на криволинейные поверхности, если допустить, что радиус кривизны такой поверхности бесконечно велик по сравнению с шириной зазора, что соответствует действительности.

В то время, когда жидкость проникает в узкую щель между неподвижными стенками зазора, на поверхности стенок происходит адсорбция поляризованных молекул жидкости, обусловленная силами межмолекулярного взаимодействия. В результате этого на поверхности стенок образуется фиксированный слой жидкости, обладающий значительной прочностью на сдвиг, а живое сечение щели уменьшается. Это явление носит название облитерации. Интенсивность облитерации зависит от свойств жидкости. Сложные по строению высокомолекулярные жидкости обладают значительно большей степенью облитерации, по этой причине разного рода смазки являются подходящим средством для уплотнения соединений и устранения возможных утечек.

Явление облитерации необходимо учитывать при запуске оборудования, когда приходится преодолевать дополнительные усилия на страгивание простаивающих элементов оборудования.

14. Элементы теории подобия

Решение задач гидравлики аналитическими методами на базе дифференциальных уравнений и различных методов математического анализа не нашло широкого применения для практических целей. Необходимость ввода различных допущений и ограничений позволяют использовать полученные строгие решения лишь как качественные оценки изучаемых процессов. Практические же результаты, как правило, достигаются экспериментальными методами исследований.

Построение модели того или иного процесса также связано с немалыми трудностями. Это, прежде всего, необходимость точного знания физической стороны изучаемого процесса, умение выделить существенные стороны и факторы, добиться полной аналогии построенной модели с натурой и т.д. Поэтому даже всестороннее знание природы изучаемого процесса не гарантирует абсолютный успех.

При решении практических задач в гидравлике пользуются обеими известными методами построения моделей как физическим, так и математическим моделированием.

При физическом моделировании модель, как и натура, имеют одинаковую физическую природу и отличаются друг от друга лишь размерами. При математическом моделировании модель имеет иное, чем натура, физическое содержание: общими у них являются лишь одинаковые дифференциальные уравнения, описывающие сходные физические процессы, протекающие в модели и натуре.

Подробное изучение методов моделирования не является задачей настоящего курса, эти вопросы рассматриваются в специальных дисциплинах. В настоящем курсе мы лишь назовём некоторые положения касающиеся основ построения таких моделей

14.1. Физическое моделирование

Физическая модель отличается от природы лишь размерами, т.е. модель по своим размерам может быть, чаще всего лишь уменьшенной копией природы, либо она может (в некоторых случаях) превосходить по своим размерам природу. И в том и другом случае, для успешного и правильного построения модели необходимо, прежде всего, знать основные законы подобия. Модель и натура будут адекватны между собой, если при построении модели будут выполнены все основные элементы подобия. К таким условиям относятся критерии геометрического, кинематического и динамического подобия.

Для геометрического подобия необходимо, чтобы отношение любых сопоставляемых линейных размеров модели и природы были бы одинаковыми. Так протяжённость модели и природы, а также и

другие прочие размеры должны находится между собой в пропорциональной зависимости:

$$\frac{L_v}{L_n} = K_l,$$

где: L_v и L_n - линейный размер соответственно на модели и на натуре,
 K_l - коэффициент геометрического подобия, масштаб моделирования.

В таком случае, при сопоставлении размеров площадей на модели и натуре должен соблюдаться такой же масштабный множитель, но с учётом порядка мерности величины:

$$\frac{S_v}{S_n} = \frac{L_v^2}{L_n^2} = K_l^2$$

Т.е. при сопоставлении размеров площадей на модели и на натуре соотношение этих величин будет равно квадрату масштабного линейного множителя. Соответственно для сопоставления объёмов:

$$\frac{W_v}{W_n} = \frac{L_v^3}{L_n^3} = K_l^3.$$

Для кинематического подобия необходимо, чтобы траектории всех сопоставимых частиц были геометрически подобны, т.е. при этом кроме геометрического подобия сопоставимых криволинейных отрезков модели и природы выполнялось ещё подобие сопоставимых интервалов времени в модели и натуре.

$$\frac{t_v}{t_n} = K_t$$

Тогда величины скоростей движения частиц в модели и натуре будут относиться между собой как:

$$\frac{v_v}{v_n} = \frac{\frac{L_v}{t_n}}{\frac{L_n}{t_n}} = \frac{K_l}{K_t} = K_v, \quad 5 - \text{величины расходов жидкости:}$$

$$\frac{Q_v}{Q_n} = \frac{v_v \cdot t_v}{v_n \cdot t_n} = K_v \cdot K_t = K_Q$$

Для динамического подобия сравниваемых потоков необходимо, чтобы в соответствующих местах потоков были подобны действующие в них одноимённые силы. Пусть в сопоставимых точках потока жидкости и строящейся модели этого потока действует некоторая инерциальная сила F . Тогда при соблюдении геометрического и кинематического подобия, критерий динамического подобия может быть выражен следующим образом:

$$\frac{F_v}{F_n} = \frac{\rho_v \cdot W_v \cdot a_v}{\rho_n \cdot W_n \cdot a_n} = \frac{\rho_v \cdot v_v^2 \cdot L_v^2}{\rho_n \cdot v_n^2 \cdot L_n^2} = K_F$$

Величина K_F носит название масштаба сил.

Рассмотрим критерии подобия отдельных сил действующих в жидкости.

Сила внутреннего трения в жидкости.

$$\frac{T_v}{T} = \frac{\frac{\mu_v \cdot L_v^2 \cdot v_v}{L_v}}{\frac{\mu_n \cdot L_n^2 \cdot v_n}{L_n}} = \frac{\mu_v \cdot v_v \cdot L_v}{\mu_n \cdot v_n \cdot L_n}.$$

Заменив $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ мы получим основное условие подобия потоков, в которых ос-

новную роль играют силы внутреннего трения жидкости. Для подобия таких потоков необходимо

равенство чисел Рейнольдса. $Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = idem$

Определяющей в потоке является сила тяжести.

$$\frac{G_u}{G_n} = \frac{M_u \cdot g_u}{M_n \cdot g_n} = \frac{\rho_u \cdot v_u^2 \cdot L_u^2}{\rho_n \cdot v_n^2 \cdot L_n^2} = \frac{\rho_u \cdot L_u^3 \cdot g_u}{\rho_n \cdot L_n^3 \cdot g_n} = \frac{\frac{v_u^2}{g_u L_u}}{\frac{v_n^2}{g_n L_n}}$$

Таким образом, если определяющей силой в потоке является сила тяжести, то для подобия таких потоков необходимо постоянство числа Фруда $Fr = \frac{v^2}{g \cdot L} = idem$.

Для потока жидкости, в котором определяющей силой является сила давления:

$$\frac{P_u}{P} = \frac{p_u \cdot S_u}{p_n \cdot S_n} = \frac{\rho_u \cdot L_u^2 \cdot v_u^2}{\rho_n \cdot L_n^2 \cdot v_n^2} = \frac{\frac{P_u}{v_u \cdot \rho_u}}{\frac{P_n}{v_n \cdot \rho_n}}$$

Если определяющей в потоке жидкости является сила давления, то для подобия таких потоков обязательным условием является равенство критерия Эйлера

$$Eu = \frac{p \cdot v}{\rho} = idem$$

14.2. Математическое моделирование

Для построения математических моделей в гидравлике могут быть использованы процессы, имеющие единую с гидравликой природу взаимодействия физических тел. Т.е. моделями для процессов, протекающих в жидкостях и газах, могут служить лишь те физические процессы, которые относятся к группе электромагнитных взаимодействий, имеющих одного и того же переносчика взаимодействия - фотон. В таком случае основные процессы, протекающие в модели и натуре, будут иметь одинаковые уравнения, описывающие сходственные процессы.

Так для моделирования гидродинамического поля (поля скоростей движения жидкости и газа) могут быть использованы электрическое и тепловое поля.

Из курса физики известны общие уравнения, характеризующие сплошность поля и его изменение. Это известное уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \text{ или } div \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

и так называемые уравнения неустановившегося (уравнение Фурье) и установившегося (уравнение Лапласа) движения:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \text{ или } \nabla^2 \varphi = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \text{ или } \nabla^2 \varphi = 0$$

Наиболее удобным для целей моделирования процессов протекающих в жидкостях и газах являются процессы, протекающие в электрическом поле, поскольку последние отличаются компактностью, доступностью для измерения и, что самое главное, высокой скоростью протекания. Такие особенности электрического поля сделали его популярным для моделирования различных процессов, был разработан специальный аппарат для построения электрических моделей процессов протекающих в жидкостях и газах, - метод электрогидродинамической аналогии (ЭГДА).

Построенные на его базе серийные моделирующие комплексы вплоть до появления цифровых ЭВМ широко использовались в практике научных исследований и на прямом производстве. При решении ряда задач актуальность этого метода остаётся поныне.

Модели, строящиеся на базе теплового поля, используются крайне редко из-за трудоёмкости их создания и реализации.

Литература

1. Агроскин И.И., Дмитриев Г.Т., Пикалов Ф.И. Гидравлика. М., Госэнергоиздат, 1964
2. Альтшуль А.Д., Животовский Л.С., Иванов Л.П. Гидравлика и аэродинамика - М Строй-издат. 1987, 4Юс.

3. Башта Т.М., Руднев С.С., Некрасов Б.Б и др. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы.. «Машиностроение», 1982, 433с.
4. Гейер В.Г., Дулин В.С., Заря А.Н. Гидравлика и гидропривод. М.
5. Есьман И.Г. и др. Гидравлика и гидравлические машины. Баку, 1955
6. Некрасов Б.Б. Гидравлика и её применение в летательных аппаратах. М.Машиностроение, 1967. 368 с.
7. Орлов Ю.М. Механика жидкости, гидравлические машины и основы гидропривода. Учебное пособие. Пермь, 2001. 379 с.
8. Рабинович Е.З. Гидравлика - М. «Недра» 1980,278 с.
9. Сборник задач по машиностроительной гидравлике: Учебное пособие для машиностроительных ВУЗов\ Д.А. Бугаев, З.А. Калмыкова, Л.Г. Подвидз и др. Под редакцией И.И. Куколевского и Л.Г Подвидза.-4-е изд., перераб.-М: Машиностроение, 1981.-464 с. ил.