

Данный файл представлен исключительно в ознакомительных целях.

Уважаемый читатель!

Если вы скопируете данный файл,
Вы должны незамедлительно удалить его сразу после ознакомления с содержанием.
Копируя и сохраняя его Вы принимаете на себя всю ответственность, согласно действующему международному законодательству .
Все авторские права на данный файл сохраняются за правообладателем.
Любое коммерческое и иное использование кроме предварительного ознакомления запрещено.

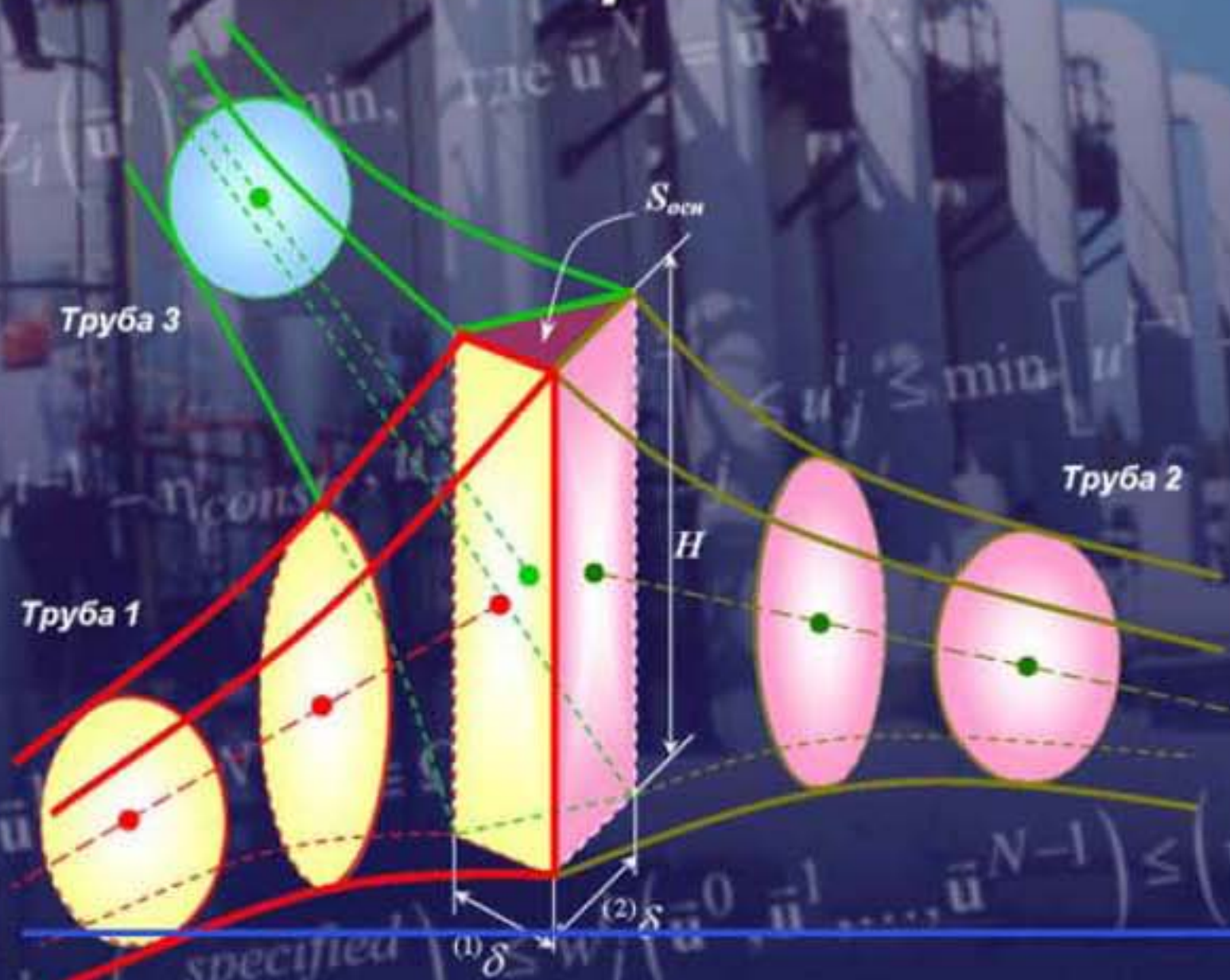
Публикация данного документа не преследует никакой коммерческой выгоды. Но такие документы способствуют быстрейшему профессиональному и духовному росту читателей и являются рекламой бумажных изданий таких документов.

Версия сентября 2009 года

В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прялов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРУБОПРОВОДНЫХ СЕТЕЙ И СИСТЕМ КАНАЛОВ

Методы, модели и алгоритмы



В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прялов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРУБОПРОВОДНЫХ СЕТЕЙ И СИСТЕМ КАНАЛОВ

Методы, модели и алгоритмы



МОСКВА – 2007

УДК 621.64:519.8
ББК 39.71-022:22.18
С29

Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н.

С29 Математическое моделирование трубопроводных сетей и систем каналов: методы, модели и алгоритмы / Под ред. В.Е. Селезнева. – М.: МАКС Пресс, 2007. – 695 с.
ISBN 978-5-317-02011-8

В монографии приводится подробное описание базовых методов численного моделирования трубопроводных сетей и систем каналов с открытым руслом (рек). Данные методы положены в основу современных промышленных вычислительных технологий, высокоточных компьютерных симуляторов и компьютерных аналитических систем для научно обоснованного решения широкого круга технических и технологических проблем проектирования, строительства (включая производство труб) и функционирования **магистральных** трубопроводных и канальных сетей. Основное внимание в книге уделено разработкам, подтвердившим в последнее десятилетие надежность и эффективность своего практического применения для решения производственных задач.

Книга может оказаться полезной научным работникам, аспирантам и преподавателям, занимающимся математическим моделированием, созданием прикладного программно-математического обеспечения и проведением расчетно-аналитических работ для нужд трубопроводного транспорта, трубной промышленности, энергетики и природоохранных организаций. Она может также заинтересовать специалистов, работающих в областях проектирования, строительства и эксплуатации магистральных трубопроводов над решением задач повышения их безопасности, экологичности и экономичности. Материал монографии доступен студентам старших курсов технических вузов.

Табл. 20. Ил. 252. Библиогр. 329 назв.

УДК 621.64:519.8
ББК 39.71-022:22.18

ISBN 978-5-317-02011-8

© В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прялов, 2007

**УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ! ВАШЕМУ ВНИМАНИЮ ПРЕДЛАГАЕТСЯ
АВТОРСКАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ВЕРСИЯ ТЕКСТА МОНОГРАФИИ:**

Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н. Математическое моделирование трубопроводных сетей и систем каналов: методы, модели и алгоритмы / Под ред. В.Е. Селезнева. – М.: МАКС Пресс, 2007. – 695 с.

ЭТА ВЕРСИЯ РЕГУЛЯРНО СОПРОВОЖДАЕТСЯ В.Е. СЕЛЕЗНЕВЫМ, В.В. АЛЕШИНЫМ И С.Н. ПРЯЛОВЫМ, НАЧИНАЯ С СЕНТЯБРЯ 2007 ГОДА. ОСНОВНЫЕ ОТЛИЧИЯ ТЕКСТА АВТОРСКОЙ ВЕРСИИ ОТ ВАРИАНТА ТЕКСТА, ОПУБЛИКОВАННОГО В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «МАКС Пресс», МОСКВА, ОТМЕЧЕНЫ ЖЕЛТЫМ МАРКЕРОМ.

**ПОСЛЕДНИЕ ПРАВКИ В ЭЛЕКТРОННЫЙ ТЕКСТ БЫЛИ ВНЕСЕНЫ
В СЕНТЯБРЕ 2009 ГОДА.**

**ВСЕ ПРАВА НА ПРЕДСТАВЛЕННУЮ ЭЛЕКТРОННУЮ ВЕРСИЮ
ПРИНАДЛЕЖАТ В.Е. СЕЛЕЗНЕВУ, В.В. АЛЕШИНУ И С.Н. ПРЯЛОВУ.**

Оглавление

Предисловие	9
Список основных используемых сокращений	12

ГЛАВА 1

НОВАЯ РЕДАКЦИЯ КОНЦЕПЦИИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРУБОПРОВОДНЫХ СЕТЕЙ И СИСТЕМ КАНАЛОВ С ОТКРЫТЫМ РУСЛОМ

1.1. Базовый принцип высокоточного моделирования трубопроводных сетей и систем каналов с открытым руслом	14
1.2. Правило минимизации глубины необходимых упрощений и допущений	16
1.3. Высокоточные компьютерные симуляторы функционирования трубопроводных и канальных систем	18
1.4. Вычислительные технологии анализа специальных случаев функционирования трубопроводных и канальных систем.....	33
1.5. Пример реализации основных принципов высокоточного моделирования трубопроводных систем при верификации проектных решений для магистральных трубопроводов	36
1.6. Пример реализации основных принципов высокоточного моделирования трубопроводных систем при управлении целостностью трубопроводных сетей	46
1.7. Формулировка первой версии расширенной концепции	53

ГЛАВА 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТИРОВАНИЯ ПРОДУКТОВ ПО ТРУБОПРОВОДНЫМ СИСТЕМАМ

2.1. Об объекте моделирования.....	59
2.2. Высокоточный компьютерный газодинамический симулятор газотранспортного предприятия	60
2.3. Моделирование течений в одноструйном трубопроводе	63
2.3.1. Течение однокомпонентного газа.....	63
2.3.2. Течение газовой смеси.....	77
2.3.3. Течение многокомпонентных жидкостей	80
2.3.4. Пленочное течение двухфазной среды	88
2.4. Моделирование течений в разветвленном трубопроводе	123

2.4.1. Моделирование течений в узле сочленения газопроводов	123
2.4.2. О моделировании течений в разветвленном трубопроводе, транспортирующем жидкости	134
2.5. Численный анализ математической модели разветвленных трубопроводов.....	138
2.5.1. Примеры разностных схем повышенного порядка аппроксимации	163
2.5.2. О построении полностью консервативных сплайн-схем повышенного порядка аппроксимации	168
2.5.3. К вопросу о построении неравномерных по длине трубопроводов фиксированных разностных сеток.....	183
2.5.4. Численный анализ работы крана.....	190
2.5.5. Численный анализ работы крановых площадок ЛЧМГ, оборудованных межниточными перемычками	225
2.5.6. Численный анализ истечения газа из трубопровода высокого давления в атмосферу.....	233
2.6. Моделирование транспортирования газов через компрессорный цех и компрессорную станцию	237
2.6.1. Математические модели сегментов компрессорных станций (цехов).....	237
2.6.2. Математическое моделирование установившихся режимов транспортирования природного газа через компрессорный цех и компрессорную станцию	240
2.6.3. Математическое моделирование неуставившихся режимов транспортирования природного газа через компрессорный цех и компрессорную станцию	252
2.6.3.1. Метод последовательной смены стационарных состояний КС	252
2.6.3.2. Метод анализа динамических режимов КС	253
2.6.4. К вопросу о моделировании компрессорных станций сложной структуры.....	256
2.7. Моделирование транспортирования продуктов через предприятие трубопроводного транспорта.....	258
2.7.1. Моделирование установившихся режимов транспортирования продуктов.....	259
2.7.2. Моделирование неуставившихся режимов транспортирования продуктов.....	260
2.7.3. Численная оценка параметров работы автоматических регуляторов давления в газопроводных сетях	260
2.7.4. Автоматическая настройка высокоточных компьютерных симуляторов на реальные параметры конкретной трубопроводной системы.....	263
2.8. Математические методы снижения затрат на транспортирование продуктов по трубопроводным сетям с помощью высокоточных компьютерных симуляторов	266
2.8.1. Критерий оптимизации неуставившихся режимов транспортирования природного газа через ГТС.....	267
2.8.2. Постановка задачи оптимизации неуставившихся режимов транспортирования природного газа через ГТС.....	268

2.8.3. Алгоритм оптимизации неустановившихся режимов транспортирования природного газа через ГТС.....	271
2.8.4. Об оптимизации установившихся режимов транспортирования природного газа через ГТС.....	274

ГЛАВА 3

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ

3.1. Постановка задачи.....	277
3.2. Метод решения уравнений равновесия трубопроводных систем	281
3.3. Математические модели для анализа упруго-пластического поведения трубопроводных конструкций.....	285
3.3.1. Упруго-пластическое поведение трубных сталей.....	285
3.3.2. Моделирование взаимодействия трубопровода и прилегающего грунта.....	286
3.3.2.1. Инженерные модели взаимодействия подземного трубопровода с окружающим грунтом.....	286
3.3.2.2. Трехмерная упруго-пластическая модель грунта	294
3.4. Технология численного анализа напряженно-деформированного состояния и оценки прочности трубопроводных систем	308
3.4.1. Выбор средств моделирования НДС трубопроводов	309
3.4.2. Моделирование НДС трубопроводных систем	310
3.4.2.1. Балочные модели трубопроводов.....	312
3.4.2.2. Оболочечные модели трубопроводов.....	315
3.4.2.3. Объемные модели трубопроводов	318
3.4.3. Анализ НДС и оценка прочности трубопроводных систем	320
3.4.4. Анализ прочности криволинейных участков магистральных трубопроводов .	321
3.4.5. Анализ прочности участков магистральных трубопроводов, подвергшихся экскавации	325

ГЛАВА 4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВАРИЙНЫХ СИТУАЦИЙ В ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМАХ

4.1. Постановка задачи моделирования аварий в трубопроводных системах	340
4.2. Математическое моделирование осколочного поражения при авариях на газопроводах высокого давления	341
4.3. Численное прогнозирование токсической опасности и пожаровзрывоопасности при авариях на трубопроводах	348

4.3.1. Моделирование эволюции облаков топливно-воздушной смеси	348
4.3.2. Численный анализ возможности возникновения пожара или взрыва.....	363
4.3.3. Численный анализ эффективности путей предотвращения пожара или взрыва	365
4.3.4. Технология численного прогнозирования токсической опасности и пожаровзрывоопасности на объектах ТЭК	372
4.3.5. К вопросу об оценке состояния атмосферы в зоне аварийного выброса транспортируемого продукта	373
4.4. Численное моделирование пожаров на газопроводах и прилегающих территориях	375
4.4.1. Общие замечания	375
4.4.2. Численный анализ причин и механизмов воспламенения образовавшейся газовой смеси	377
4.4.3. Численный анализ параметров пожара на газопроводе в условиях открытой местности	381
4.4.4. Анализ прочности открытых участков трубопроводов при тепловом воздействии пожара	394
4.4.5. Численный анализ параметров пожара на газопроводе в условиях помещения	401
4.4.6. К вопросу об анализе взрывоустойчивости зданий при взрывах газовой смеси в помещении	402
4.5. Моделирование пожаров разлития горючих жидкостей при разрушении трубопроводов или резервуаров хранения.....	403
4.5.1. К вопросу оперативной оценки зон теплового поражения от пожара разлития.....	403
4.5.2. Численное моделирование пожаров разлития	417
4.6. К вопросу моделирования огненных шаров при горении углеводородного топлива	424
4.7. Моделирование аварий в газотранспортных системах, связанных с неустойчивой работой газоперекачивающего оборудования	425

ГЛАВА 5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТИРОВАНИЯ ЖИДКОСТЕЙ ПО СИСТЕМАМ ПРОТЯЖЕННЫХ КАНАЛОВ С ОТКРЫТЫМ РУСЛОМ И РЕКАМ

5.1. Постановка задачи.....	450
5.2. Построение математической модели неразветвленных каналов с открытым руслом	451
5.3. Построение математической модели сети разветвленных каналов с открытым руслом	460

5.4. Построение математической модели распространения тепла по сетям каналов с открытым руслом	477
5.5. Построение разностной модели разветвленных каналов с открытым руслом.....	489
5.6. Построение разностной модели сети разветвленных каналов с открытым руслом .	510
5.7. К вопросу исследования устойчивости разработанной разностной модели	520
5.8. О методе решения построенных разностных уравнений	525
5.9. Об одном подходе к моделированию транспортирования многокомпонентных жидкостей (метод «лагранжевых» частиц)	528
5.10. О практической реализации построенных математических моделей и алгоритмов	550
5.11. О построении гидравлических симуляторов систем каналов с открытым руслом	550
Заключение	551
Список литературы	552
 Приложение 1	
Численный анализ влияния остаточного напряженно-деформированного состояния труб на прочность магистральных трубопроводов <i>Алешин В.В.</i>	567
 Приложение 2	
К вопросу о расчетных оценках гидравлических сопротивлений трения в трубопроводах <i>Прялов С.Н., Селезнев В.Е.</i>	595
 Приложение 3	
Определение параметров инженерных моделей взаимодействия трубопровода с грунтом по результатам численного моделирования <i>Алешин В.В.</i>	628
 Приложение 4	
Критерий пластичности грунтов с оптимальной поверхностью текучести <i>Алешин В.В.</i>	636
 Приложение 5	
К вопросу о численном моделировании подземных участков протяженных трубопроводных систем <i>Алешин В.В.</i>	651
 Приложение 6	
Точное решение МКЭ задачи об осевом смещении трубопровода в грунте <i>Алешин В.В.</i>	654

Приложение 7

Предельное равновесие откосов «идеальных» грунтов <i>Алешин В.В.</i>	659

Приложение 8

Краткий обзор патентов в области обнаружения разрывов газопроводов <i>Бойченко А.Л., Селезнев В.Е.</i>	662

Приложение 9

Моделирование аварий в газотранспортных системах, связанных с неустойчивой работой газоперекачивающего оборудования <i>Комиссаров А.С., Прялов С.Н., Селезнев В.Е.</i>	672

Приложение 10

К вопросу о расчетных оценках значений коэффициента Шези <i>Прялов С.Н., Юлин А.В.</i>	683

Об авторах	693

Предисловие

Создать мир легче, чем понять его.

Анатоль Франс

Предлагаемая вниманию читателей монография содержит подробное изложение новой редакции концепции и базовых методов численного моделирования, представленных в достаточно строгой математической формулировке для анализа магистральных трубопроводных сетей и систем каналов с открытым руслом (рек). При этом следует отметить, что материал монографии носит выраженный авторский характер и отражает точку зрения авторов книги на существующие проблемы моделирования трубопроводных и канальных систем, включая современные пути их решения. В отличие от предшествующих публикаций [1–6], представленные здесь методы и математические модели подверглись существенным исправлениям и уточнениям. При этом их описание было дополнено и расширено новыми пояснениями, обоснованиями и результатами численных экспериментов. Также в настоящую монографию вошла значительная часть ранее не опубликованных в [1–6] моделей и математических методов анализа объектов трубопроводного транспорта, систем каналов с открытым руслом (рек) и процессов, протекающих в них.

Материал монографии практически не содержит обоснования актуальности решения рассматриваемых производственных проблем, изложения результатов критического сравнения предлагаемых методов их решения с аналогичными разработками и примеров практического применения методов моделирования. Такой подход к представлению материала объясняется тем, что информация по перечисленным аспектам уже была достаточно полно и детально приведена в монографиях [1–7]. Ее дублирование в данной книге представляется излишним.

Первая глава монографии посвящена формулировке и обоснованию новой редакции концепции численного моделирования трубопроводных систем и систем каналов с открытым руслом, включая малые и средние реки. В книге эта редакция называется расширенной концепцией моделирования трубопроводных сетей и систем каналов с открытым руслом. Пояснение положений расширенной концепции проводится на примерах методологии численной верификации проектных решений для магистральных трубопроводов и компьютерной аналитической системы управления целостностью трубопроводных сетей. Описание рассматриваемой концепции завершают сводный перечень ее ключевых положений и список главных направлений их практического применения.

Компоновка материала в первой главе позволяет читателю использовать ее заключительный раздел в качестве необходимой справочной информации при изучении последующих глав. Целесообразно также отметить, что основная часть материала данной главы публикуется впервые.

Материал первой главы дополняется и иллюстрируется одним приложением. В **приложении 1** представлены новые варианты формулировок задач учета влияния остаточного напряженно-деформированного состояния, возникающего в процессе изготовления труб, на прочность трубопроводов при их последующей эксплуатации, а также подходы к их решению в рамках принятой расширенной концепции.

Во **второй главе** описываются методы моделирования, положенные в основу построения и последующего применения высокоточных компьютерных газодинамических и гидравлических симуляторов для численного анализа и оптимального управления

полным спектром режимов транспортирования продуктов по протяженным разветвленным трубопроводным системам при нормальной эксплуатации и в аварийных ситуациях. Математические модели и алгоритмы их численного анализа, составляющие ядро указанных компьютерных симуляторов, прошли детальное тестирование, а также подтвердили в результате многолетней эксплуатации свою надежность и эффективность при решении многочисленных практических задач трубопроводного транспорта, энергетики и охраны окружающей среды.

Основное содержание второй главы дополняется и иллюстрируется одним приложением. В **приложении 2** рассматриваются практические аспекты получения расчетных оценок гидравлических сопротивлений трения в трубопроводах при высокоточном моделировании транспортирования газообразных и жидких продуктов по трубопроводным системам.

Содержание второй главы, по сравнению с монографиями [1, 2, 6], было обновлено на три четверти. При этом также были исправлены обнаруженные опечатки и недочеты в предшествующих (см. [1, 2, 6]) изложениях математических моделей и методов их численного анализа. Материал, представленный в приложении 2, ранее не публиковался.

В **третьей главе** излагаются методы и технология численного анализа прочности **магистральных** трубопроводных систем. Основное содержание данной главы представляет собой материал, опубликованный ранее в монографии [6]. Здесь этот материал **дан** в более сжатом, переработанном виде. Также добавлены результаты некоторых новых исследований. В целях полноты изложения Глава 3 дополняется **приложениями 3, 4, 5, 6 и 7**, содержащими новые редакции материала, опубликованного ранее в нескольких монографиях (см. [1, 3, 4, 5]).

В **четвертой главе** описываются современное состояние и пути развития методов и технологий численного моделирования аварийных ситуаций в трубопроводных системах. В этой главе подробно рассматриваются методы математического моделирования осколочного, токсического и теплового поражений при авариях на объектах ТЭК. Особое место в главе занимает изложение подходов к численному анализу механизмов возникновения и развития пожаров в трубопроводных системах, включая пожары разлива. Подробно описываются методы оценки устойчивости работы газоперекачивающего оборудования с точки зрения возможности возникновения помпажных явлений в трубопроводных системах компрессорных цехов и станций газотранспортных предприятий. Значительная часть материала четвертой главы (свыше 30%) ранее не публиковалась.

Основной материал четвертой главы дополняется и иллюстрируется двумя приложениями. В **приложении 8** представлен краткий критический обзор патентов в области обнаружения разрывов газопроводов. Данный обзор публикуется впервые. **Приложение 9** содержит новый материал по исследованию модельных помпажных явлений в численных экспериментах.

В **пятой главе** детально рассматриваются проблемы математического моделирования нестационарного неизотермического транспортирования многокомпонентных жидкостей по системам протяженных каналов с открытым руслом, малым и средним рекам, включая распространение жидких загрязняющих веществ и тепловое «загрязнение» рек предприятиями ТЭК. Здесь подробное описание математических моделей сопровождается изложением методов их численного анализа. Основной объем пятой главы составляет материал, который ранее не публиковался. Материал главы 5 дополняется новым **приложением 10**, в котором описываются способы численной оценки значений коэффициента Шези.

В немалой степени появление пятой главы объясняется часто встречающимися заблуждениями о полной завершенности теории в области численного моделирования течений в сетях протяженных каналов с открытым руслом (рекам). Однако, к сожалению, несмотря на многообразие публикаций по данному вопросу, найти математические

модели, адекватно описывающие течения многокомпонентных сред по протяженным разветвленным системам указанных каналов, и алгоритмы их численного анализа, пригодные для практического применения в компьютерных системах реального времени, практически невозможно. В пятой главе сделана попытка решения данной проблемы.

Нумерация рисунков, формул и таблиц внутри глав или приложений принимается сквозной. При этом внутри главы первая цифра номера (цифра до разделительной точки) означает номер главы, а внутри приложения первая цифра номера после индекса «П» – номер приложения.

Идея и структура настоящей монографии были сформулированы В.Е. Селезневим. Также им были осуществлены научная редакция и научное руководство подготовкой материалов, вошедших в монографию. Личный вклад авторов определен тем, что при написании этой монографии каждый участвовал в создании следующих глав, разделов и приложений: В.Е. Селезнев – глав 1, 2 (за исключением раздела 2.5.2), 4 (за исключением раздела 4.4.4), 5 (за исключением раздела 5.9), приложений 2, 8 и 9; В.В. Алешин – главы 3 и разделов 1.5, 4.2, 4.4.4, приложений 1, 3–7; С.Н. Прялов – глав 2 (за исключением разделов 2.6.1, 2.6.2, 2.6.4, 2.7.4, 2.8), 5, разделов 1.5, 4.3.1, 4.3.3, 4.7, приложений 2, 9 и 10. Если одни и те же главы, разделы или приложения указаны у нескольких авторов, то они написаны ими в соавторстве.

Авторы выражают искреннюю благодарность Ирине Алексеевне Скитевой за организацию и сопровождение работ по изданию монографии, а также Оксане Ивановне Зеленской и Юлии Александровне Молоковой за помощь в оформлении рукописи книги для опубликования. Авторы глубоко признательны коллективу Издательства ООО «МАКС Пресс» за радушное и высоко профессиональное сотрудничество при издании настоящей монографии.

г. Саров, июнь 2007 года

В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прялов

Список основных используемых сокращений

- АВО** – аппарат (-ы) воздушного охлаждения;
- АРД** – автоматический (-ие) регулятор (-ы) давления транспортируемого газа;
- АЭС** – атомная (-ые) электрическая (-ие) станция (-ии);
- ГДС** – высокоточный компьютерный газодинамический симулятор режимов транспортирования природного газа через трубопроводные сети газотранспортных предприятий (или фрагменты трубопроводных сетей газотранспортных предприятий);
- ГТС** – газотранспортная (-ые) система (-ы);
- ГПА** – газоперекачивающий (-ие) агрегат (-ы) на КС (КЦ);
- ГРС** – газораспределительная (-ые) станция (-ии);
- ГУ** – граничное (-ые) условие (-ия);
- ДП** – динамическое программирование;
- ЗКУ** – полуэмпирическая зависимость (формула) Кольбука–Уайта для расчета коэффициента гидравлического сопротивления трения в трубах;
- ЗФА** – эмпирическая зависимость (формула) Филоненко–Альтшуля для расчета коэффициента гидравлического сопротивления трения в трубах;
- КАИ** – компьютерный аналитический инструментарий;
- КС** – газоперекачивающая (-ие) компрессорная (-ые) станция (-ии);
- КПД** – коэффициент полезного действия;
- КПР** – концентрационные пределы распространения пламени (концентрационные пределы воспламенения) (ВКПР – верхний КПР, НКПР – нижний КПР);
- КПС** – высокоточный компьютерный прочностной симулятор критических участков **магистральных** трубопроводных сетей;
- КЦ** – газоперекачивающий (-ие) компрессорный (-ые) цех (-и);
- КЭ** – конечный (-ые) элемент (-ы);
- КЭ-анализ** – конечно-элементный анализ;
- КЭ-аналог** – конечно-элементный аналог;
- КЭ-модель** – конечно-элементная модель;
- КЭ-сетка** – конечно-элементная сетка;
- ЛЧМГ** – линейная (-ые) часть (-и) магистральных газопроводов;
- МВСК** – минимальное взрывоопасное содержание кислорода;
- МГ** – магистральный (-ые) газопровод (-ы);
- МДТТ** – механика деформируемого твердого тела;
- МКО** – метод контрольного (конечного) объема;
- МКР** – метод конечных разностей;

МКЭ	– метод конечных элементов;
МН	– магистральный (-ые) нефтепровод (-ы);
МТ	– магистральный (-ые) трубопровод (-ы);
НДС	– напряженно-деформированное (-ые) состояние (-я);
НП	– нелинейное программирование;
НПС	– нефтеперекачивающая (-ие) станция (-ии);
ПУ	– пылеуловитель (-и);
ПФА	– приближенная формула Альтшуля для расчета коэффициента гидравлического сопротивления трения в трубах;
СНАРН	– система (-ы) нелинейных алгебраических равенств и неравенств;
СНАУ	– система (-ы) нелинейных алгебраических уравнений;
СОДУ	– система (-ы) обыкновенных дифференциальных уравнений;
СП-метод	– модифицированный метод средних потоков;
ТГ	– технологический (-ие) газопровод (-ы) на КС (КЦ);
ТЭК	– топливно-энергетический комплекс;
ТЭС	– тепловая (-ые) электрическая (-ие) станция (-ии);
ТЭСА	– трубоэлектросварочный (-ые) агрегат (-ы);
УРС	– уравнение (-ия) состояния;
ЦН	– центробежный (-ые) нагнетатель (-и) ГПА;
SCADA-система	– Supervisory Control And Data Acquisition System.

Символьные обозначения, применяемые в формулах, оговариваются особо в каждой главе и каждом приложении настоящей монографии.

ГЛАВА 1

Новая редакция концепции численного моделирования трубопроводных сетей и систем каналов с открытым руслом

1.1. Базовый принцип высокоточного моделирования трубопроводных сетей и систем каналов с открытым руслом

Современные технологии проектирования, строительства, эксплуатации и реконструкции сетей **магистральных** трубопроводов необходимо дополнять высокоточными методами численного моделирования полного жизненного цикла конкретной трубопроводной системы. При этом в комплекс мероприятий, связанных со строительством трубопроводов, следует включать производство труб, а в реконструкцию трубопроводных сетей – ремонт дефектных участков трубопроводов. Такое дополнение указанных технологий гарантировано обеспечивает выработку научно обоснованных рекомендаций по повышению безопасности, экологичности и эффективности работы трубопроводной системы. Оно также позволяет провести детальную верификацию и аргументированную корректировку принимаемых технических решений до их воплощения в производственной практике проектирования, строительства или функционирования конкретной сети трубопроводов. Все вышесказанное распространяется на строительство и эксплуатацию промышленных систем каналов с открытым руслом¹.

Высокая точность моделирования в нашем случае ассоциируется с максимально возможным удовлетворением современным требованиям к достоверности оценок параметров функционирования трубопроводных и канальных систем, предъявляемым в отраслях топливно-энергетического комплекса (ТЭК), а также соответствующими надзорными организациями. Требование высокой точности на практике приводит к тому, что при создании моделей сетей трубопроводов и каналов с открытым руслом (рек) их разработчики должны стремиться минимизировать погрешность между соответствующими расчетными оценками и фактическими параметрами реальных физических процессов. Минимизация таких погрешностей должна осуществляться за счет повышения адекватности математических моделей в результате минимизации глубины необходимых упрощений и допущений, принимаемых при численном моделировании трубопроводных и канальных сетей. Здесь следует особо подчеркнуть, что при построении математических моделей повышенной точности и высокоэффективных методов их численного анализа необходимо соблюдать баланс между затратами на их разработку и ценностью информации, получаемой в результате их использования. Игнорирование данного условия может привести к необоснованным и некомпенсируемым затратам на моделирование трубопроводов или каналов с открытым руслом (рек).

Практическая реализация изложенных выше целей высокоточного моделирования трубопроводных и канальных систем в процессе их жизненного цикла базируется на по-

¹ Далее по тексту промышленные системы (сети) протяженных каналов с открытым руслом будут эпизодически называться канальными системами (сетями). Термин «канальные системы (сети)» при описании методов моделирования и вычислительных технологий будет также распространяться на природные системы малых и средних рек.

становке и численном решении серии сопряженных задач математической физики и математической оптимизации, т.е. на построении и численном анализе комплекса взаимосвязанных научно обоснованных математических моделей:

- процессов производства труб (для учета влияния остаточных напряжений и технологических дефектов, возникающих при изготовлении труб, на прочность трубопроводов при их последующей эксплуатации);
- функционирования трубопроводных и канальных сетей при нормальной эксплуатации, при реконструкции и в аварийных ситуациях (включая возможные террористические атаки);
- оптимального управления транспортированием продуктов по трубопроводным и канальным сетям при нормальной эксплуатации, при реконструкции и в аварийных ситуациях;
- технологий и аппаратных средств диагностики технического состояния трубопроводных сетей;
- технологий и способов конкретной реализации ремонта дефектных участков трубопроводов;
- вредных воздействий трубопроводных и канальных систем на людей и окружающую среду при нормальной эксплуатации и в аварийных ситуациях, и т.д.

Для достижения указанных целей в основу этих моделей должны быть положены адаптированные для описания функционирования трубопроводных и канальных систем базовые уравнения механики и электродинамики сплошных сред, современные алгоритмы нелинейного и динамического программирования, методы теории дифференциальных уравнений и оптимального управления. Взаимосвязь между моделями внутри комплекса целесообразно осуществлять путем взаимного формирования краевых условий и модификаций общей базы данных.

Под базовыми уравнениями механики и электродинамики сплошных сред здесь подразумеваются: система уравнений Максвелла; полная система уравнений механики жидкостей и газов; система дифференциальных уравнений движения деформируемого твердого тела; система уравнений Рейнольдса. При этом система уравнений Рейнольдса может быть дополнена уравнениями фильтрации и испарения жидкого топлива, уравнениями переноса лучистой энергии, формальными описаниями законов изменения скоростей химических реакций горения, включая сажеобразование.

Наряду с адаптацией перечисленных базовых моделей механики и электродинамики сплошных сред высокоточное моделирование трубопроводных и канальных систем предполагает построение гибридных оптимизационных моделей полного спектра работы данных сетей и алгоритмов их численного анализа. Эти модели и алгоритмы должны базироваться на теоретических положениях современных методов оптимального управления, нелинейной оптимизации и динамического программирования. Они будут использоваться для снижения затрат на производство в отраслях промышленности ТЭК и уменьшения сопутствующих вредных воздействий на окружающую среду.

При построении моделей жизненного цикла трубопроводных и канальных систем осуществляется математическая формализация:

- описания трубопроводных конструкций;
- описания топологии канальных систем с открытым руслом (рек);
- описания физических процессов, протекающих в сетях трубопроводов и системах каналов с открытым руслом (рек);
- технологий эксплуатации **магистральных** трубопроводных и канальных систем;

- режимов течения рек;
- описания внешних воздействий на трубопроводные и каналные сети (включая управляющие воздействия, воздействия третьих лиц и воздействия природных факторов);
- описания воздействий данных систем на людей и окружающую среду, и т.д.

Для математической формализации режимов функционирования конкретной трубопроводной или каналной системы обязательно следует использовать опыт ее эксплуатации, накопленный промышленным персоналом данного предприятия. С целью обеспечения полноты анализа возможных аварий в этой системе целесообразно методами математического моделирования исследовать работоспособность и эффективность применяемых для мониторинга ее состояния технологий и аппаратных средств технической диагностики.

1.2. Правило минимизации глубины необходимых упрощений и допущений

В отличие от традиционных методов расчета **магистральных** трубопроводов и сетей каналов с открытым руслом (см., например, [8–15]), здесь в основу перехода от базовых моделей механики и электродинамики сплошных сред к математическим моделям конкретных конструкций и физических процессов положено правило минимизации глубины необходимых упрощений и допущений. Это правило было впервые сформулировано и обосновано В.Е. Селезевым в конце прошлого века [16, 17]. Его использование на практике следует считать одним из основных теоретических принципов высокоточного моделирования трубопроводных и каналных систем в процессе их жизненного цикла, описываемого в настоящей монографии.

Целью применения этого правила является максимальное сохранение исходной теоретически и экспериментально обоснованной аппроксимации реальных физических процессов базовыми математическими моделями механики и электродинамики сплошных сред. Здесь следует отметить, что оно не требует использования при расчетах только трехмерных математических моделей. Высокоточные модели могут иметь различную размерность и при этом адекватно описывать исследуемые объекты и процессы в соответствии с конкретной постановкой практической задачи (см., например, [5, 6]).

Главными ограничениями при минимизации глубины необходимых упрощений и допущений в математических моделях и методах их анализа выступают:

- степень изученности физических процессов, протекающих в трубопроводных и каналных системах;
- существующий уровень развития численных методов, компьютерной техники и средств технической диагностики;
- полнота и доступность исходной информации, необходимой для моделирования;
- установленные сроки решения производственных задач для конкретной трубопроводной (канальной) системы или ограниченные сроки расследования причин реальной аварии, и т.д.

Наряду с требованием сохранения исходной аппроксимации реальных физических процессов базовыми математическими моделями механики и электродинамики сплошных сред, правило минимизации глубины необходимых упрощений и допущений накладывает ограничения на необоснованную усложненность модели конкретной тру-

бопроводной (канальной) системы или ее фрагментов. Это происходит в результате исключения из модели описаний отдельных составляющих физических процессов и/или элементов трубопроводных конструкций (участков каналов (рек)), незначительность влияния которых на общую физическую картину состояния и функционирования трубопроводных (канальных) систем в рамках решаемой производственной задачи является научно обоснованной. Практическая реализация вышесказанного будет наглядно продемонстрирована в последующих Главах и Приложениях.

К сожалению, среди достаточно широкого круга ученых и специалистов, занимающихся проблемами трубопроводного транспорта ТЭК, в настоящее время еще распространено мнение о применимости для детального анализа физических процессов, протекающих в трубопроводных сетях, математических моделей, построенных на базе существенных упрощений и необоснованных допущений (см., например, [8–10, 18–21]). Отсутствие полноты и адекватности описания исследуемых объектов в используемых методах математического моделирования, как правило, вуалируется утверждениями о том, что в моделях учтены основные физические особенности фактического состояния трубопроводных конструкций и режимов транспортирования продуктов по трубопроводам. Однако на практике, для реальных конструкций и реального спектра режимов функционирования трубопроводных сетей, применение таких моделей часто искажает сущность физических процессов и дает грубые (а в ряде случаев неприемлемые) оценки параметров состояния и работы трубопроводных сетей. Главная причина подобных ошибок заключается в том, что разработчики методов моделирования при решении практических задач игнорируют ограничения, накладываемые упрощениями и допущениями (принимаемыми при создании моделей и алгоритмов их анализа), неправомерно считая их несущественными. При таком подходе нарушаются границы допустимых областей применения упрощенных моделей, что приводит к ошибочным результатам численного анализа параметров жизненного цикла трубопроводов ТЭК. Более подробно вышеизложенные ситуации анализируются в монографии [7].

Для авторов настоящей монографии переход от упрощенных алгоритмов математического моделирования **магистральных** трубопроводных и канальных систем к адаптации и использованию базовых моделей механики и электродинамики сплошных сред был обусловлен рядом причин. Во-первых, сюда следует отнести накопленный ими в последнее десятилетие опыт решения производственных задач по повышению безопасности и эффективности функционирования **магистральных** трубопроводов и сетей промышленной канализации, а также опыт численного анализа распространения загрязняющих веществ по рекам (см., например, [1–7, 22–28]). Во-вторых, такой переход был стимулирован современным уровнем развития компьютерной техники, средств технической диагностики, аппаратно-программного оснащения центров управления трубопроводными (канальными) системами и современными достижениями в области численных методов математической физики. Третьей причиной можно считать существенное повышение требований к достоверности оценок параметров состояния и функционирования трубопроводных сетей, наблюдаемое с конца прошлого века в разных отраслях ТЭК. В качестве четвертой причины следует указать повышение требований к профессиональной подготовке специалистов ТЭК, что обусловило широкое внедрение в процесс их обучения компьютерных тренажеров исследовательского типа, адекватно имитирующих работу реальных сетей трубопроводов¹.

¹ Представленный список только иллюстрирует причины перехода от упрощенных алгоритмов математического моделирования промышленных трубопроводных (канальных) систем к адаптации и использованию базовых моделей механики и электродинамики сплошных сред, но, безусловно, не исчерпывает их.

1.3. Высокоточные компьютерные симуляторы функционирования трубопроводных и канальных систем

Компьютерная реализация перечисленных выше принципов моделирования трубопроводных и канальных систем приводит к построению и эксплуатации высокоточных компьютерных газодинамических (гидравлических) и прочностных симуляторов функционирования трубопроводных систем [5–7, 24, 29, 30], а также гидравлических симуляторов сетей протяженных каналов с открытым руслом (речных систем) [27].

Современные симуляторы функционирования трубопроводных или канальных систем по своей сути являются специализированными компьютерными аналитическими системами, обеспечивающими высокоточные расчетные оценки фактических распределений в пространстве и/или во времени параметров состояния и параметров полного спектра режимов работы сети трубопроводов или каналов. Указанные параметры можно представить в виде функциональных зависимостей от заданных воздействий на сеть и соответствующих краевых условий. При этом накладываются обязательные условия проведения адекватного моделирования:

- топологии (геометрии) трубопроводных конструкций (участков каналов (русел рек));
- течений продуктов в трубопроводах (по каналам с открытым руслом);
- режимов функционирования оборудования сети;
- динамики отборов продуктов потребителями;
- динамики притоков продуктов от поставщиков;
- технологий ремонта дефектных участков трубопроводов, и т.д.

Выполнение перечисленных условий должно обеспечиваться с учетом изменений состояния окружающей среды, возможности возникновения аварийных разрывов или течей трубопроводов, возможности несанкционированных сбросов загрязняющих веществ в каналы с открытым руслом (реки), вероятности аварии из-за вмешательства в работу сети третьих лиц (включая террористические атаки), и т.д.

Основными целями использования компьютерных симуляторов при решении производственных задач являются:

- численная верификация проектных решений для магистральных трубопроводов (МТ) или промышленных сетей каналов с открытым руслом;
- автоматизированный мониторинг текущего или анализ прогнозируемого состояния **магистральной** трубопроводной или канальной системы с точки зрения соблюдения технологических, эксплуатационных, конструктивных и иных ограничений для предотвращения возникновения или раннего обнаружения нештатных и аварийных ситуаций;
- получение численных оценок параметров работы промышленной сети трубопроводов или каналов с открытым руслом, необходимых для определения оптимальной, с точки зрения затрат и безопасности, стратегии управления технологическими процессами транспортирования продуктов, включая формирование прогнозных оценок параметров режимов транспортирования;
- ранжирование дефектных участков трубопроводной сети по срокам ремонта или замены;
- разработка и обоснование планов реконструкции трубопроводных (канальных) сетей;
- мониторинг, анализ и прогнозирование распространения загрязняющих веществ по

руслам рек;

- обоснование регламента проведения и анализ достоверности получаемых результатов технической диагностики трубопроводных систем, и т.д.

Компьютерный симулятор можно условно представить в виде композиции трех основных элементов. Его первым элементом является построенная из универсальных сегментов расчетная схема трубопроводной (канальной) системы, минимально отличающаяся от полной топологии реальной сети с учетом ее конструктивного исполнения (в случае системы рек – ее топографического расположения), размещения перекачивающего оборудования и запорно-вентильной арматуры, условий прокладки трубопроводов и т.д.

Второй элемент – это база данных, содержащая в виде специально форматованных записей исходную и оперативную информацию об изменяющейся во времени топологии сети, параметрах трубопроводов (каналов с открытым руслом), показателях технологических режимов, правилах управления транспортированием продуктов на конкретном предприятии ТЭК, свойствах загрязняющих веществ и т.д. Система управления этой базой данных при размещении и организации перечисленной информации проводит предварительную фильтрацию данных с целью снижения зашумленности, исключения необоснованного дублирования и сокращения количества содержащихся в ней ошибок.

Третьей частью компьютерного симулятора является программно-математический комплекс, оперирующий двумя первыми элементами. По своей сути программно-математический комплекс представляет собой расчетное ядро компьютерного симулятора. В качестве дополнительного (но необязательного) элемента симулятора в его расчетное ядро может быть встроена компьютерная интерфейсная оболочка. Ее применение, как правило, направлено:

- на имитацию работы реальных пультов управления в диспетчерских центрах предприятий, транспортирующих продукты по сетям трубопроводов, в привычной для специалистов ТЭК визуальной форме;
- на привязку динамической схемы распространения загрязняющих веществ по рекам к топографическим картам;
- на обеспечение контроля процесса обучения специалистов ТЭК с использованием компьютерных тренажеров исследовательского типа посредством организации автоматизированного рабочего места преподавателя;
- на визуализацию процесса численного прочностного анализа дефектных участков трубопроводов при оценке состояния сети специалистами ТЭК, и т.д.

В соответствии с материалом предшествующих Разделов расчетные ядра компьютерных симуляторов строятся в результате адаптации базовых математических моделей механики и электродинамики сплошных сред для описания физических процессов, протекающих в трубопроводных и канальных сетях при их функционировании, реконструкции и диагностике. Под такими моделями, прежде всего, подразумевается полная система уравнений механики жидкостей и газов, а также система уравнений равновесия деформируемого твердого тела. Адаптация базовых моделей производится с обязательным применением рассмотренного ранее правила минимизации глубины необходимых упрощений и допущений.

Результаты адаптации полной системы уравнений механики жидкостей и газов используются, например, в высокоточных компьютерных газодинамических симуляторах (ГДС) режимов транспортирования природного газа через трубопроводные сети газотранспортных предприятий (или фрагменты трубопроводных сетей газотранспортных предприятий) или в компьютерных гидравлических симуляторах распространения жидких загрязняющих веществ по рекам (см. Главы 2 и 5). Адаптация системы уравнений

равновесия деформируемого твердого тела применяется в высокоточных компьютерных прочностных симуляторах (КПС) критических участков **магистральных** трубопроводных сетей (см. Главу 3).

В результате эксплуатации симуляторов специалисты ТЭК получают количественную и качественную информацию о динамике изменения во времени основных параметров состояния объектов трубопроводных (канальных) систем и режимов транспортирования продуктов по ним. Наличие такой информации, ее оперативное сравнение с показаниями информационно-измерительных систем и средств технической диагностики, эксплуатирующихся на трубопроводных сетях, позволяет, например, специалистам ТЭК принимать технические решения для безопасного управления транспортированием продуктов, по обнаружению аварийных ситуаций, для ранжирования трубопроводов по срокам их ремонта или замены, и т.д.

Настройка компьютерных симуляторов на параметры реальной трубопроводной или канальной сети, как правило, производится до начала их работы, эпизодически в процессе их эксплуатации (как правило, с интервалом в один год), после проведения внутритрубой диагностики (или проходов очистительных скребков), после уточнения данных о топографическом расположении русла реки, после реконструкций **магистральной** трубопроводной или канальной системы. Этот процесс настройки, согласно сформулированным выше принципам высокоточного моделирования трубопроводных систем, должен быть автоматизированным, чтобы снизить влияние человеческого фактора на адекватность последующей работы симуляторов [31].

В большинстве случаев автоматизация настройки основана на подборе настраиваемых параметров симуляторов из условия обеспечения минимума максимальных невязок между расчетными оценками контрольных величин и их измеренными в натурных условиях значениями. Под контрольными величинами здесь понимаются параметры физических процессов транспортирования продуктов, смещения трубопроводов в грунте, изменения расположения русел рек, и т.д. С учетом вышесказанного, настройка компьютерных симуляторов на параметры реальной трубопроводной или канальной сети формализуется в виде постановки и решения классических минимаксных задач математической оптимизации [32–34].

ГДС и КПС, как правило, являются составными частями компьютерных аналитических систем управления целостностью трубопроводных сетей (см. Раздел 1.6). Они также могут использоваться в частных (специализированных) вычислительных технологиях анализа специальных случаев функционирования сетей трубопроводов (см. Раздел 1.4).

В настоящей монографии понятие высокоточного компьютерного симулятора функционирования трубопроводных (канальных) систем является ключевым. Необходимо отметить, что построение и широкое применение таких симуляторов в производственной практике трубопроводного транспорта следует считать одним из основных способов решения практических задач высокоточного моделирования трубопроводных систем в процессе их жизненного цикла. Поэтому здесь целесообразно более детально познакомиться с типовой архитектурой высокоточных компьютерных симуляторов. Для сокращения объемов данного Раздела (без потери общности рассуждений) рассмотрение архитектуры будет проводиться на примере ГДС.

Типовая архитектура ГДС была впервые предложена В.В. Мотлоховым и В.Е. Селезевым в 2001 году (см., например, [2]). С тех пор она хорошо зарекомендовала себя при построении ГДС для различных **магистральных** сетей трубопроводов ТЭК [5–7, 25, 26, 30, 35].

С точки зрения методологии решения диспетчерских задач газотранспортного предприятия, ГДС реализует вычислительные возможности высокоточного математического моделирования трубопроводных сетей и обладает относительной простотой применения

при решении производственных задач. Для устойчивой и стабильной эксплуатации симулятора в режимах «offline», «online» и «real time»¹ необходимо обеспечить согласованную работу ГДС и всей компьютерной системы сбора информации и контроля режимов транспортирования газа (как правило, эти функции на газотранспортном предприятии выполняет SCADA-система (Supervisory Control And Data Acquisition System)). Глубина и качество такой согласованности в полной мере проявляются при использовании ГДС в режимах «online» и «real time», когда исходные данные для численного анализа параметров транспортирования газа по газотранспортной системе (ГТС) поступают в симулятор в режиме реального времени непосредственно со SCADA-системы.

В процессе своей эксплуатации ГДС никак не должен влиять на работоспособность SCADA-системы, а также других компьютерных систем и программ, применяющихся в диспетчерском центре конкретного газотранспортного предприятия. Таким образом, на стадии разработки ГДС необходимо учесть особенности конкретной компьютерной среды, в которой он будет эксплуатироваться.

Для построения архитектуры симулятора целесообразно заранее классифицировать основные группы операций, которые диспетчеры будут выполнять при использовании ГДС. Как правило, такой классифицированный список обобщенных операций имеет вид (см. также [36]):

- ввод, редактирование, анализ корректности и сохранение в базе данных топологий и параметров линейных частей магистральных газопроводов (ЛЧМГ), газораспределительных станций (ГРС) и газоперекачивающих компрессорных станций (КС);
- постановка производственной задачи, требующей численного решения с применением ГДС;
- задание исходных данных и краевых условий для численного решения поставленной задачи;
- выбор параметров решения этой задачи (глубина численного анализа, требуемая точность вычислений и т.д.);
- управление процессом ее решения и оперативный контроль за его ходом, включая анализ корректности вычислений и обработку возможных ошибок;
- вывод результатов расчета в виде графиков, таблиц, отчетов, форматированных файлов (для визуализации и анализа результатов счета с применением сторонних программных продуктов).

Для ввода и редактирования описаний основных сегментов трубопроводной сети га-

¹ Здесь под режимом «offline» подразумевается проведение расчетов газодинамических параметров транспортирования природного газа по архивным данным SCADA-системы или по данным, подготовленным пользователем самостоятельно. Ограничения на время проведения расчетов с использованием ГДС в режиме «offline» не накладываются. В режимах «online» и «real time» текущие и прогнозные расчеты проводятся по данным SCADA-системы, поступающим в ГДС в режиме реального времени. При этом в режиме «real time» (в отличие от режима «online») процесс получения текущих и прогнозных оценок в ГДС должен опережать фактическое протекание физических процессов во времени в реальной трубопроводной системе. В режиме «real time» диспетчер имеет возможность не только анализировать результаты работы ГДС, но и вырабатывать или согласовывать (в случае эксплуатации ГДС в режиме «советчика») своевременные управляющие воздействия на трубопроводную сеть. Полнота реализации режима «real time» в системе «диспетчер – ГДС» на практике зависит от размеров трубопроводной сети, используемой компьютерной техники, применяемой SCADA-системы, профессиональной подготовки диспетчера, его психофизического состояния, и т.д. Режимы «offline» и «online», как правило, применяются при настройках ГДС на параметры реальной газотранспортной сети, расследованиях аварий, отработки технологий транспортирования газа, и т.п. Режим «real time» для ГДС является основным режимом при оперативном управлении транспортированием газа. Можно предположить, что с последующим развитием компьютерной техники режим «online» будет исключен из производственной практики применения ГДС.

зотранспортного предприятия (трубы, запорно-вентильная арматура, автоматические регуляторы давления транспортируемого газа (АРД), газоперекачивающие агрегаты (ГПА) и т.д.) в ГДС предусмотрены редакторы топологий ЛЧМГ и КС (или газоперекачивающих компрессорных цехов (КЦ)). Информация о характеристиках и топологии сегментов ГТС заносится и хранится в базе данных текущей задачи. Поставщиками исходных данных о параметрах сегментов ГТС служат проектная документация, результаты натурных измерений, соответствующая справочная информация, географические информационные системы. Информация о параметрах ГТС на конкретном газотранспортном предприятии может храниться как на электронных носителях, так и в виде твердых копий. Симулятор должен обеспечивать ввод данных независимо от формы их хранения.

Для сокращения времени ввода исходных данных при эксплуатации ГДС необходимо предусмотреть возможность использования уже сформированной в других программных пакетах и редакторах информации (т.е., ГДС должен поддерживать ввод информации через текстовые файлы, файлы существующих форматов баз данных и т.п.). Форматы ввода исходных данных и вывода результатов расчета в ГДС должны также ориентироваться на общеизвестные форматы для наибольшей совместимости и простоты использования ГДС в комплексе со сторонними программными продуктами.

Объем исходных данных должен удовлетворять требованиям, предъявляемым к корректности постановки производственной задачи и точности результатов ее решения. Расчетное ядро ГДС в этом случае определяет правила и накладывает ограничения на подробность и способы описания сегментов, из которых состоит ГТС.

В процессе проектирования архитектуры ГДС необходимо проведение анализа сложности его программной структуры с целью нахождения способов разделения ГДС на более простые программные подсистемы (библиотеки): препроцессор, постпроцессор, управляющие модули, решатели, и т.п. Современным способом такого разделения на подсистемы (библиотеки) является объектно-ориентированное проектирование архитектуры ГДС. Такое проектирование в настоящее время считается более прогрессивным по сравнению с традиционными методами потоков данных и структурного проектирования [37]. Объектная декомпозиция уменьшает размер программного продукта за счет повторного использования общих механизмов выполнения идентичных операций, что приводит к существенной экономии времени на компьютерную реализацию ГДС. При этом в ГДС должны быть воплощены основные черты объектных моделей [37]: абстрагирование, инкапсуляция, модульность, иерархия, типизация, параллелизм, сохраняемость, устойчивость.

Одним из основных приемов при разработке архитектуры современных симуляторов функционирования трубопроводных систем является создание отдельных библиотек подпрограмм расчетного ядра ГДС и интерфейса пользователя ГДС [2]. В данном случае расчетное ядро ГДС представляет собой множество компактных библиотек подпрограмм, каждая из которых на определенном уровне абстракции реализует составляющие математических моделей и алгоритмов их численного анализа. Это дает значительные преимущества при компьютерной реализации ГДС по сравнению с архитектурой, в которой все модули ГДС объединены в одну программу. Вот неполный список таких преимуществ: отдельно взятая библиотека может поддерживаться и модифицироваться разными разработчиками; существует возможность использования разных версий библиотек; имеется возможность разработки и относительная легкость интеграции в ГДС новых библиотек; возможность использования имеющихся библиотек в разных ГДС, и т.д.

Язык программирования для компьютерной реализации ГДС, в принципе, не важен. Однако, желательно использовать языки, поддерживающие объектно-ориентированное программирование, управление базами данных, сетевое программирование, интернет-

программирование и построение удобного графического интерфейса. К таким языкам программирования, прежде всего, следует отнести «C++» [38].

В соответствии с представленным выше классифицированным списком обобщенных операций, которые выполняет диспетчер газотранспортного предприятия при работе с ГДС, компьютерный симулятор можно разделить на следующие компоненты (с точки зрения его компьютерной реализации):

- редакторы топологии ЛЧМГ и КС (препроцессоры) – это построители расчетных схем ЛЧМГ, индивидуальных КС (КЦ) и ГТС в целом;
- управляющий модуль (препроцессор), отвечающий за постановку задачи, задание исходных данных и краевых условий, выбор модели и метода ее численного анализа, сохранение исходных данных и результатов расчета, и т.д.;
- расчетное ядро (процессор в виде набора решателей);
- постпроцессоры для обработки и интерпретации результатов расчетов.

Редакторы топологии ЛЧМГ сочетают в себе возможности различного (графического, текстового, табличного, файлового и т.д.) ввода информации. Эти редакторы, как правило, обладают:

- дружественным (по отношению к пользователю) интерфейсом;
- простотой ввода исходных данных (представление расчетных схем ГТС в виде связанных двумерных графов, имеющих привычный для диспетчеров вид, с помощью набора виртуальных инструментов, входящих в интерфейс ГДС);
- возможностью коррекции, сохранения, экспорта и импорта исходных данных;
- возможностью предоставления собранной информации о любом объекте, включенном в топологию ГТС, в удобном для пользователя виде.

Реальная ЛЧМГ в данных редакторах трансформируется пользователем в расчетные схемы, содержащие топологическую информацию в виде связанных двумерных графов (рис. 1.1). Отдельными элементами таких графов служат аналоги реальных технологических объектов ГТС, включенные во встроенную библиотеку элементов ЛЧМГ: участки трубопроводов; запорно-вентильная арматура (краны, заслонки и т.п.); АРД; узлы отборов на ГРС и др.

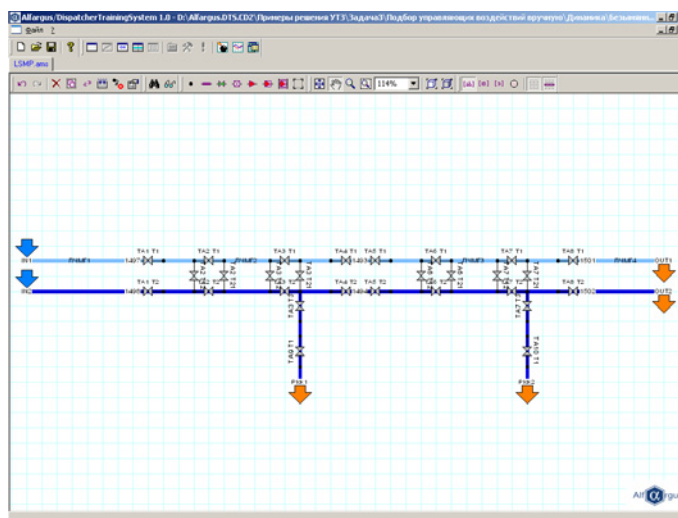


Рис. 1.1. Пример расчетной схемы ЛЧМГ, построенной в редакторе топологии ГДС

С помощью виртуального инструментария редактирования (наборов специальных команд) данные элементы объединяются на рабочем столе редактора топологий в технологические схемы ЛЧМГ (топологии ЛЧМГ). При построении и сохранении топологий в редакторах используется векторный способ хранения информации. Это позволяет не только создавать множество элементов топологий ГТС (ограниченное только возможностями вычислительной техники), но также графически задавать пространственные связи между ними. Графические связи используются редактором ГДС при обработке исходных данных для построения расчетной схемы моделируемой трубопроводной сети.

Редакторы топологии ЛЧМГ, как правило, позволяют создавать расчетные схемы любой степени сложности. Архитектура данных редакторов построена таким образом, что введение нового типа объекта не требует существенной модификации ГДС и не является трудоемкой операцией. Некоторые редакторы топологии ЛЧМГ предоставляют возможность автоматизированного дополнения пользователем существующей библиотеки элементов ЛЧМГ новыми объектами, а также создания специальной пользовательской библиотеки объектов с функциями импорта и экспорта данных.

Каждому типу объекта расчетной схемы соответствует набор свойств (атрибутивная информация), необходимый для построения математической модели, например: координаты границ участков ЛЧМГ; диаметр трубы; толщина стенок трубы; толщина изоляции; высота над уровнем моря; материал, из которого изготовлен участок трубы; тип изоляции; состояние внутренней поверхности трубы; тип крана; время, затрачиваемое на полное изменение состояния крана, и т.д. Задание этих параметров в редакторах осуществляется с помощью различных способов ввода информации: графического, текстового, табличного и т.д. Часть параметров формируется на основании информации, уже содержащейся в других программных пакетах и редакторах (форматированные файлы, базы данных) (рис. 1.2).

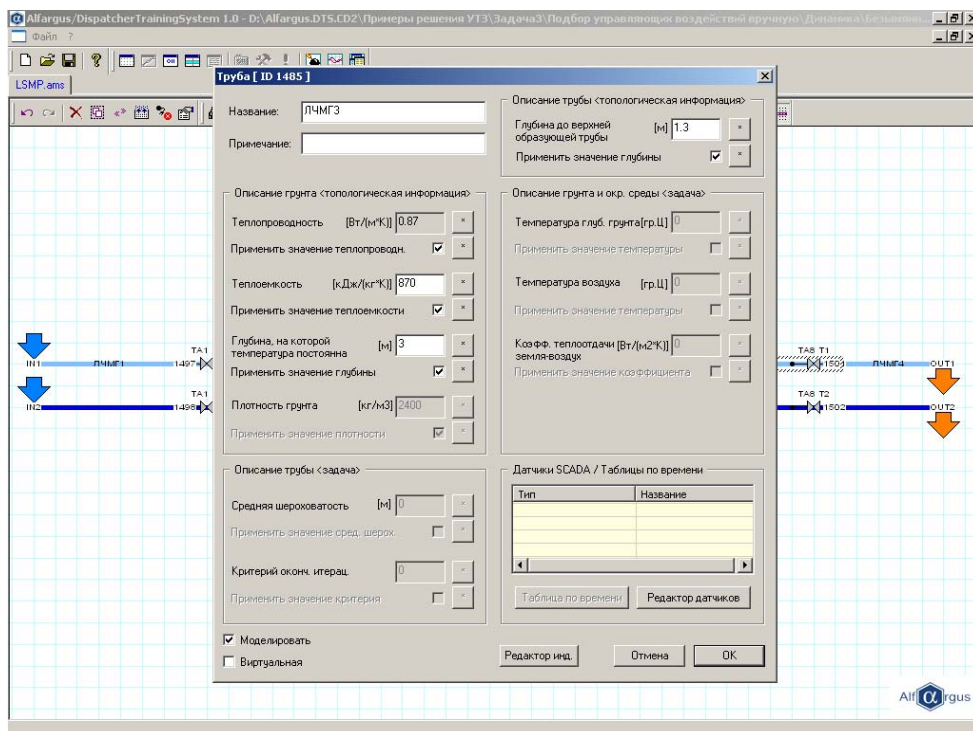


Рис. 1.2. Пример задания параметров ЛЧМГ в редакторе топологии ГДС

Как уже отмечалось выше, исходные данные о параметрах объектов ЛЧМГ берутся из проектной документации, результатов натурных измерений, соответствующей справочной информации. Константные параметры заносятся в раздел базы данных, содержащий физические константы и предопределенные свойства объектов ЛЧМГ (рис. 1.3).

Pipe isolation		
Number	Isolation type	Thermal conductivity
0	Поликен_955-25	0.25
1	Заводская	0.15

Pipe material		
Number	Steel mark, manufacturer, TU	Thermal conductivity
0	низколегированные и углеродистые стали	46.70

Рис. 1.3. Фрагмент базы данных с константами и предопределенными свойствами объектов ЛЧМГ в ГДС

Информация об объектах построенной расчетной схемы сохраняется в базе данных (рис. 1.4). При этом обеспечивается возможность коррекции данных, а также исключается их необоснованное дублирование, обеспечивается защита файлов данных и обработка ошибок ввода (в том числе и на основе заложенной в ГДС информации о свойствах реальных объектов газотранспортной сети).

Pipeline segments								
Number	Begin(m)	End(m)	Diam(mm)	Thick(mm)	Isolat(mm)	Material	Isolation	Type
1	0.00	10.00	1200.00	19.00	2.00	1	1	2
2	10.00	100.00	1400.00	19.00	2.00	2	2	1
3	100.00	349.00	1200.00	19.00	2.00	2	3	1
4	349.00	515.00	1200.00	21.00	2.00	1	1	3
5	515.00	1001.00	1200.00	21.00	2.00	1	2	2
6	1001.00	11345.00	1200.00	19.00	4.00	1	2	3

Рис. 1.4. Фрагмент базы данных сегментов ЛЧМГ в ГДС

Многоуровневый обработчик ошибок в редакторе топологий осуществляет контроль над действиями пользователя и включает в себя:

- обработчик случайных ошибок построения объектов и установки их атрибутов;
- обработчик ошибок, связанных с нормативными правилами и ограничениями на построение и эксплуатацию реальной ГТС;
- обработчик ошибок, связанных с правилами и ограничениями на построение топологии, обусловленными используемыми математическими моделями.

В ГДС предусматривается многопользовательский режим работы, т.е. разным категориям пользователей предоставляется различный уровень доступа и, соответственно, набор функциональных возможностей по применению ГДС (рис. 1.5).

Пользователь с правами администратора ГДС может производить широкий спектр действий: создавать расчетные схемы; редактировать их; изменять атрибутивную информацию и т.п.

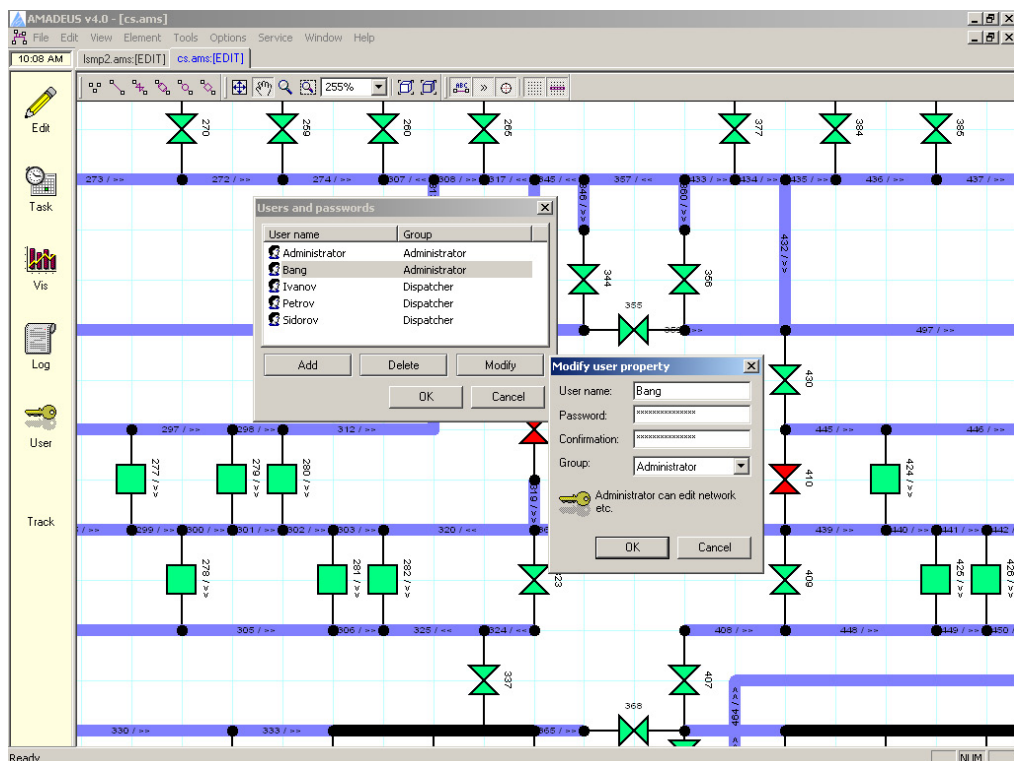


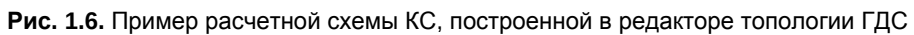
Рис. 1.5. Пример поддержки многопользовательского режима работы в ГДС

Пользователь с ограниченными правами (например, начинающий диспетчер газотранспортного предприятия) не может: построить новую расчетную схему газотранспортного предприятия (или ее фрагмент); изменить уже существующую схему; изменить технологические свойства объектов, и т.д.

Такое разделение пользователей по уровню доступа к информации, содержащейся в ГДС, и по уровню доступа к функциональным возможностям позволяет защитить ГДС от неквалифицированного вмешательства, последствия которого могут быть катастрофическими для корректного функционирования ГДС.

Интерфейс редакторов ЛЧМГ в ГДС может быть настроен в соответствии с требованиями индивидуального пользователя по следующим параметрам: набор и расположение панелей и кнопок управления ГДС; цветовая гамма окружения и объектов топологии на рабочем столе редактора; шрифты; размеры, расположение и количество окон; состав диалогов «специалист ТЭК – ГДС»; пути к файлам данных и результатов; список значений параметров в ГДС, задаваемых по умолчанию; используемые единицы измерений, и т.д.

Для построения топологии КС в ГДС используются интерактивные редакторы расчетных схем КС. Современные КС состоят из одного или нескольких КЦ, которые в свою очередь включают различные группы ГПА, пылеуловители (ПУ), аппараты воздушного охлаждения (АВО), цеховые краны, технологические трубопроводы (ТГ). Соответственно, графические примитивы – аналоги этих технологических объектов – являются элементами графа расчетной схемы КС. С помощью графического инструментария редактирования (специального набора команд) данные примитивы объединяются в расчетную схему КС (рис. 1.6). При этом осуществляются контроль правильности построения, проверки корректности применения моделей объектов КС и т.п.



The screenshot displays the Scada.scs - GD5-AMADEUS v4.4 software interface. The top menu bar includes File, GTS, Tools, and Help. Below the menu is a toolbar with various icons for file operations and navigation.

The main workspace shows a process diagram for 'Hala 1'. It includes components like AA001, AA002, B21, B45, B46, B32, and a central compressor group labeled 'Hala 1'. The diagram uses yellow lines for piping and green diamonds for valves. A red 'X' marks a specific valve in the diagram.

On the right, the 'Hala 1-4 compressors group property' window is open. It has tabs for STATION, COMPRESSOR, STAGE 1, and STAGE 2. The STATION tab is active, showing a list of compressors (CS 01 to CS 04) and a selection for 'Hala 1:4'. The COMPRESSOR tab shows data for High and Normal precision, including Revolutions (Revol), Inlet Pressure (Inlet P), Outlet Pressure (Outlet P), Inlet Temperature (Inlet T), and Outlet Temperature (Outlet T). The STAGE 1 tab shows data for 'KS01N OT81X' and 'KS01N OT82X'.

At the bottom, a graph titled 'Stage 1 compressors revolutions' plots 'Rev [rpm]' against 'TIME [d/m/y h:m:s]'. The graph shows a fluctuating line with data points labeled with numbers. The y-axis ranges from 4793 to 4807 rpm, and the x-axis shows time from 30/04/2003 04:57:00 to 05:55:00.

Below the graph, there is a table with columns 'No', 'TIME [d/m/y h:m:s]', 'Rev [rpm]', and 'Append'. The table contains 9 rows of data. To the right of the table are buttons for 'Append', 'Insert', 'Delete', 'Delete All', 'Load...', 'Save...', 'Cancel', and 'OK'. At the bottom right, there are buttons for 'Cancel' and 'OK', and a section labeled 'I02 I03 I04 I05' with red 'X' marks.

The status bar at the bottom left indicates 'Current SCADA: 30/04/2003 05:54:00'.

Рис. 1.7. Пример задания параметров работы ЦН в редакторе топологии КС

Для численного анализа параметров работы реальной КС с помощью редакторов топологии компрессорной станции задаются следующие характеристики и технологические параметры оборудования КС: типы и характеристики цеховых кранов; параметры ТГ; типы и характеристики ГПА; характеристики АВО; характеристики ПУ. Помимо этого вводится информация: об условиях транспортирования природного газа на границах КС; о положениях (состояниях) цеховых кранов; о состоянии оборудования КС, и т.д. Эта информация заносится в базу данных текущей задачи.

Проведение расчетов в ГДС осуществляется при помощи специального управляющего модуля ГДС. Он предоставляет пользователю следующие функциональные возможности по численному анализу и оптимизации параметров транспортирования газа через всю трубопроводную сеть газотранспортного предприятия или ее фрагмент:

- выбор и настройка параметров метода численного решения поставленной задачи (рис. 1.8);

NAME	COEFF
V.P.MORAVE 1	1500.000000
V.P.MORAVE 2	1700.000000
V.P.MORAVE 3	1700.000000
PLAVECKI PETER	10.000000
BRODSKE	400.000000
KUCHYNA	500.000000

Рис. 1.8. Пример диалогового окна при постановке задачи в ГДС

- выбор степени точности и полноты решения поставленной задачи;
- задание краевых условий в виде стартового состояния ГТС и зависимостей параметров транспортирования газа от времени на границах анализируемой системы;
- задание состояния ГПА и конфигурации ГТС, положения кранов на крановых площадках ЛЧМГ, цеховых и редуccionных кранов на КС в виде зависимостей от времени и т.д.;
- автоматизированный ввод данных из внешнего источника (например, из файла, содержащего фактические показания SCADA-системы (рис. 1.9));

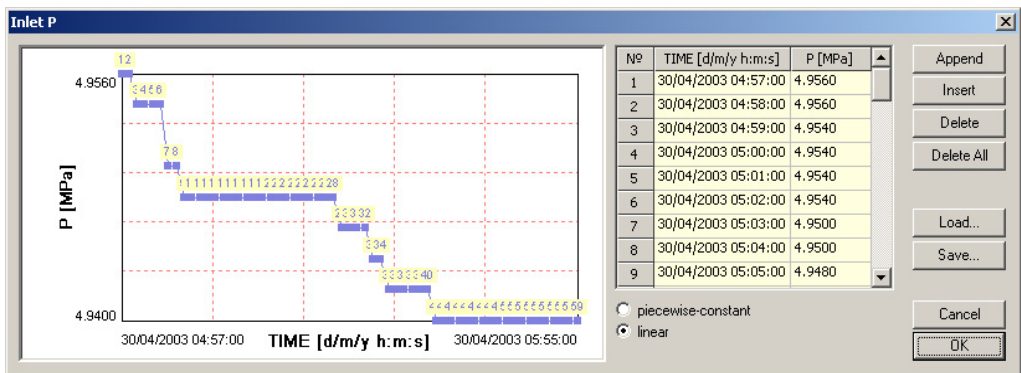


Рис. 1.9. Пример зависимости давления газа на входной границе ГТС от времени, полученной по показаниям SCADA-системы

- выбор фрагментов ГТС, для которых требуется проведение численного анализа;
- управление процессом расчета в интерактивном режиме, и т.д.

Управляющий модуль ГДС также осуществляет:

- контроль корректности ввода данных и постановки условий расчета (посредством многоуровневых фильтров-обработчиков ошибок);
- выдачу рекомендаций по выбору метода расчета в зависимости от постановки задачи и проверку его корректности;
- проверку предустановок и настроек ГДС (входные файлы, пути, конфигурации и т.д.) (рис. 1.10);

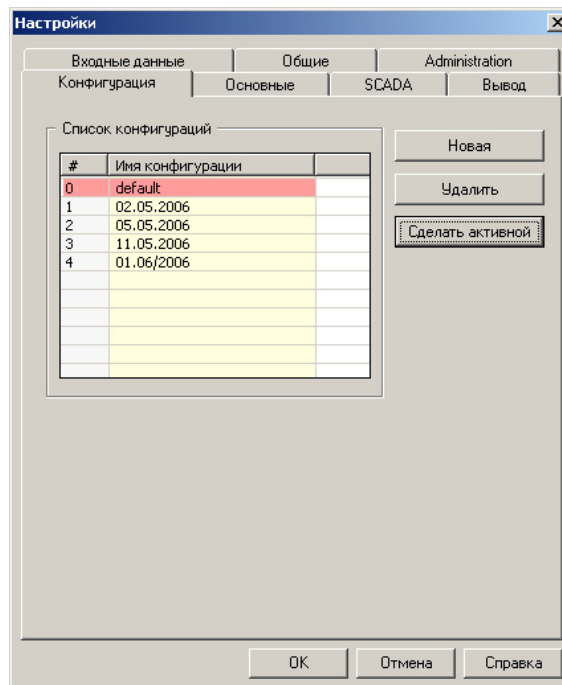


Рис. 1.10. Пример диалогового окна настроек ГДС

- контроль времени процесса решения задачи;
- индикацию процесса счета;
- обработку ошибок, возникающих в процессе расчета (вывод классифицированных сообщений, рекомендаций, отладочной информации);
- проведение рестартов в случае сбоев и запись контрольных точек в процессе проведения расчетов, и т.д.

Основную группу пользователей ГДС представляют диспетчеры газотранспортных предприятий, поэтому в ГДС вводятся следующие дополнительные возможности: автоматизированное ведение диспетчерского журнала; автоматическая запись фискального протокола действий диспетчера при управлении транспортированием газа; индикация возникновения предаварийных ситуаций и собственно аварий на газопроводе; использование ГДС в качестве тренажера для обучения диспетчера навыкам управления процессом транспортирования газа в нештатных и аварийных ситуациях, возникающих на газопроводах, для локализации их последствий и восстановления режима нормального функционирования газотранспортной сети [7, 39]. Для упрощения эксплуатации ГДС интерфейс при управлении процессом численного моделирования транспортирования газа, как правило, имитирует работу реальных пультов управления в диспетчерских центрах газотранспортных предприятий в привычной для диспетчеров форме.

Управляющий модуль ГДС при численном анализе параметров транспортирования газа по ЛЧМГ обеспечивает формирование исходных данных (путем их выделения из базы данных) и задание краевых условий (рис. 1.11). Пример диалогового окна в управляющем модуле ГДС при выборе метода расчета параметров транспортирования газа по ЛЧМГ представлен на рис. 1.12. Пример диалогового окна в управляющем модуле ГДС, выводимого на экран в процессе решения задачи, показан на рис. 1.13.

Управляющий модуль ГДС при численном анализе транспортирования газа через индивидуальную КС предоставляет пользователю возможность решения следующих задач: проведение численного анализа параметров заданного пользователем стационарного или неустановившегося режима транспортирования газа через КС; оптимизация установившихся и неустановившихся режимов транспортирования газа через КС с заданной конфигурацией КС; оптимизация установившихся и неустановившихся режимов транспортирования газа через КС с выбором конфигурации КС. Необходимые для расчета исходные данные подготавливаются с помощью редактора топологии КС.

Численный анализ и оптимизация транспортирования газа через ГТС газотранспортного предприятия объединяет возможности ГДС по построению, постановке задачи и расчету ЛЧМГ и индивидуальной КС. При этом управляющий блок ГДС предоставляет возможность диспетчеру проводить высокоточный газодинамический анализ и высокоточную оптимизацию установившихся и неустановившихся режимов транспортирования природного газа через газотранспортную сеть. Весь спектр решаемых с применением ГДС задач будет подробно представлен в Главах 2 и 4. Пример диалога «специалист ТЭК – ГДС» при численном анализе параметров транспортирования газа через газотранспортную сеть с помощью ГДС в режиме «real time» представлен на рис. 1.14.

Результаты численного анализа режимов транспортирования газа, проведенного с использованием ГДС, необходимо представить в удобной, наглядной для восприятия диспетчерами, форме. При этом вывод результатов расчетов должен быть адаптирован к привычному для диспетчера газотранспортного предприятия виду (см. выше). Следовательно, должна существовать возможность задания диспетчером персонального набора и формата вывода данных для создания отчетов и таблиц, диспетчерских журналов.

Для наглядного представления результаты численного анализа и оптимизации параметров транспортирования газа можно отображать в графическом виде непосредственно

на изображении расчетной схемы с помощью специальных значков, эпюр, текстовой информации и т.п. В этом случае целесообразно показывать изменение конфигурации системы во времени (повороты кранов, переключения ГПА, включение/выключение нитки ЛЧМГ), направление течения газа по отдельным элементам сети, указать места разрывов и утечек природного газа. В комплексе с таблицами и графиками такой способ представления расчетной информации (рис. 1.15) является одним из лучших. Для комфортной и эффективной работы диспетчера интерфейс ГДС должен быть эргономичным и гибким.

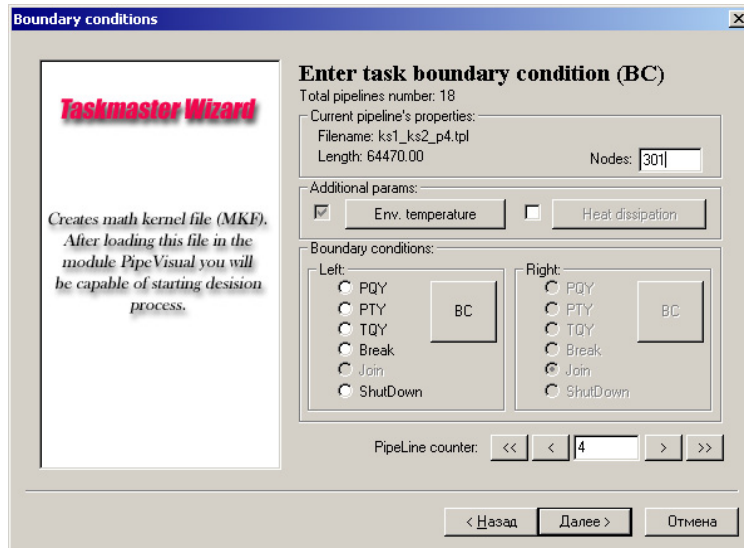


Рис. 1.11. Пример диалогового окна в ГДС при задании краевых условий для расчета течений газа в ЛЧМГ

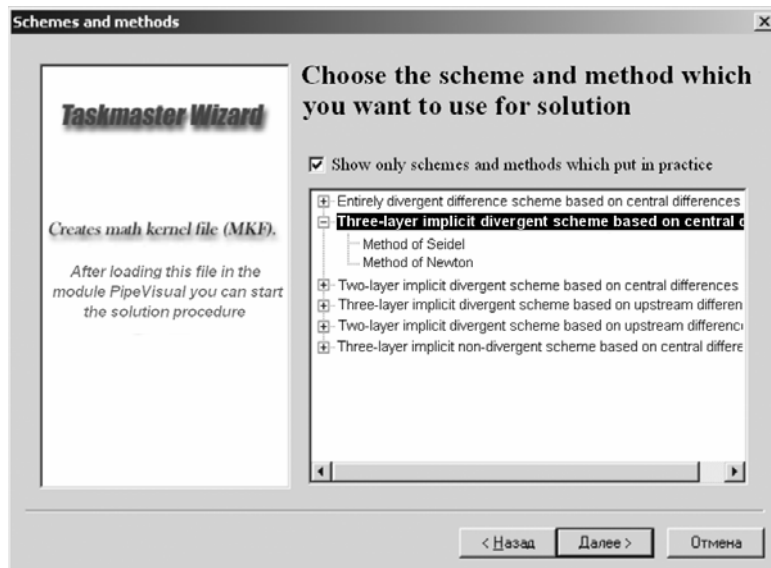


Рис. 1.12. Пример диалогового окна в ГДС при выборе метода расчета параметров транспортирования газа по ЛЧМГ

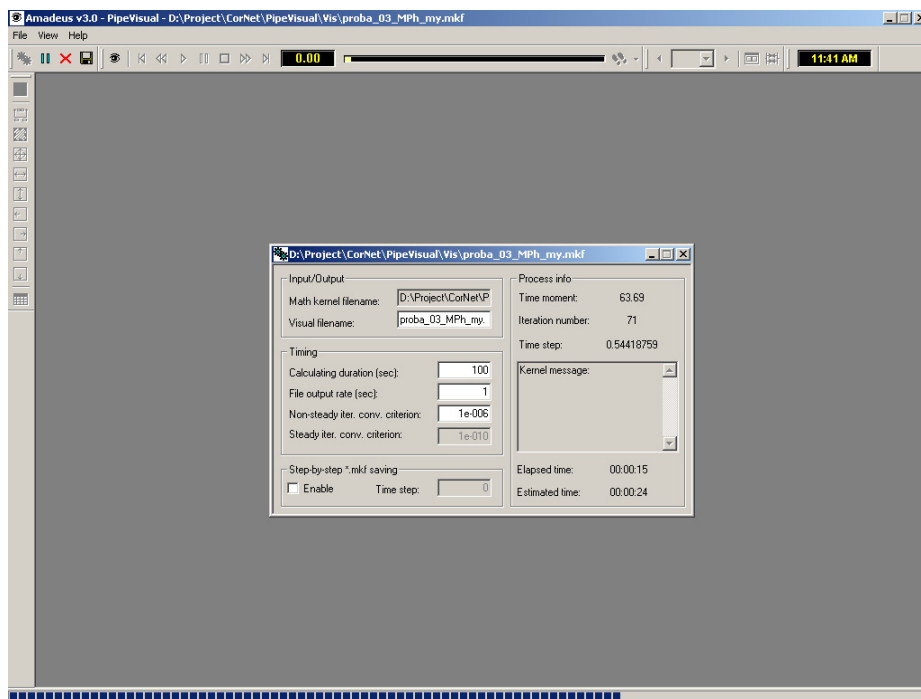


Рис. 1.13. Пример диалогового окна в ГДС при проведении расчета параметров транспортирования газа по ЛЧМГ

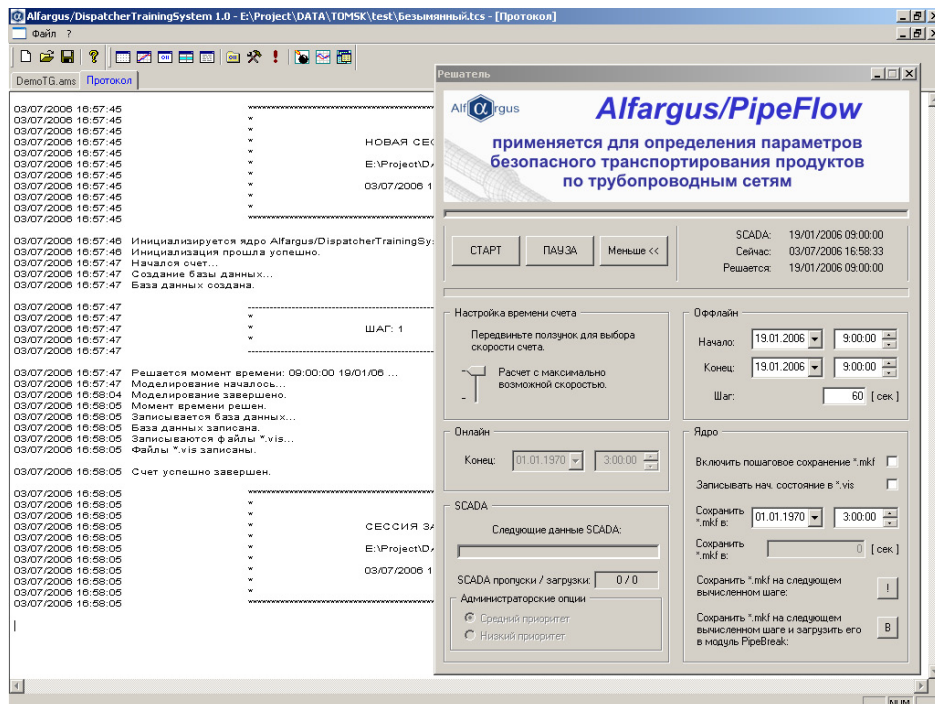


Рис. 1.14. Пример диалогового окна в ГДС при численном анализе параметров транспортирования газа через газотранспортную сеть в режиме «real time»

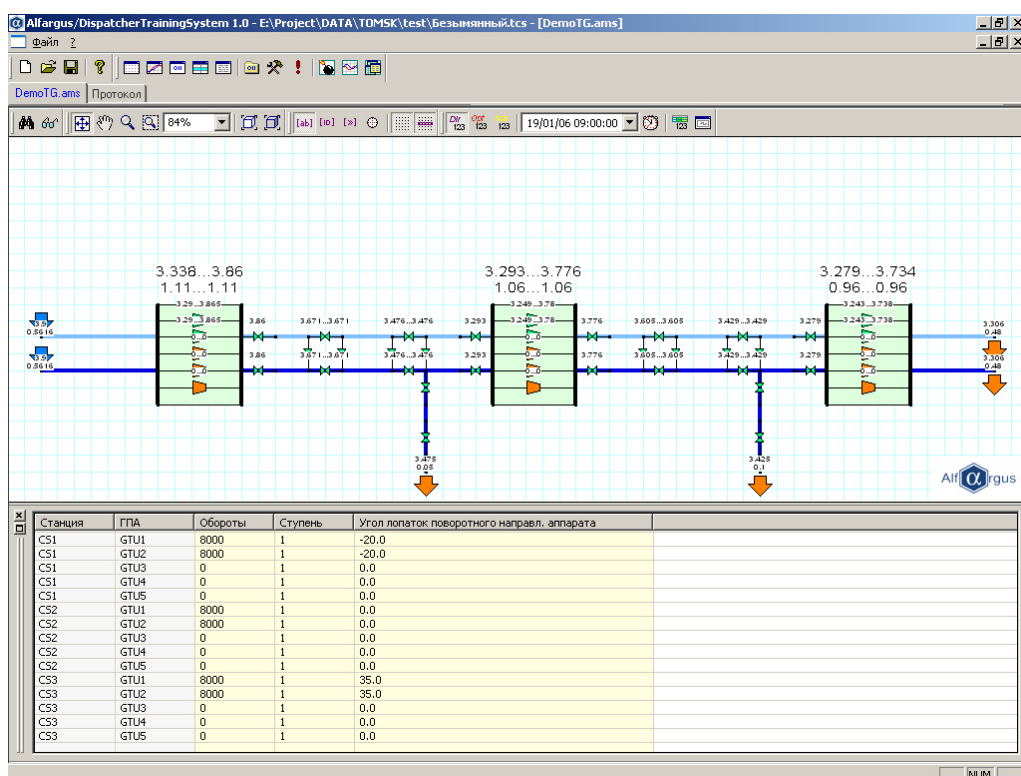


Рис. 1.15. Пример представления в ГДС результатов численного анализа параметров транспортирования газа через газотранспортное предприятие

После завершения численного анализа параметров функционирования ГТС постпроцессоры ГДС в автоматизированном режиме проводят предварительную оценку корректности результатов расчета и формируют рекомендации диспетчеру по управлению газотранспортной системой.

Постпроцессоры ГДС позволяют вести архив результатов расчетов, воспроизводить ранее рассчитанные результаты, вести сравнительный анализ результатов, использовать результаты в качестве исходных данных для последующих расчетов. Следует отметить, что результатами расчетов в ГДС являются пространственно-временные распределения газодинамических параметров функционирования ГТС (расходов, давлений и температур природного газа), а также временные функции изменения параметров режимов функционирования ГПА, АРД, АВО, ПУ и запорно-вентильной арматуры ГТС. Они могут быть отображены доступными для визуализации в ГДС средствами (см. примеры на рис. 1.16–1.19).

1.4. Вычислительные технологии анализа специальных случаев функционирования трубопроводных и канальных систем

В производственной практике моделирования трубопроводных и канальных сетей достаточно часто встречаются задачи, являющиеся важными по своей сути и частными с точки зрения объектов моделирования. В качестве примера к таким задачам можно от-

нести: оценку несущей способности отдельных сложных объектов трубопроводных конструкций [28]; детальное расследование реальных аварийных ситуаций [40, 41]; анализ и оптимальное управление единичными нештатными режимами транспортирования продуктов по трубопроводным системам [42]. Построение и эксплуатация высокоточных компьютерных симуляторов функционирования трубопроводных (канальных) систем, ориентированных на решение указанных выше частных задач, являются экономически не выгодными с точки зрения соотношения объемов затрат и практической значимости получаемых результатов.

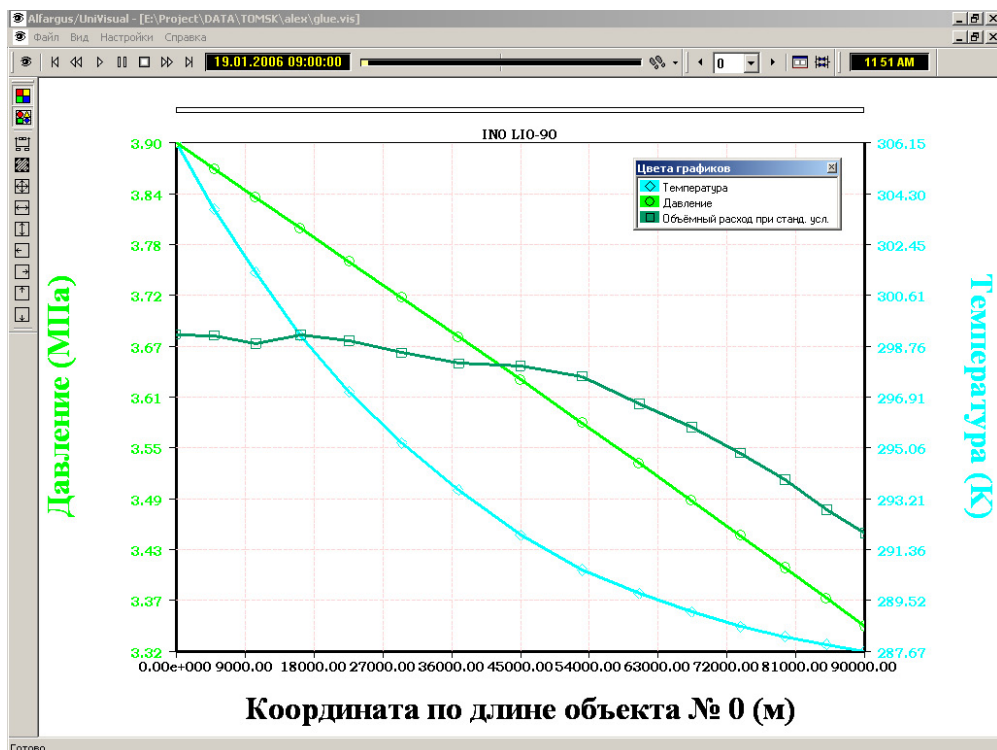


Рис. 1.16. Пример вывода результатов расчета параметров транспортирования газа по одной из ниток многониточной ЛЧМГ в ГДС

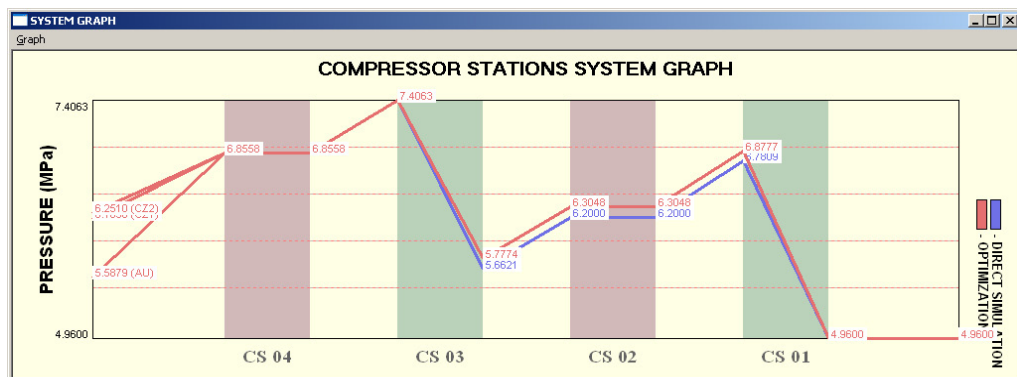


Рис. 1.17. Пример вывода результатов оптимизации транспортирования газа по газотранспортной сети в ГДС (в виде графиков)

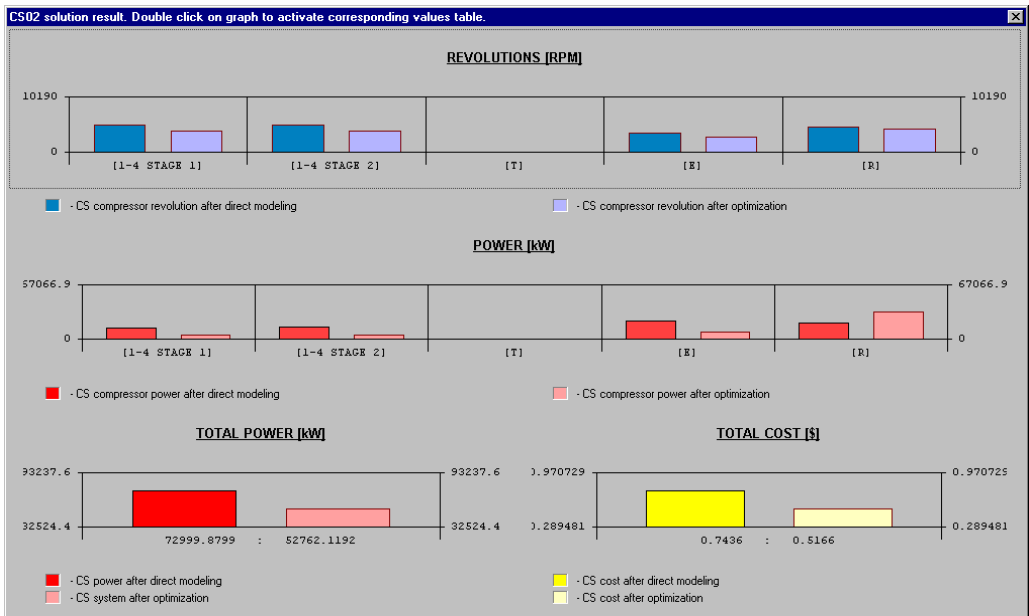


Рис. 1.18. Пример вывода результатов оптимизации транспортирования газа по газотранспортной сети в ГДС (в виде диаграмм)

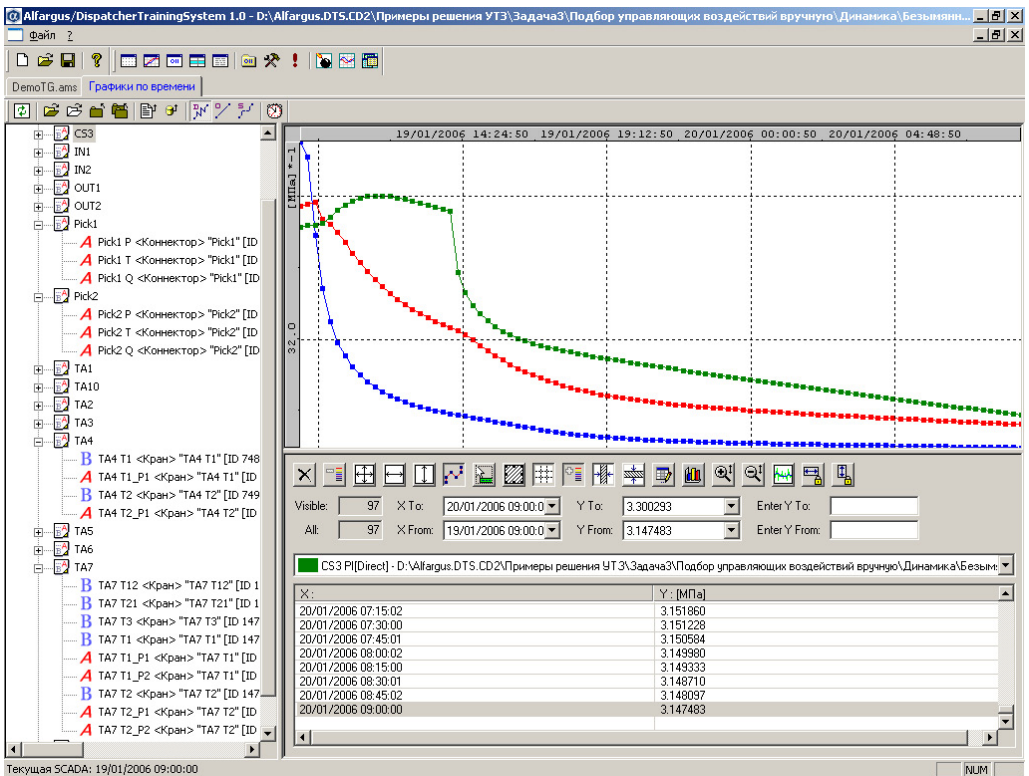


Рис. 1.19. Пример вывода результатов расчета параметров транспортирования газа по газотранспортной сети в ГДС

Вышесказанное свидетельствует о том, что для покрытия всего спектра производственных задач, решаемых при проектировании, эксплуатации и реконструкции трубопроводных (канальных) сетей, помимо непосредственного применения высокоточных компьютерных симуляторов, необходимо использовать вычислительные технологии анализа специальных случаев функционирования данных систем. Такие технологии можно рассматривать как научно обоснованные объединения взаимосвязанных формализованных алгоритмов действий специалистов ТЭК и надзорных организаций, направленных на эффективное и аргументированное решение производственных задач анализа единичных или специфических случаев функционирования трубопроводной (канальной) сети, и прикладного программно-математического обеспечения, выступающего в качестве высокоточного виртуального инструмента для решения поставленных задач. В состав данного прикладного программно-математического обеспечения могут включаться компьютерные симуляторы функционирования трубопроводных (канальных) систем, уже эксплуатирующиеся на данном предприятии.

Практическое применение вычислительных технологий анализа специальных случаев функционирования трубопроводных (канальных) систем следует считать одним из основных теоретических способов решения производственных задач высокоточного моделирования сетей трубопроводов (каналов с открытым руслом) в процессе их жизненного цикла. Здесь также необходимо отметить, что данные частные технологии и высокоточные компьютерные симуляторы входят (в виде инструментария) в состав обобщенных вычислительных технологий комплексной оценки состояния трубопроводных систем, подробно изложенных в монографиях [1, 5, 6].

Для иллюстрации применения предложенных в предшествующих Разделах теоретических принципов высокоточного моделирования при решении практических задач трубопроводного транспорта и для углубления восприятия их содержания целесообразно познакомиться с вариантом методологии численной верификации проектных решений для МТ (см. Раздел 1.5) и компьютерной аналитической системой управления целостностью трубопроводных систем (см. Раздел 1.6).

1.5. Пример реализации основных принципов высокоточного моделирования трубопроводных систем при верификации проектных решений для магистральных трубопроводов

На протяжении всего жизненного цикла объектов трубопроводного транспорта ТЭК своевременное выявление критических мест проектов позволяет оперативно вносить корректировки в технологическую цепочку процессов проектирования, эксплуатации и реконструкции. Существенного повышения качества проектных решений можно достичь за счет внедрения в практику проектирования трубопроводов принципиально новых подходов к математическому моделированию жизненного цикла трубопроводных систем и новых видов автоматизированного высокоточного численного анализа несущих элементов конструкций и режимов функционирования проектируемых сетей трубопроводов.

Безусловно, такое внедрение потребует определенных издержек: на приобретение или разработку необходимого прикладного программно-математического обеспечения; на модернизацию вычислительной техники в проектных организациях; на обучение проектировщиков практическому применению новых методов численной верификации проектных решений; на изменение регламентов проектных работ и т.д. Однако, подоб-

ные издержки окупятся за счет повышения надежности и безопасности принимаемых проектных решений, а также сокращения затрат при строительстве и последующей эксплуатации трубопроводных систем, связанных с исправлением недочетов и ошибок, допущенных на стадии проектирования. При этом внедрение численной верификации проектных решений дает возможность проектным организациям научно обоснованно и аргументированно защищать свои проекты перед надзорными, природоохранными и экспертными организациями.

При верификации проектов МТ в списке новых подходов к математическому моделированию жизненного цикла трубопроводных систем, прежде всего, следует указать на построение по материалам экспертируемого проектного решения высокоточных компьютерных прочностных и газодинамических (гидродинамических) симуляторов функционирования проектируемой трубопроводной системы. Эксплуатация данных компьютерных симуляторов позволит детально проанализировать полный спектр прогнозируемого поведения проектируемой трубопроводной конструкции при ожидаемых многофакторных воздействиях в результате адекватной имитации функционирования сети.

В соответствии с материалами Раздела 1.3 при имитации функционирования сетей трубопроводов в симуляторах основное внимание уделяется научно обоснованному и наиболее достоверному описанию физических процессов, протекающих в трубопроводных системах на протяжении всего жизненного цикла. При проектировании в качестве основных физических процессов, протекающих в МТ, могут рассматриваться процессы:

- изменения напряженно-деформированного состояния (НДС) трубопроводных и сопутствующих строительных конструкций;
- взаимодействия трубопроводов с окружающей средой;
- транспортирования продуктов по трубопроводным системам;
- вредных воздействий на трубопроводы при технической диагностике;
- развития возможных аварийных ситуаций;
- вредных воздействий при прогнозируемых стихийных бедствиях и возможных террористических атаках, и др.

Таким образом, применение компьютерных симуляторов для проектируемых сетей трубопроводов открывает перед проектировщиком уникальную возможность совершенствовать проектные решения по результатам численного моделирования, максимально приближенного к реальным условиям последующей эксплуатации объекта трубопроводного транспорта (см. Разделы 1.1 и 1.2). При этом компьютерные симуляторы трубопроводных сетей могут служить одной из базовых составляющих динамического прогностического анализа изменения экологической обстановки на территориях, прилегающих к МТ.

Такой процесс разработки трубопроводной сети ТЭК можно условно назвать проектированием по научно обоснованному прогнозу фактического состояния и полного спектра режимов функционирования трубопроводной системы.

В дополнение к высокоточным компьютерным симуляторам при верификации принимаемых проектных решений для численного моделирования отдельных элементов трубопроводных конструкций и специфических режимов работы сети следует использовать вычислительные технологии анализа специальных случаев функционирования трубопроводных систем (см. Раздел 1.4). К видам численного анализа трубопроводных конструкций, реализованным с применением этих частных вычислительных технологий, прежде всего, следует отнести:

- высокоточный численный анализ несущей способности и ресурса сложных элемен-

тов трубопроводных конструкций разных типов прокладки с учетом воздействий от транспортируемых продуктов, рельефа местности, состояния окружающей среды, результатов технической диагностики, нелинейного поведения металла труб, многофакторного нагружения, воздействий от прогнозируемых стихийных бедствий, воздействий от возможных террористических атак и т.д.;

- высокоточный газодинамический (гидродинамический) численный анализ единичных нештатных режимов транспортирования продуктов (гомогенных многокомпонентных газовых смесей или многофазных сред) с учетом режимов работы запорно-вентильной арматуры и перекачивающего оборудования, рельефа местности, состояния окружающей среды, регламента проведения и результатов технической диагностики, условий выполнения контрактных обязательств по поставкам продуктов, возможных течей и разрывов труб, ремонтных работ и т.д.;
- высокоточный термодинамический численный анализ режимов функционирования трубопроводов в районах вечномёрзлых грунтов с учетом требований охраны окружающей среды;
- полевое численное моделирование и количественный анализ последствий возможных аварийных ситуаций, связанные с выделением критических мест в проектах и оценкой вредной нагрузки на окружающую среду от возможных выбросов транспортируемых продуктов, сопутствующих пожаров, попадания и распространения загрязнений в водоемах и реках;
- высокоточный численный анализ работоспособности и эффективности планируемых средств и методов технической диагностики проектируемых трубопроводных систем с учетом возможных вредных воздействий диагностической аппаратуры на трубопроводы.

Адекватность математических моделей проектируемым трубопроводным системам и прогнозируемым процессам их функционирования (включая аварийные ситуации), а также сходимость методов их численного анализа к достоверным результатам, должны обосновываться теоретически и подтверждаться численными и натурными экспериментами. При этом надежность получаемых оценок при верификации особо ответственных проектных решений может быть повышена в результате дублирования и проведения сравнительного анализа решений, найденных с помощью частных вычислительных технологий (и входящего в их состав программно-математического обеспечения) разных производителей.

Повышение оперативности принятия научно обоснованных проектных решений должно обеспечиваться в результате расширения интеллектуальной автоматизации труда проектировщиков (см. Раздел 1.3). Такая автоматизация способствует сокращению ошибок в анализе проектных решений за счет снижения влияния человеческого фактора, а также дает возможность эффективно применять численные методы верификации проектных решений всеми проектировщиками, в том числе не имеющими углубленной подготовки в области математического моделирования, численной оптимизации и вычислительной механики.

Идеология компьютерной реализации подходов к верификации проектных решений методами численного моделирования практически совпадает с идеологией построения **Компьютерного Аналитического Инструментария (КАИ) «Alfargus»** (см. Раздел 1.6) и формулируется в виде следующих положений:

- дружелюбность за счет ориентации многоуровневого интерфейса на проектировщиков, высокой степени автоматизации решения производственных задач и наглядности отображаемой информации;
- интеллектуальность при численной верификации проектных решений за счет научно

обоснованной реализации и эффективного использования последних достижений вычислительной механики и математического программирования;

- полнота верификации проектных решений за счет комплексного подхода к прогностическому анализу всего жизненного цикла трубопроводной системы современными методами математического моделирования;
- повышенная надежность решения производственных задач за счет параллельного применения нескольких различных алгоритмов в одной частной вычислительной технологии или конкретном компьютерном симуляторе для решения одной задачи;
- достоверность решения производственных задач за счет обоснования адекватности математических моделей и корректности численных методов их анализа.

Для сокращения сроков и повышения качества обучения проектировщиков навыкам численной верификации проектных решений целесообразно применение специализированных компьютерных тренажеров исследовательского типа (см., например, [7]). Эффективность обучения также можно повысить в результате привлечения ведущих разработчиков вычислительных технологий, программно-математического обеспечения и высокоточных компьютерных симуляторов, используемых при численной верификации решений в проектных организациях.

Суть методологии численной верификации проектных решений, предложенной авторами настоящей монографии в соответствии с основными принципами высокоточного моделирования трубопроводных систем (см. Разделы 1.1 и 1.2), заключается в построении и численном анализе комплекса взаимосвязанных научно обоснованных математических моделей жизненного цикла трубопроводных систем (включая техническую диагностику), описывающих:

- сложное нелинейное НДС трубопроводных конструкций при эксплуатационных и аварийных нагрузках (включая воздействия от прогнозируемых стихийных бедствий и возможных террористических атак);
- функционирование трубопроводных сетей при нормальной эксплуатации и в аварийных ситуациях;
- управление транспортированием продуктов по трубопроводным сетям при нормальной эксплуатации и в аварийных ситуациях;
- методы и аппаратные средства диагностики технического состояния трубопроводных сетей;
- изменения состояния и режимов функционирования трубопроводной системы при ремонте дефектных участков трубопроводов;
- вредные воздействия трубопроводных систем на людей и окружающую среду при нормальной эксплуатации, в нештатных и аварийных ситуациях.

В соответствии с материалом Раздела 1.1 в основу этих моделей должны быть положены адаптированные для описания функционирования трубопроводных систем базовые уравнения механики и электродинамики сплошных сред, современные алгоритмы нелинейного и динамического программирования, методы качественной теории дифференциальных уравнений.

Требуемое качество верификации проектных решений не может быть достигнуто при использовании упрощенных математических моделей и подходов. Как отмечалось выше, их применение часто приводит к получению грубых или ошибочных оценок параметров физических процессов функционирования трубопроводов, не удовлетворяющих современным и перспективным требованиям проектирования и эксплуатации трубопроводных систем. Это обстоятельство приводит к многочисленным исправлениям

проектов, что влечет за собой срыв сроков их выполнения. Вышесказанное можно проиллюстрировать на конкретных примерах.

При моделировании и верификации проектных решений с учетом жизненного цикла трубопроводов для получения достоверных и обоснованных оценок нельзя ограничиваться только балочными моделями трубопроводов с линейно-упругим поведением материала труб. Эти модели не позволяют определять реальное трехмерное нелинейное НДС любого участка трубопроводной сети. Для определения реального сложного НДС трубопроводных конструкций необходимо применять новые методы моделирования, например, разработанные В.В. Алешиним и предполагающие последовательный переход от балочных моделей труб к более сложным оболочечным и объемным моделям (см. Главу 3 и работы [3, 6, 17, 23, 43]). Данные методы предоставляют проектировщику трубопроводных систем возможность в полной мере и с высокой точностью выполнить все требования действующих на сегодняшний день нормативных документов по расчету механических напряжений с учетом всех действующих нагрузок и упруго-пластической работы металла труб. Например, такая верификация проектных решений необходима при проектировании (см. [44]):

- трубопроводов, прокладываемых в горной местности (содержащих сильно изогнутые участки);
- трубопроводов, имеющих разветвленную структуру в зоне КС (или нефтеперекачивающих станций (НПС));
- трубопроводов, прокладываемых в сейсмоопасных районах;
- трубопроводов, подверженных возможному воздействию ненормативных нагрузок, в том числе нагрузок, связанных с осадками и пучениями грунтов, оползнями, пульсациями давления, динамическими воздействиями от скребков (поршней) и других очистных устройств, перемещениями опор, и т.д.

Применение указанных подходов позволяет также оценить несущую способность трехмерных трубопроводных конструкций с учетом всего спектра их конструктивно-геометрических особенностей (прямые и упругоизогнутые участки трубопровода, гнутые и крутоизогнутые отводы, и т.д.).

Аналогичная ситуация возникает при использовании упрощенных методов анализа параметров газодинамических (гидравлических) режимов функционирования трубопроводных систем. Так, например, использование часто применяемых в трубопроводном транспорте изотермических моделей течения продуктов по трубопроводным сетям (см., например, [18, 19]) не позволяет в полной мере и с высокой точностью результатов выполнить требования [44]. В отличие от традиционных компьютерных программ проектирования трубопроводных систем, которые рассматривают стационарные течения, предлагаемая здесь методология численной верификации проектных решений позволяет моделировать переходные процессы, связанные с запуском/остановом перекачивающего оборудования, перекрытием кранов, заслонок и т.д. (см. Главу 2). Эти режимы характеризуются максимальными нагрузками на трубопроводные системы и должны быть проанализированы при проведении проектировочных расчетов.

Рассматриваемая методология обеспечит проведение поверочных газодинамических (гидравлических) расчетов параметров транспортирования продуктов по трубопроводным сетям, проложенным в высокогорной местности, где необходимо учитывать влияние перепада высот на режимы транспортирования продуктов и их воздействия на трубопроводы (см. Главу 2). Это объясняется влиянием высотного уровня прокладки трубопровода не только на гидростатический напор, но и на режим течения в целом. В качестве примера можно отметить, что данная методология позволяет проверить на стадии проектирования полноту выполнения требований [44].

Такая методология численной верификации предоставляет возможность анализировать проектные решения с точки зрения определения размеров санитарно-защитных зон и зон повышенной пожароопасности вдоль линейных частей проектируемых и реконструируемых МТ (см. Главу 4). В полной мере решить данную задачу можно только с использованием высокоточного математического моделирования. В этом случае появляется возможность на стадии проекта аргументированно обосновать требуемые конструктивные решения (см., например, [44]) и меры пожарной и промышленной безопасности.

Основной сферой применения предлагаемой методологии численной верификации проектов является комплексный анализ функциональности, безопасности и эффективности принимаемых проектных решений с точки зрения последующей эксплуатации трубопроводной системы на протяжении всего цикла ее существования. Реализация этой методологии позволит оперативно обнаруживать некорректности и ошибки в проектах, а также даст возможность определять наиболее эффективные пути их устранения. Численная верификация формирует научное обоснование параметров и объемов вредных воздействий проектируемой трубопроводной системы на окружающую среду.

Применение методологии на практике направлено на разработку научно обоснованного комплекса мероприятий по повышению уровня защиты окружающей среды в зоне строительства и последующей эксплуатации МТ. Это позволяет, в свою очередь, аргументировать размеры устанавливаемых санитарно-защитных зон и зон повышенной пожароопасности вдоль линейных частей проектируемых и реконструируемых МТ.

Реализация предлагаемой методологии численной верификации на стадии сопровождения проектных решений при эксплуатации сети трубопроводов дает возможность:

- вырабатывать рекомендации по безопасным и эффективным методам проведения технической диагностики;
- оперативно проводить комплексную оценку фактического состояния трубопроводной системы с использованием результатов технической диагностики;
- прогнозировать появление и предотвращать вероятные аварийные ситуации;
- безопасно и оптимально управлять транспортированием продуктов по сети трубопроводов;
- разрабатывать рекомендации по снижению затрат и повышению экологичности транспортирования продуктов по трубопроводам;
- разрабатывать экономически и экологически эффективные планы ремонтов и реконструкции участков трубопроводной системы.

Это достигается за счет решения следующих основных задач численной верификации проектных решений (см. также функциональные возможности КАИ «Alfargus», представленные в Разделе 1.6):

- 1) проведение в автоматизированном режиме высокоточного численного анализа несущей способности и ресурса трубопроводных конструкций линейных частей МТ разных типов прокладки с учетом режимов функционирования трубопроводной системы, рельефа местности, состояния окружающей среды, результатов технической диагностики, нелинейного поведения металла труб, многофакторного нагружения и т.д.;
- 2) проведение высокоточного численного анализа несущей способности и ресурса трубопроводной технологической обвязки ГРС, КС и НПС с учетом состояния окружающей среды, результатов технической диагностики, нелинейного поведения металла труб, многофакторного нагружения (включая малоцикловые нагрузки) и т.д.;
- 3) проведение высокоточного численного анализа несущей способности трубопровод-

ных конструкций линейных частей МТ разных типов прокладки и технологических обвязок ГРС, КС и НПС при воздействиях от прогнозируемых стихийных бедствий и возможных террористических атак;

- 4) проведение в автоматизированном режиме высокоточного нелинейного анализа НДС трубопроводных конструкций с целью установления участков возможной потери продольной устойчивости и выпучивания участков линейных частей МТ;
- 5) проведение высокоточного анализа несущей способности и ресурса отдельных наиболее критических участков трубопроводов, подверженных циклическим нагрузкам от переменных параметров режимов транспортирования продуктов;
- 6) проведение в автоматизированном режиме высокоточного анализа несущей способности и ресурса отдельных криволинейных участков трубопроводов, изготовленных с применением холодногнутых отводов (имеющих начальное НДС);
- 7) проведение высокоточного анализа несущей способности и остаточного ресурса отдельных наиболее критических участков трубопроводов, содержащих узлы сочленения и фасонные элементы;
- 8) проведение высокоточного прочностного анализа строительных конструкций, сопутствующих магистральным трубопроводам;
- 9) проведение в автоматизированном режиме высокоточного численного анализа параметров неизотермических неустановившихся режимов транспортирования многофазных сред (или однородных многокомпонентных газовых смесей) с учетом режимов функционирования перекачивающего оборудования и работы запорно-вентильной арматуры, динамики отборов транспортируемых продуктов потребителями, рельефа местности (включая горные районы и переходы через водные преграды), состояния окружающей среды, регламента проведения и результатов технической диагностики, условий выполнения контрактных обязательств по поставкам продукта, возможных течей и разрывов труб, ремонтных работ и т.д.;
- 10) проведение с применением высокоточных компьютерных газодинамических (гидродинамических) симуляторов численного анализа эффективных путей научно обоснованного снижения энергетических и/или финансовых затрат на безаварийное транспортирование продуктов по сети трубопроводов при прогнозируемых установившихся и неустановившихся режимах работы трубопроводной системы;
- 11) проведение с использованием высокоточных компьютерных газодинамических (гидродинамических) симуляторов расчетов для научно обоснованного размещения датчиков параметров транспортирования продуктов по трубопроводной системе с целью оптимального и безопасного управления транспортированием продуктов, а также раннего обнаружения утечек и разрывов труб;
- 12) проведение с использованием высокоточных компьютерных газодинамических (гидродинамических) симуляторов численного анализа характера и величины динамических нагрузок от транспортируемых продуктов на трубопроводы (для оценки возможности их разрушения в процессе эксплуатации в результате накопления пластических деформаций по механизму малоциклового усталости и вредного воздействия окружающей среды);
- 13) проведение в автоматизированном режиме высокоточного термодинамического численного анализа прогрева вечномёрзлых грунтов с учетом режимов функционирования трубопроводов и требований охраны окружающей среды;
- 14) проведение научно обоснованного анализа динамики изменения во времени и построение на топографической карте местности зон возможного осколочного поражения при вероятных разрушениях проектируемых магистральных газопроводов

(МГ);

- 15) проведение научно обоснованного анализа динамики изменения во времени и построение на топографической карте местности зон возможного распространения жидких транспортируемых продуктов на местности с учетом состояния окружающей среды по данным прямого численного моделирования возможных аварийных ситуаций, связанных с загрязнениями и распространением транспортируемых продуктов в водоемах и реках;
- 16) проведение научно обоснованного анализа пространственно-временной динамики возникновения и развития пожарной опасности при аварийном распространении транспортируемых продуктов в окружающей среде вследствие возможного разрушения участков трубопроводов;
- 17) проведение научно обоснованного анализа динамики изменения во времени и построение на топографической карте местности санитарно-защитных зон для трубопроводов по результатам прямого численного моделирования и сопутствующего стохастического анализа возможных аварийных ситуаций (моделирование осколочного, токсического и теплового поражений);
- 18) проведение в рамках сопровождения проекта трубопроводной системы высокоточного численного анализа работоспособности и эффективности средств и методов технической диагностики проектируемых трубопроводных систем, включая численный анализ динамических нагрузок на трубопроводы от прохождения скребков и внутритрубных снарядов-дефектоскопов;
- 19) проведение численного анализа режимов функционирования трубопроводной системы для разработки научно обоснованных и экономически эффективных регламентов проведения диагностических и ремонтных работ, а также планов реконструкции сети.

Здесь следует отметить, что проведение количественного численного анализа последствий возможных аварийных ситуаций, прежде всего, связано с выделением критических мест в проектах и оценкой вредной нагрузки на окружающую среду от возможных выбросов транспортируемых продуктов, сопутствующих пожаров, попадания и распространения загрязнений в водоемах и реках [5, 6, 27, 45, 46].

Основные направления численной верификации проектных решений целесообразно формализовать в виде следующего перечня обобщенных задач вычислительной механики и электродинамики¹:

- 1) численное моделирование сложного нелинейного (с учетом геометрической нелинейности деформаций и упруго-пластического поведения металла труб) НДС подземных, надземных и наземных участков линейных частей МТ с учетом всех конструктивных особенностей конкретного участка и многофакторного нагружения в номинальных и переходных режимах функционирования, а также в аварийных ситуациях;
- 2) численное моделирование сложного нелинейного НДС участков трубопроводов в зонах переходов через водные преграды с учетом всех конструктивных особенностей конкретного участка и многофакторного нагружения в номинальных и переходных режимах функционирования, а также в аварийных ситуациях;
- 3) численное моделирование продольной устойчивости и выпучивания подземных участков линейных частей МТ с учетом конструктивных особенностей, рельефа

¹ Здесь следует обратить внимание на то, что формулировки обобщенных задач по написанию близки к задачам численной верификации проектных решений, однако при этом две рассматриваемые группы задач различаются между собой по направленности и результатам решения.

местности, характеристик физико-механических свойств грунтов, температурных режимов функционирования, нелинейного поведения конструкций, многофакторного нагружения и результатов технической диагностики;

- 4) численное моделирование сложного нелинейного НДС технологических трубопроводов ГРС, КС и НПС с учетом конструктивных особенностей, рельефа местности, многофакторного нагружения и результатов технической диагностики;
- 5) численное моделирование сложного нелинейного НДС участков трубопроводов с различными типами дефектов и аномалий:
 - 5.1) технологические дефекты и аномалии (расслоения стенок труб, дефекты технологических сварных швов, остаточные деформации труб, искажение геометрии поперечного сечения труб и т.д.);
 - 5.2) строительные дефекты и аномалии (гофры, вмятины, смещения кромок сварных швов, нарушения технологии сварки стыковых швов, монтажные напряжения и т.д.);
 - 5.3) эксплуатационные дефекты и аномалии (коррозионные и эрозионные повреждения стенок труб, трещины, просадки и пучения грунтов, взаимодействие трубопровода с вечноммерзлыми грунтами, оползни, смещения опор, термокарстовые явления и т.д.);
 - 5.4) дефекты и аномалии, вносимые при ремонте и реконструкции участков трубопроводов (смещение оси трубопровода от проектного положения, появление полостей в грунте при обратной засыпке трубопровода после экскавации и т.д.);
- 6) численное моделирование сложного нелинейного НДС участков трубопроводной системы, подвергаемых сейсмическим нагрузкам;
- 7) количественный стохастический анализ влияния неопределенности в исходных данных (разбросы характеристик физико-механических свойств металла труб и окружающего грунта, неоднородности нагрузок, погрешности измерений при технической диагностике и т.д.) на результаты численного моделирования сложного нелинейного НДС и показатели прочности наиболее критических участков трубопроводов;
- 8) численное моделирование сложного нелинейного НДС сопутствующих трубопроводам строительных конструкций, включая сейсмоустойчивые опоры и сооружения сейсмозащиты;
- 9) численное моделирование номинальных, переходных и аварийных режимов течения вязких теплопроводных многофазных сред (или гомогенных многокомпонентных газовых смесей) по разветвленной сети пространственно распределенных длинных многониточных многосекционных трубопроводов с круглым поперечным сечением и абсолютно жесткими теплопроводными стенками труб с учетом динамики изменения параметров течения среды (или смеси) на границах экспертируемых участков трубопроводной системы, теплообмена с окружающей средой, фазовых переходов, парафинизации трубопроводов, динамики работы перекачивающих агрегатов, кранов, заслонок, возможных разрывов труб, утечек и т.д.;
- 10) численное моделирование и оптимизация номинальных, переходных, аварийных режимов функционирования индивидуальной КС (или НПС) и сетей КС (или НПС) с учетом отборов транспортируемых продуктов потребителями, работы кранов на крановых площадках и режимов работы каждой КС (или НПС) в сети;
- 11) численный анализ пространственно-временных параметров нагружения стенок трубы от внутреннего давления, температуры и веса продуктов, транспортируемых по трубопроводам;

- 12) численное моделирование режимов функционирования трубопроводов с учетом их теплообмена с вечномерзлыми грунтами и окружающей средой;
- 13) численное моделирование разлития жидких продуктов по рельефу прилегающей местности с учетом их сопутствующей фильтрации в грунте;
- 14) численное моделирование нестационарного распространения жидких загрязняющих веществ при попадании их в русла разветвленных рек с учетом законов их оседания (или всплытия), а также фильтрации в грунте берегов;
- 15) численное моделирование нестационарного распространения жидких загрязняющих веществ при попадании их в водоемы (пруды, озера и т.д.) с учетом законов их оседания (или всплытия), а также их фильтрации в грунте берегов;
- 16) численное моделирование образования и разлета осколков при вероятном разрушении МГ;
- 17) численное моделирование аварийного распространения транспортируемых газовых смесей в окружающей среде при разрушении МГ;
- 18) численное полевое моделирование механизмов возможного воспламенения продуктов, попавших в окружающую среду;
- 19) численное полевое моделирование возникновения и развития сопутствующих пожаров и анализ тепловых воздействий от него на прилегающие к месту аварии территории;
- 20) численное моделирование процессов технической диагностики трубопроводов с использованием внутритрубных магнитных снарядов-дефектоскопов.

Методы решения большинства из перечисленного списка задач будут рассмотрены в последующих Главах настоящей монографии (см. также [1–7]).

В заключение данного Раздела отметим, что практическое применение методологии численной верификации проектных решений, прежде всего, направлено:

- на повышение качества и сокращение сроков выполнения проектных работ;
- на аргументированную защиту проектов перед надзорными, природоохранными и экспертными организациями;
- на повышение точности оценки несущей способности и определение запасов прочности всех участков проектируемой трубопроводной системы;
- на формирование научно обоснованных рекомендаций по безопасному повышению пропускной способности трубопроводной системы на ограниченном промежутке времени с учетом реального состояния трубопроводной конструкции и конъюнктуры рынка;
- на прогнозирование последствий аварийных разрушений трубопроводов и выработку комплекса защитных мероприятий для снижения ущерба от таких аварий;
- на разработку научно обоснованной политики страхования проектируемой трубопроводной системы;
- на разработку научно обоснованного плана закупки и размещения датчиков для SCADA-систем по результатам газодинамического (гидродинамического) анализа процессов транспортирования продуктов, позволяющего обосновать стоимость работ за счет оптимального выбора номенклатуры, количества датчиков и установления требований к их точности;
- на разработку в процессе сопровождения проектов научно обоснованных планов ремонта и реконструкции трубопроводной системы, и т.д.

1.6. Пример реализации основных принципов высокоточного моделирования трубопроводных систем при управлении целостностью трубопроводных сетей

Описанные в Разделах 1.1 – 1.4 основные принципы высокоточного моделирования сетей трубопроводов можно рассматривать в качестве теоретического фундамента для разработки и промышленного внедрения современных компьютерных аналитических систем управления целостностью трубопроводных сетей. Характерным примером практического воплощения данных принципов является КАИ «Alfargus». Он был создан при определяющем участии авторов настоящей монографии в начале века на базе разработки и широкого использования КПС и ГДС. Его предшественниками по праву являются вычислительная технология «PipEst», программно-математический комплекс «CorNet» и компьютерная аналитическая система «AMADEUS», ранее разработанные тем же авторским коллективом (см. [1–6]), что и КАИ «Alfargus».

Система на базе КАИ «Alfargus» – это многопользовательская многозадачная аналитическая система, ориентированная на автоматизированное решение широкого спектра производственных задач специалистами ТЭК. Ее функциональные возможности позволяют персоналу предприятий ТЭК (даже тем, кто ранее не применял современные методы численного моделирования трубопроводных сетей) получать практически значимые решения по наиболее сложным проблемам достоверной оценки фактического состояния трубопроводов, их обоснованного ранжирования по срокам замены или ремонта, безопасного оптимального управления работой данных сетей в штатных, нештатных и аварийных ситуациях. К основным производственным функциям КАИ «Alfargus» следует отнести:

- 1) информационно-аналитическое обеспечение управления целостностью трубопроводной сети на стадиях ее проектирования, строительства (включая производство труб), эксплуатации, ремонта и замены дефектных участков;
- 2) проведение поверочных прочностных и газодинамических (гидравлических) расчетов сети при проектировании и строительстве новых трубопроводов;
- 3) проведение высокоточного анализа текущего состояния и целостности трубопроводной сети на базе автоматизированного применения методов прямого моделирования трубопроводов по данным технической диагностики;
- 4) краткосрочное и долгосрочное прогнозирование безопасности эксплуатации трубопроводной сети на базе комплексного применения методов прямого численного моделирования трубопроводов и стохастического анализа;
- 5) научно обоснованное ранжирование участков трубопроводной сети по срокам их ремонта и замены по результатам комплексного численного анализа прочности и ресурса трубопроводов, режимов их нагружения и вероятных последствий разрушения;
- 6) оптимальное управление транспортированием продуктов по трубопроводной сети с целью обеспечения контрактных обязательств, снижения материальных затрат и уменьшения вредной нагрузки на окружающую среду;
- 7) обеспечение учета количества и качества транспортируемых продуктов (включая смешивание продуктов разного качества);
- 8) оперативное обнаружение гильотинных разрушений трубопроводов и нахождение утечек;
- 9) научно обоснованная оценка степени вредных воздействий объектов трубопроводного транспорта на окружающую среду;

10) обучение персонала ТЭК новым методам оценки технического состояния и оптимального управления трубопроводными системами [7, 39], и т.д.

Идеология построения КАИ «Alfargus» была сформулирована В.Е. Селезевым на базе предложенной выше концепции. Суть этой идеологии достаточно проста и может быть записана в виде следующих тезисов:

- интеллектуальность при решении производственных задач за счет научно обоснованной реализации и эффективного использования последних достижений вычислительной механики и математического программирования;
- полнота выполнения производственных заданий за счет комплексного решения корректно поставленных задач математического моделирования, описывающих весь производственный цикл с высокой степенью детализации;
- повышенная надежность решения производственных задач за счет параллельного применения нескольких методов для решения одной задачи;
- достоверность решения производственных задач за счет обоснования адекватности математических моделей и корректности численных методов их анализа;
- дружелюбность к эксплуатирующему персоналу за счет ориентации многоуровневого интерфейса на персонал конкретной компании, высокой степени автоматизации решения производственных задач и наглядности отображаемой информации (см., например, Раздел 1.3).

Обобщенную структуру компьютерной аналитической системы на базе КАИ «Alfargus», по аналогии со структурами ГДС и КПС (см. Раздел 1.3), можно представить в виде трех взаимосвязанных частей. В качестве таких частей указанной системы выступают:

- интеллектуальное ядро системы (набор компьютерных подсистем, позволяющих оценивать, анализировать и прогнозировать полный спектр параметров состояния и работы трубопроводной сети как единой системы);
- информационное ядро системы (многопользовательская распределенная база данных, содержащая оперативную и долговременную информацию о структуре и состоянии трубопроводной сети, контролируемых и управляемых параметрах жизнедеятельности трубопроводной компании, результатах краткосрочных и долговременных прогнозов, и т.д.);
- вспомогательная оболочка системы (набор подсистем типовых запросов к базе данных, подсистем отображения и визуализации информации, хранящейся в базе данных или получаемой в результате работы интеллектуального ядра «Alfargus», в форме удобной для принятия оперативных решений управленческим персоналом).

Список подсистем интеллектуального ядра компьютерной аналитической системы на базе КАИ «Alfargus» с указанием их функционального назначения имеет вид:

- 1) подсистема «Alfargus/PipeManufacture» используется для численного анализа влияния остаточного НДС и технологических дефектов, возникающих в процессе изготовления труб, на прочность трубопроводов при эксплуатации;
- 2) подсистема «Alfargus/NDTest» используется для оценки степени достоверности результатов технической диагностики трубопроводов;
- 3) подсистема «Alfargus/PipeFlow» применяется для определения параметров безопасного транспортирования продуктов по трубопроводным сетям;
- 4) подсистема «Alfargus/StructuralAnalysis» предназначена для анализа прочности и оценки остаточного ресурса участков трубопроводов, находящихся в условиях мно-

гофакторного нагружения;

- 5) подсистема «Alfargus/DebrisHazard» отвечает за анализ риска и построение зон осколочного поражения при возможном разрушении участка газопровода высокого давления;
- 6) подсистема «Alfargus/ToxicGasHazard» используется для анализа риска и построения зон токсического поражения и зон возникновения пожаровзрывоопасности при возможном разрушении участка газопровода высокого давления;
- 7) подсистема «Alfargus/ToxicLiquidHazard» предназначена для анализа риска и построения зон токсического поражения и зон возникновения пожаровзрывоопасности при возможном разрушении участка трубопровода, транспортирующего опасные жидкости;
- 8) подсистема «Alfargus/FireHazard» используется для анализа риска и построения зон теплового поражения при возможном пожаре в зоне разрушения трубопровода;
- 9) подсистема «Alfargus/RiverFlow» применяется для анализа риска и построения зон токсического поражения при попадании и распространении по рекам и каналам жидких продуктов, транспортируемых по трубопроводам;
- 10) подсистема «Alfargus/Ranking» предназначена для построения обобщенных зон повышенной опасности при эксплуатации трубопроводной сети и ранжирования критических участков трубопроводов по срокам их ремонта и замены;
- 11) подсистема «Alfargus/OptimFlow» применяется для выработки рекомендаций по снижению энергетических затрат и вредной нагрузки на окружающую среду от трубопроводных систем;
- 12) подсистема «Alfargus/Planning» предназначена для помощи в формировании долгосрочных планов инспекции трубопроводной сети, а также планов ремонта и замены ее отдельных дефектных участков.

Для углубления знакомства с **КАИ** «Alfargus» целесообразно рассмотреть краткий перечень функциональных возможностей и дать характеристику используемой методологии решения производственных задач для **каждой из перечисленных выше подсистемы**. Эту процедуру ознакомления начнем с подсистемы «Alfargus/NDTest», т.к. развернутое описание методологии решения производственных задач для подсистемы «Alfargus/PipeManufacture» вследствие его значительного объема представлено в Приложении 1.

Подсистема «Alfargus/NDTest». Ее функциональные возможности направлены, прежде всего, на оценку фактической чувствительности внутритрубных магнитных снарядов-дефектоскопов при обнаружении различных типов дефектов.

Внутритрубная магнитная дефектоскопия основана на выявлении дефектов стенок трубопроводов в результате сравнения параметров слабого электромагнитного поля в средах с разными магнитными характеристиками. Наведение поля в трубе, замеры и запись изменения его параметров производятся с помощью движущегося внутри трубы специального прибора, который называют внутритрубным магнитным снарядом-дефектоскопом [47]. Основными источниками наведенного в трубе поля являются постоянные магниты, составляющие ядро системы намагничивания снаряда-дефектоскопа. Контакт системы намагничивания со стенками трубы осуществляется через металлические щетки снаряда-дефектоскопа. В поисковой системе снаряда-дефектоскопа устанавливаются от нескольких десятков до сотен преобразователей, как правило, основанных на эффекте Холла. Преобразователи Холла в этом случае работают по принципу возникновения электродвижущей силы в результате искривления пути носителей тока в металле трубы, находящейся в магнитном поле под действием силы Лоренца.

Методология, реализованная в подсистеме «Alfargus/NDTest», базируется на численном решении системы уравнений Максвелла в квазистационарной постановке. В квазистационарном случае система уравнений Максвелла относительно векторного магнитного потенциала приводится к нелинейному эллиптическому уравнению:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}) - \operatorname{grad}(v_e \cdot \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}}) - \operatorname{rot}(\mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{H}}_C) = \vec{\mathbf{0}}, \quad (1.1)$$

где $\vec{\mathbf{A}}$ – векторный магнитный потенциал; $\mathbf{v} = \boldsymbol{\mu}^{-1}$; $v_e = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 v_{ii}$; $\boldsymbol{\mu}$ – магнитная проницаемость среды; $\vec{\mathbf{H}}_C$ – заданный вектор коэрцитивной силы магнитов системы намагничивания снаряда-дефектоскопа. Для численного решения уравнение (1.1) с учетом описания технологии внутритрубной диагностики (см. выше) можно преобразовать к эквивалентному виду:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} = -\frac{1}{v_e} \cdot \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}}_C, \quad (1.2)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа. Данное уравнение относится к классу линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.

С учетом осевой симметрии задачи (см., например, [6, 47]) для решения уравнения (1.1) или (1.2) на границах условно выделенного цилиндрического объема, содержащего снаряд-дефектоскоп в диагностируемом участке трубы, задаются следующие граничные условия (ГУ):

$$\vec{\mathbf{A}}(x, \theta, z) \Big|_{x \in [0; x_0], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], z=0} = \vec{\mathbf{Q}}_1(x, \theta, z); \quad (1.3a)$$

$$\vec{\mathbf{A}}(x, \theta, z) \Big|_{x \in [0; x_0], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], z=z_0} = \vec{\mathbf{Q}}_2(x, \theta, z); \quad (1.3б)$$

$$A_z(x, \theta, z) \Big|_{x \in [0; x_0], \theta = \pm \frac{\pi}{2}, z \in [0; z_0]} = 0; \quad (1.3в)$$

$$A_x(x, \theta, z) \Big|_{x \in [0; x_0], \theta = \pm \frac{\pi}{2}, z \in [0; z_0]} = 0, \quad (1.3г)$$

где $\vec{\mathbf{Q}}_i(x, \theta, z)$, $i=1, 2$, – некоторые заданные убывающие функции при $(x-x_0) \rightarrow \infty$, $z \rightarrow \infty$ и $(z-z_0) \rightarrow \infty$ соответственно, имитирующие убывание векторного потенциала магнитного поля при удалении от снаряда-дефектоскопа; $A_x(x, \theta, z)$ и $A_z(x, \theta, z)$ – компоненты векторного магнитного потенциала $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}(x, \theta, z)$ в цилиндрической системе координат (x, θ, z) (где x – радиальная координата). Условия перехода векторного потенциала $\vec{\mathbf{A}}$ через границу раздела двух сред «+» и «-» с разными магнитными свойствами записываются в виде:

$$\vec{A}^+ = \vec{A}^-, \quad \vec{n} \times \vec{A}^+ = \vec{n} \times \vec{A}^-; \quad \vec{n} \times (\vec{v}^+ \cdot \text{rot} \vec{A}^+) = \vec{n} \times (\vec{v}^- \cdot \text{rot} \vec{A}^-), \quad (1.3д)$$

где $\vec{n}$ – единичная нормаль к границе раздела сред в рассматриваемой точке.

Для решения поставленной задачи необходимо знать: геометрию системы «снаряд-дефектоскоп – инспектируемая труба»; кривые намагничивания материалов трубы, щеток и магнитопровода снаряда-дефектоскопа; кривую размагничивания материала магнитов системы намагничивания снаряда-дефектоскопа; компоненты вектора коэрцитивной силы каждого магнита системы намагничивания в выбранной системе координат, которые могут быть оценены по кривым размагничивания.

Для численного решения трехмерной эллиптической задачи (1.1,1.3) или (1.2,1.3) применяется метод конечных элементов (МКЭ), сходимость которого для задач эллиптического типа доказана [48].

Получаемое в результате решения такой задачи распределение векторного магнитного потенциала позволяет найти распределение параметров магнитного поля, используемых при анализе работоспособности и эффективности внутритрубного магнитного снаряда-дефектоскопа, с помощью известных соотношений [49]:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}; \quad \vec{H} = \vec{v} \cdot \vec{B} - \vec{H}_c, \quad (1.4)$$

где $\vec{B}$ и $\vec{H}$ – векторы индукции и напряженности магнитного поля. По распределению параметров магнитного поля определяются силовые воздействия на конструкцию снаряда-дефектоскопа. Так, например, магнитную силу, действующую на подвеску блока намагничивания, можно определить по формуле Максвелла [49]:

$$\vec{F}_{\text{маг}} = \int_S \vec{T} \cdot \vec{n} ds, \quad (1.5)$$

где $\vec{F}_{\text{маг}}$ – магнитная сила; S – поверхность, ограничивающая тело блока намагничивания; $\vec{T} = \vec{H} \otimes \vec{B} - \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot \vec{H} \cdot \vec{B}$ – тензор напряжений Максвелла (δ – тензорная единица, $\otimes$ – символ тензорного произведения).

Подсистема «Alfargus/NDTest» также используется для определения фактических погрешностей измерений параметров дефектов с целью повышения качества исходных данных для прочностных расчетов. Более подробно методы математического моделирования внутритрубных магнитных снарядов-дефектоскопов описаны в монографиях [1, 6, 50–53].

В завершение рассмотрения подсистемы «Alfargus/NDTest» следует отметить, что в настоящее время стало привычным использование численного моделирования для анализа изменения параметров трехмерного магнитного поля, создаваемого магнитами снаряда-дефектоскопа в системе «снаряд-дефектоскоп – инспектируемая труба», с целью совершенствования конструкции данного прибора и технологии его применения. Однако, во второй половине 90-х годов прошлого века такой подход был в значительной степени новаторским и являлся одним из существенных этапов в области развития приборостроения для внутритрубной магнитной дефектоскопии [50, 51]. Сохранение его актуальности до настоящего времени для авторов настоящей монографии было обосновано содержанием и результатами многочисленных научно-технических дискуссий с разработчиками и производителями внутритрубных снарядов-дефектоскопов, а также с ведущими специалистами, занимающимися дефектоскопией МТ (например, со специалистами компаний «BJ Pipeline Inspection Services» (Канада), «РП» (Великобритания), «LinScan» (ОАЭ), ОАО «Газпром» (Россия), АК «Транснефть» (Россия), «SPP, a.s.» (Словакия – Германия – Франция), «GasCo» (ОАЭ)).

Подсистема «Alfargus/PipeFlow». К ее основным функциональным возможностям следует отнести:

- высокоточный анализ нестационарных неизотермических режимов транспортирования газов, жидкостей и многофазных сред по сложным трубопроводным системам;
- оперативное обнаружение разрывов трубопроводов;
- выработка рекомендаций по обеспечению контрактных обязательств трубопроводной компании по давлениям и расходам продуктов на границах трубопроводных сетей;
- прогнозирование с высокой степенью достоверности параметров полного спектра режимов транспортирования продуктов по трубопроводной системе;
- определение управляющих параметров текущих безопасных режимов работы перекачивающего оборудования;
- работа ГДС, построенных на базе подсистемы «Alfargus/PipeFlow» и эксплуатирующихся в ее составе, в режимах «offline», «online» и «real time»;
- анализ и получение управляющих параметров безопасных режимов работы распределительных станций;
- оценка фактического количества поставляемых по трубопроводам продуктов во времени;
- достоверный анализ количества выброшенных в окружающую среду продуктов при прогнозируемых или реальных авариях;
- использование подсистемы в качестве базы построения тренажеров для обучения персонала;
- оценка изменения количества продукта в трубопроводной системе во времени, и т.д.

Методология, реализованная в подсистеме «Alfargus/PipeFlow», базируется на построении и эксплуатации высокоточных компьютерных газодинамических (гидравлических) симуляторов трубопроводных сетей на базе адаптации полной системы уравнений механики жидкостей и газов. Ее описание представлено в Главах 2, 4 и Приложениях 2 и 9 (см. также [1, 2, 4–7]).

Подсистема «Alfargus/StructuralAnalysis». Эта подсистема применяется при построении и эксплуатации КПС участков трубопроводных сетей. К ее основным функциональным возможностям можно отнести:

- анализ НДС и оценка прочности дефектных и критических участков надземных, наземных, подземных и подводных трубопроводов с учетом их многофакторного нагружения;
- расчетное определение разрушающего и максимального безопасного давлений для каждого дефектного или критического участка трубопровода;
- осуществление текущего мониторинга прочности критических участков трубопроводов с помощью КПС;
- прогнозные оценки эволюции во времени прочности дефектных участков вследствие роста дефектов, а также расчетное определение остаточного ресурса;
- использование подсистемы в качестве базы построения тренажеров для обучения персонала.

Методология решения производственных задач, применяемая в подсистеме «Alfargus/StructuralAnalysis», предполагает численное решение трехмерных уравнений равновесия деформируемого твердого тела с использованием МКЭ. Теоретические ос-

новы данной подсистемы изложены в Главах 3, 4 и Приложениях 3 – 7 (см. также [1, 3, 4, 6]).

Подсистема «Alfargus/DebrisHazard». Основные функциональные возможности этой подсистемы сводятся к следующему:

- оценка параметров поля осколков при разрушении газопровода высокого давления;
- построение зон осколочного поражения для прогнозируемой аварийной ситуации.

Методология «Alfargus/DebrisHazard» предполагает численное решение трехмерных уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ), дополненное проведением стохастического анализа разброса геометрических форм, размеров и массы осколков. Теоретические основы данной подсистемы подробно изложены в Разделе 4.2 (см. также [1, 6]).

Подсистема «Alfargus/ToxicGasHazard». К функциональным возможностям подсистемы относятся:

- анализ образования и эволюции опасных газовоздушных облаков после разрушения газопровода;
- анализ распространения токсических паров жидкостей, разлившихся в окружающей среде при разрушении трубопроводов или резервуаров хранения;
- построение зон токсического поражения и зон пожаровзрывоопасности при прогнозируемой аварийной ситуации.

Методология «Alfargus/ToxicGasHazard» базируется на численном решении трехмерных уравнений Рейнольдса с учетом рельефа местности и состояния атмосферы. Для учета существующей неопределенности в состоянии атмосферы используются элементы стохастического анализа. Описание методологии данной подсистемы приведено в Главе 4 (см. также [1, 6, 45, 54, 55]).

Подсистема «Alfargus/ToxicLiquidHazard». Функциональными возможностями подсистемы являются:

- анализ образования и эволюции зон распространения жидкости в реках и водоемах после разрушения трубопроводов или резервуаров хранения;
- построение зон токсического поражения и зон пожаровзрывоопасности при прогнозируемой аварийной ситуации.

Методология подсистемы «Alfargus/ToxicLiquidHazard» строится на основе численного решения уравнений гидродинамики с учетом рельефа местности и режимов функционирования водоемов. Ее описание частично представлено в Главе 4.

Подсистема «Alfargus/FireHazard». В качестве ее основных функциональных возможностей можно перечислить:

- анализ теплового поражения людей и территории при аварийном горении транспортируемых по трубопроводам продуктов;
- построение зон теплового поражения при прогнозируемой аварии.

Методология, положенная в основание компьютерной подсистемы «Alfargus/FireHazard», предполагает численное решение уравнений Рейнольдса, дополненных уравнениями химической кинетики и уравнениями переноса лучистой энергии. Для учета существующей неопределенности в состоянии атмосферы используется стохастический анализ. Описание методологии данной подсистемы представлено в Главе 4 (см. также [4, 6, 56–58]).

Подсистема «Alfargus/RiverFlow». В качестве ее основных функциональных возможностей можно перечислить:

- анализ динамики распространения загрязнений по системам промышленной канализации и рекам;
- построение зон возможного токсического поражения людей.

Методология «Alfargus/RiverFlow» требует численного решения модифицированных уравнений Сен-Венана, дополненного элементами стохастического анализа. Ее описание представлено в Главе 5 (см. также [5, 6, 27]).

Подсистема «Alfargus/Ranking». Основное назначение данной подсистемы заключается в построении обобщенных зон повышенной опасности при эксплуатации трубопроводной сети и ранжировании участков трубопроводов по срокам их ремонта и замены. Ранжирование участков трубопроводов производится на базе анализа результатов эксплуатации рассмотренных выше подсистем компьютерной аналитической системы «Alfargus». Теоретические основы данной подсистемы включены в Главы 3, 4 и 5 (см. также [1]).

Подсистема «Alfargus/OptimFlow». В качестве ее основных функциональных возможностей можно перечислить:

- выбор оптимальных параметров работы оборудования трубопроводной сети, обеспечивающих снижение энергетических (финансовых) затрат и вредной нагрузки на окружающую среду при одновременном выполнении контрактных обязательств;
- оптимизацию нестационарных и установившихся режимов транспортирования продуктов по трубопроводной сети при нормальном функционировании, реконструкции сети, в нештатных ситуациях и т.д.

Методология «Alfargus/OptimFlow» базируется на комплексном применении гибридных методов, объединяющих достоинства и компенсирующих недостатки общих подходов нелинейного и динамического программирования, а также на постановке и решении математических задач оптимального управления. Ее описание представлено в Главе 2 (см. также [1, 2, 5, 6, 30, 59, 60]).

Подсистема «Alfargus/Planning» используется в режиме «электронного помощника» в формировании долгосрочных планов инспекции трубопроводной сети, а также ремонта и замены ее отдельных дефектных участков. Планирование базируется на результатах применения выше рассмотренных подсистем компьютерной аналитической системы «Alfargus». Теоретические основы данной подсистемы включены в Главы 2, 3 и 4 (см. также [61, 62]).

1.7. Формулировка **первой версии** расширенной концепции

Анализ основных принципов и способов моделирования трубопроводных и канальных систем (см. Разделы 1.1 – 1.4), а также примеров их практической реализации (см. Разделы 1.5 и 1.6), позволяет сформировать взаимосвязный список ключевых положений, которые составляют ядро новой редакции концепции численного моделирования **магистральных** трубопроводных сетей и систем каналов с открытым руслом¹. Данный список имеет следующий вид:

¹ Здесь следует напомнить, что термин «системы каналов с открытым руслом» включает в себя природные системы малых и средних рек.

1. **Высокоточные методы численного моделирования жизненных циклов трубопроводных сетей и систем каналов с открытым руслом должны стать обязательной составной частью современных технологий их проектирования, сооружения¹, эксплуатации и реконструкции.** Основное назначение данных методов в составе указанных технологий – это достоверная верификация и научное обоснование принимаемых технических решений, связанных с оценкой фактического (или прогнозируемого) состояния реальной (или проектируемой) трубопроводной или канальной системы. Методы также направлены на выработку рекомендаций по совершенствованию трубопроводных конструкций и безопасному оптимальному управлению функционированием сетей трубопроводов или систем каналов с открытым руслом в соответствии со строгим выполнением производственных заданий и контрактных обязательств с учетом взаимодействия сети с окружающей средой, действий третьих лиц (включая террористические атаки), аварийных ситуаций и т.д. Особое значение в рамках технологий проектирования, сооружения, эксплуатации и реконструкции трубопроводных или канальных систем имеет практическое применение представленных методов для детального анализа вредных воздействий промышленных объектов ТЭК на окружающую среду при номинальных режимах их эксплуатации и в аварийных ситуациях. С целью повышения надежности трубопроводов при выборе труб для их строительства (реконструкции или ремонта) необходимо использовать методы численного анализа влияния остаточного НДС, возникающего в процессе изготовления труб, на прочность трубопроводов при последующей эксплуатации.
2. Для наиболее полного удовлетворения требованиям достоверности и научной обоснованности принимаемых технических решений, а также с целью обеспечения безопасности и эффективности управления функционированием трубопроводных и канальных сетей, **указанные методы численного моделирования должны базироваться на построении и численном анализе комплекса взаимосвязанных научно обоснованных математических моделей объектов трубопроводных (канальных) сетей и/или физических процессов, протекающих в них. С целью повышения эффективности контроля состояния трубопроводов необходимо также моделировать методы их технической диагностики и работу соответствующего приборного оснащения. Взаимосвязь между моделями внутри комплекса целесообразно осуществлять путем взаимного формирования краевых условий и модификаций общих баз данных.** Такой подход к моделированию физических процессов в трубопроводных и канальных сетях является правомерным, т.к. реальное функционирование данных систем можно представить в виде комплекса взаимосвязанных процессов. Для высокоточного описания каждого процесса, как правило, требуется специальная математическая модель. Сказанное выше в полной мере относится к моделированию объектов трубопроводных (канальных) сетей и методов их технической диагностики.
3. **В основу разрабатываемых высокоточных математических моделей (объектов трубопроводных или канальных систем, протекающих в них физических процессов и способов их диагностики) должны быть положены базовые уравнения механики и электродинамики сплошных сред, адаптированные для решения соответствующих производственных задач ТЭК и соответствующих надзорных организаций.** Для их численного анализа необходимо использовать современные методы вычислительной механики и вычислительной электродинамики, а также методы

¹ Под термином «сооружение» здесь также понимается производство труб.

математического программирования, качественной теории дифференциальных уравнений и оптимального управления. Адекватность разработанных математических моделей исследуемым объектам трубопроводных систем и сетей каналов с открытым руслом, процессам их функционирования и диагностики, а также сходимость методов их численного анализа к достоверным результатам, должны обосновываться теоретически и подтверждаться численными и натурными экспериментами. Для повышения надежности решения особо ответственных производственных задач необходимо дублировать поиск результатов за счет использования нескольких методов численного анализа применяемых моделей.

4. ***При переходе от базовых уравнений механики и электродинамики сплошных сред к математическим моделям жизненного цикла трубопроводных и канальных систем следует применять правило минимизации глубины необходимых упрощений и допущений.*** Соблюдение данного правила, прежде всего, направлено на максимальное сохранение исходной теоретически и экспериментально обоснованной аппроксимации реальных физических процессов базовыми математическими моделями¹. В то же время, данное правило ограничивает излишнюю подробность (соответственно, и сложность) конкретной модели. Это происходит в результате исключения из модели описаний отдельных составляющих физических процессов и/или элементов конструкций, незначительность влияния которых на общую физическую картину состояния и функционирования трубопроводных и канальных систем в рамках решаемой задачи является научно обоснованной². Здесь также следует отметить, что данное правило не требует использования при расчетах только трехмерных математических моделей. Высокоточные модели могут иметь различную размерность и при этом адекватно описывать исследуемые объекты и процессы в соответствии с постановкой практической задачи³.
5. ***Одним из главных направлений практической реализации указанных в пункте 1 методов численного моделирования в рамках современных технологий проектирования, сооружения, эксплуатации, реконструкции сетей магистральных трубопроводов и каналов с открытым руслом является разработка и эксплуатация высокоточных компьютерных симуляторов технологических процессов изготовления труб и высокоточных компьютерных симуляторов функционирования трубопроводных (канальных) систем.*** Данные симуляторы по своей сути являются специализированными компьютерными аналитическими системами, обеспечивающими высокоточные оценки фактических распределений в пространстве и/или во времени параметров состояния и полного спектра режимов функционирования сети трубопроводов (системы каналов с открытым руслом). Указанные оценки можно представить в виде функциональных зависимостей от заданных воздействий на сеть и соответствующих краевых условий. При этом накладываются обязательные условия проведения адекватного моделирования геометрии трубопроводных конструкций (участков каналов с открытым руслом), течений продуктов в трубопроводах (каналах с открытым руслом), режимов функционирования оборудования сети, динамики отборов продуктов потребителями, динамики притоков продуктов от

¹ Это замечание поясняет употребление в названии правила термина «минимизация».

² Это замечание поясняет употребление в названии правила термина «необходимые».

³ Размерность модели может существенно повлиять на продолжительность ее численного анализа, делая затраты времени на расчеты неприемлемыми с точки зрения производственной практики. В качестве примера такой практики можно привести оперативное управление транспортированием продуктов по трубопроводным и канальным системам.

поставщиков, технологий ремонта дефектных участков трубопроводов и т.д. Выполнение перечисленных условий должно обеспечиваться с учетом изменений состояния окружающей среды, возможности возникновения аварийных разрывов или течей трубопроводов, возможных сбросов загрязняющих веществ в каналы, вероятности аварии вследствие вмешательства в работу сети третьих лиц и т.д. Построение симуляторов должно проводиться на базе ключевых положений 3 и 4. Под высокой точностью оценок параметров состояния и процессов функционирования сети здесь подразумевается максимально возможное удовлетворение современным требованиям к достоверности результатов моделирования, существующим в отраслях ТЭК и соответствующих надзорных организациях.

6. С целью покрытия всего спектра производственных задач, решаемых при проектировании, эксплуатации и реконструкции трубопроводных (канальных) сетей, *помимо непосредственного применения высокоточных компьютерных симуляторов, необходимо использовать частные вычислительные технологии. Они применяются для оценки несущей способности отдельных сложных объектов трубопроводных конструкций, детального расследования реальных аварийных ситуаций, анализа и оптимального управления единичными нештатными режимами транспортирования продуктов по трубопроводным или канальным системам, совершенствования конкретных технологических операций трубоного производства, и т.д. Вычислительные технологии анализа специальных случаев функционирования трубопроводных (канальных) систем и совершенствования отдельных операций изготовления труб можно рассматривать как научно обоснованные объединения взаимосвязанных формализованных алгоритмов действий специалистов ТЭК и/или надзорных организаций, направленных на эффективное и аргументированное решение производственных задач, и прикладного программно-математического обеспечения, выступающего в качестве высокоточного инструмента для решения поставленных задач.* В состав прикладного программно-математического обеспечения частных вычислительных технологий могут включаться высокоточные компьютерные симуляторы функционирования трубопроводных (канальных) систем и высокоточные компьютерные симуляторы технологических процессов изготовления труб.
7. *Эксплуатация указанных выше компьютерных симуляторов и частных вычислительных технологий не должна требовать от специалистов ТЭК и/или надзорных организаций углубленной подготовки в областях численного моделирования, вычислительной механики, вычислительной электродинамики и математической оптимизации.* Работу с данными симуляторами и вычислительными технологиями необходимо максимально приблизить к условиям повседневного труда соответствующих специалистов ТЭК и/или надзорных организаций. Это должно, прежде всего, достигаться в результате расширения интеллектуальной автоматизации их труда, которая также способствует сокращению ошибок в решении производственных задач за счет снижения влияния человеческого фактора.

Изложенная выше в виде ключевых положений формулировка *новой редакции* концепции численного моделирования **магистральных** трубопроводных сетей и систем каналов с открытым руслом была разработана В.Е. Селезневым. Ее исходный вариант был представлен на рассмотрение научно-технической общественности в конце прошлого века (см., например, [16, 17, 22]). Свое последующее развитие первоначальная редакция концепции получила в работах [5–7]. Ее формирование и практическое воплощение стало возможным в результате бурного развития методов математического

моделирования, компьютерной техники и средств технической диагностики.

Здесь следует отметить, что новую редакцию концепции можно представить как **расширенную концепцию численного моделирования магистральных трубопроводных систем и систем каналов с открытым руслом**. Такое определение будет применяться в последующих Главах и Приложениях настоящей монографии.

Практическая реализация расширенной концепции численного моделирования, прежде всего, направлена:

- на повышение безопасности, надежности, эффективности трубопроводных и канальных сетей промышленных энергетических объектов (например, газотранспортных предприятий, тепловых электростанций (ТЭС), атомных электростанций (АЭС), магистральных нефтепроводов (МН), нефтехимических производств, промышленного холодильного оборудования и т.д.) на протяжении их жизненного цикла, включая проектирование и строительство;
- на совершенствование трубного производства с целью повышения качества и расширения номенклатуры выпускаемой продукции;
- на снижение затрат на ремонт и реконструкцию **магистральных** трубопроводных и канальных систем;
- на научно обоснованное выявление факторов, способствующих или препятствующих развитию аварий в трубопроводных и канальных сетях, а также научно обоснованную разработку мероприятий (включая антитеррористические мероприятия), обеспечивающих предотвращение аварийных ситуаций;
- на научно обоснованное прогнозирование последствий и уменьшение ущерба от аварий в трубопроводных и канальных сетях для населения и окружающей среды;
- на разработку научно обоснованных оптимальных алгоритмов управления функционированием трубопроводных и канальных систем для снижения затрат на транспортирование продуктов и уменьшение сопутствующих вредных воздействий на людей и окружающую среду, и т.д.

Использование расширенной концепции в практической работе проектировщиков трубопроводных систем позволяет перейти от традиционных методов проектирования к **проектированию по научно обоснованному прогнозу фактического состояния и полного спектра прогнозируемых режимов функционирования трубопроводной системы**. Такой переход открывает перед проектировщиком уникальную возможность совершенствовать проектные решения по результатам численного моделирования, максимально приближенным к реальным условиям дальнейшей эксплуатации объектов трубопроводного транспорта.

Предложенную **расширенную концепцию можно использовать в качестве теоретического фундамента для построения компьютерных аналитических систем управления целостностью трубопроводов**. Такая возможность была проиллюстрирована в Разделе 1.6 на примере компьютерной системы «Alfargus».

Эта концепция позволяет разрабатывать обобщенные вычислительные технологии комплексной оценки состояния трубопроводов [1, 5, 6, 23, 61, 62], представляющие собой формализованные алгоритмы действий специалистов ТЭК по научно обоснованному применению компьютерных аналитических систем управления целостностью трубопроводов, высокоточных компьютерных симуляторов (не вошедших в состав компьютерных аналитических систем) и соответствующих частных вычислительных технологий анализа специальных случаев функционирования трубопроводных систем.

В последующих Главах и Приложениях настоящей монографии содержатся детальное изложение и научное обоснование высокоточных методов численного

моделирования жизненных циклов трубопроводных и канальных систем, построенных на базе описанной выше расширенной концепции и позволяющих реализовать на практике ее ключевые положения. В книгу были включены только методы, получившие в последнее десятилетие широкое практическое применение при решении производственных задач и подтвердившие свою высокую эффективность и надежность. Данные методы, по мнению авторов настоящей монографии, имеют хорошие перспективы дальнейшего применения и развития в различных отраслях промышленности, а также в природоохранной деятельности. Они прошли многолетнюю проверку на производстве и успешно выдержали многочисленные научные обсуждения, проводимые авторами монографии с ведущими представителями российской и зарубежной научно-технической общественности.

ГЛАВА 2

Математическое моделирование транспортирования продуктов по трубопроводным системам

2.1. Об объекте моделирования

Одним из главных компонентов предприятий энергетики, машиностроения, коммунального хозяйства, газовой, химической и пищевой отраслей промышленности являются системы трубопроводов высокого давления. Поэтому в данной Главе рассматриваются математические аспекты построения и функционирования высокоточных компьютерных симуляторов транспортирования продуктов по протяженным разветвленным трубопроводным системам. Изложение материала в основном будет проводиться на примере трубопроводной сети газотранспортного предприятия.

Типовое газотранспортное предприятие объединяет несколько компрессорных станций, соединенных между собой многониточными линейными частями магистральных газопроводов, состоящих из одной ÷ десяти параллельно проложенных труб большого диаметра (ниток) [6]. Длина ЛЧМГ между двумя соседними КС, как правило, изменяется от нескольких десятков до двух сотен километров. Рабочее давление в магистральных газопроводах, как правило, составляет 3,0÷7,8 МПа. Линейные части магистральных газопроводов прокладываются под грунтом, на грунте, над грунтом, над водой или в воде (на переходах через водные преграды, морская прокладка трубопроводов и т.п.).

Компрессорная станция состоит из одного или нескольких компрессорных цехов. В компрессорном цехе эксплуатируется группа газоперекачивающих агрегатов. Объединение ГПА в КЦ и соединение цехов между собой осуществляется с помощью системы одностаночных технологических газопроводов высокого давления. Длина ТГ, как правило, не превышает одной ÷ двух тысяч метров.

Для очистки поступающего в центробежные нагнетатели ГПА природного газа от твердых и жидких примесей на компрессорной станции используются фильтры-сепараторы и/или пылеуловители.

По принципу работы ГПА делятся на поршневые и центробежные агрегаты. Поршневые ГПА обладают малой производительностью и используются главным образом на магистральных газопроводах небольшой мощности. Поэтому, при дальнейшем изложении материала в монографии, говоря о газоперекачивающих агрегатах, будем подразумевать агрегаты с центробежными нагнетателями. Такие ГПА можно условно разделить на две взаимосвязанные составляющие: ЦН и силовой привод (электропривод или газотурбинная установка). Центробежный нагнетатель приводится в действие от силового привода через муфту. Мощность силового привода для разных типов ГПА изменяется от 4 МВт до 27 МВт.

Компрессорная станция может быть оснащена как одинаковыми, так и разнотипными ГПА. На практике даже в случае оборудования КС одним и тем же типом ГПА их фактические рабочие характеристики отличаются друг от друга. Это можно объяснить, например, различной степенью износа конкретных газоперекачивающих агрегатов.

Для обеспечения прочности ЛЧМГ и сохранности окружающей среды транспортируемый газ после компримирования охлаждается. В газовой промышленности для этой цели в состав оборудования КС включаются аппараты воздушного охлаждения, позволяющие независимо от времени года понизить температуру газа до 308 К.

В зависимости от химического состава, осушки и степени очистки от посторонних примесей транспортируемый по МГ природный газ можно рассматривать как однокомпонентный газ, многокомпонентную газовую смесь или многофазную среду¹. При математическом моделировании транспортирования природного газа через КС он описывается как однокомпонентный химически инертный газ, для которого известны физико-механические свойства и уравнения состояния (УРС).

2.2. Высокоточный компьютерный газодинамический симулятор газотранспортного предприятия

В соответствии с расширенной концепцией численного моделирования **магистральных** трубопроводных сетей и систем каналов с открытым руслом, сформулированной в Разделе 1.7, одним из наиболее перспективных подходов к достоверному анализу, детальному мониторингу и безопасному оптимальному управлению функционированием газотранспортной сети является построение и эксплуатация соответствующего высокоточного компьютерного газодинамического симулятора.

Современный ГДС – это специализированная компьютерная аналитическая система, обеспечивающая высокоточные расчетные оценки [90]:

- фактических пространственно-временных распределений² газодинамических параметров полного спектра режимов транспортирования природного газа по конкретной протяженной разветвленной ГТС;
- фактических временных распределений основных параметров работы оборудования ГТС.

Перечисленные распределения при моделировании в ГДС представляются в виде искомым функциональных зависимостей³ от заданных управляющих воздействий на ГТС и заданных краевых условий. При этом неотъемлемым требованием, предъявляемым к ГДС, служит требование проведения адекватного моделирования:

- нестационарных неизотермических течений многокомпонентных газовых смесей (или многофазных сред с малым содержанием примесей) в длинных многониточных разветвленных трубопроводах, имеющих произвольную ориентацию в пространстве (см. Раздел 2.1);
- полного спектра режимов функционирования газоперекачивающих агрегатов, пылеуловителей, аппаратов воздушного охлаждения, автоматических регуляторов давления и иного оборудования, задействованного при транспортировании природного газа;
- переключения кранов на крановых площадках ЛЧМГ и технологических кранов КС;
- динамики отборов природного газа потребителями;
- динамики притоков природного газа от поставщиков, и т.д.

Выполнение перечисленных требований должно обеспечиваться с учетом изменений состояния окружающей среды, возможности возникновения аварийных разрывов или течей трубопроводов, вероятности аварии из-за вмешательства в работу ГТС третьих

¹ Под многофазными средами здесь понимаются смеси «газ – жидкость (пленочное течение)» или смеси «газ – жидкость (пленочное течение) – мелкодисперсные твердые включения».

² Под распределением параметров по пространству здесь подразумевается их распределение по длине трубопровода.

³ Как правило, данные зависимости являются нелинейными и не имеют аналитического представления.

лиц (включая террористические атаки) и т.д.

Высокая точность расчетных оценок в ГДС для фактических параметров работы оборудования сети и режимов транспортирования природного газа достигается в результате:

- 1) научно обоснованной минимизации глубины необходимых упрощений и допущений при построении математических моделей транспортирования многокомпонентных газовых смесей или многофазных сред по протяженной разветвленной ГТС на основе адаптации полной системы уравнений механики жидкостей и газов¹;
- 2) научно обоснованной минимизации глубины необходимых упрощений и допущений при построении расчетной схемы моделируемой ГТС или ее фрагментов;
- 3) совершенствования методов численного анализа построенных математических моделей по результатам теоретического исследования их сходимости и оценки возможных погрешностей решения;
- 4) научно обоснованного учета взаимного влияния компонентов ГТС при моделировании ее функционирования;
- 5) эпизодического² научно обоснованного подбора интегральных константных характеристик³ конкретной ГТС или ее фрагментов;
- 6) детального моделирования технологий и диспетчерских приемов управления транспортированием природного газа для конкретной ГТС или ее фрагментов;
- 7) автоматизированной математической фильтрации ошибок в исходных данных, поступающих от SCADA-системы, и т.д.

Методы численного анализа трубопроводных сетей, формализованные в симуляторе, должны быть обязательно ориентированы на обеспечение использования ГДС:

- при прогнозировании и анализе режимов функционирования проектируемой или реконструируемой (ремонтируемой) ГТС (см. Раздел 1.5 и монографию [2]);
- при построении краткосрочных и долгосрочных научно обоснованных прогнозов оптимальных и безопасных режимов установившегося и неустойчивого транспортирования природного газа при обязательном выполнении производственных заданий и контрактных обязательств конкретного газотранспортного предприятия;
- при разработке программно-аппаратных комплексов предотвращения или раннего обнаружения аварийных ситуаций в трубопроводной сети.

Для конкретного газотранспортного предприятия ГДС строится в результате объединения математических моделей КС в единую модель трубопроводной сети данного предприятия с помощью моделей ЛЧМГ. При этом модели КС в соответствии с их технологическими схемами строятся в результате объединения моделей ГПА, АВО и ПУ с помощью моделей ТГ.

Номинальным режимом эксплуатации ГДС является его круглосуточное функционирование, при котором диспетчерский персонал газотранспортного предприятия должен регулярно получать расчетную информацию о текущих и прогнозируемых параметрах природного газа и оборудования ГТС. Для обеспечения вышесказанного в ГДС должна

¹ Это одна из базовых систем уравнений механики сплошных сред, рассматриваемых в настоящей монографии (см. Главу 1).

² При условии сохранения топологии и технического состояния трубопроводной системы.

³ Например, это могут быть шероховатости внутренних стенок труб, распределенные по длине трубопроводов.

поступать в режиме реального времени информация о параметрах течений природного газа на границах сети, об изменениях в состоянии оборудования ГТС и внешней среды. Как отмечалось в Разделе 1.3, такая информация в ГДС автоматически поставляется с помощью SCADA-системы, эксплуатирующейся в газотранспортном предприятии. Результаты расчетных оценок рекомендуемых управляющих воздействий на оборудование ГТС и прогнозируемых при этом параметрах транспортирования газа передаются от ГДС к диспетчерскому персоналу для принятия окончательных решений по эффективному управлению безопасным функционированием сети.

Управление модельным транспортированием природного газа в ГДС осуществляется подачей управляющих команд:

- на изменение угла атаки направляющих устройств (лопаточных решеток) на входах ЦН, оснащенных данными устройствами;
- на изменение частот вращения валов всех ГПА (или их включение/выключение);
- на открытие или закрытие кранов на КС и крановых площадках ЛЧМГ;
- на изменение объемов потребления газа промышленными предприятиями и социальными объектами;
- на изменение заданий по редуцированию газа в узлах редуцирования ГТС;
- на изменение заданий для режимов работы АВО, и т.д.

Таким образом, реализованное в ГДС виртуальное управление транспортированием природного газа через газотранспортное предприятие полностью соответствует своему реальному прототипу.

Как отмечалось в Разделе 1.3, в общем случае ГДС можно разделить на три взаимосвязанных части. При этом ни одна из этих частей не может быть исключена из ГДС.

Первой составляющей ГДС является построенная из типовых сегментов **расчетная схема трубопроводной системы**, минимально отличающаяся от полной топологии реальной ГТС с учетом размещения кранов, конструкций ЛЧМГ и технологических обвязок КС, и т.д. Вторая составляющая симулятора представляет собой **базу данных ГДС**, содержащую исходную и оперативную информацию об изменяющейся во времени топологии сети¹, параметрах трубопроводов, технологических режимах и правилах управления транспортированием газовых смесей для конкретного газотранспортного предприятия. Третьим обязательным компонентом ГДС является **расчетное ядро** (специализированный программно-математический комплекс), оперирующее двумя его первыми элементами и предназначенное:

- для заполнения и сопровождения базы данных ГДС;
- для построения с применением базы данных ГДС расчетных схем моделируемой газотранспортной системы;
- для численного анализа построенных расчетных схем ГТС с использованием базы данных ГДС в соответствии с технологическими режимами и правилами управления транспортированием газовых смесей, принятыми на данном предприятии.

Расчетное ядро ГДС может быть дополнено компьютерной интерфейсной оболочкой, имитирующей работу реальных пультов управления в Диспетчерских центрах газотранспортных предприятий в привычной для диспетчеров визуальной форме.

Основная часть нижеследующих Разделов данной Главы посвящена изложению и анализу математических методов моделирования транспортирования природного газа по

¹ Изменения в топологии ГТС здесь производятся за счет открытия или закрытия кранов на крановых площадках ЛЧМГ и кранов технологической обвязки КС.

трубопроводным сетям, реализованных в расчетном ядре ГДС. Эти методы также применяются при разработке вычислительных технологий анализа специальных случаев функционирования газопроводных систем (см. Раздел 1.4). Обоснование актуальности построения ГДС для отраслей ТЭК и описание примеров его практического применения подробно представлены в работах [1–7].

2.3. Моделирование течений в односточном трубопроводе

Одним из базовых объектов ГТС является односточный газопровод. Поэтому анализ математических методов моделирования трубопроводных систем, реализованных в расчетных ядрах современных ГДС, целесообразно начинать с рассмотрения подходов к моделированию транспортирования продуктов по таким трубопроводам.

В качестве объекта моделирования в этом случае выступает труба с круглым переменным поперечным сечением, переменным во времени уровнем прокладки и с абсолютно жесткими шероховатыми теплопроводными стенками. Пусть по данной трубе транспортируется вязкая сжимаемая теплопроводная гомогенная смесь газов или многофазная среда. Необходимо построить математическую модель неустановившегося неизоэнтальпического турбулентного течения указанной газовой смеси или многофазной среды по трубе с заданными параметрами.

2.3.1. Течение однокомпонентного газа

Построение такой модели здесь будет производиться поэтапно. Вначале описывается модель транспортирования однокомпонентного газа. При этом рассматривается произвольный объем сплошной среды V , ограниченный замкнутой поверхностью S . Как известно, для этого объема в случае течения однокомпонентного газа выполняются законы сохранения массы, количества движения и энергии, которые записываются в виде¹:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho \cdot v_n dS = 0; \quad (2.1)$$

$$\iiint_V \frac{\partial (\rho \cdot \vec{v})}{\partial t} dV + \iint_S \rho \cdot \vec{v} \cdot v_n dS = - \iint_S \bar{p} \cdot \vec{n} dS + \iint_S \vec{\tau}_n dS + \iiint_V \rho \cdot \vec{F} dV; \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) \right] dV + \iint_S \rho \cdot \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) \cdot v_n dS = & - \iint_S \bar{p} \cdot v_n dS + \\ & + \iint_S \vec{\tau}_n \cdot \vec{v} dS + \iiint_V \rho \cdot \vec{F} \cdot \vec{v} dV + \iiint_V \bar{Q} dV - \iint_S \vec{W} \cdot \vec{n} dS, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где ρ – плотность газа; t – время; $\vec{v}$ – скорость газа; $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$ – проекция $\vec{v}$ на внешнюю единичную нормаль $\vec{n}$ к элементу поверхности dS ; $v = |\vec{v}|$; $\bar{p}$ – давление газа; $\vec{\tau}_n = \vec{\tau} \cdot \vec{n}$ – напряжение, обусловленное действием сил вязкого трения в газе на площадке с внешней нормалью $\vec{n}$ ($\vec{\tau}$ – тензор вязких напряжений в газе); $\vec{F}$ – удельная

¹ Учет факторов, связанных с турбулентностью рассматриваемых течений, предлагается произвести за счет подбора коэффициентов гидравлического сопротивления и эффективных коэффициентов теплопроводности.

массовая сила; $\hat{\varepsilon}$ – удельная (на единицу массы) внутренняя энергия газа; $\hat{Q}$ – удельная (на единицу объема) мощность источников тепла; $\vec{W}$ – вектор плотности потока тепла в газе. По закону Фурье $\vec{W} = -\hat{k} \cdot \vec{\nabla} \hat{T}$, где $\hat{k}(\hat{p}, \hat{T})$ – коэффициент теплопроводности газа, $\hat{T}$ – температура газа.

С помощью теоремы Гаусса – Остроградского уравнение (2.2) можно представить в виде:

$$\iiint_V \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot \vec{v})}{\partial t} dV + \iint_S \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \nu_n dS = \iiint_V (\hat{\rho} \cdot \vec{F} - \vec{\nabla} \hat{p}) dV + \iint_S \vec{\tau}_n dS. \quad (2.4)$$

Пусть газ движется по трубе с осью симметрии Ox . Площадь поперечного сечения трубы f зависит от координаты и времени, т.е. $f = f(x, t)$. Выделим объем, ограниченный двумя поперечными сечениями с площадями f и f_1 , отстоящими на расстоянии Δx одно от другого, и стенками трубы (рис. 2.1). Так как $\nu_n = -\nu_x$ на поверхности f и $\nu_n = \nu_x$ на поверхности f_1 , то для выделенного объема уравнения (2.1 – 2.3), примут вид:

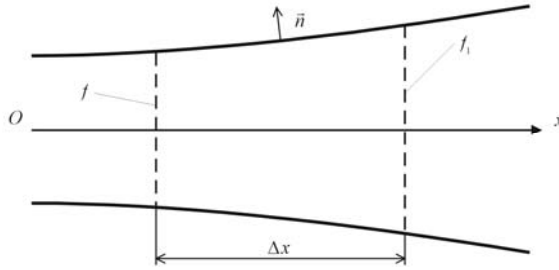


Рис. 2.1. Исследуемый объем

$$\iiint_V \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} dV + \iint_{f_1} \hat{\rho} \cdot \nu_x df - \iint_f \hat{\rho} \cdot \nu_x df + \iint_{\omega} \hat{\rho} \cdot \nu_n d\omega = 0; \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot \vec{v})}{\partial t} dV + \iint_{f_1} \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \nu_x df - \iint_f \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \nu_x df + \iint_{\omega} \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \nu_n d\omega = \\ = \iiint_V (\hat{\rho} \cdot \vec{F} - \vec{\nabla} \hat{p}) dV + \iint_{f_1} \vec{\tau}_x df - \iint_f \vec{\tau}_x df + \iint_{\omega} \vec{\tau}_n d\omega; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \right] dV + \iint_{f_1} \hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot \nu_x df - \iint_f \hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot \nu_x df + \\ + \iint_{\omega} \hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot \nu_n d\omega = - \iint_{f_1} \hat{p} \cdot \nu_x df + \iint_f \hat{p} \cdot \nu_x df - \iint_{\omega} \hat{p} \cdot \nu_n d\omega + \\ + \iint_{f_1} \vec{\tau}_x \cdot \vec{v} df - \iint_f \vec{\tau}_x \cdot \vec{v} df + \iint_{\omega} \vec{\tau}_n \cdot \vec{v} d\omega + \iiint_V \hat{\rho} \cdot \vec{F} \cdot \vec{v} dV + \iiint_V \hat{Q} dV - \\ - \iint_{f_1} W_x df + \iint_f W_x df - \iint_{\omega} W_n d\omega, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где ω – площадь боковой поверхности выделенного элемента трубы. Преобразуем объемные интегралы с точностью до членов более высокого порядка малости:

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} dV &= \int_{\Delta x} \left(\iint_f \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} df \right) dx = \Delta x \cdot \iint_f \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} df; \\ \iiint_V \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} dV &= \Delta x \cdot \iint_f \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} df; \\ \iiint_V (\bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{F}} - \bar{\nabla} \bar{p}) dV &= \Delta x \cdot \iint_f (\bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{F}} - \bar{\nabla} \bar{p}) df; \\ \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \cdot \left(\bar{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \right] dV &= \Delta x \cdot \iint_f \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \cdot \left(\bar{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \right] df; \\ \iiint_V \bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{v}} dV &= \Delta x \cdot \iint_f \bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{v}} df; \\ \iiint_V \bar{Q} dV &= \Delta x \cdot \iint_f \bar{Q} df.\end{aligned}$$

Подставив данные выражения в уравнения (2.5 – 2.7), поделив последние на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим:

$$\iint_f \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x df + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \bar{\rho} \cdot v_n d\omega = 0; \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}\iint_f \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{v}} \cdot v_x df + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{v}} \cdot v_n d\omega = \\ = \iint_f (\bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{F}} - \bar{\nabla} \bar{p}) df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\tau}_x df + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \bar{\tau}_n d\omega;\end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}\iint_f \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \cdot \left(\bar{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \right] df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot \left(\bar{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot v_x df + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \bar{\rho} \cdot \left(\bar{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot v_n d\omega = \\ = - \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{p} \cdot v_x df - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \bar{p} \cdot v_n d\omega + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\tau}_x \cdot \bar{\mathbf{v}} df + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \bar{\tau}_n \cdot \bar{\mathbf{v}} d\omega + \\ + \iint_f \bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{v}} df + \iint_f \bar{Q} df - \frac{\partial}{\partial x} \iint_f W_x df - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} W_n d\omega.\end{aligned} \quad (2.10)$$

Распишем интегралы $\frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{v}} \cdot v_x df$ и $\frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\tau}_x df$. Для этого введем сопровождающий трехгранник криволинейной оси Ox (см. рис. 2.2). Векторы $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}$, $\bar{\mathbf{k}}$ зависят от координаты x и являются ортами касательной, нормали и бинормали к Ox соответственно. Разложим векторы $\bar{\mathbf{v}}$ и $\bar{\tau}_x$ по осям трехгранника: $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{i}} \cdot v_x + \bar{\mathbf{j}} \cdot v_y + \bar{\mathbf{k}} \cdot v_z$; $\bar{\tau}_x = \bar{\mathbf{i}} \cdot \tau_{xx} + \bar{\mathbf{j}} \cdot \tau_{xy} + \bar{\mathbf{k}} \cdot \tau_{xz}$. Имея в виду, что f – плоское сечение, перпендикулярное к Ox , получим:

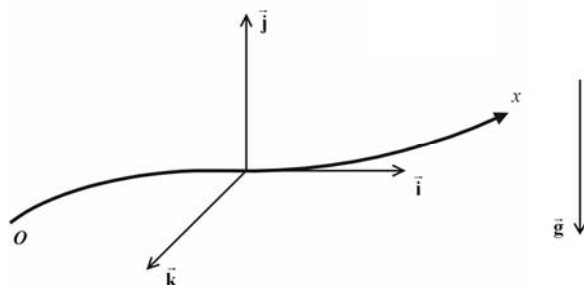


Рис. 2.2. Орты системы координат

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot \bar{v} \cdot v_x df &= \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x \cdot (\vec{i} \cdot v_x + \vec{j} \cdot v_y + \vec{k} \cdot v_z) df = \\
 &= \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x \cdot v_x df + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x \cdot v_y df + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x \cdot v_z df + \\
 &+ \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} \cdot \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x \cdot v_x df + \frac{\partial \vec{j}}{\partial x} \cdot \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x \cdot v_y df + \frac{\partial \vec{k}}{\partial x} \cdot \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x \cdot v_z df; \\
 \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\tau}_x df &= \frac{\partial}{\partial x} \iint_f (\vec{i} \cdot \tau_{xx} + \vec{j} \cdot \tau_{xy} + \vec{k} \cdot \tau_{xz}) df = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \tau_{xx} df + \\
 &+ \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \tau_{xy} df + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \tau_{xz} df + \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} \cdot \iint_f \tau_{xx} df + \frac{\partial \vec{j}}{\partial x} \cdot \iint_f \tau_{xy} df + \frac{\partial \vec{k}}{\partial x} \cdot \iint_f \tau_{xz} df.
 \end{aligned}$$

В соответствии с известными формулами Френе – Серре:

$$\frac{\partial \vec{i}}{\partial x} = \frac{\vec{j}}{R_1}; \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial x} = -\frac{\vec{i}}{R_1} + \frac{\vec{k}}{\zeta}; \quad \frac{\partial \vec{k}}{\partial x} = -\frac{\vec{j}}{\zeta},$$

где R_1 – радиус кривизны оси Ox , а ζ – радиус кручения оси Ox и, следовательно,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot \bar{v} \cdot v_x df &= \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x \cdot v_x df + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x \cdot v_y df + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x \cdot v_z df + \\
 &+ \frac{\vec{j}}{R_1} \cdot \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x \cdot v_x df + \left(-\frac{\vec{i}}{R_1} + \frac{\vec{k}}{\zeta} \right) \cdot \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x \cdot v_y df - \frac{\vec{j}}{\zeta} \cdot \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x \cdot v_z df;
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\tau}_x df &= \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \tau_{xx} df + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \tau_{xy} df + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \tau_{xz} df + \\
 &+ \frac{\vec{j}}{R_1} \cdot \iint_f \tau_{xx} df + \left(-\frac{\vec{i}}{R_1} + \frac{\vec{k}}{\zeta} \right) \cdot \iint_f \tau_{xy} df - \frac{\vec{j}}{\zeta} \cdot \iint_f \tau_{xz} df.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

В дальнейшем будем считать, что площадь и форма поперечного сечения трубы изменяются достаточно плавно, т.е. косинус угла между нормалью к боковой поверхности и осью Ox есть малая величина, квадратом которой можно пренебречь по сравнению с единицей. Этому условию удовлетворяют трубы с углом расширения по поперечному сечению не больше 15° . Тогда $d\omega \approx d\chi \cdot dx$, где χ – периметр контура поперечного сечения трубы, и

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \hat{\rho} \cdot v_n d\omega &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \int \int \hat{\rho} \cdot v_n d\chi dx \approx \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \Delta x \cdot \int_{\chi} \hat{\rho} \cdot v_n d\chi = \int_{\chi} \hat{\rho} \cdot v_n d\chi, \\
\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot v_n d\omega &\approx \int_{\chi} \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot v_n d\chi, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \hat{\tau}_n d\omega \approx \int_{\chi} \hat{\tau}_n d\chi, \\
\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot v_n d\omega &\approx \int_{\chi} \hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot v_n d\chi, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \hat{p} \cdot v_n d\omega \approx \int_{\chi} \hat{p} \cdot v_n d\chi, \\
\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \hat{\tau}_n \cdot \vec{v} d\omega &\approx \int_{\chi} \hat{\tau}_n \cdot \vec{v} d\chi, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} W_n d\omega \approx \int_{\chi} W_n d\chi.
\end{aligned}$$

Поворот трубопровода при моделировании будем условно представлять в виде прямолинейного участка с повышенным гидравлическим сопротивлением. Гидравлические сопротивления нескольких поворотов учитываются при расчетах введением так называемого интегрального коэффициента гидравлического сопротивления. Поэтому здесь можно считать, что величины $1/R_l$ и $1/\zeta$ малы. Тогда, подставляя уравнения (2.11), (2.12) и рассмотренные выше выражения для пределов в (2.8), (2.9), (2.10) и проектируя векторное уравнение (2.9) на ось Ox , получим:

$$\iint_f \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \hat{\rho} \cdot v_x df + \int_{\chi} \hat{\rho} \cdot v_n d\chi = 0; \quad (2.13)$$

$$\iint_f \frac{\partial (\hat{\rho} \cdot v_x)}{\partial t} df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \hat{\rho} \cdot v_x^2 df + \int_{\chi} \hat{\rho} \cdot v_x \cdot v_n d\chi = \iint_f \left(\hat{\rho} \cdot F_x - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \tau_{xx} df + \int_{\chi} \tau_{nx} d\chi; \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}
&\iint_f \frac{\partial}{\partial t} \left[\hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \right] df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot v_x df + \\
&+ \int_{\chi} \hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot v_n d\chi = - \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \hat{p} \cdot v_x df - \int_{\chi} \hat{p} \cdot v_n d\chi + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \hat{\tau}_x \cdot \vec{v} df + \int_{\chi} \hat{\tau}_n \cdot \vec{v} d\chi + \\
&+ \iint_f \hat{\rho} \cdot \vec{F} \cdot \vec{v} df + \iint_f \hat{Q} df - \frac{\partial}{\partial x} \iint_f W_x df - \int_{\chi} W_n d\chi.
\end{aligned} \quad (2.15)$$

Для дальнейших рассуждений преобразуем выражение $\frac{\partial}{\partial t} \iint_f \varphi(x, y, z, t) df$, где $\varphi(x, y, z, t)$ – некоторая дифференцируемая функция координат и времени. Так как $f = f(x, t)$, то приращение площади поперечного сечения, опирающейся на элемент периметра $d\chi$ за время dt (рис. 2.3а), составит: $df = v'_n \cdot d\chi \cdot dt$, где v'_n – скорость движения боковой поверхности трубы в радиальном направлении (см. рис. 2.3а). При течении вязкой жидкости или газа на боковой поверхности ω касательная составляющая скорости $v_\tau = 0$, а нормальная составляющая $v_n = \pm |\vec{v}|$. Так как нормаль $\vec{n}'$ к контуру χ лежит в плоскости, перпендикулярной Ox , и согласно сделанному предположению $\cos^2 \vartheta \ll 1$, где ϑ – угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{i}$, то при условии, что φ – угол между векторами $\vec{n}'$ и $\vec{v}$, $v'_n = |\vec{v}| \cdot \cos \varphi = v_n \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} \approx v_n$ (см. рис. 2.3б).

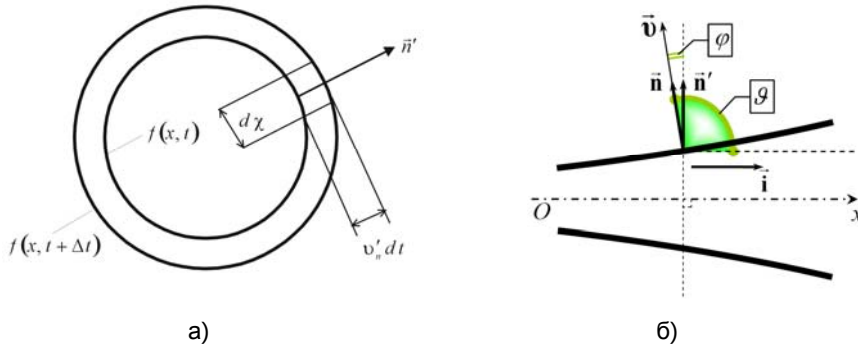


Рис. 2.3. Схемы: а) перпендикулярного сечения потока газа; б) взаимного расположения вектора скорости $\vec{v}$, ортов $\vec{n}$, $\vec{n}'$, $\vec{i}$ и задания углов φ , ϑ

Тогда, используя теорему о среднем значении, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_f \varphi(x, y, z, t) df &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\iint_{f(x, t + \Delta t)} \frac{\varphi(x, y, z, t + \Delta t)}{\Delta t} df - \iint_{f(x, t)} \frac{\varphi(x, y, z, t)}{\Delta t} df \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\iint_{f(x, t)} \frac{\varphi(x, y, z, t + \Delta t) - \varphi(x, y, z, t)}{\Delta t} df + \iint_{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)} \frac{\varphi(x, y, z, t + \Delta t)}{\Delta t} df \right] = \\ &= \iint_f \frac{\partial \varphi}{\partial t} df + \int_{\chi} \varphi \cdot v_n' d\chi \approx \iint_f \frac{\partial \varphi}{\partial t} df + \int_{\chi} \varphi \cdot v_n d\chi. \end{aligned}$$

Применяя полученную формулу к уравнениям (2.13 – 2.15), имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_f \bar{\rho} df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x df = 0; \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot v_x^2 df = \iint_f \left(\bar{\rho} \cdot F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \tau_{xx} df + \int_{\chi} \tau_{nx} d\chi; \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_f \left[\bar{\rho} \cdot \left(\bar{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \right] df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\rho} \cdot \left(\bar{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot v_x df = \\ = - \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{p} \cdot v_x df - \int_{\chi} \bar{p} \cdot v_n d\chi + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{\tau}_x \cdot \bar{v} df + \int_{\chi} \bar{\tau}_n \cdot \bar{v} d\chi + \iint_f \bar{\rho} \cdot \bar{F} \cdot \bar{v} df + \\ + \iint_f \bar{Q} df - \frac{\partial}{\partial x} \iint_f w_x df - \int_{\chi} w_n d\chi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Предполагая, что единственной действующей массовой силой является сила тяжести, получим, что $F_x = g_x = g \cdot \cos \Omega = -g \cdot \partial z_1 / \partial x$, где z_1 является координатой точки на оси трубы, отсчитываемой от произвольной горизонтальной плоскости вертикально вверх (для магистральных газопроводов – по радиусу Земли), $\vec{g}$ – ускорение свободного падения, Ω – угол между векторами $\vec{g}$ и $\vec{i}$ (см. рис. 2.2). Введем средние по сечению плотность ρ и давление p . Тогда по теореме о среднем значении можно записать:

$$\iint_f \left(\bar{\rho} \cdot F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) df = - \iint_f \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{\rho} \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) df = - f \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \right).$$

Отметим, что трубы односточных газопроводов имеют шероховатую внутреннюю поверхность и содержат множество искусственных турбулезаторов течения газа в виде сварных швов, кранов, различных врезок, мембран, мусора. Поэтому далее будем считать, что течение газа в трубе турбулентное¹, и в каждом поперечном сечении средняя скорость потока направлена по или против оси Ox , т.е. имеет только x -ую составляющую². Введем далее среднюю по сечению скорость w , температуру T , удельную (на единицу массы) внутреннюю энергию газа ε , удельную (на единицу объема) мощность объемных источников тепла Q . Тогда:

$$\begin{aligned} \iint_f \bar{\rho} \cdot \vec{F} \cdot \vec{v} df &\approx \iint_f \bar{\rho} \cdot g_x \cdot v_x df = -\rho \cdot w \cdot f \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x}; & -\frac{\partial}{\partial x} \iint_f \bar{p} \cdot v_x df &= -\frac{\partial}{\partial x} (p \cdot w \cdot f); \\ \int_{\chi} \vec{\tau}_n \cdot \vec{v} d\chi &= \int_{\chi} \tau_{nn} \cdot v_n d\chi = \overline{\tau_{nn}} \cdot \overline{v_n} \cdot \chi \approx \overline{\tau_{nn}} \cdot \overline{v'_n} \cdot \chi; & \int_{\chi} \tau_{nx} d\chi &= \tau_{\chi} \cdot \chi; \\ \int_{\chi} \bar{p} \cdot v_n d\chi &= p \cdot \overline{v_n} \cdot \chi \approx p \cdot \overline{v'_n} \cdot \chi; & \frac{\partial}{\partial x} \iint_f W_x df &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right); \\ \iint_f \bar{Q} df &\approx Q \cdot f; & \int_{\chi} W_n d\chi &= \Phi(T, T_{oc}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

где τ_{χ} – среднее по периметру χ значение τ_{nx} ; $\overline{\tau_{nn}}$ и $\overline{v_n}$ – средние по периметру χ значения проекций $\vec{\tau}_n$ и $\vec{v}$ на внешнюю нормаль $\vec{n}$; $\overline{v'_n}$ – средняя по периметру скорость движения боковой поверхности трубы в направлении, нормальном к плоскому контуру с периметром χ (см. рис. 2.3а).

Функция $\Phi(T, T_{oc})$ характеризует теплообмен ядра газового потока через газовый пограничный слой, стенку трубы и изоляцию с окружающей средой. Она выражает собой удельный (на единицу длины) суммарный тепловой поток по периметру χ поперечного сечения с площадью f от транспортируемого газа в окружающую среду ($\Phi(T, T_{oc}) > 0$ – идет отвод тепла; T_{oc} – пространственно-временное распределение температуры окружающей среды на границе расчетной области). При эксплуатации ГДС пространственно-временные распределения функции $\Phi(T, T_{oc})$ определяются на заданных временных шагах численного анализа параметров нестационарного транспортирования газа в результате решения серии сопряженных двумерных или трехмерных задач теплообмена ядра газового потока с окружающей средой [7]. При этом расчеты проводятся для предварительно выбранных ограниченных участков односточного газопровода, окруженных средами с известными теплофизическими свойствами.

¹ Для технических газов, транспортируемых по **магистральным** трубопроводам со скоростью, превышающей 0,01 м/с, число Рейнольдса Re существенно превышает критическое значение $Re_{кр} = 3000 \div 5000$. Поэтому течение газа в **магистральном** трубопроводе можно считать турбулентным.

² Для простоты решения практических задач обычно вводится фиктивная средняя скорость потока:

$$w = \left[f^{-1} \cdot \iint_f \vec{v} df \right]_{Ox}, \text{ где } [\dots]_{Ox} \text{ – оператор проектирования на ось симметрии трубопровода.}$$

Результатами такого сопряженного анализа являются оценки удельного суммарного теплового потока $\Phi(T, T_{oc})$ и соответствующие оценки параметров течения газа по трубе. Расчет значений функции $\Phi(T, T_{oc})$ и расчет параметров течения газа могут быть разделены по разным временным шагам моделирования. Данное разделение допустимо по причине существенных различий в динамике изменения указанных величин во времени. Аппроксимация результатов расчетов удельного суммарного теплового потока на всю длину трубопровода и на промежуточные временные шаги численного моделирования течения газа, как правило, проводится с использованием полиномиальных функций.

Для решения сопряженных двумерных или трехмерных задач теплообмена ядра газового потока с окружающей средой может использоваться, например, **Компьютерный Аналитический Инструментарий** «Alfargus» (см. Раздел 1.6).

Далее рассмотрим слагаемые в уравнениях (2.17), (2.18), содержащие компоненты тензора τ . Записывая выражения для τ_{xx} и τ_{nx} , имеем [63, 108]:

$$\tau_{xx} = \mu_d \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) = \frac{2}{3} \cdot \mu_d \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \approx \frac{4}{3} \cdot \mu_d \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x};$$

$$\begin{aligned} \tau_{nx} &= (\tau \cdot \vec{n}) \cdot \vec{i} = \tau_{xx} \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \mu_d \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot n_x + \mu_d \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \cdot n_y + \\ &+ \mu_d \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \cdot n_z \approx \mu_d \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot n_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot n_z \right) = \mu_d \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial v_x}{\partial n} \right), \end{aligned}$$

где μ_d – коэффициент динамической вязкости газа. Преобразуем рассматриваемые слагаемые по теореме о среднем, с учетом последних выражений:

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_f \tau_{xx} df \approx \frac{4}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \mu_d \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} df = \frac{4}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_d^f \cdot f \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad (2.20)$$

$$\int_{\chi} \tau_{nx} d\chi = \int_{\chi} \mu_d \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial v_x}{\partial n} \right) d\chi = \mu_d^{\chi} \cdot \chi \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial v_x}{\partial n} \right); \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \vec{\tau}_x \cdot \vec{v} df &= \frac{\partial}{\partial x} \iint_f (\tau_{xx} \cdot v_x + \tau_{xy} \cdot v_y + \tau_{xz} \cdot v_z) df = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \tau_{xx} \cdot v_x df \approx \frac{4}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \mu_d \cdot v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} df = \frac{4}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_d^f \cdot w \cdot f \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где μ_d^f и μ_d^{χ} – соответственно осредненные по поперечному сечению и охватывающему периметру значения μ_d , $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ и $\frac{\partial v_x}{\partial n}$ – средние по периметру χ значения производных $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ и $\frac{\partial v_x}{\partial n}$.

Для природного газа $\mu_d \sim 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$ [64]. Очевидно, что при слабых волновых процессах, когда величина $\mu_d \cdot \partial w / \partial x$ мала, слагаемыми (2.20) и (2.22) в уравнениях (2.17) и (2.18) можно пренебречь.

Для пристеночной области газового потока (особенно турбулентного) характерны большие градиенты скорости (например, в точках периметра χ). Поэтому, в общем случае пренебрегать слагаемым (2.21) в уравнении (2.17) некорректно.

Рассмотрим теперь выражения $(\overline{\tau_{nn}} \cdot \overline{v'_n} \cdot \chi)$ и $(p \cdot \overline{v'_n} \cdot \chi)$ (см. (2.19)). Здесь τ_{nn} в любой точке контура χ можно представить в виде: $\tau_{nn} = \mu_d \cdot G$, где G – линейная комбинация частных производных компонент скорости по координатам. Скорость транспортирования газа по трубопроводу обычно составляет десятки метров в секунду. Пусть на расстоянии 0,001 м от стенки трубы скорость газового потока $w \sim 10 \text{ м} / \text{с}$. Тогда производная $\partial w / \partial r \sim 10^4 \text{ с}^{-1}$ (r – радиальная координата, соответствующая цилиндрической системе с осью Oz , направленной по оси трубопровода) и $\tau_{nn} \sim 10^{-1} \text{ Па}$. При транспортировании газа по трубопроводу давление $p \sim 10^6 \text{ Па}$. Очевидно, в уравнении (2.18) слагаемым $(\overline{\tau_{nn}} \cdot \overline{v'_n} \cdot \chi)$ можно пренебречь по сравнению с $(p \cdot \overline{v'_n} \cdot \chi)$.

Следует отметить, что все вышеизложенное по поводу упрощения модели справедливо лишь в рамках рассматриваемой здесь задачи численного анализа течения газа.

Переходя к средним по поперечному сечению величинам, подставляя в уравнения (2.16 – 2.18) выражения (2.19) и пренебрегая на основании вышеизложенного слагаемыми (2.20), (2.22) и $(\overline{\tau_{nn}} \cdot \overline{v'_n} \cdot \chi)$, запишем искомую систему дифференциальных уравнений (см. ниже). Необходимо отметить, что в данной системе должны присутствовать поправки Кориолиса β на неравномерное распределение скорости, энергии и давления. Однако, как известно, при турбулентном движении в большинстве случаев $\beta \approx 1$. По данной причине указанные поправки в системе полагаются равными единице.

Итак, система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} = 0; \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w^2 \cdot f)}{\partial x} = -f \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) + \chi \cdot \tau_\chi; \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot f \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot w \cdot f \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] = & - \frac{\partial(p \cdot w \cdot f)}{\partial x} - \\ & - \rho \cdot w \cdot g \cdot f \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} - p \cdot \overline{v'_n} \cdot \chi + Q \cdot f + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \Phi(T, T_{oc}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Предположив, что характеристики, установленные для стационарных течений, сохраняются и для нестационарных (гипотеза квазистационарности для низкоскоростных течений со слабыми волновыми процессами), воспользуемся известной формулой гидравлики для касательного напряжения τ_χ , выражающей эту величину через скорость газового ядра:

$$\tau_\chi = - \frac{\lambda \cdot |w|}{8} \cdot \rho \cdot w, \quad (2.26)$$

где λ – эмпирический коэффициент гидравлического сопротивления трения в формуле Дарси – Вейсбаха [65, 66]. Для его вычисления здесь рекомендуется использовать модифицированную составную расчетную зависимость С.Н. Прялова (см. Приложение 2). Следует также отметить, что на практике коэффициент λ (или коэффициент шероховатости поверхности трубы) часто подбирают в процессе сравнительного анализа численных и натуральных экспериментов. Объясняется это тем, что гидравлическое сопротивление участка трубопровода зависит от многих факторов, главные из которых – местные сопротивления (отложения гидратов, засоренность песком и т.п.). Точный учет этих факторов невозможен. Поэтому коэффициент λ позволяет оценить их интегральный эффект.

В дальнейшем полагаем, что труба имеет круглое переменное поперечное сечение. Для такой трубы:

$$D = 2 \cdot \sqrt{\frac{f}{\pi}}; \quad \bar{v}'_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot f}} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}; \quad \chi = \pi \cdot D = 2 \cdot \sqrt{\pi \cdot f};$$

$$p \cdot \bar{v}'_n \cdot \chi = p \cdot \frac{\partial f}{\partial t}; \quad \chi \cdot \tau_\chi = -\frac{\lambda \cdot \sqrt{\pi} \cdot |w|}{4} \cdot \rho \cdot w \cdot \sqrt{f}.$$

Система уравнений (2.23 – 2.26), с учетом вышеприведенных формул, замыкается УРС $p = p(\rho, T)$ и $\varepsilon = \varepsilon(p, T)$. Одной из распространенных форм термического УРС газа является широко известное вириальное УРС:

$$\frac{p \cdot V}{R_0 \cdot T} = 1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \dots, \quad (2.27)$$

где V – объем одного моля газа; R_0 – универсальная газовая постоянная; $B, C, \dots$ – второй, третий и т.д. вириальные коэффициенты, которые зависят от температуры и не зависят от давления и плотности газа. При малой плотности газа ($V \rightarrow \infty$) УРС (2.27) вырождается в УРС Менделеева – Клапейрона. Отметим, что второе, третье и т.д. слагаемые уравнения (2.27) описывают поправку на неидеальность газа, обусловленную соответственно двойными, тройными и т.д. взаимодействиями его частиц.

Кроме (2.27) существуют достаточно точные и менее трудоемкие полуэмпирические зависимости, описывающие термическое УРС. К ним относится, например, уравнение Редлиха – Квонга [67]:

$$\left[p + \frac{a^*}{\sqrt{T} \cdot v \cdot (v + b^*)} \right] \cdot (v - b^*) = R \cdot T, \quad (2.28)$$

где $a^* = 0,4278 \cdot R^2 \cdot T_{KP}^{2,5} / p_{KP}$; $b^* = 0,0867 \cdot R \cdot T_{KP} / p_{KP}$; T_{KP} и p_{KP} – критические температура и давление газа; $R = R_0 / M$ – газовая постоянная ($\text{Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К})$); M – молярная масса ($\text{кг} / \text{моль}$). Отметим, что здесь $v = 1/\rho$ – удельный объем газа.

Для построения калорического УРС транспортируемого газа используются известные соотношения термодинамики:

$$\varepsilon(p, T) = h(p, T) - \frac{p}{\rho}; \quad (2.29)$$

$$dh = \frac{\partial h}{\partial T} \cdot dT + \frac{\partial h}{\partial p} \cdot dp = c_p \cdot dT + \frac{\partial h}{\partial p} \cdot dp, \quad (2.30)$$

где h – энтальпия; c_p – теплоемкость при постоянном давлении. При известном терми-

ческом УРС параметр $(\partial h / \partial p)_T$ можно определить из соотношения (см., например, [67]):

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = -T \cdot \left(\frac{\partial \nu}{\partial T}\right)_p + \nu. \quad (2.31)$$

Здесь следует отметить, что при известном коэффициенте Джоуля – Томсона $\mu(p, T)$ параметр $(\partial h / \partial p)_T$ может быть найден иначе. Продемонстрируем это более детально. Согласно работе [68], коэффициент Джоуля – Томсона определяется как $\mu(p, T) = (\partial T / \partial p)_h$. Раскладывая полный дифференциал от энтальпии как функции двух переменных, для изоэнтальпийных процессов имеем (см. (2.30)):

$$dh = c_p \cdot dT + \frac{\partial h}{\partial p} \cdot dp = 0. \quad (2.32)$$

Несложными преобразованиями из уравнения (2.32) можно получить следующую формулу:

$$\mu(p, T) = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = -\frac{1}{c_p} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T, \quad (2.33)$$

откуда следует, что

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = -\mu \cdot c_p. \quad (2.34)$$

Подставляя (2.34) в (2.30), можно записать:

$$dh = c_p \cdot dT - \mu \cdot c_p \cdot dp. \quad (2.35)$$

Практическое использования УРС (2.29) и (2.30) в газодинамическом моделировании, как правило, предполагает, что перед расчетом проводится построение табличной функции $\varepsilon = \varepsilon(p, T)$ для заданного диапазона давления и температуры моделируемого газа. Интегрирование уравнения (2.30) проводится методом Рунге – Кутты.

Точность УРС, применяемых для замыкания исходной системы, определяет точность и адекватность получаемых из расчетов результатов, поскольку именно УРС отражают физические (термодинамические) свойства используемой при моделировании среды. В связи с этим С.Н. Пряловым был проведен ряд дополнительных вычислительных экспериментов [6, 7] для выявления степени влияния применяемых видов УРС на получаемые результаты. Актуальность такой работы объясняется тем, что зачастую в практических расчетах прибегают к использованию упрощенных зависимостей (см., например, [11]). Это связано, как правило, со сложностью точных УРС и широко распространенным мнением о слабом влиянии вида УРС (например, калорического) на точность проводимых расчетов.

В результате вычислительных экспериментов С.Н. Прялова [6, 7] было наглядно показано, что использование разных видов калорических УРС в одной и той же модели течения газа для фиксированной постановки задачи может приводить к существенному различию в получаемых оценках параметров транспортирования газов. По данной причине для корректного моделирования функционирования трубопроводов требуется применять УРС, адекватные реальным характеристикам транспортируемых веществ. Поэтому в своих разработках авторы монографии, как правило, используют УРС (2.28 – 2.30).

С учетом вышеизложенного, замкнутую систему дифференциальных уравнений,

описывающих нестационарное турбулентное течение однокомпонентного газа в круглой трубе переменного сечения и с жесткими стенками при неизотермических режимах, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial(\rho \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w)}{\partial x} = 0; \quad (2.36a)$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w^2)}{\partial x} = -f \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} + g \cdot \rho \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) - \frac{\pi}{4} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w| \cdot R; \quad (2.36б)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot f \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot f \cdot w \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] = & - \frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w)}{\partial x} - \\ & - \rho \cdot f \cdot w \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} - p \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + Q \cdot f + \frac{\partial}{\partial x} \left[k \cdot f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \Phi(T, T_{oc}); \end{aligned} \quad (2.36в)$$

$$p = p(\rho, T); \quad \varepsilon = \varepsilon(p, T), \quad (2.36г)$$

где $R = \sqrt{f/\pi}$ – внутренний радиус трубы; $p = p(\rho, T)$ – см. (2.28); $\varepsilon = \varepsilon(p, T)$ – см. (2.29, 2.30). Система уравнений (2.36), помимо уравнений состояния (2.36г), содержит уравнение неразрывности (2.36а), уравнение изменения импульса (2.36б) и уравнение энергии (2.36в), представленные в дивергентной форме.

Система уравнений (2.36) должна быть дополнена краевыми условиями. Например, в качестве начальных условий могут рассматриваться заданные функциональные зависимости:

$$w(x, t_0) = w_0(x); \quad T(x, t_0) = T_0(x); \quad p(x, t_0) = p_0(x).$$

Начальные значения плотности $\rho(x, t_0)$ и внутренней энергии $\varepsilon(x, t_0)$ вычисляются исходя из соответствующих УРС (2.36г).

На границах моделируемого трубопровода рекомендуется в качестве граничных условий первого и второго рода задавать комбинации следующих функций и их производных:

$$\begin{aligned} T(x_B, t) = T_B(t); \quad w(x_B, t) = w_B(t); \quad p(x_B, t) = p_B(t); \quad \frac{\partial T(x_B, t)}{\partial x} = j_B(t); \\ (\rho \cdot w \cdot f)_B = q_B(t), \end{aligned}$$

где x_B – левая или правая граница трубопровода; $j_B(t)$ и $q_B(t)$ – заданные функции. При использовании математической модели (2.36) для корректного задания граничных условий их общее число на обоих концах рассматриваемого участка трубопровода, согласно [69–72], должно быть равно четырем. В качестве условий сопряжения могут быть заданы граничные условия, моделирующие полный разрыв трубопровода и/или его перекрытие (работа крана) [73, 74].

Здесь следует подчеркнуть, что принятые выше при выводе системы (2.36) необходимые упрощения и допущения накладывают определенные ограничения на применение данной модели для анализа ударно-волновых процессов в протяженных трубопроводах. Однако, теоретические выкладки и серии численных экспериментов, описанные С.Н. Пряловым в монографии [6], показали удовлетворительные, с практической точки зре-

ния, результаты применения модели (2.36) при исследовании распространения ударных волн и волн разряжения по длинным трубопроводам (см. также [75]).

Для моделирования стационарных режимов течения система уравнений (2.36) преобразуется к виду:

$$\rho \cdot f \cdot w = C_{cm} = const; \quad (2.37a)$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{C_{cm}^2}{f} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho \cdot f} \right) - g \cdot \rho \cdot \frac{dz_1}{dx} - \frac{\lambda \cdot C_{cm} \cdot |C_{cm}|}{4 \cdot R \cdot f^2 \cdot \rho}; \quad (2.37б)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = -\frac{C_{cm}^2}{2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho^2 \cdot f^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} \right) - g \cdot \frac{dz_1}{dx} + \frac{Q \cdot f}{C_{cm}} + \frac{1}{C_{cm}} \cdot \frac{d}{dx} \left[k \cdot f \cdot \frac{dT}{dx} \right] - \frac{\Phi(T, T_{oc})}{C_{cm}}; \quad (2.37в)$$

$$p = p(\rho, T); \quad \varepsilon = \varepsilon(p, T). \quad (2.37г)$$

Одним из характерных примеров односточных газопроводов ТЭК являются ТГ. Высокоточное моделирование неустановившихся режимов транспортирования природного газа по ТГ требует использования модели (2.36). Обоснование ее применения в данном случае приводится в монографии [2]. Для описания течения газа в технологических газопроводах на КС (КЦ) в установившихся режимах систему уравнений (2.37) можно существенно упростить. Это приводит к фактической замене модели (2.37) на модификацию уравнения Бернулли [76] или уравнения Дарси – Вейсбаха [65]. Поясним вышесказанное более подробно.

Учитывая специфику установившихся режимов транспортирования природного газа по ТГ, при моделировании можно пренебречь изменением удельной энергии положения и изменением удельной кинетической энергии газа. Это объясняется тем, что скорость течения газа по трубопроводам в безаварийном состоянии не превышает 40 м/с, разность высот расположения ТГ не превышает 10 м, а рабочее давление транспортирования газа изменяется в диапазоне от 3,0 МПа до 7,8 МПа (см. выше).

При наличии теплообмена между природным газом и окружающей средой его температура может претерпевать незначительные изменения ($\leq 0,25 \text{ К}/1000 \text{ м}$) по всей длине газопровода (квазиизотермическое течение). Это обычно наблюдается в трубопроводах малой протяженности ($\leq 10000 \text{ м}$), не имеющих специальной тепловой изоляции. Поэтому целесообразно сделать предположение, что технологические газопроводы на КС работают в условиях изотермического режима (см., например, [76, 77]). Исходя из вышесказанного и учитывая конструкцию ТГ, процесс течения природного газа по ним (до и после ГПА) будем считать изотермическим.

Таким образом, опираясь на сделанные выше допущения, можно получить формулу для оценки массового расхода газа через ТГ при стационарном изотермическом режиме течения:

$$J = J_1 = J_2 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \rho_1 \cdot w_1 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{p_1 \cdot l}} \cdot \rho_1 \cdot \left(\frac{\lambda}{D} + \xi_{don} \right)^{-1}, \quad (2.38)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют входному и выходному поперечным сечениям трубопровода; $D = const$ – внутренний диаметр трубопровода; l – длина трубопровода;

$\xi_{don} = const$ – коэффициент дополнительных потерь давления газа¹.

Формула (2.38) будет справедливой при допущении о течении в ТГ квазисовершенного газа при незначительном изменении коэффициента его сжимаемости по всей длине трубопровода, т.е. $Z/Z_1 \approx 1$, где Z – коэффициент сжимаемости, соответствующий произвольной координате по длине трубопровода; Z_1 – коэффициент сжимаемости, соответствующий входному поперечному сечению трубопровода. Коэффициент сжимаемости входит в соответствующее термическое УРС квазисовершенного газа [78]:

$$p = Z \cdot \rho \cdot R \cdot T. \quad (2.39)$$

Аналогичную (2.38) формулу можно вывести, используя уравнение неразрывности (2.37а) в виде $w = w_2 \cdot \rho_2 / \rho$. Тогда при допущении $Z/Z_1 \approx 1$ в формуле (2.38) под корнем вместо отношения ρ_1 / ρ_2 , будет стоять ρ_2 / ρ_2 . Полученные указанным способом эквивалентные формулы должны были бы давать одинаковое значение массового расхода газа через ТГ. Однако на практике их применение приводит к различию в оценках массового расхода газа. Для ТГ длиной до 10000 м это отличие при условии $|p_1 - p_2| / p_1 \cdot 100\% \leq 5\%$ и заданных диапазонах параметров транспортируемого газа ($P_1 \in [3, 0; 7, 8](\text{МПа})$, $T \in [273; 313](\text{К})$) не превышает 0,41%. Подобные результаты можно получить, применяя в качестве термического УРС (при вычислениях массового расхода газа) уравнение Редлиха – Квонга (2.28) для определения значения плотности газа на границах ТГ.

Как правило, длина трубопроводов ТГ составляет не более 500 м. Если рассматривать номинальную ($\leq 10 \text{ м/с}$) скорость движения газа по ТГ, то в указанном выше диапазоне давлений и температур газа перепад давления не превышает 0,25% ($\leq 0,018 \text{ МПа}$). В этом случае отличие в значении расхода газа, рассчитываемого по рассмотренным выше вариантам формулы (2.38), не превышает 0,02%.

Использование широко известной формулы Дарси – Вейсбаха

$$P_1 - P_2 = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2} \quad (2.40)$$

позволяет получить следующую расчетную зависимость для массового расхода газа по известному перепаду его давления и средней по длине трубопровода плотности транспортируемого газа ($\rho_{cp} = (\rho_1 + \rho_2)/2$):

$$J = J_1 = J_2 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \rho \cdot w = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{P_1 - P_2}{l} \cdot \rho_{cp} \cdot \left(\frac{\lambda}{D} + \xi_{don} \right)^{-1}}. \quad (2.41)$$

Формула (2.41) для трубопроводов длиной до 10000 м на рассматриваемых диапазонах давления и температуры газа дает значение массового расхода газа, отличающееся не более чем на 0,20% от аналогичного значения, полученного по формуле (2.38). Если рассматривать номинальную скорость движения газа по ТГ длиной до 500 м, то отличие

¹ Здесь следует обратить внимание на то, что данный коэффициент потерь давления не является коэффициентом местного сопротивления в классическом понимании [66]; при этом $dp = \xi_{don} \cdot dl \cdot \rho \cdot w^2 / 2$ – дополнительная (по сравнению с потерей на трение) потеря давления газа во фрагменте трубы постоянного сечения длиной dl .

в значениях массового расхода, рассчитываемых по формулам (2.38) и (2.41), не превышает 0,01%.

Таким образом, при проведении оценочных расчетов параметров стационарного транспортирования газа по ТГ применение формул (2.38) и (2.41) приводит к практически совпадающим расчетным оценкам. Здесь следует отметить, что использование формулы (2.41) может быть предпочтительнее с точки зрения увеличения скорости расчетных процедур в ГДС.

Коэффициент дополнительных потерь давления газа $\xi_{доп}$ определяется по фактическим замерам параметров газового потока для каждого конкретного участка ТГ, либо может быть оценен по эмпирическим формулам, приведенным в работе [66]. Более точные оценки для значений коэффициента $\xi_{доп}$ могут быть получены в результате решения трехмерных газодинамических задач течения газа в реальном трубопроводе.

2.3.2. Течение газовой смеси

Если рассматриваемая среда представляет собой смесь нескольких газов, то система уравнений, описывающая движение однокомпонентного сжимаемого газа (2.36), претерпевает некоторые изменения, и ее необходимо дополнить уравнениями для определения концентраций компонент смеси.

В общем случае различные компоненты смеси движутся в каждой точке пространства с разными скоростями. При математическом моделировании в ряде случаев для удобства описания вводят скорости движения составляющих относительно центра масс смеси или среды в целом, которые называют диффузионными скоростями:

$$\vec{w}_m = \vec{v}_m - \vec{v}; \quad \sum_{m=1}^{N_s} (\hat{\rho}_m \cdot \vec{w}_m) = 0; \quad \hat{\rho} = \sum_{m=1}^{N_s} \hat{\rho}_m; \quad \hat{\rho} \cdot \vec{v} = \sum_{m=1}^{N_s} (\hat{\rho}_m \cdot \vec{v}_m), \quad (2.42)$$

где $\vec{v}_m$ – скорость движения m -ой компоненты газовой смеси; $\vec{v}$ – скорость центра масс смеси; $\hat{\rho}$ – локальная (в точке) плотность смеси; $\hat{\rho}_m$ – локальная приведенная плотность m -ой компоненты смеси (масса m -ой компоненты в единице объема смеси); N_s – число компонент смеси. Уравнения движения и энергии для многокомпонентной смеси в общем случае зависят от скоростей $\vec{w}_m$. Уравнение неразрывности для смеси в целом не включает в себя слагаемые, содержащие диффузионные скорости.

В гомогенной смеси газов ее составляющие размешаны и взаимодействуют на молекулярном или атомарном уровне, а скорости их относительного движения малы. Приближение в механике, когда пренебрегают слагаемыми, содержащими величины второго порядка относительно диффузионных скоростей $\vec{w}_m$, называется диффузионным приближением.

Для определения диффузионных скоростей обычно используют приближенный закон бинарной диффузии Фика [79]:

$$\hat{\rho}_m \cdot \vec{w}_m = -\hat{\rho} \cdot \hat{D}_m \cdot \vec{\nabla} \hat{Y}_m, \quad (2.43)$$

где $\hat{D}_m$ – локальный (в точке) коэффициент бинарной диффузии m -ой компоненты;

$$\hat{Y}_m = \frac{\hat{\rho}_m}{\hat{\rho}}, \quad (2.44)$$

$\hat{Y}_m$ – локальная относительная массовая концентрация m -ой компоненты. В диффузионном приближении уравнения неразрывности и движения, записанные для всей смеси,

не изменяют свой вид (см. (2.36)). Дифференциальное уравнение энергии для смеси газов принимает вид [79]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \bar{\nabla} \cdot \left[\bar{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = -\bar{\nabla} \cdot (\bar{p} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{Q} - \\ - \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{W}} - \sum_{m=1}^{N_s} \bar{\nabla} \cdot (\hat{\varepsilon}_m \cdot \bar{\rho}_m \cdot \bar{\mathbf{w}}_m), \end{aligned} \quad (2.45)$$

где $\hat{\varepsilon}_m$ – локальная удельная (на единицу массы) внутренняя энергия m -ой компоненты газовой смеси.

Предположим, что в каждой частице гомогенной газовой смеси имеет место температурное равновесие между компонентами, образующими смесь, т.е. температура всех компонент одинакова и равна T . Дальнейшее усложнение диффузионной теории смесей (учет многотемпературных эффектов, дополнительных внутренних степеней свободы) фактически не меняет существа диффузионного приближения, связанного с пренебрежением динамическими и инерционными эффектами относительного движения компонент и применением законов диффузии для определения этого относительного движения.

Уравнение неразрывности для каждой из компонент в диффузионном приближении, при отсутствии химических реакций, с учетом (2.44), имеет вид:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \hat{Y}_m)}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \cdot \hat{Y}_m \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho}_m \cdot \bar{\mathbf{w}}_m) = 0, \quad m = \overline{1, N_s - 1}. \quad (2.46a)$$

Уравнения (2.46a) служат для определения относительных массовых концентраций для любых $(N_s - 1)$ компонент. Концентрация компоненты с номером N_s определяется из очевидного условия равенства единице суммы концентраций всех компонент:

$$\hat{Y}_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} \hat{Y}_m. \quad (2.46b)$$

Для полного описания течения смеси необходимы дополнительные соотношения, определяющие термодинамические параметры смеси, такие как коэффициент теплопроводности смеси $\hat{k}$, теплоемкость смеси при постоянном объеме $\hat{c}_v$ и т.п. Ниже указанные соотношения приводятся в общей форме записи.

Для описания коэффициентов диффузии и теплопроводности здесь будем использовать формальные соотношения, учитывая, что в различных приближениях термодинамические величины могут зависеть от разных параметров среды. Для обозначения этого будем использовать формальную запись $\{S_{\text{смеси}}\}$, соответствующую набору параметров, определяющих описываемую величину. Очевидно, что данная запись для разных функций соответствует разному набору параметров. Итак,

$$\hat{k} = \hat{k}(\{S_{\text{смеси}}\}), \quad \bar{D}_m = \bar{D}_m(\{S_{\text{смеси}}\}). \quad (2.47)$$

Здесь и далее будет использоваться правило: величины без «компонентных» индексов относятся к смеси в целом.

Для описания давления и энергии также воспользуемся формальной записью:

$$\hat{p} = \bar{p}(\{S_{\text{смеси}}\}); \quad \hat{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\{S_{\text{смеси}}\}). \quad (2.48)$$

Учитывая (2.43), уравнения неразрывности для каждой из компонент и уравнение сохранения энергии можно записать в виде:

$$\frac{\partial(\hat{\rho} \cdot \hat{Y}_m)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \hat{Y}_m \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \hat{D}_m \cdot \vec{\nabla} \hat{Y}_m) = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad \hat{Y}_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} \hat{Y}_m; \quad (2.49a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot \vec{v} \right] = \\ = -\vec{\nabla} \cdot (\hat{p} \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\hat{\tau} \cdot \vec{v}) + \hat{\rho} \cdot \vec{F} \cdot \vec{v} + \hat{Q} - \vec{\nabla} \cdot \hat{W} + \sum_{m=1}^{N_S} \vec{\nabla} \cdot (\hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{\rho} \cdot \hat{D}_m \cdot \vec{\nabla} \hat{Y}_m). \end{aligned} \quad (2.49b)$$

В интегральной форме (с учетом теоремы Гаусса – Остроградского) данные уравнения будут выглядеть следующим образом:

$$\iiint_V \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot \hat{Y}_m)}{\partial t} dV + \iint_S \hat{\rho} \cdot \hat{Y}_m \cdot v_n dS - \iint_S \hat{\rho} \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad (2.50a)$$

$$\hat{Y}_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} \hat{Y}_m;$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \right] dV + \iint_S \hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot v_n dS = \\ = -\iint_S \hat{p} \cdot v_n dS + \iint_S \hat{\tau}_n \cdot \vec{v} dS + \iiint_V \hat{\rho} \cdot \vec{F} \cdot \vec{v} dV + \iiint_V \hat{Q} dV - \iint_S \hat{W} \cdot \vec{n} dS + \sum_{m=1}^{N_S} \iint_S \hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{\rho} \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS. \end{aligned} \quad (2.50b)$$

Уравнения (2.50) вместе с уравнениями (2.1, 2.2) и соответствующими уравнениями состояния (2.48) описывают нестационарное неизотермическое течение гомогенной газовой смеси.

Для получения одномерных дифференциальных аналогов (2.50) необходимо проинтегрировать данные уравнения по объему, представленному на рис. 2.1. Применив к объемным интегралам теорему о среднем значении, разложив поверхностные интегралы по интегрируемым поверхностям, поделив полученные уравнения на Δx и устремив Δx к нулю, для уравнения неразрывности компонент будем иметь (см. выше):

$$\begin{aligned} \iint_f \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot \hat{Y}_m)}{\partial t} df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \hat{\rho} \cdot \hat{Y}_m \cdot v_x df + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \hat{\rho} \cdot \hat{Y}_m \cdot v_n d\omega - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \hat{\rho} \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial x} df - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \iint_{\omega} \hat{\rho} \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} d\omega = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad (2.51) \\ \hat{Y}_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} \hat{Y}_m. \end{aligned}$$

Диффузионные процессы на границе «газ – труба» в данном случае не рассматриваются, поэтому последнее слагаемое в уравнении (2.51) полагается равным нулю.

Далее, применяя преобразования, аналогичные приведенным выше, и переходя к средним по поперечному сечению значениям получающихся подинтегральных функций (величины без «крышки» над символами), запишем:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot f \cdot Y_m) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot w \cdot f \cdot Y_m) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot f \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right), \quad m = \overline{1, N_s - 1}; \quad Y_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} Y_m. \quad (2.52)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N_s} \iint_S \hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{\rho} \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{m=1}^{N_s} \iint_f \hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{\rho} \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial x} df + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=1}^{N_s} \iint_{\omega} \hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{\rho} \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} d\omega = \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \rho \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Таким образом, полная одномерная система дифференциальных уравнений, описывающих нестационарное турбулентное течение многокомпонентной газовой смеси в круглой трубе переменного сечения и с жесткими стенками при неизотермических режимах, может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial(\rho \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} = 0; \quad (2.54a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot Y_m \cdot f) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot Y_m \cdot w \cdot f) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot f \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) &= 0, \quad m = \overline{1, N_s - 1}; \\ Y_{N_s} &= 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} Y_m; \end{aligned} \quad (2.54б)$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w^2 \cdot f)}{\partial x} = -f \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} + g \cdot \rho \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) - \frac{\pi}{4} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w| \cdot R; \quad (2.54в)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot f \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot w \cdot f \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] &= -\frac{\partial}{\partial x}(p \cdot w \cdot f) - \rho \cdot w \cdot f \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} - \\ &- p \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + Q \cdot f + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \Phi(T, T_{oc}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot f \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (2.54г)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(\{S_{смеси}\}), \quad m = \overline{1, N_s}; \quad \varepsilon = \varepsilon(\{S_{смеси}\}); \quad T_1 = T_2 = \dots = T_{N_s} = T; \quad (2.54д)$$

$$p = p(\{S_{смеси}\}); \quad k = k(\{S_{смеси}\}); \quad D_m = D_m(\{S_{смеси}\}), \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (2.54е)$$

2.3.3. Течение многокомпонентных жидкостей

Опишем построение математической модели транспортирования так называемых ньютоновских многокомпонентных жидкостей по одностороннему трубопроводу на примере моделирования течения воды (или многокомпонентной жидкости, в которой основной средой является вода). Вначале оценим влияние давления и температуры на плотность воды по данным, приведенным в справочнике [80]. В анализируемом диапа-

зоне значений параметров (давление $0,1 \div 2,0 \text{ МПа}$, температура $10 \div 160^\circ \text{C}$)¹ плотность воды от давления зависит не существенно. Рассмотрим функцию (относительное отклонение значений плотности жидкости для границ диапазона):

$$\delta\rho_T(t) = \frac{|\rho_{p1}(t) - \rho_{p2}(t)| \cdot 100\%}{[\rho_{p1}(t) + \rho_{p2}(t)]/2}, \quad (2.55)$$

где $t = T - 273,15 \text{ K}$ – температура по шкале Цельсия; $\rho_{p1}(t)$, $\rho_{p2}(t)$ – плотность воды при минимальном и максимальном давлениях диапазона соответственно. Максимальное значение этой функции в указанном диапазоне значений параметров² соответствует температуре $t = 10^\circ \text{C}$ и $\delta\rho_T(10^\circ \text{C}) \approx 0,09\%$ (при этом $\rho_{p1}(10^\circ \text{C}) = 999,7 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{p2}(10^\circ \text{C}) = 1000,6 \text{ кг/м}^3$, [80]).

Влияние же температуры на плотность воды имеет существенно большее значение. Запишем функцию:

$$\delta\rho_p(p) = \frac{|\rho_{t1}(p) - \rho_{t2}(p)| \cdot 100\%}{[\rho_{t1}(p) + \rho_{t2}(p)]/2}, \quad (2.56)$$

где $\rho_{t1}(p)$, $\rho_{t2}(p)$ – плотность воды при минимальной и максимальной температурах соответственно. Максимальное значение этой функции в рассматриваемом диапазоне значений параметров соответствует давлению $p = 0,7 \text{ МПа}$ и $\delta\rho_p(0,7 \text{ МПа}) \approx 9,7\%$ ³ (при этом $\rho_{t1}(0,7 \text{ МПа}) = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{t2}(0,7 \text{ МПа}) = 907,5 \text{ кг/м}^3$, [80]).

Из проведенного анализа можно сделать вывод о том, что для рассматриваемого диапазона значений параметров влиянием давления на плотность воды можно пренебречь. Поэтому вместо термического УРС $\rho = \rho(p, T)$ можно использовать функциональную зависимость $\rho = \rho(T)$.

При построении модели течения однокомпонентной жидкости по трубопроводу в качестве базовой возьмем модель (2.36) с учетом допущения, сформулированного выше:

$$\frac{\partial(\rho \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w)}{\partial x} = 0; \quad (2.57a)$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w^2)}{\partial x} = -f \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} + g \cdot \rho \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) - \frac{\pi}{4} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w| \cdot R; \quad (2.57b)$$

¹ Если границы диапазона соответствуют газу (или двухфазной области «жидкость – газ»), то они смещаются внутрь диапазона так, чтобы параметры рассматриваемого диапазона соответствовали жидкому агрегатному состоянию воды.

² В работе [80] зависимости плотности и энтальпии воды от давления и температуры приведены в табличном виде. При этом используемый в [80] шаг по температуре равен 10°C (значения аргумента равны $0; 10; 20 \dots^\circ \text{C}$).

³ При таком способе округления (до одной десятой) этой величине будут соответствовать и другие значения давления.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot f \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot f \cdot w \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] = - \frac{\partial (p \cdot f \cdot w)}{\partial x} -$$

$$- \rho \cdot f \cdot w \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} - p \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + Q \cdot f + \frac{\partial}{\partial x} \left[k \cdot f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \Phi(T, T_{oc});$$

$$\rho = \rho(T); \quad \varepsilon = h - p/\rho; \quad h = h(p, T). \quad (2.57г)$$

Далее перейдем к рассмотрению зависимости удельной энтальпии (на единицу массы) воды h от давления и температуры. Для анализируемого диапазона значений аргументов (см. выше) оценим влияние на удельную энтальпию воды параметра t . Введем функцию:

$$\delta h_p(p) = \frac{|h_{t1}(p) - h_{t2}(p)| \cdot 100\%}{[h_{t1}(p) + h_{t2}(p)]/2}, \quad (2.58)$$

где $h_{t1}(p)$, $h_{t2}(p)$ – удельная энтальпия воды при минимальной и максимальной температурах соответственно. Максимальное значение этой функции в рассматриваемом диапазоне значений параметров (давление $0,1 \div 2,0 \text{ МПа}$, температура $10 \div 160^\circ\text{C}$) соответствует давлению $p = 0,7 \text{ МПа}$ и $\delta h_p(0,7 \text{ МПа}) \approx 176,2\%$ (при этом $h_{t1}(0,7 \text{ МПа}) = 42,7 \text{ кДж/кг}$, $h_{t2}(0,7 \text{ МПа}) = 675,6 \text{ кДж/кг}$, [80]). Из приведенного анализа видно, что влияние параметра t на функцию h весьма существенно.

Рассмотрим влияние давления на удельную энтальпию воды. Введем функцию:

$$\delta h_t(t) = \frac{|h_{p1}(t) - h_{p2}(t)| \cdot 100\%}{[h_{p1}(t) + h_{p2}(t)]/2}, \quad (2.59)$$

где $h_{p1}(t)$, $h_{p2}(t)$ – удельная энтальпия воды при минимальном и максимальном давлениях соответственно. Разобьем исследуемый интервал изменения температуры на два участка: $10 \div 40^\circ\text{C}$ и $40 \div 160^\circ\text{C}$. На первом участке максимальное значение функции $\delta h_t(t)$ соответствует температуре $t = 10^\circ\text{C}$ и $\delta h_t(10^\circ\text{C}) \approx 4,4\%$ (при этом $h_{p1}(10^\circ\text{C}) = 42,1 \text{ кДж/кг}$, $h_{p2}(10^\circ\text{C}) = 44 \text{ кДж/кг}$, [80]), т.е. влияние параметра p на функцию h существенно. На втором участке максимальное значение функции $\delta h_t(t)$ соответствует температуре $t = 40^\circ\text{C}$ и $\delta h_t(40^\circ\text{C}) \approx 1\%$ (при этом $h_{p1}(40^\circ\text{C}) = 167,6 \text{ кДж/кг}$, $h_{p2}(40^\circ\text{C}) = 169,3 \text{ кДж/кг}$, [80]), т.е. здесь влиянием параметра p на функцию h можно пренебречь. При увеличении температуры, начиная с $t = 40^\circ\text{C}$, величина $\delta h_t(t)$ уменьшается. Например, при значении $t = 60^\circ\text{C}$ – $\delta h_t(60^\circ\text{C}) \approx 0,635\%$ (при этом $h_{p1}(60^\circ\text{C}) = 251,2 \text{ кДж/кг}$, $h_{p2}(60^\circ\text{C}) = 252,8 \text{ кДж/кг}$, [80]).

Проведенный анализ показал, что при моделировании транспортирования горячей воды¹ (при температуре выше 40°C) в качестве калорического УРС с точностью до 1%

¹ Такая температура воды соответствует системам горячего водоснабжения и тепловым сетям.

можно использовать функциональную зависимость $h = h(T)$. При моделировании течения воды с достаточно низкой температурой¹ (ниже 40°C) пренебрегать влиянием давления на энтальпию нельзя. В противном случае погрешность расчетов может превышать 4%.

Исследуем возможности использования модели несжимаемой среды при анализе параметров транспортирования воды по трубопроводным системам. Зависимость $\rho = \rho(t)$ является монотонной [80]. Поэтому можно ввести функцию, описывающую **абсолютное** отклонение значений плотности жидкости для диапазона $[t - 0,5 \cdot \Delta t; t + 0,5 \cdot \Delta t]$:

$$\Delta\rho(t, \Delta t) = |\rho(t + 0,5 \cdot \Delta t) - \rho(t - 0,5 \cdot \Delta t)|. \quad (2.60)$$

С учетом проведенных ранее исследований, функция (2.60) практически не зависит от давления. Аналогично (2.60) можно ввести зависимость, описывающую **относительное** отклонение значений плотности жидкости для границ диапазона $[t - 0,5 \cdot \Delta t; t + 0,5 \cdot \Delta t]$:

$$\delta\rho(t, \Delta t) = \frac{|\rho(t + 0,5 \cdot \Delta t) - \rho(t - 0,5 \cdot \Delta t)|}{[\rho(t + 0,5 \cdot \Delta t) + \rho(t - 0,5 \cdot \Delta t)]/2} \cdot 100\%. \quad (2.61)$$

Сравнение (2.60) с (2.61) показывает, что (символ « $\sim$ » означает пропорциональность)

$$\delta\rho(t, \Delta t) = \Delta\rho(t, \Delta t) \cdot \frac{100\%}{[\rho(t + 0,5 \cdot \Delta t) + \rho(t - 0,5 \cdot \Delta t)]/2} \sim \Delta\rho(t, \Delta t). \quad (2.62)$$

Оценим знаменатель формулы (2.62) следующим образом:

$$[\rho(t + 0,5 \cdot \Delta t) + \rho(t - 0,5 \cdot \Delta t)]/2 \approx \bar{\rho} = \text{const}, \quad (2.63)$$

где $\bar{\rho}$ – некоторое среднее значение плотности жидкости. Анализируя (2.62) с учетом (2.63), можно сделать вывод о том, что поведение функции $\delta\rho(t, \Delta t)$ целесообразно оценивать, используя зависимость $\Delta\rho(t, \Delta t)$.

При фиксированном перепаде плотности $\Delta\rho$ минимальный перепад температур Δt будет наблюдаться в точке, где значение производной² $(\partial\rho/\partial t)_p$ будет максимальным. Это следует из равенства: $(\Delta\rho/\Delta t)_p \approx (\partial\rho/\partial t)_p$.

На рис. 2.4 представлена зависимость плотности воды от температуры $\rho = \rho(t)$ при $p = 0,7 \text{ МПа}$ ³. Максимальное по модулю значение производной $(\partial\rho/\partial t)_p$ соответствует температуре $t = 160^\circ\text{C}$, следовательно, минимальное значение Δt при фиксированном $\Delta\rho$ (и $\delta\rho$) соответствует указанной температуре. Найдем температуру (на участке $t < 160^\circ\text{C}$), для которой плотность воды будет отличаться от базового значения плотно-

¹ Подобные течения наблюдаются в системах холодного водоснабжения.

² Как было показано ранее, плотность воды практически не зависит от давления. Несмотря на это, для определенности, здесь будем рассматривать значение давления в качестве постоянной величины.

³ Данное значение выбрано потому, что это минимальное давление (приведенное в справочнике [80]), для которого вода при температуре $t = 160^\circ\text{C}$ имеет жидкое агрегатное состояние.

сти¹ воды (при базовой температуре 160°C) не более 1%. Такой температурой является $t = 150^{\circ}\text{C}$. Оценим значение этого отклонения. Плотность воды при 160°C равна $\rho(160^{\circ}\text{C}) = 907,523 \text{ кг/м}^3$, а при 150°C – $\rho(150^{\circ}\text{C}) = 917,095 \text{ кг/м}^3$ [80]. Относительное изменение плотности в данном случае будет равно:

$$\delta\rho(160^{\circ}\text{C}, 10^{\circ}\text{C}) = \delta\rho(155^{\circ}\text{C}, 10^{\circ}\text{C}) = \frac{|\rho(160^{\circ}\text{C}) - \rho(150^{\circ}\text{C})| \cdot 100\%}{[\rho(160^{\circ}\text{C}) + \rho(150^{\circ}\text{C})] / 2} \approx 1\%. \quad (2.64)$$

Таким образом, минимальным перепадом температур, при котором плотность можно считать постоянной величиной с точностью до 1%, является значение $\Delta t = 10^{\circ}\text{C} = 10 \text{ K}$.

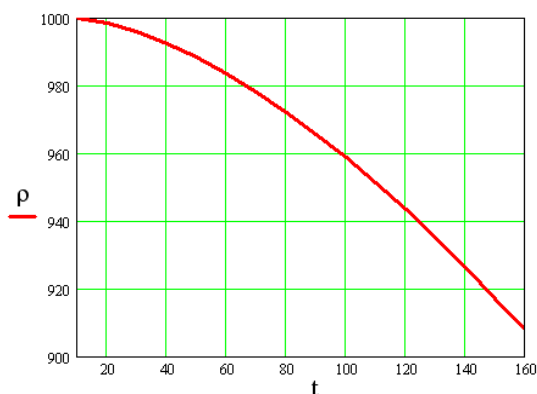


Рис. 2.4. Зависимость плотности $[\text{кг/м}^3]$ воды от температуры $[^{\circ}\text{C}]$ при давлении $0,7 \text{ МПа}^2$

Далее предлагается способ оценки допустимого перепада температур применительно к разным значениям базовой температуры. Учитывая способ введения $\delta\rho(t, \Delta t)$ (см. (2.60)), данное значение можно оценить по формуле:

$$\delta\rho(t, \Delta t) = \frac{100\%}{\rho(t)} \cdot \Delta\rho(t, \Delta t). \quad (2.65)$$

Разделим (2.65) на Δt :

$$\frac{\delta\rho(t, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{100\%}{\rho(t)} \cdot \frac{\Delta\rho(t, \Delta t)}{\Delta t} \approx \frac{100\%}{\rho(t)} \cdot \left| \frac{d\rho(t)}{dt} \right|. \quad (2.66)$$

Отсюда,

$$\Delta t(t) \approx \frac{\rho(t) \cdot \delta\rho}{\left| d\rho(t)/dt \right| \cdot 100\%}. \quad (2.67)$$

На рис. 2.5 дана графическая зависимость $\Delta t(t)$ для значения $\delta\rho = 1\%$. График постро-

¹ Температуру, соответствующую базовому значению плотности, здесь назовем *базовой* (или *базовым значением температуры*).

² График зависимости построен по данным справочника [80].

ен по данным справочника [80]. При этом значения $d\rho/dt$ определялись численно.

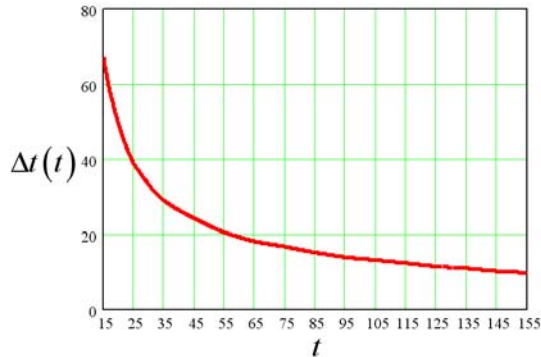


Рис. 2.5. Оценка ширины диапазона температур (в зависимости от базовой температуры), в котором воду можно рассматривать как несжимаемую среду с точностью 1%

Рис. 2.5 дает графическое представление о поведении зависимости $\Delta t(t)$. В частности, для базовой температуры $t = 105^\circ\text{C}$ величина $\Delta t(105^\circ\text{C}) \approx 12^\circ\text{C}$. Это означает то, что плотность с точностью до 1% можно считать постоянной величиной для диапазона температур $[105^\circ\text{C} - \Delta t/2; 105^\circ\text{C} + \Delta t/2] = [99^\circ\text{C}; 111^\circ\text{C}]$. Отметим еще раз, что границы диапазона являются оценочными, позволяющими проследить общий характер поведения зависимости $\Delta t(t)$. Для получения истинных значений границ диапазона при конкретном значении базовой температуры необходимо обращаться к справочным данным. Заметим также, что рис. 2.5 дает представление о том, как будет вести себя зависимость $\Delta t(t)$ при значении допустимой относительной погрешности по плотности $\delta\rho$, отличной от 1%. В частности (см. (2.67)), для $\delta\rho = 0,1\%$ значения функции $\Delta t(t)$ будут в 10 раз меньше, чем представленные на рис. 2.5. При этом точность значений $\Delta t(t)$, полученных с помощью (2.67), повышается с уменьшением величины $\delta\rho$.

Как видно из рис. 2.5, при моделировании транспортирования воды при низких температурах (до 35°C), допущение о ее несжимаемости является вполне оправданным. Относительная погрешность величиной в один процент при определении плотности воды (применительно к базовой температуре $t = 35^\circ\text{C}$) соответствует перепадам температур $\Delta t = 35^\circ\text{C}$ и выше, что позволяет считать воду для диапазона температур $[0^\circ\text{C}; 35^\circ\text{C}]$ несжимаемой.

Применительно к оценке возможности использования модели течения несжимаемой среды для анализа параметров транспортирования воды, имеющей низкую температуру, можно сказать о том, что на основании материалов из справочника [80] справедливо следующее заключение: *значение плотности воды отличается менее 1% для диапазона температур $[0^\circ\text{C}; 40^\circ\text{C}]$* . В частности, плотность воды при 0°C равна $\rho(0^\circ\text{C}) = 999,800 \text{ кг/м}^3$, а при 40°C – $\rho(40^\circ\text{C}) = 992,260 \text{ кг/м}^3$ [80]. Из этого следует, что относительное изменение плотности в указанном диапазоне температур будет равно:

$$\delta\rho(t = 20^\circ\text{C}, \Delta t = 20^\circ\text{C}) = \frac{|\rho(40^\circ\text{C}) - \rho(0^\circ\text{C})| \cdot 100\%}{[\rho(40^\circ\text{C}) + \rho(0^\circ\text{C})]/2} \approx 0,76\%. \quad (2.68)$$

При анализе поведения зависимости $\Delta t = \Delta t(t)$ для области $t > 40^\circ\text{C}$ (см. рис. 2.5) можно сделать вывод о том, что диапазон температур, в котором можно считать воду несжимаемой, при увеличении базовой температуры сокращается, доходя до $\Delta t = 10^\circ\text{C}$ при максимальной температуре ($t = 160^\circ\text{C}$).

Построим математическую модель нестационарного неизотермического течения несжимаемой жидкости по неразветвленному трубопроводу постоянного поперечного сечения. Для этого достаточно положить $\rho = \text{const}$ в модели (2.57). В результате получим:

$$\rho = \text{const}; \quad (2.69a)$$

$$w = w(t); \quad (2.69б)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{\lambda \cdot w \cdot |w|}{4 \cdot R}; \quad (2.69в)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\frac{w^2}{2} \right) + w \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{w}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - w \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{Q}{\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \frac{\Phi(T, T_{oc})}{f \cdot \rho}; \quad (2.69г)$$

$$\varepsilon = h - p/\rho; \quad h = h(p, T). \quad (2.69д)$$

Следует отметить, что в уравнении (2.69в) запись dw/dt обозначает обыкновенную производную от скорости по времени (см. (2.69б)).

Умножим каждое слагаемое (2.69в) на w и преобразуем результирующее уравнение. Итоговый вид закона сохранения кинетической энергии для несжимаемой жидкости представляется так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{w^2}{2} \right) = -\frac{w}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - w \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{\lambda \cdot |w|^3}{4 \cdot R}; \quad (2.70)$$

Вычтем (2.70) из (2.69г) и получим:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\lambda \cdot |w|^3}{4 \cdot R} + \frac{Q}{\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \frac{\Phi(T, T_{oc})}{f \cdot \rho}. \quad (2.71)$$

Таким образом, искомая модель будет иметь вид:

$$\rho = \text{const}; \quad (2.72a)$$

$$w = w(t); \quad (2.72б)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{\lambda \cdot w \cdot |w|}{4 \cdot R}; \quad (2.72в)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\lambda \cdot |w|^3}{4 \cdot R} + \frac{Q}{\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \frac{\Phi(T, T_{oc})}{f \cdot \rho}; \quad (2.72г)$$

$$\varepsilon = h - p/\rho; \quad h = h(p, T). \quad (2.72д)$$

Постоянство скорости по длине трубопровода (см. (2.72б)) позволяет проинтегрировать уравнение движения по длине трубопровода и, тем самым, перейти от дифференциального уравнения в частных производных к следующему обыкновенному

дифференциальному уравнению¹:

$$\frac{dw}{dt} \cdot l = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g \cdot [(z_1)_1 - (z_1)_2] - \frac{\lambda \cdot w \cdot |w| \cdot l}{4 \cdot R}, \quad (2.73)$$

где l – длина трубопровода; p_1 – давление газа на левом конце трубопровода (имеющего координату $x = 0$); p_2 – давление газа на правом конце трубопровода (имеющего координату $x = l$); $(z_1)_1$ – высота оси симметрии левого сечения трубопровода; $(z_1)_2$ – высота оси симметрии правого сечения трубопровода.

Окончательно система уравнений, описывающая нестационарное неизотермическое течение несжимаемой жидкости по пространственно распределенному трубопроводу постоянного поперечного сечения записывается в виде:

$$\rho = \text{const}; \quad (2.74a)$$

$$w = w(t); \quad (2.74б)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot l} + g \cdot \frac{[(z_1)_1 - (z_1)_2]}{l} - \frac{\lambda \cdot w \cdot |w|}{4 \cdot R}; \quad (2.74в)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\lambda \cdot |w|^3}{4 \cdot R} + \frac{Q}{\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \frac{\Phi(T, T_{oc})}{f \cdot \rho}; \quad (2.74г)$$

$$\varepsilon = h - p/\rho; \quad h = h(p, T). \quad (2.74д)$$

Транспортирование несжимаемой жидкости по многосекционному трубопроводу в данном случае целесообразно моделировать как цепочку последовательно соединенных участков трубопроводов постоянного поперечного сечения.

Теперь перейдем к построению модели течения многокомпонентной жидкости. Как было показано в Разделе 2.3.2, если транспортируемая среда представляет собой многокомпонентную смесь, то система уравнений, описывающая движение однокомпонентной среды, претерпевает некоторые изменения. Ее необходимо дополнить соответствующими уравнениями для определения концентраций компонент смеси.

Итоговая система дифференциальных уравнений в частных производных (аналог (2.57)), описывающая течение вязкой многокомпонентной сжимаемой жидкости (плотность жидкости при неизменных значениях концентраций компонент зависит только от температуры) по **протяженному** неразветвленному трубопроводу с жесткими шероховатыми теплопроводными стенками, примет вид (см. также (2.54)):

$$\frac{\partial(\rho \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w)}{\partial x} = 0; \quad (2.75a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot Y_m \cdot f) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot Y_m \cdot w \cdot f) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot f \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) = 0, \quad m = \overline{1, N_s - 1}; \quad (2.75б)$$

$$Y_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} Y_m;$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w^2)}{\partial x} = -f \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} + g \cdot \rho \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) - \frac{\pi}{4} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w| \cdot R; \quad (2.75в)$$

¹ По сути, это один из вариантов записи хорошо известной модели транспортирования жидкости с сосредоточенными параметрами.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot f \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot f \cdot w \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] = - \frac{\partial (p \cdot f \cdot w)}{\partial x} - \rho \cdot f \cdot w \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} -$$

$$- p \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + Q \cdot f + \frac{\partial}{\partial x} \left[k \cdot f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \Phi(T, T_{oc}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot f \cdot \sum_{m=1}^{N_S} \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right); \quad (2.75r)$$

$$\rho = \rho(T, \{Y_m, m = \overline{1, N_S}\}); \quad \varepsilon = h - p/\rho; \quad h = h(p, T, \{Y_m, m = \overline{1, N_S}\}). \quad (2.75d)$$

В системе уравнений (2.75) комплекс $\{Y_m, m = \overline{1, N_S}\}$ означает перечисление параметров $Y_m, m = \overline{1, N_S}$.

Рассмотрим теперь модель течения вязкой **несжимаемой**¹ многокомпонентной жидкости по **протяженному** неразветвленному трубопроводу постоянного поперечного сечения и с жесткими шероховатыми теплопроводными стенками. При этом систему уравнений (2.75) можно существенно упростить и записать так:

$$\rho = const; \quad (2.76a)$$

$$w = w(t); \quad (2.76б)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot l} + g \cdot \frac{[(z_1)_1 - (z_1)_2]}{l} - \frac{\lambda \cdot w \cdot |w|}{4 \cdot R}; \quad (2.76в)$$

$$\frac{\partial Y_m}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad Y_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S - 1} Y_m; \quad (2.76г)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\lambda \cdot |w|^3}{4 \cdot R} + \frac{Q}{\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \frac{\Phi(T, T_{oc})}{f \cdot \rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{N_S} \left(\varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right]; \quad (2.76д)$$

$$\varepsilon = h - p/\rho; \quad h = h(p, T, \{Y_m, m = \overline{1, N_S}\}). \quad (2.76е)$$

2.3.4. Пленочное течение двухфазной среды

Для оценки параметров транспортирования сопутствующих жидких фракций по круглой трубе в режиме пленочно-кольцевого течения С.Н. Пряловым и В.Е. Селезевым было предложено использовать упрощенную модель [2, 6]. Проанализируем ее построение более детально.

В соответствие с работой [68], все множество термодинамических систем можно разделить на два класса – гомогенные и гетерогенные системы. Гомогенные системы – это такие системы, внутри которых свойства изменяются непрерывно при переходе от одной точки пространства к другой. Частным случаем гомогенных систем являются физически однородные системы, имеющие одинаковые физические свойства в любых, произвольно выбранных частях, равных по объему. Примерами таких систем являются смеси различных газов и растворы, как жидкие, так и твердые. В этих системах могут

¹ Следует обратить внимание на то, что для многокомпонентных сред могут существовать течения, при которых плотность смеси не зависит от давления, но все же она может изменяться (например, при изменении концентраций компонент). В системе (2.76) под термином «несжимаемая среда» понимаются среды, для которых плотность не меняется под действием любых факторов (или данным изменением можно пренебречь).

происходить реакции между составными частями смеси, диссоциация газа или растворенного вещества, полимеризация¹ и сольватация². При равновесии в таких системах реакции макроскопически прекращаются. Закономерности при равновесии устанавливаются с помощью законов термодинамики.

Гетерогенными называют системы, которые состоят из нескольких физически однородных (или гомогенных) тел, так, что внутри систем имеются разрывы в изменении их свойств. Эти системы представляют собой совокупности:

- различных агрегатных состояний одного и того же вещества («лед – вода», «вода – пар» и т.д.);
- различных кристаллических модификаций (ромбическая и моноклинная сера, серое и белое олово, и др.);
- различных продуктов взаимного растворения («водный раствор соли – твердая соль – пар»);
- продуктов химического взаимодействия различных веществ (жидкий сплав и твердое химическое соединение двух металлов).

Гомогенная часть гетерогенной системы, отделенная от других частей поверхностью раздела, на которой скачком изменяются какие-либо свойства (и соответствующие им параметры), называется *фазой* [68]. Если система состоит из жидкости и пара, то жидкое представляет собой одну фазу, пар – другую. **Нельзя путать и отождествлять агрегатные состояния с фазами.** В то время как агрегатных состояний всего четыре – твердое, жидкое, газообразное и плазменное, фаз – неограниченное количество. Даже у одного и того же химически чистого вещества в твердом агрегатном состоянии может быть несколько фаз (ромбическая и моноклинная сера, серое и белое олово, и др.). При небольших давлениях, когда газы мало отличаются от идеальных, в газообразном состоянии может быть только одна фаза, так как при таких условиях все газы обладают способностью смешиваться друг с другом в любых пропорциях, образуя однородную систему³. В жидком состоянии в равновесии может находиться несколько фаз, например, вода и масло, керосин и вода, и др.

Кроме фазы существенное значение при исследовании равновесия термодинамических систем (как гетерогенных, так и гомогенных) имеет понятие *компоненты*. Это такая часть системы, содержание которой не зависит от содержания других частей [68]. Смесь газов является однофазной, но многокомпонентной системой: компонент в смеси химически не реагирующих газов столько, сколько в ней различных газов (см. Раздел 2.3.2). Вода, как и лед, также является однофазной системой, но однокомпонентной, так как водород и кислород в ней входят в определенном отношении: количество одного зависит от количества другого. И вообще, если в фазе имеется N различных веществ (химических элементов), между которыми существует n химических реакций, то число компонент (независимых веществ) в такой фазе $(N - n)$ [68].

При течениях в трубах или других каналах происходит взаимодействие потока с внешним телом – со стенкой канала, а именно: силовое взаимодействие за счет трения и давления, а также тепловое взаимодействие за счет теплообмена со стенкой [79, 81]. Интенсивность этих процессов для двухфазных газожидкостных потоков зависит от

¹ Полимеризацией называется образование из простых молекул более сложных, например, из трех молекул C_2H_4O одной молекулы $(C_2H_4O)_3$ или из двух молекул воды H_2O одной более сложной молекулы воды $(H_2O)_2$, и т.д. [68].

² Под сольватацией подразумевается ориентация молекул растворителя вокруг иона или другой частицы растворенного вещества [68].

³ При высоком давлении наблюдается ограничение во взаимной растворимости газов [85].

структуры потока, в частности, от наличия жидкой или паровой пленки на стенке канала, распределения фаз по сечению канала и внутренних процессов в потоке.

Структурой (формой или режимом [79]) течения двухфазной смеси принято называть характерные распределения поверхностей раздела между жидкостью и газом [82]. В общем случае образование той или иной структуры течения зависит от расхода каждой из фаз, их физических свойств, расположения трубы, по которой движется смесь, способов ввода и вывода фаз смеси и от механизма их образования.

Согласно [82], при исследовании структур течения смеси, возникающих в горизонтальных и наклонных трубах, был сформулирован, обоснован и используется принцип, заключающийся в том, что смена структур течения не во всех случаях приводит к изменению зависимостей, определяющих гидродинамические величины (истинные газосодержания, гидравлические сопротивления и др.). Эти зависимости меняются только при качественном изменении раздела между жидкостью и газом. Поэтому все виды структур течения, возникающих в горизонтальных трубах, условно разделяются на три зоны. В пределах каждой из зон зависимости для описания гидродинамических величин остаются одинаковыми для всех структур. Для описания областей существования возможных структур течения в вертикальных и наклонных трубах в работе [82] использован параметр в виде отношения скорости смеси к скорости реверса жидкой фазы. При этом все структуры течения в вертикальных трубах разбиваются на две зоны.

Все виды структур течения газожидкостных смесей в горизонтальных и наклонных трубах с восходящим и нисходящим направлениями потоков в монографии [82] рекомендуется разбить на три зоны:

- **зона расслоенного течения** с гладкой или волнистой поверхностью раздела фаз;
- **зона кольцевого (пленочного) течения** с кольцеобразной формой поверхности раздела фаз;
- **зона пробкового течения** без четкой границы раздела фаз.

Последняя зона включает **пузырьковое, пробковое** (или **снарядное**) и **волновое с перемычками структуры течения** смеси по классификации Бейкера [82]. Согласно монографии [79], пузырьковый режим течения обычно существует при объемной концентрации газовой фазы, меньшей чем 20÷30%. При больших объемных концентрациях происходит слияние пузырьков с образованием больших пузырей снарядообразной формы, занимающих почти все поперечное сечение канала, и пузырьковый режим переходит в пробковый (или снарядный) режим.

Соответствующим образом все структуры течения смесей в вертикальных трубах могут быть разбиты на две зоны: **кольцевую и пробковую**.

В работах [79, 82] также упоминаются дисперсно-пленочный (или дисперсно-кольцевой) и дисперсный режимы течения. Из-за динамического взаимодействия газового ядра потока и жидкой пленки на поверхности последней образуются волны, с гребней которых могут срывать капли и уноситься в ядро потока. В этом случае реализуется **дисперсно-пленочный (дисперсно-кольцевой) режим течения**.

В обогреваемых каналах пленка может испариться, и дисперсно-кольцевой режим переходит в чисто **дисперсный (капельный) режим течения** – течение смеси пара и капель. Этот режим является обращенным по отношению к пузырьковому режиму.

Теоретическое решение задачи о движении двухфазных сред связано с теми или иными упрощениями реальной картины течения, той или иной степенью идеализации свойств среды. Тем не менее, система дифференциальных или интегральных уравнений для описания общего случая движения двухфазной жидкости должна учитывать принципиальную разрывность среды и происходящие в ней обменные процессы: массообмен, обмен энергией и количеством движения.

Согласно [83], одна из схем построения системы уравнений двухфазной среды за-

ключается в том, что уравнения сохранения массы, количества движения и энергии, а также уравнения состояния и теплопередачи записываются отдельно для паровой и жидкой фаз, находящихся в элементарном объеме двухфазной среды. Структура среды считается известной.

Альтернативной оказывается такая схематизация, при которой исходная разрывная среда с помощью того или иного метода преобразования рассматривается как фиктивная неразрывная среда [83]. В этом случае предполагается, что каждая из фаз равномерно распределена («размазана») в выделенном объеме и является сплошной. Фиктивная среда, будучи эквивалентна исходной (в смысле предложенного преобразования), в то же время состоит из непрерывной жидкой и непрерывной паровой фаз, для которых уже можно применить аппарат дифференциального исчисления. Здесь, как и в первом случае, паровая и жидкая фазы рассматриваются как отдельные системы, между которыми происходят те или иные обменные процессы.

Следует подчеркнуть, что выбор схемы является условным приемом, поскольку решение уравнений невозможно без конкретизации структуры двухфазной среды [83].

Обозначим индексами 1 и 2 величины, относящиеся к жидкой и газовой компонентам¹. Такие величины, как концентрации компонент и плотность смеси, на поверхности раздела фаз изменяются скачком [82]: концентрация изменяется от нуля до единицы, плотность – от $\hat{\rho}_1$ до $\hat{\rho}_2$. Следовательно, плотность смеси можно выразить формулой:

$$\hat{\rho}_{см} = \hat{\psi}_1 \cdot \hat{\rho}_1 + \hat{\psi}_2 \cdot \hat{\rho}_2, \quad (2.77)$$

где $\hat{\psi}_1$ и $\hat{\psi}_2$ – относительные локальные (в точке) значения объемных концентраций компонент, являющиеся разрывными функциями времени и координат [82]:

$$\hat{\psi}_m(\vec{r}, t) = \begin{cases} 1, & \text{если в точке } (\vec{r}, t) \text{ находится } m\text{-ая компонента,} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.78)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор рассматриваемой точки, t – время.

Согласно [82], гидро- и газодинамические процессы для многофазной среды, состоящей из двух компонент, можно моделировать следующей системой уравнений:

$$\iiint_V \frac{\partial(\hat{\rho}_m \cdot \hat{\psi}_m)}{\partial t} dV + \iint_S \hat{\rho}_m \cdot \hat{\psi}_m \cdot \nu_m^n dS = \iiint_V \hat{J}_{km} dV, \quad k \neq m, \quad k, m = 1, 2; \quad (2.79a)$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial(\hat{\rho}_m \cdot \hat{\psi}_m \cdot \vec{\nu}_m)}{\partial t} dV + \iint_S \hat{\rho}_m \cdot \hat{\psi}_m \cdot \vec{\nu}_m \cdot \nu_m^n dS = & - \iint_S \hat{p}_m \cdot \vec{n} dS + \\ & + \iint_S \vec{\tau}_m^n dS + \iiint_V \hat{\rho}_m \cdot \hat{\psi}_m \cdot \vec{F}_m dV - \iiint_V \hat{\rho}_m \cdot \hat{\psi}_m \cdot \vec{a}_m dV + \iiint_V \vec{P}_{km} dV, \end{aligned} \quad (2.79b)$$

$k \neq m, \quad k, m = 1, 2;$

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\hat{\rho}_m \cdot \hat{\psi}_m \cdot \left(\hat{\varepsilon}_m + \frac{\nu_m^2}{2} \right) \right] dV + \iint_S \left[\hat{\rho}_m \cdot \hat{\psi}_m \cdot \nu_m^n \cdot \left(\hat{\varepsilon}_m + \frac{\nu_m^2}{2} \right) \right] dS = \\ = - \iint_S \hat{p}_m \cdot \nu_m^n dS + \iint_S (\vec{\tau}_m^n \cdot \vec{\nu}_m) dS + \iiint_V \hat{\rho}_m \cdot \hat{\psi}_m \cdot (\vec{F}_m \cdot \vec{\nu}_m) dV - \\ - \iiint_V \hat{\rho}_m \cdot \hat{\psi}_m \cdot (\vec{a}_m \cdot \vec{\nu}_m) dV - \iiint_S \hat{W}_m^n dS + \iiint_V \hat{Q}_m dV + \iiint_V \hat{E}_{km} dV, \quad k \neq m, \quad k, m = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.79b)$$

¹ В данном Разделе рассматривается двухфазная газожидкостная среда, отдельные фазы которой можно считать компонентами по определению, приведенному выше.

где V – объем среды; S – поверхность, ограничивающая объем среды V ; $\vec{v}_m$ – скорость m -ой компоненты среды; $v_m^n = (\vec{v}_m \cdot \vec{n})$ – проекция $\vec{v}_m$ на внешнюю единичную нормаль¹ $\vec{n}$ к элементу поверхности интегрирования; v_m – модуль вектора $\vec{v}_m$; $\hat{J}_{km}$ – параметр, характеризующий интенсивность перехода массы из k -ой в m -ую компоненту в единице объема среды в единицу времени ($\hat{J}_{km} = -\hat{J}_{mk}$); $\hat{p}_m$ – давление, приходящееся на m -ую компоненту; $\vec{\tau}_m^n = \vec{\tau}_m \cdot \vec{n}$ – напряжение, обусловленное действием сил вязкого трения на площадке с внешней нормалью $\vec{n}$ и приходящееся на m -ую компоненту ($\vec{\tau}_m$ – тензор вязких напряжений, соответствующий m -ой компоненте [63, 79]); $\vec{F}_m$ и $\vec{a}_m$ – соответственно удельные массовая сила и сила инерции, приходящиеся на m -ую компоненту; $\vec{P}_{km}$ – вектор, характеризующий интенсивность обмена импульсом между k -ой и m -ой компонентами смеси ($\vec{P}_{km} = -\vec{P}_{mk}$); $\hat{\varepsilon}_m$ – удельная (на единицу массы) внутренняя энергия m -ой компоненты; $\hat{Q}_m$ – удельная мощность объемных источников тепла, приходящихся на m -ую компоненту; $\vec{W}_m$ – вектор плотности потока тепла, соответствующий m -ой компоненте; $\hat{W}_m^n = \vec{W}_m \cdot \vec{n}$ – проекция вектора $\vec{W}_m$ на нормаль $\vec{n}$; $\hat{E}_{km}$ – параметр, характеризующий интенсивность обмена энергией между k -ой и m -ой компонентами ($\hat{E}_{km} = -\hat{E}_{mk}$). По закону Фурье $\vec{W}_m = -\hat{k}_m \cdot \vec{\nabla} \hat{T}_m$, где $\hat{k}_m$ – коэффициент теплопроводности m -ой компоненты; $\hat{T}_m$ – температура m -ой компоненты.

Пусть по оси трубы проведена ось координат Ox . Как и ранее, символом f будем обозначать как само поперечное сечение трубы, так и его площадь. Рассмотрим объем V , ограниченный двумя поперечными сечениями трубы f и f' , расположенными на расстоянии Δx друг от друга, а также боковой поверхностью трубы (рис. 2.6). Обозначение Δx будет соответствовать как промежутку между заданными поперечными сечениями, так и длине указанного промежутка.

Обозначим через V_m часть объема V , занимаемого m -ой компонентой, причем

$$V_1 + V_2 = V. \quad (2.80a)$$

Пусть S_m – поверхность, ограничивающая V_m . Аналогично, f_m – часть поперечного сечения трубы f , занимаемого m -ой компонентой, причем

$$f_1 + f_2 = f. \quad (2.80б)$$

Обозначим также через ω боковую поверхность трубы, общую с поверхностью объема V ; через S_{cp} – находящуюся внутри объема V поверхность раздела газового ядра и жидкой фазы. Введенные символы также будут обозначать площади соответствующих поверхностей.

При создании математической модели будем пренебрегать массообменом между компонентами смеси, т.е.

$$\hat{J}_{km} = 0. \quad (2.81)$$

¹ В данном Разделе с целью сокращения записи термин «нормаль» употребляется как по отношению к собственно нормали [89], так и к ее орту.

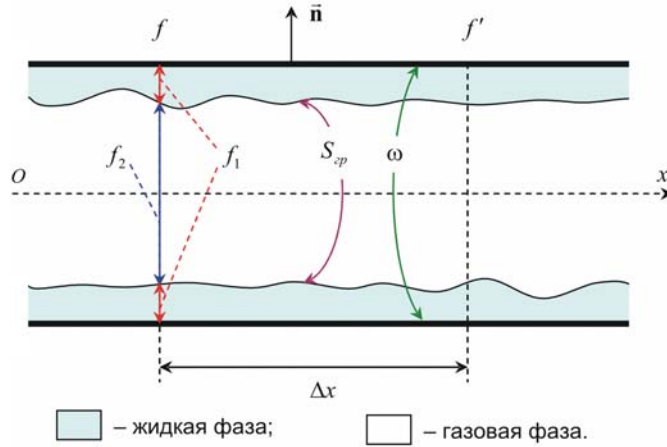


Рис. 2.6. Схематичное представление кольцевого течения двухфазной среды по трубопроводу (продольное сечение)

Проинтегрируем уравнение (2.79а) для m -ой компоненты по объему V_m . Учитывая отсутствие в этом объеме другой компоненты, рассматриваемое уравнение преобразуется к виду:

$$\iiint_{[V_m]} \frac{\partial \hat{\rho}_m}{\partial t} dV + \iint_{[S_m]} \hat{\rho}_m \cdot \nu_m^n dS = 0, \quad m = 1, 2. \quad (2.82)$$

Поверхность S_m формируется из трех поверхностей – поперечных сечений f_m и f'_m , а также боковой поверхности объема V_m (обозначим ее через ω_m , где $\omega_1 \equiv S_{sp} \cup \omega$, $\omega_2 \equiv S_{sp}$). Последняя поверхность для жидкой фазы является многосвязной.

Как известно [84], для подвижного объема V справедлива формула:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \hat{\rho} dV = \iiint_V \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} dV + \iint_S \hat{\rho} \cdot U^n dS, \quad (2.83)$$

где $\hat{\rho}$ – плотность среды; $\vec{U}$ – скорость движения границы объема V ; $U^n = (\vec{U} \cdot \vec{n})$ – проекция скорости на внешнюю нормаль к элементу поверхности dS . Воспользуемся классическим определением производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \hat{\rho} dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \cdot \left(\iiint_{V(t+\Delta t)} \hat{\rho}(t+\Delta t) dV - \iiint_{V(t)} \hat{\rho}(t) dV \right) \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{V(t+\Delta t)} \hat{\rho}(t+\Delta t) dV - \iiint_{V(t+\Delta t)} \hat{\rho}(t) dV + \iiint_{V(t+\Delta t)} \hat{\rho}(t) dV - \iiint_{V(t)} \hat{\rho}(t) dV}{\Delta t} = \\ &= \iiint_V \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{V(t+\Delta t)-V(t)} \hat{\rho}(t) dV}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

В выражении (2.84) интеграл $\iiint_{V(t+\Delta t)-V(t)} \hat{\rho}(t) dV$ можно интерпретировать как прира-

щение массы в объеме V за счет движения границ этого объема¹. Если dS – элемент поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем (рис. 2.7), то $U^n \cdot \Delta t \cdot dS$ – элементарное приращение объема V за бесконечно малое время Δt , соответствующее dS ; $\bar{\rho} \cdot U^n \cdot \Delta t \cdot dS$ – элементарное приращение массы за время Δt , вызванное движением границ и соответствующее элементу поверхности dS . Следовательно, общее приращение массы в объеме V за время Δt за счет движения границ этого объема равно:

$$\iiint_{V(t+\Delta t)-V(t)} \bar{\rho}(t) dV = \iint_S \bar{\rho} \cdot U^n \cdot \Delta t dS. \quad (2.85)$$

Подставляя (2.85) в (2.84), имеем искомое равенство (2.83).

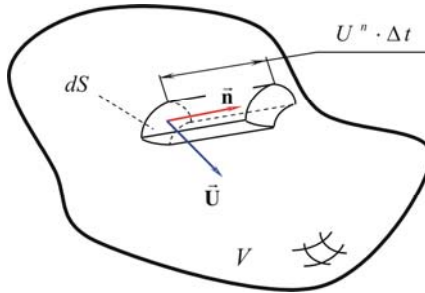


Рис. 2.7. Вспомогательная схема

Аналогичным образом можно показать, что для любой функции $y(\vec{r}, t) \in C^1(t)$, где $C^1(t)$ – множество всех непрерывно дифференцируемых функций (в том числе тензорных функций), справедливо соотношение [84]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V y dV = \iiint_V \frac{\partial y}{\partial t} dV + \iint_S y \cdot U^n dS. \quad (2.86)$$

Распишем (2.82):

$$\iiint_{[V_m]} \frac{\partial \bar{\rho}_m}{\partial t} dV + \iint_{[S_m]} \bar{\rho}_m \cdot v_m^n dS = \left(\iiint_{[V_m]} \frac{\partial \bar{\rho}_m}{\partial t} dV + \iint_{[a_m]} \bar{\rho}_m \cdot v_m^n d\omega \right) + \left(\iint_{[f_m]} \bar{\rho}_m \cdot v_m^x df - \iint_{[f_m]} \bar{\rho}_m \cdot v_m^x df \right), \quad (2.87)$$

$m = 1, 2$,

где v_m^x – проекция скорости $\vec{v}_m$ на ось Ox ². Применяя теорему о среднем, получим:

$$\iint_{[f_m]} \bar{\rho}_m \cdot v_m^x df - \iint_{[f_m]} \bar{\rho}_m \cdot v_m^x df = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_{[f_m]_c} \bar{\rho}_m \cdot v_m^x df, \quad (2.88)$$

где $[f_m]_c$ – поперечное сечение, соответствующее m -ой компоненте, в некоторой точке

¹ В том числе за счет захвата массы из внешней среды при условии раздельного перемещения границ объема и среды.

² Здесь и далее верхний индекс « x » обозначает проекцию вектора на ось Ox .

x_c , принадлежащей пространственному интервалу между сечениями трубы f и f' . В данном Разделе при каждом случае использования координаты x_c ее значение может меняться. Здесь этому факту не уделяется большого внимания, т.к. в рамках решаемой задачи он не играет важной роли.

Поскольку охватывающая поверхность объема V_m на межфазной границе совпадает с поверхностью раздела фаз ω_m (т.е. движется со средой, в отличие от поперечных сечений трубы f и f'), скорость $\vec{U}_m$ будет равна скорости компоненты $\vec{v}_m$ на поверхности ω_m . Скорость движения границ на поверхностях f и f' равна нулю (при условии $\Delta x = \text{const}$), используя (2.83), имеем:

$$\begin{aligned} \iiint_{[V_m]} \frac{\partial \hat{\rho}_m}{\partial t} dV + \iint_{[\omega_m]} \hat{\rho}_m \cdot v_m^n d\omega &= \iiint_{[V_m]} \frac{\partial \hat{\rho}_m}{\partial t} dV + \iint_{[S_m]} \hat{\rho}_m \cdot U_m^n dS = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{[V_m]} \hat{\rho}_m dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta x} \left(\iint_{[f_m]} \hat{\rho}_m df \right) dx = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iint_{[f_m]_c} \hat{\rho}_m df, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$m = 1, 2.$

Подставим (2.88) и (2.89) в (2.87), а также поделим полученное уравнение на Δx , считая, что Δx стремится к нулю:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{[f_m]} \hat{\rho}_m df + \frac{\partial}{\partial x} \iint_{[f_m]} \hat{\rho}_m \cdot v_m^x df = 0, \quad m = 1, 2. \quad (2.90)$$

Аналогичным образом можно показать, что для функции $y(\vec{r}, t) \in C^1(\vec{r}, t)$ справедливо соотношение:

$$\iiint_{[V_m]} \frac{\partial y}{\partial t} dV + \iint_{[S_m]} y \cdot v_m^n dS = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iint_{[f_m]_c} y df + \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_{[f_m]_c} y \cdot v_m^x df. \quad (2.91)$$

Введем средние по сечению плотность, скорость и объемную концентрацию m -ой компоненты:

$$\rho_m = \frac{1}{f_m} \cdot \iint_{[f_m]} \hat{\rho}_m df; \quad (2.92a)$$

$$w_m = \frac{1}{f_m \cdot \rho_m} \cdot \iint_{[f_m]} \hat{\rho}_m \cdot v_m^x df; \quad (2.92b)$$

$$\psi_m = \frac{1}{f} \cdot \iint_f \hat{\psi}_m df = \frac{f_m}{f}. \quad (2.92b)$$

С учетом введенных обозначений, уравнение неразрывности запишется в виде:

$$\frac{\partial(\rho_m \cdot f_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m \cdot w_m \cdot f_m)}{\partial x} = 0, \quad m = 1, 2, \quad (2.93a)$$

или, с учетом (2.92b) и условия $f = \text{const}$,

$$\frac{\partial(\rho_m \cdot \psi_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m \cdot w_m \cdot \psi_m)}{\partial x} = 0, \quad m = 1, 2. \quad (2.93б)$$

Проинтегрируем уравнение (2.79б) для m -ой компоненты по объему V_m . Учитывая отсутствие в этом объеме другой компоненты, рассматриваемое уравнение преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \iiint_{[V_m]} \frac{\partial(\bar{\rho}_m \cdot \bar{\mathbf{v}}_m)}{\partial t} dV + \iint_{[S_m]} \bar{\rho}_m \cdot \bar{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{v}_m^n dS = & - \iint_{[S_m]} \bar{p}_m \cdot \bar{\mathbf{n}} dS + \\ & + \iint_{[S_m]} \bar{\tau}_m^n dS + \iiint_{[V_m]} \bar{\rho}_m \cdot \bar{\mathbf{F}}_m dV - \iiint_{[V_m]} \bar{\rho}_m \cdot \bar{\mathbf{a}}_m dV. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Спроектируем (2.94) на ось Ox и распишем каждое слагаемое.

Первое и второе слагаемое. Согласно (2.91), имеем:

$$\left(\iiint_{[V_m]} \frac{\partial(\bar{\rho}_m \cdot \bar{\mathbf{v}}_m)}{\partial t} dV \right)^x + \left(\iint_{[S_m]} \bar{\rho}_m \cdot \bar{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{v}_m^n dS \right)^x = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iint_{[f_m]_c} \bar{\rho}_m \cdot \mathbf{v}_m^x df + \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_{[f_m]_c} \bar{\rho}_m \cdot (\mathbf{v}_m^x)^2 df. \quad (2.95)$$

Введем корреляционный коэффициент, учитывающий неравномерное распределение скоростей по поверхности f_m :

$$\beta_m^{v^2} = \frac{1}{\rho_m \cdot w_m^2 \cdot f_m} \cdot \iint_{[f_m]} \bar{\rho}_m \cdot (\mathbf{v}_m^x)^2 df. \quad (2.96)$$

Тогда, с учетом (2.92б) и (2.96), имеем:

$$\begin{aligned} \left(\iiint_{[V_m]} \frac{\partial(\bar{\rho}_m \cdot \bar{\mathbf{v}}_m)}{\partial t} dV \right)^x + \left(\iint_{[S_m]} \bar{\rho}_m \cdot \bar{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{v}_m^n dS \right)^x = \\ = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \cdot w_m \cdot f_m)_c + \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\beta_m^{v^2} \cdot \rho_m \cdot w_m^2 \cdot f_m)_c. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Третье слагаемое.

$$\left(\iint_{[S_m]} \bar{p}_m \cdot \bar{\mathbf{n}} dS \right)^x = \left(\iint_{[f'_m]} \bar{p}_m df - \iint_{[f_m]} \bar{p}_m df \right) + \left(\iint_{[\omega_m]} \bar{p}_m \cdot \bar{\mathbf{n}} d\omega \right)^x. \quad (2.98)$$

По теореме о среднем:

$$\iint_{[f'_m]} \bar{p}_m df - \iint_{[f_m]} \bar{p}_m df = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_{[f_m]_c} \bar{p}_m df = \Delta x \cdot \left(\frac{\partial(p_m \cdot f_m)}{\partial x} \right)_c, \quad (2.99)$$

где p_m – среднее по поверхности f_m давление:

$$p_m = \frac{1}{f_m} \cdot \iint_{[f_m]} \bar{p}_m df. \quad (2.100)$$

Далее, т.к. $\iint_{[S_m]} \bar{\mathbf{n}} dS = \bar{\mathbf{0}}$, получим:

$$\left(\iint_{[\omega_m]} \bar{p}_m \cdot \bar{\mathbf{n}} d\omega \right)^x = \bar{p}_m \cdot \left(- \iint_{[S_m]} \bar{\mathbf{n}} dS + \iint_{[\omega_m]} \bar{\mathbf{n}} d\omega \right)^x = -\bar{p}_m \cdot (f'_m - f_m) = -\bar{p}_m \cdot \Delta x \cdot \left(\frac{\partial f_m}{\partial x} \right)_c, \quad (2.101)$$

где $\bar{p}_m$ – среднее по поверхности ω значение давления,

$$\bar{p}_m = \left(\iint_{[\omega_m]} \bar{p}_m \cdot \bar{\mathbf{n}} d\omega \right)^x \cdot \left[\left(\iint_{[\omega_m]} \bar{\mathbf{n}} d\omega \right)^x \right]^{-1} = \frac{1}{f_m - f'_m} \cdot \left(\iint_{[\omega_m]} \bar{p}_m \cdot \bar{\mathbf{n}} d\omega \right)^x. \quad (2.102)$$

Введем следующий корреляционный коэффициент:

$$\beta_m^{p\omega} = \bar{p}_m / p_m. \quad (2.103)$$

С учетом (2.103), для третьего слагаемого получаем:

$$\left(\iint_{[S_m]} \bar{p}_m \cdot \bar{\mathbf{n}} dS \right)^x = \Delta x \cdot \left(\frac{\partial (p_m \cdot f_m)}{\partial x} \right)_c - \Delta x \cdot \beta_m^{p\omega} \cdot p_m \cdot \left(\frac{\partial f_m}{\partial x} \right)_c. \quad (2.104)$$

Четвертое слагаемое.

$$\iint_{[S_m]} \bar{\boldsymbol{\tau}}_m^n dS = \iint_{[f'_m]} \bar{\boldsymbol{\tau}}_m^x df - \iint_{[f_m]} \bar{\boldsymbol{\tau}}_m^x df + \iint_{[\omega_m]} \bar{\boldsymbol{\tau}}_m^n d\omega. \quad (2.105)$$

Для первых двух слагаемых правой части (2.105) запишем:

$$\left(\iint_{[f'_m]} \bar{\boldsymbol{\tau}}_m^x df \right)^x - \left(\iint_{[f_m]} \bar{\boldsymbol{\tau}}_m^x df \right)^x = \bar{\tau}_m^{xx} \cdot f'_m - \bar{\tau}_m^{xx} \cdot f_m, \quad (2.106)$$

где $\bar{\tau}_m^{xx}$ и $\bar{\tau}_m^{xx}$ – средние по поверхностям f'_m и f_m проекции $\bar{\boldsymbol{\tau}}_m^x$ на ось Ox .

Для газовой фазы:

$$\left(\iint_{[\omega_2]} \bar{\boldsymbol{\tau}}_2^n d\omega \right)^x = \left(\iint_{[S_{\varphi}]} \bar{\boldsymbol{\tau}}_2^n dS \right)^x = \int_{\Delta x} \left(\int_{[\chi_{\varphi}]} \bar{\boldsymbol{\tau}}_2^n d\chi \right)^x dx = \Delta x \cdot \left(\int_{[\chi_{\varphi}]} \bar{\boldsymbol{\tau}}_2^n d\chi \right)^x = \Delta x \cdot (Tp_{2,\varphi} \cdot \chi_{\varphi})_c, \quad (2.107a)$$

где χ_{φ} – периметр границы жидкой и газовой фаз, находящейся в рассматриваемом поперечном сечении трубы; $Tp_{2,\varphi}$ – средняя по периметру χ_{φ} проекция $\bar{\boldsymbol{\tau}}_2^n$ на ось Ox :

$$Tp_{2,\varphi} = \frac{1}{\chi_{\varphi}} \cdot \left(\int_{[\chi_{\varphi}]} \bar{\boldsymbol{\tau}}_2^n d\chi \right)^x. \quad (2.107б)$$

Для жидкой фазы:

$$\begin{aligned}
\left(\iint_{[\omega_1]} \bar{\tau}_1^n d\omega \right)^x &= \left(\iint_{[S_{\text{зп}}]} \bar{\tau}_1^n dS \right)^x + \left(\iint_{\omega} \bar{\tau}_1^n d\omega \right)^x = \int_{\Delta x} \left(\int_{[\chi_{\text{зп}}]} \bar{\tau}_1^n d\chi \right)^x dx + \int_{\Delta x} \left(\int_{[\chi_{\text{труба}}]} \bar{\tau}_1^n d\chi \right)^x dx = \\
&= \Delta x \cdot \left(\int_{[\chi_{\text{зп}}]_c} \bar{\tau}_1^n d\chi \right)^x + \Delta x \cdot \left(\int_{[\chi_{\text{труба}}]_c} \bar{\tau}_1^n d\chi \right)^x = \Delta x \cdot (Tp_{1,\text{зп}} \cdot \chi_{\text{зп}})_c + \Delta x \cdot (Tp_{\text{труба}} \cdot \chi_{\text{труба}})_c,
\end{aligned} \tag{2.108}$$

где $\chi_{\text{труба}}$ – периметр поперечного сечения трубы; $Tp_{\text{труба}}$ – средняя по периметру $\chi_{\text{труба}}$ проекция $\bar{\tau}_1^n$ на ось Ox ; $Tp_{1,\text{зп}}$ – средняя по периметру $\chi_{\text{зп}}$ проекция $\bar{\tau}_1^n$ на ось Ox :

$$Tp_{\text{труба}} = \frac{1}{\chi_{\text{труба}}} \cdot \left(\int_{[\chi_{\text{труба}}]} \bar{\tau}_1^n d\chi \right)^x; \quad Tp_{1,\text{зп}} = \frac{1}{\chi_{\text{зп}}} \cdot \left(\int_{[\chi_{\text{зп}}]} \bar{\tau}_1^n d\chi \right)^x; \tag{2.109a}$$

$$Tp_{1,\text{зп}} = -Tp_{2,\text{зп}}. \tag{2.109б}$$

Покажем, что полученными в (2.106) для сечений f'_m и f_m членами можно пренебречь по сравнению с аналогичными слагаемыми по боковым поверхностям ω_m , $m = 1, 2$.

Рассмотрим кольцевое течение ньютоновских сред. В этом случае компоненты тензора вязких напряжений определяются следующим образом [84, 108] (без учета объемной вязкости):

$$\tau^{ij} = \mu \cdot \left[\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \delta^{ij} \cdot \frac{\partial v^k}{\partial x^k} \right], \quad i, j, k = \overline{1, 3}, \tag{2.110}$$

где τ^{ij} – компонента тензора вязких напряжений τ (здесь индексы m опущены для наглядности); v^i , $i = \overline{1, 3}$, – компоненты вектора скорости $\vec{v}$; x^i , $i = \overline{1, 3}$, – пространственные координаты; δ^{ij} – символ Кронекера; μ – коэффициент динамической вязкости.

Введем в рассмотрение безразмерный параметр Рейнольдса, относящийся к жидкой пленке:

$$Re_1 = \frac{\rho_1 \cdot w_1 \cdot \delta}{\mu_1}, \tag{2.111}$$

где δ и μ_1 – средние по поверхности f_1 значения толщины пленки и коэффициента динамической вязкости жидкой компоненты.

Согласно [79], наибольшее значение для приложений имеет турбулентный режим пленки, который реализуется при $Re_1 > 400$ и при котором основное сопротивление трения определяется ламинарным подслоем и буферной областью, локализованными в очень узкой зоне толщиной δ_* у стенки трубы. Корреляционные коэффициенты, характеризующие неравномерность распределения скоростей газа и жидкости соответственно по сечениям f_2 и f_1 , в этом случае примерно равны единице¹. Из этого можно сделать вывод о том, что характер распределения скоростей по поперечному сечению трубы близок к распределению, схематично представленному на рис. 2.8.

¹ Следует отметить, что при этом не учитывается влияние сил инерции.

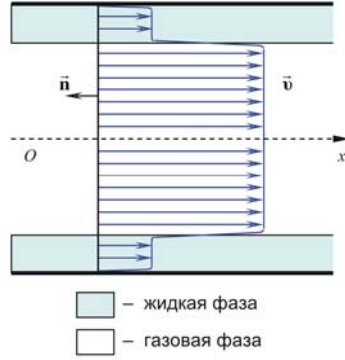


Рис. 2.8. Схематичное представление распределения скоростей по поперечному сечению трубы

Из данного рисунка видно, что максимальные градиенты скоростей располагаются в зонах, являющихся приграничными с поверхностями ω_1 и ω_2 . Основная же часть поверхностей f'_m и f_m соответствует малым (по сравнению с вышеупомянутыми) градиентам скоростей¹. Следовательно (см. (2.110)), параметрами $\bar{\tau}_m^{xx}$ и $\bar{\tau}_m^{xx}$, осредненными именно по этим поверхностям, можно пренебречь по сравнению с величинами $Tr_{m, cp}$ и $Tr_{труба}$ (см. (2.107 – 2.109)).

Таким образом, четвертое слагаемое можно записать в виде:

$$\left(\iint_{[S_m]} \bar{\tau}_m^n dS \right)^x = \Delta x \cdot (Tr_{m, cp} \cdot \chi_{cp})_c + \delta^{1m} \cdot \Delta x \cdot (Tr_{труба} \cdot \chi_{труба})_c. \quad (2.112)$$

Пятое слагаемое.

$$\left(\iiint_{[V_m]} \bar{\rho}_m \cdot \bar{\mathbf{F}}_m dV \right)^x = \int_{\Delta x} \left(\iint_{[f_m]} \bar{\rho}_m \cdot \bar{F}_m^x df \right) dx = \Delta x \cdot \iint_{[f_m]_c} \bar{\rho}_m \cdot \bar{F}_m^x df = \Delta x \cdot (\rho_m \cdot F_m^x \cdot f_m)_c, \quad (2.113)$$

где $\bar{F}_m^x$ – проекция $\bar{\mathbf{F}}_m$ на ось Ox ; F_m^x – среднее по поверхности f_m значение $\bar{F}_m^x$:

$$F_m^x = \frac{1}{\rho_m \cdot f_m} \cdot \iint_{[f_m]} \bar{\rho}_m \cdot \bar{F}_m^x df. \quad (2.114)$$

Шестое слагаемое.

$$\left(\iiint_{[V_m]} \bar{\rho}_m \cdot \bar{\mathbf{a}}_m dV \right)^x = \int_{\Delta x} \left(\iint_{[f_m]} \bar{\rho}_m \cdot \bar{a}_m^x df \right) dx = \Delta x \cdot \iint_{[f_m]_c} \bar{\rho}_m \cdot \bar{a}_m^x df = \Delta x \cdot (\rho_m \cdot a_m^x \cdot f_m)_c, \quad (2.115)$$

где $\bar{a}_m^x$ – проекция $\bar{\mathbf{a}}_m$ на ось Ox ; a_m^x – среднее по поверхности f_m значение $\bar{a}_m^x$:

¹ В случае наличия внешних воздействий, требующих учета инертности среды, при математическом моделировании будем условно считать, что величина таких воздействий не нарушает данное утверждение. Разумеется, в этом случае корреляционные коэффициенты, учитывающие неравномерность распределения скоростей по сечениям f_m , могут отличаться от единицы.

$$a_m^x = \frac{1}{\rho_m \cdot f_m} \cdot \iint_{[f_m]} \bar{\rho}_m \cdot \bar{a}_m^x df. \quad (2.116)$$

Подставим в уравнение (2.94) полученные выше выражения для его слагаемых, поделим уравнение на Δx и устремим Δx к нулю. Результирующее уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_m \cdot w_m \cdot f_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta_m^{v^2} \cdot \rho_m \cdot w_m^2 \cdot f_m)}{\partial x} = & - \left(\frac{\partial(p_m \cdot f_m)}{\partial x} - \beta_m^{p\omega} \cdot p_m \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x} \right) + Tp_{m,cp} \cdot \chi_{cp} + \\ & + \delta^{1m} \cdot Tp_{труба} \cdot \chi_{труба} + \rho_m \cdot F_m^x \cdot f_m - \rho_m \cdot a_m^x \cdot f_m. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Предполагая, что единственной действующей массовой силой является сила тяжести, получим:

$$F_m^x = g \cdot \cos \Omega = -g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x}, \quad (2.118)$$

где z_1 является вертикальной координатой точки на оси трубы, отсчитываемой от произвольной горизонтальной плоскости вертикально вверх (для трубопроводов большой протяженности – по радиусу Земли) (см. выше); Ω – угол между вектором ускорения свободного падения $\vec{g}$ и ортом $\vec{x}$ ($\vec{x}$ – орт оси Ox); g – модуль ускорения свободного падения.

Согласно [82], статическое давление в смеси включает давления компонент p_1 и p_2 , которые различаются между собой капиллярным давлением. Для газожидкостных смесей капиллярное давление выражается через среднее поверхностное натяжение $\bar{\sigma}'$ и среднюю кривизну поверхности раздела фаз $1/R_{крив}$ [68, 82]:

$$p_1 = p_2 + \bar{\sigma}' / R_{крив}, \quad (2.119)$$

где $1/R_{крив} = 1/R' + 1/R''$, R' и R'' – средние значения главных радиусов кривизны поверхности раздела фаз. В большинстве случаев капиллярным давлением можно пренебречь [82] и положить:

$$p_1 = p_2 = \bar{p}_1 = \bar{p}_2 = p; \quad (2.120)$$

$$\beta_m^{p\omega} = 1. \quad (2.121)$$

Пусть R – внутренний радиус трубы, тогда

$$\chi_{труба} = 2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot \sqrt{\pi \cdot f}. \quad (2.122)$$

С целью упрощения будем условно считать, что газовая фаза в поперечном сечении трубы образует круг с центром, лежащим на оси трубы. В этом случае радиус данного круга будет равен $(R - \delta)$, где δ – толщина пленки. Исходя из вышесказанного, получим:

$$R - \delta = \sqrt{f_2 / \pi} = \sqrt{\psi_2 \cdot f / \pi}; \quad (2.123a)$$

$$\delta = R - \sqrt{f_2 / \pi} = R - \sqrt{\psi_2 \cdot f / \pi}; \quad (2.123б)$$

$$\chi_{cp} = 2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) = 2 \cdot \sqrt{\pi \cdot f_2} = 2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \psi_2 \cdot f}. \quad (2.123в)$$

Таким образом, с учетом вышеизложенного, уравнение движения представимо в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_m \cdot w_m \cdot f_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta_m^{V^2} \cdot \rho_m \cdot w_m^2 \cdot f_m)}{\partial x} = \\ = -f_m \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \cdot T_{p_{m, \text{эп}}} \cdot \sqrt{\pi \cdot f_2} + 2 \cdot \delta^{1m} \cdot T_{p_{\text{мрыба}}} \cdot \sqrt{\pi \cdot f} - \rho_m \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot f_m - \rho_m \cdot a_m^x \cdot f_m \end{aligned} \quad (2.124a)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_m \cdot w_m \cdot \psi_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta_m^{V^2} \cdot \rho_m \cdot w_m^2 \cdot \psi_m)}{\partial x} = -\psi_m \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \cdot T_{p_{m, \text{эп}}} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot \psi_2}{f}} + \\ + 2 \cdot \delta^{1m} \cdot T_{p_{\text{мрыба}}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{f}} - \rho_m \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot \psi_m - \rho_m \cdot a_m^x \cdot \psi_m, \end{aligned} \quad (2.124б)$$

где $m = 1, 2$.

Здесь следует отметить частный случай уравнений (2.124а) и (2.124б), когда можно пренебречь влиянием сил инерции и положить равными единице корреляционные коэффициенты, характеризующие неравномерность распределения скоростей по сечениям f_m :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_m \cdot w_m \cdot f_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m \cdot w_m^2 \cdot f_m)}{\partial x} = \\ = -f_m \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \cdot T_{p_{m, \text{эп}}} \cdot \sqrt{\pi \cdot f_2} + 2 \cdot \delta^{1m} \cdot T_{p_{\text{мрыба}}} \cdot \sqrt{\pi \cdot f} - \rho_m \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot f_m \end{aligned} \quad (2.124в)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_m \cdot w_m \cdot \psi_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m \cdot w_m^2 \cdot \psi_m)}{\partial x} = \\ = -\psi_m \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \cdot T_{p_{m, \text{эп}}} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot \psi_2}{f}} + 2 \cdot \delta^{1m} \cdot T_{p_{\text{мрыба}}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{f}} - \rho_m \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot \psi_m, \end{aligned} \quad (2.124г)$$

где $m = 1, 2$. Конкретные зависимости $T_{p_{\text{мрыба}}}$ и $T_{p_{m, \text{эп}}}$ от параметров среды будут рассмотрены ниже.

Проинтегрируем уравнение (2.79в) для m -ой компоненты по объему V_m . Учитывая отсутствие в этом объеме другой компоненты, указанное уравнение преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \iiint_{[V_m]} \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho}_m \cdot \left(\bar{\varepsilon}_m + \frac{v_m^2}{2} \right) \right] dV + \iint_{[S_m]} \left[\bar{\rho}_m \cdot v_m^n \cdot \left(\bar{\varepsilon}_m + \frac{v_m^2}{2} \right) \right] dS = \\ = - \iint_{[S_m]} \bar{p}_m \cdot v_m^n dS + \iint_{[S_m]} (\bar{\tau}_m^n \cdot \bar{\mathbf{v}}_m) dS + \iiint_{[V_m]} \bar{\rho}_m \cdot (\bar{\mathbf{F}}_m \cdot \bar{\mathbf{v}}_m) dV - \\ - \iiint_{[V_m]} \bar{\rho}_m \cdot (\bar{\mathbf{a}}_m \cdot \bar{\mathbf{v}}_m) dV - \iint_{[S_m]} \bar{W}_m^n dS + \iiint_{[V_m]} \bar{Q}_m dV. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Распишем каждое слагаемое (2.125).

Первое и второе слагаемые. Согласно (2.91), имеем:

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{[V_m]} \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho}_m \cdot \left(\bar{\varepsilon}_m + \frac{v_m^2}{2} \right) \right] dV + \iint_{[S_m]} \left[\bar{\rho}_m \cdot v_m^n \cdot \left(\bar{\varepsilon}_m + \frac{v_m^2}{2} \right) \right] dS = \\
 & = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iint_{[f_m]_c} \left[\bar{\rho}_m \cdot \left(\bar{\varepsilon}_m + \frac{v_m^2}{2} \right) \right] df + \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_{[f_m]_c} \left[\bar{\rho}_m \cdot v_m^x \cdot \left(\bar{\varepsilon}_m + \frac{v_m^2}{2} \right) \right] df = \\
 & = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_m \cdot \varepsilon_m \cdot f_m + \tilde{\beta}_m^{v^2} \cdot \rho_m \cdot \frac{w_m^2}{2} \cdot f_m \right)_c + \\
 & + \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_m^{VE} \cdot \rho_m \cdot \varepsilon_m \cdot w_m \cdot f_m + \beta_m^{V^3} \cdot \rho_m \cdot \frac{w_m^3}{2} \cdot f_m \right)_c,
 \end{aligned} \tag{2.126a}$$

где

$$\varepsilon_m = \frac{1}{\rho_m \cdot f_m} \cdot \iint_{[f_m]} \bar{\rho}_m \cdot \bar{\varepsilon}_m df; \tag{2.126б}$$

$$\tilde{\beta}_m^{v^2} = \frac{1}{\rho_m \cdot w_m^2 \cdot f_m} \cdot \iint_{[f_m]} \bar{\rho}_m \cdot v_m^2 df; \tag{2.126в}$$

$$\beta_m^{VE} = \frac{1}{\rho_m \cdot \varepsilon_m \cdot w_m \cdot f_m} \cdot \iint_{[f_m]} \bar{\rho}_m \cdot v_m^x \cdot \bar{\varepsilon}_m df; \tag{2.126г}$$

$$\beta_m^{V^3} = \frac{1}{\rho_m \cdot w_m^3 \cdot f_m} \cdot \iint_{[f_m]} \bar{\rho}_m \cdot v_m^x \cdot v_m^2 df. \tag{2.126д}$$

Третье слагаемое.

$$\iint_{[S_m]} \bar{p}_m \cdot v_m^n dS = \iint_{[f'_m]} \bar{p}_m \cdot v_m^x df - \iint_{[f_m]} \bar{p}_m \cdot v_m^x df + \iint_{[e_m]} \bar{p}_m \cdot v_m^n d\omega. \tag{2.127}$$

По теореме о среднем:

$$\iint_{[f'_m]} \bar{p}_m \cdot v_m^x df - \iint_{[f_m]} \bar{p}_m \cdot v_m^x df = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_{[f_m]_c} \bar{p}_m \cdot v_m^x df = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_m^{PV} \cdot p_m \cdot w_m \cdot f_m \right)_c, \tag{2.128}$$

где β_m^{PV} – корреляционный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения давления и скорости по поверхности f_m :

$$\beta_m^{PV} = \frac{1}{p_m \cdot w_m \cdot f_m} \cdot \iint_{[f_m]} \bar{p}_m \cdot v_m^x df. \tag{2.129}$$

Рассмотрим последнее слагаемое выражения (2.127). Т.к. скорость движения жидкой фазы на внутренней поверхности трубы равна нулю, рассматриваемое слагаемое для обеих фаз расписывается только по поверхности S_{cp} :

$$\begin{aligned}
 & \iint_{[e_m]} \bar{p}_m \cdot v_m^n d\omega = \iint_{[S_{cp}]} \bar{p}_m \cdot v_m^n dS = \tilde{p}_m \cdot \iint_{[S_{cp}]} v_m^n dS = \tilde{p}_m \cdot \int_{\Delta x} \left(\int_{[\chi_{cp}]} v_m^n d\chi \right) dx = \\
 & = \tilde{p}_m \cdot \Delta x \cdot \left(\int_{[\chi_{cp}]_c} v_m^n d\chi \right) = \tilde{p}_m \cdot \Delta x \cdot \left(w_{m,cp}^n \cdot \chi_{cp} \right)_c = \Delta x \cdot \left(\beta_m^{PV\omega} \cdot p_m \cdot w_{m,cp}^n \cdot \chi_{cp} \right)_c,
 \end{aligned} \tag{2.130}$$

где

$$\tilde{p}_m = \frac{1}{\iint_{[S_{cp}]} \nu_m^n dS} \cdot \iint_{[S_{cp}]} \hat{p}_m \cdot \nu_m^n dS; \quad (2.131a)$$

$$\left(\beta_m^{PV\omega}\right)_c = \frac{\tilde{p}_m}{(p_m)_c}; \quad (2.131б)$$

$$w_{m,cp}^n = \frac{1}{\chi_{cp}} \cdot \int_{[\chi_{cp}]} \nu_m^n d\chi, \quad w_{1,cp}^n = -w_{2,cp}^n. \quad (2.131в)$$

Последнее соотношение объясняется предположением о равенстве скоростей газа и жидкости на границе их соприкосновения [82]. Таким образом, третье слагаемое будет иметь вид:

$$\iint_{[S_m]} \hat{p}_m \cdot \nu_m^n dS = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_m^{PV} \cdot p_m \cdot w_m \cdot f_m \right)_c + \Delta x \cdot \left(\beta_m^{PV\omega} \cdot p_m \cdot w_{m,cp}^n \cdot \chi_{cp} \right)_c. \quad (2.132)$$

Четвертое слагаемое.

$$\iint_{[S_m]} (\bar{\tau}_m^n \cdot \bar{\nu}_m) dS = \iint_{[f_m]} (\bar{\tau}_m^x \cdot \bar{\nu}_m) df - \iint_{[f_m]} (\bar{\tau}_m^x \cdot \bar{\nu}_m) df + \iint_{[\omega_m]} (\bar{\tau}_m^n \cdot \bar{\nu}_m) d\omega. \quad (2.133)$$

Рассмотрим сначала третье слагаемое правой части выражения (2.133). Т.к. скорость движения жидкой фазы на внутренней поверхности трубы равна нулю, анализируемый интеграл для обеих фаз расписывается только по поверхности S_{cp} :

$$\begin{aligned} \iint_{[\omega_m]} (\bar{\tau}_m^n \cdot \bar{\nu}_m) d\omega &= \iint_{[S_{cp}]} (\bar{\tau}_m^n \cdot \bar{\nu}_m) dS = \int_{\Delta x} \left(\int_{[\chi_{cp}]} (\bar{\tau}_m^n \cdot \bar{\nu}_m) d\chi \right) dx = \\ &= \Delta x \cdot \int_{[\chi_{cp}]_c} (\bar{\tau}_m^n \cdot \bar{\nu}_m) d\chi = \Delta x \cdot (A_m^{Tp} \cdot \chi_{cp})_c, \end{aligned} \quad (2.134)$$

где A_m^{Tp} — относящаяся к m -ой компоненте средняя по периметру χ_{cp} удельная (на единицу поверхности) мощность межфазового взаимодействия, обусловленного вязкостью:

$$A_m^{Tp} = \frac{1}{\chi_{cp}} \cdot \int_{[\chi_{cp}]} (\bar{\tau}_m^n \cdot \bar{\nu}_m) d\chi; \quad A_1^{Tp} = -A_2^{Tp}. \quad (2.135)$$

Интегралами по поперечным сечениям в (2.133) пренебрежем по аналогии с рассуждениями, приведенными при анализе первого и второго слагаемых (2.105). Таким образом,

$$\iint_{[S_m]} (\bar{\tau}_m^n \cdot \bar{\nu}_m) dS = \Delta x \cdot (A_m^{Tp} \cdot \chi_{cp})_c. \quad (2.136)$$

Пятое слагаемое.

$$\begin{aligned} \iiint_{[V_m]} \hat{\rho}_m \cdot (\bar{\mathbf{F}}_m \cdot \bar{\nu}_m) dV &= \int_{\Delta x} \left(\iint_{[f_m]} \hat{\rho}_m \cdot (\bar{\mathbf{F}}_m \cdot \bar{\nu}_m) df \right) dx = \\ &= \Delta x \cdot \iint_{[f_m]_c} \hat{\rho}_m \cdot (\bar{\mathbf{F}}_m \cdot \bar{\nu}_m) df = \Delta x \cdot \left(\beta_m^{gw} \cdot \rho_m \cdot w_m \cdot F_m^x \cdot f_m \right)_c, \end{aligned} \quad (2.137)$$

где

$$\beta_m^{gw} = \frac{1}{\rho_m \cdot w_m \cdot F_m^x \cdot f_m} \cdot \iint_{[f_m]} \hat{\rho}_m \cdot (\vec{F}_m \cdot \vec{v}_m) df. \quad (2.138)$$

Шестое слагаемое.

$$\begin{aligned} \iint_{[V_m]} \hat{\rho}_m \cdot (\vec{a}_m \cdot \vec{v}_m) dV &= \int_{\Delta x} \left(\iint_{[f_m]} \hat{\rho}_m \cdot (\vec{a}_m \cdot \vec{v}_m) df \right) dx = \Delta x \cdot \iint_{[f_m]_c} \hat{\rho}_m \cdot (\vec{a}_m \cdot \vec{v}_m) df = \\ &= \Delta x \cdot (\beta_m^{aw} \cdot \rho_m \cdot w_m \cdot a_m^x \cdot f_m)_c, \end{aligned} \quad (2.139)$$

где

$$\beta_m^{aw} = \frac{1}{\rho_m \cdot w_m \cdot a_m^x \cdot f_m} \cdot \iint_{[f_m]} \hat{\rho}_m \cdot (\vec{a}_m \cdot \vec{v}_m) df. \quad (2.140)$$

Седьмое слагаемое.

$$\iint_{[S_m]} \hat{W}_m^n dS = \iint_{[f_m]} \hat{W}_m^x df - \iint_{[f_m]} \hat{W}_m^x df + \iint_{[\omega_m]} \hat{W}_m^n d\omega. \quad (2.141)$$

Для первых двух слагаемых правой части выражения (2.141) имеем:

$$\iint_{[f_m]} \hat{W}_m^x df = - \iint_{[f_m]} \hat{k}_m \cdot \frac{\partial \hat{T}_m}{\partial x} df = -k_m \cdot f_m \cdot \frac{\partial T_m}{\partial x}, \quad (2.142)$$

где k_m – среднее по поверхности f_m значение коэффициента теплопроводности m -ой компоненты; T_m – среднее по f_m значение температуры.

$$\iint_{[f_m']} \hat{W}_m^x df - \iint_{[f_m]} \hat{W}_m^x df = - \left(\iint_{[f_m']} \hat{k}_m \cdot \frac{\partial \hat{T}_m}{\partial x} df - \iint_{[f_m]} \hat{k}_m \cdot \frac{\partial \hat{T}_m}{\partial x} df \right) = - \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(k_m \cdot f_m \cdot \frac{\partial T_m}{\partial x} \right)_c. \quad (2.143)$$

Для газовой фазы интеграл по боковой поверхности в (2.141) распишем следующим образом:

$$\iint_{[\omega_2]} \hat{W}_2^n d\omega = \iint_{[S_{zp}]} \hat{W}_2^n dS = \int_{\Delta x} \left(\int_{[\chi_{zp}]} \hat{W}_2^n d\chi \right) dx = \Delta x \cdot \int_{[\chi_{zp}]_c} \hat{W}_2^n d\chi = \Delta x \cdot (\Phi_{2,zp})_c, \quad (2.144)$$

где

$$\Phi_{2,zp} = \int_{[\chi_{zp}]} \hat{W}_2^n d\chi. \quad (2.145)$$

Функция $\Phi_{2,zp}$ определяется законом теплообмена между фазами и выражает собой удельный (на единицу длины) суммарный тепловой поток через поверхность их раздела по периметру χ_{zp} ($\Phi_{2,zp} > 0$ – идет отвод тепла от газа в жидкость).

Для жидкой фазы имеем:

$$\begin{aligned} \iint_{[\omega_1]} \hat{W}_1^n d\omega &= \iint_{[S_{zp}]} \hat{W}_1^n dS + \iint_{[\omega]} \hat{W}_1^n d\omega = \int_{\Delta x} \left(\int_{[\chi_{zp}]} \hat{W}_1^n d\chi \right) dx + \int_{\Delta x} \left(\int_{[\chi]} \hat{W}_1^n d\chi \right) dx = \\ &= \Delta x \cdot \int_{[\chi_{zp}]_c} \hat{W}_1^n d\chi + \Delta x \cdot \int_{[\chi]_c} \hat{W}_1^n d\chi = \Delta x \cdot (\Phi_{1,zp})_c + \Delta x \cdot (\Phi_{oc})_c. \end{aligned} \quad (2.146)$$

где

$$\Phi_{1, \varepsilon p} = \int_{[\chi_{\varepsilon p}]} \widehat{W}_1^n d\chi; \quad (2.147a)$$

$$\Phi_{oc} = \int_{\chi} \widehat{W}_1^n d\chi; \quad (2.147б)$$

$$\Phi_{1, \varepsilon p} = -\Phi_{2, \varepsilon p}. \quad (2.147в)$$

Функция $\Phi_{1, \varepsilon p}$ определяется законом теплообмена между фазами и выражает собой удельный (на единицу длины) суммарный тепловой поток через поверхность их раздела по периметру $\chi_{\varepsilon p}$ ($\Phi_{1, \varepsilon p} > 0$ – идет отвод тепла от жидкости в газ). Функция Φ_{oc} определяется законом теплопередачи от жидкой фазы к окружающей среде и выражает собой удельный (на единицу длины) суммарный тепловой поток через стенки трубы по периметру χ поперечного сечения ($\Phi_{oc} > 0$ – идет отвод тепла в окружающую среду).

Таким образом, седьмое слагаемое имеет вид:

$$\iint_{[S_m]} \widehat{W}_m^n dS = -\Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(k_m \cdot f_m \cdot \frac{\partial T_m}{\partial x} \right)_c + \Delta x \cdot (\Phi_{m, \varepsilon p})_c + \delta^{1m} \cdot \Delta x \cdot (\Phi_{oc})_c. \quad (2.148)$$

Восьмое слагаемое.

$$\iiint_{[V_m]} \widehat{Q}_m dV = \int_{\Delta x} \left(\iint_{[f_m]} \widehat{Q}_m df \right) dx = \Delta x \cdot (Q_m \cdot f_m)_c, \quad (2.149)$$

где

$$Q_m = \frac{1}{f_m} \cdot \iint_{[f_m]} \widehat{Q}_m df. \quad (2.150)$$

Подставим в уравнение (2.125) полученные выше выражения его слагаемых, поделим уравнение на Δx и устремим Δx к нулю. Результирующее уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_m \cdot \varepsilon_m \cdot f_m + \tilde{\beta}_m^{V2} \cdot \rho_m \cdot \frac{w_m^2}{2} \cdot f_m \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_m^{VE} \cdot \rho_m \cdot \varepsilon_m \cdot w_m \cdot f_m + \beta_m^{V3} \cdot \rho_m \cdot \frac{w_m^3}{2} \cdot f_m \right) = \\ & = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_m^{pV} \cdot p_m \cdot w_m \cdot f_m \right) - \beta_m^{pV\omega} \cdot p_m \cdot w_{m, \varepsilon p}^n \cdot \chi_{\varepsilon p} + A_m^{Tp} \cdot \chi_{\varepsilon p} + \beta_m^{gW} \cdot \rho_m \cdot w_m \cdot F_m^x \cdot f_m - \\ & - \beta_m^{aW} \cdot \rho_m \cdot w_m \cdot a_m^x \cdot f_m + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_m \cdot f_m \cdot \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - \Phi_{m, \varepsilon p} - \delta^{1m} \cdot \Phi_{oc} + Q_m \cdot f_m. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Согласно [79], скорость поверхности пленки равна:

$$w_{\Sigma} \approx 1,1 \cdot w_1. \quad (2.152a)$$

Будем считать, что если поверхность пленки движется не параллельно оси трубы, то параметр w_{Σ} будет соответствовать средней по периметру $\chi_{\varepsilon p}$ x -ой составляющей скорости поверхности пленки:

$$w_{\varepsilon p}^x = 1,1 \cdot w_1. \quad (2.152б)$$

Также при упрощении будем полагать, что газовое ядро образует в поперечном сечении круг с центром, совпадающим с осью трубы. В этом случае толщина пленки δ будет

определяться соотношением (2.1236). Для рассматриваемого осесимметричного движения смеси средняя по периметру χ_{cp} скорость поверхности пленки в цилиндрической системе координат будет определяться только двумя составляющими: радиальной w_{cp}^r и осевой w_{cp}^x , т.е. $\vec{w}_{cp} = \{w_{cp}^r, 0, w_{cp}^x\}^T$.

Найдем выражение для w_{cp}^r . Пусть радиальная составляющая радиус-вектора точки равна r . Тогда за бесконечно малое время dt граница раздела жидкой и газовой фаз (поверхность пленки) сместится на расстояние (рис. 2.9):

$$dr = w_{cp}^r \cdot dt. \quad (2.153)$$

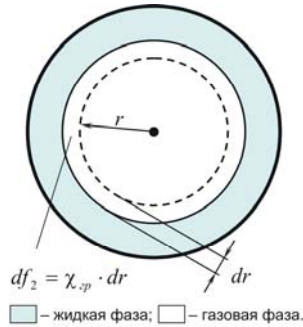


Рис. 2.9. Поперечный разрез кольцевого течения в трубе

Изменения площадей газовой и жидкой фазы в поперечном сечении трубы (соответственно f_2 и f_1) с точностью до малых второго порядка будут равны (см. рис. 2.9):

$$df_2 = -df_1 = \chi_{cp} \cdot dr = 2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) \cdot w_{cp}^r \cdot dt \quad (2.154a)$$

или, учитывая (2.123),

$$w_{cp}^r = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot f_2}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial t}. \quad (2.154b)$$

Определив составляющие скорости движения поверхности пленки, найдем ее проекцию w_{cp}^n на нормаль к поверхности пленки (рис. 2.10).

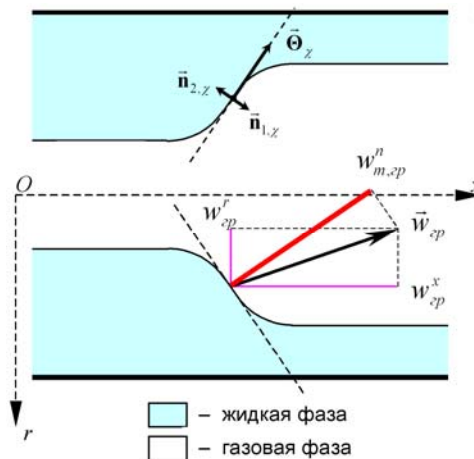


Рис. 2.10. Продольный разрез кольцевого течения в трубе (фрагмент)

Для этого требуется определить орт нормали к поверхности. Найдем сначала уравнение касательной. Если $\delta(x)$ – толщина жидкой пленки, то уравнение касательной к кривой в плоскости xOr (см. рис. 2.10) будет иметь вид:

$$h(x) = [R - \delta(x_0)] - \delta'_x(x_0) \cdot (x - x_0), \quad (2.155)$$

где x_0 – абсцисса точки кривой $r(x) = (R - \delta(x))$, в которой проводится касательная; $\delta'_x \equiv \partial\delta/\partial x$.

Исходя из (2.155), $\bar{\Theta}_x = \{1, -\delta'_x\}^T$ – вектор, коллинеарный с касательной. Первая координата этого вектора соответствует оси Ox , вторая – оси Or . Отсюда определяем орты нормалей к поверхности раздела фаз, соответственно по отношению к жидкой и газовой фазам (см. рис. 2.10):

$$\bar{n}_{1,z} = \left\{ -\frac{\delta'_x}{\sqrt{1+(\delta'_x)^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+(\delta'_x)^2}} \right\}^T; \quad (2.156a)$$

$$\bar{n}_{2,z} = \left\{ \frac{\delta'_x}{\sqrt{1+(\delta'_x)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+(\delta'_x)^2}} \right\}^T. \quad (2.156b)$$

В рассматриваемой плоскости xOr (см. рис. 2.10) $\bar{w}_{zp} = \{w_{zp}^x, w_{zp}^r\}$. С учетом (2.156), параметр $w_{m,zp}^n$ (см. (2.131в)) можно определить следующим образом:

$$w_{m,zp}^n = (\bar{w}_{zp} \cdot \bar{n}_{m,z}) = (-1)^m \cdot \frac{w_{zp}^x \cdot \delta'_x + w_{zp}^r}{\sqrt{1+(\delta'_x)^2}}. \quad (2.157)$$

Производную δ'_x найдем, воспользовавшись (2.123б):

$$\delta'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(R - \sqrt{\frac{f_2}{\pi}} \right) = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot f_2}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{f}{\pi \cdot \psi_2}} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x}. \quad (2.158)$$

Рассмотрим слагаемое A_m^{Tp} , учитывающее работу сил вязкого трения (см. (2.135)). Будем полагать, что основная составляющая $\bar{\tau}_m^n$ в (2.135) коллинеарна скорости поверхности раздела фаз. Влияние локального изменения толщины жидкой пленки (см. рис. 2.10) на $\bar{\tau}_m^n$ в настоящей монографии не рассматривается, и принимается следующее приближение:

$$|\bar{\tau}^n| \approx |\tau^{nx}|. \quad (2.159)$$

Т.к. скорость течения жидкой компоненты на стенке трубы равна нулю, полная работа сил вязкого трения для объема V_1 определяется только из работы данных сил на поверхности S_{zp} . Таким образом, рассматриваемое слагаемое можно представить в виде (см. (2.135)):

$$A_m^{Tp} = \frac{1}{\chi_{zp}} \cdot \int_{[\chi_{zp}]} \bar{\tau}_m^n \cdot \bar{v}_m d\chi \approx \frac{1}{\chi_{zp}} \cdot \int_{[\chi_{zp}]} \tau_m^{nx} \cdot v_{zp}^x d\chi \approx Tp_{m,zp} \cdot w_{zp}^x, \quad (2.160)$$

где τ_m^{nx} – проекция вектора $\vec{\tau}_m^n$ на ось Ox .

Учитывая вышеизложенное, а также (2.118), (2.120) и (2.123), представим уравнение энергии (2.151) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_m \cdot \varepsilon_m \cdot f_m + \tilde{\beta}_m^{V2} \cdot \rho_m \cdot \frac{w_m^2}{2} \cdot f_m \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_m^{VE} \cdot \rho_m \cdot \varepsilon_m \cdot w_m \cdot f_m + \beta_m^{V3} \cdot \rho_m \cdot \frac{w_m^3}{2} \cdot f_m \right) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_m^{PV} \cdot p \cdot w_m \cdot f_m \right) - \beta_m^{PV\omega} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) \cdot (-1)^m \cdot p \cdot \frac{w_{ep}^x \cdot \delta'_x + w_{ep}^r}{\sqrt{1 + (\delta'_x)^2}} + \\ + 2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) \cdot T_{p,m,ep} \cdot w_{ep}^x - \beta_m^{gw} \cdot \rho_m \cdot w_m \cdot f_m \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} - \\ - \beta_m^{aw} \cdot \rho_m \cdot w_m \cdot a_m^x \cdot f_m + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_m \cdot f_m \cdot \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - \\ - \Phi_{m,ep} - \delta^{1m} \cdot \Phi_{oc} + Q_m \cdot f_m \end{aligned} \quad (2.161a)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_m \cdot \varepsilon_m \cdot \psi_m + \tilde{\beta}_m^{V2} \cdot \rho_m \cdot \frac{w_m^2}{2} \cdot \psi_m \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_m^{VE} \cdot \rho_m \cdot \varepsilon_m \cdot w_m \cdot \psi_m + \beta_m^{V3} \cdot \rho_m \cdot \frac{w_m^3}{2} \cdot \psi_m \right) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_m^{PV} \cdot p \cdot w_m \cdot \psi_m \right) - \beta_m^{PV\omega} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) \cdot (-1)^m}{f} \cdot p \cdot \frac{w_{ep}^x \cdot \delta'_x + w_{ep}^r}{\sqrt{1 + (\delta'_x)^2}} + \\ + \frac{2 \cdot \pi \cdot (R - \delta)}{f} \cdot T_{p,m,ep} \cdot w_{ep}^x - \beta_m^{gw} \cdot \rho_m \cdot w_m \cdot \psi_m \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} - \\ - \beta_m^{aw} \cdot \rho_m \cdot w_m \cdot a_m^x \cdot \psi_m + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_m \cdot \psi_m \cdot \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - \\ - \frac{\Phi_{m,ep}}{f} - \frac{\delta^{1m} \cdot \Phi_{oc}}{f} + Q_m \cdot \psi_m, \end{aligned} \quad (2.161б)$$

где $m = 1, 2$.

Отметим частный случай уравнений (2.161a) и (2.161б), когда можно пренебречь влиянием сил инерции и положить равными единице корреляционные коэффициенты, характеризующие неравномерность распределения скорости, давления, внутренней энергии, удельных массовых сил и сил инерции по поверхностям f_m :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_m \cdot f_m \cdot \left(\varepsilon_m + \frac{w_m^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_m \cdot w_m \cdot f_m \cdot \left(\varepsilon_m + \frac{w_m^2}{2} \right) \right] = \\ = - \frac{\partial}{\partial x} (p \cdot w_m \cdot f_m) - 2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) \cdot (-1)^m \cdot p \cdot \frac{w_{ep}^x \cdot \delta'_x + w_{ep}^r}{\sqrt{1 + (\delta'_x)^2}} + \\ + 2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) \cdot T_{p,m,ep} \cdot w_{ep}^x - \rho_m \cdot w_m \cdot f_m \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_m \cdot f_m \cdot \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - \Phi_{m,ep} - \delta^{1m} \cdot \Phi_{oc} + Q_m \cdot f_m \end{aligned} \quad (2.161в)$$

или

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_m \cdot \psi_m \cdot \left(\varepsilon_m + \frac{w_m^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_m \cdot w_m \cdot \psi_m \left(\varepsilon_m + \frac{w_m^2}{2} \right) \right] = \\
& = - \frac{\partial}{\partial x} (p \cdot w_m \cdot \psi_m) - \frac{2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) \cdot (-1)^m}{f} \cdot p \cdot \frac{w_{zp}^x \cdot \delta'_x + w_{zp}^r}{\sqrt{1 + (\delta'_x)^2}} + \\
& + \frac{2 \cdot \pi \cdot (R - \delta)}{f} \cdot T p_{m,zp} \cdot w_{zp}^x - \rho_m \cdot w_m \cdot \psi_m \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_m \cdot \psi_m \cdot \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - \frac{\Phi_{m,zp}}{f} - \frac{\delta^{1m} \cdot \Phi_{oc}}{f} + Q_m \cdot \psi_m,
\end{aligned} \tag{2.161r}$$

где $m = 1, 2$. Конкретные виды зависимостей $\Phi_{m,zp}$ и Φ_{oc} будут рассмотрены ниже.

Далее приводятся варианты зависимостей, замыкающих систему уравнений для течения двухфазной среды. Следует отметить, что формулы, описывающие указанные зависимости, здесь цитируются по материалам работ других авторов без проверки их корректности.

По аналогии с работой [79], пристенной жидкой пленке будем ставить в соответствие эквивалентный, или «приведенный», однофазный поток той же жидкости, занимающий все сечение трубы и реализующий в пристенном кольцевом слое δ тот же расход. При этом будем предполагать, что распределение скоростей в эквивалентном потоке экстраполирует на все поперечное сечение трубы степенное распределение скоростей в пленке, а именно:

$$v_L(r) = v_L^\circ \cdot (1 - r/R)^{\nu_1}, \tag{2.162}$$

где v_L° – значение скорости эквивалентного однофазного потока на оси трубы, параметр которого будем отмечать нижним индексом L ; ν_1 – показатель степени.

При рассмотрении способов расчета функций $T p_{труба}$ и $T p_{m,zp}$ в качестве первого приближения будем предполагать, что характеристики, установленные для стационарных течений, сохраняют свою актуальность и для нестационарных (гипотеза квазистационарности) процессов.

Напряжение трения между пленкой и стенкой канала представим в виде [79]:

$$T p_{труба} = C_{труба} \cdot \frac{\rho_1 \cdot w_1^2}{2}, \tag{2.163}$$

где $C_{труба}$ – коэффициент трения между пленкой и стенкой трубы [79]. Для турбулентной пленки, в соответствии с принятой аналогией трения в пленке и в эквивалентном однофазном потоке, касательное напряжение на внутренней поверхности гладкой трубы определяется формулой Блазиуса [85], которой соответствует степенной закон распределения скоростей с показателем $\nu_1 = 1/7$ [79]:

$$T p_{труба} = C_{труба(L)} \cdot \frac{\rho_1 \cdot w_L^2}{2}; \tag{2.164a}$$

$$4 \cdot C_{труба(L)} = \frac{0,316}{\text{Re}_L^{0,25}}; \tag{2.164б}$$

где

$$\text{Re}_L = \frac{\rho_1 \cdot w_L \cdot D}{\mu_1}; \tag{2.164в}$$

Re_L , w_L , $C_{\text{труба } (L)}$ – соответственно число Рейнольдса, средняя по сечению трубы скорость жидкости и коэффициент трения между жидкостью и стенкой трубы в эквивалентном однофазном потоке; D – внутренний диаметр трубы. Согласно [79]:

$$w_L = \frac{14}{15} \cdot \left(\frac{\delta}{R} \right)^{-1/7} \cdot w_1; \quad (2.165a)$$

$$Re_L = 2 \cdot \frac{R}{\delta} \cdot \frac{w_L}{w_1} \cdot Re_1; \quad (2.165б)$$

$$C_{\text{труба}} = \frac{w_L^2}{w_1^2} \cdot C_{\text{труба } (L)}. \quad (2.165в)$$

Используя (2.165), из (2.164б) получим «приведенный» закон Блаузиуса для турбулентной пленки и гладкой трубы [79]:

$$C_{\text{труба}} = 0,0589 / Re_1^{0,25}, \quad Re_1 > 300 \div 400. \quad (2.166)$$

В соответствие с работой [79], зависимость (2.166) удовлетворительно согласуется со значениями $C_{\text{труба}}$, полученными по результатам измерений перепада давления Δp на выделенном участке канала длиной ΔL , расхода жидкости и ее средней геометрической толщины δ в вертикальных восходящих гидродинамически стабилизированных газожидкостных потоках и пароводяных потоках высокого давления в необогреваемых каналах. Анализ этих экспериментов и вычисления $C_{\text{труба}}$ и Re_1 для каждого режима производились, исходя из следующих соображений. В стабилизированных режимах, если $\Delta p/p \ll 1$, то испарение и конденсация, даже если они и имеют место, практически не существенны на выделенном участке канала, и параметры потока по длине канала практически постоянные.

Теория данного Раздела, базирующаяся на работах [79, 82], соответствует взаимодействию газокapельного ядра с жидкой пленкой в случае дисперсно-пленочного течения. На момент написания данного Раздела авторы монографии не располагали информацией о взаимодействии газового ядра с пристенной жидкой пленкой в случае просто кольцевого течения. Поэтому в данном Разделе предлагается считать полученные выше зависимости приемлемыми и для нашего случая.

Трение между ядром и пленкой непосредственно связано с режимами течения волновой поверхности пленки, ее толщиной и определяемыми скоростями фаз [79]. Можно выделить три типа режимов поверхности пленки: волновой с крупномасштабными волнами, волновой с рябью и режим гладкой пленки. В настоящее время еще требуется тщательное экспериментальное исследование этих режимов и границ перехода между ними.

В обогреваемых каналах при пузырьковом кипении пленки происходит ее набухание, изменение характеристик волновой поверхности и, соответственно, изменение силы межфазного трения. Поперечный поток испаряющегося или конденсирующегося на поверхности пленки пара должен влиять на силу трения.

Напряжение трения между газовым ядром и пленкой аналогично (2.163) представляется в виде [79]:

$$|Tp_{m,sp}| = C_{sp} \cdot \frac{\rho_2 \cdot (w_2 - w_\Sigma)^2}{2}, \quad (2.167)$$

где C_{sp} – коэффициент трения между ядром и пленкой [79], w_Σ – скорость поверхности

пленки (см. (2.152a)).

При турбулентном течении в ядре потока коэффициент трения $C_{\text{ср}}$ должен главным образом зависеть от характера торможения на волнах, так же как это имеет место при развитом турбулентном течении однофазной жидкости в шероховатых трубах (ядро потока условно движется в канале с жидкими стенками). Предположение, что процессы, происходящие при обтекании газовым потоком отдельных волн на поверхности пленки, аналогичны процессам, которые происходят у выступов шероховатой поверхности, высказывалось в работах П.Л. Капицы, упоминаемых в монографии [79]. «Шероховатость жидких стенок» сильно изменяется в широких пределах в зависимости от режима течения пленки и ядра потока.

К настоящему времени проведены систематические экспериментальные исследования по определению влияния «шероховатости» поверхности жидкой пленки на величину $C_{\text{ср}}$. Рассмотрим основные результаты этих исследований. Величина $C_{\text{ср}}$ определялась на базе измерений полного перепада давления Δp на относительно коротком участке ($\Delta L = 0,15 \div 0,2$ м) канала, расходов газовой и жидкой фаз на входе в участок и расхода жидкости в пленке на выходе из этого участка в стабилизированных стационарных газо- и парожидкостных «холодных» воздуховодяных и «горячих» пароводяных потоках. Эксперименты проводились как в необогреваемом канале, так и в каналах с обогревом в условиях малых перепадов давления ($\Delta p \ll p$) и термодинамического равновесия (температуры фаз равны между собой и равны температуре насыщения T_s), когда можно считать, что скорости газа и капель почти равны между собой.

Результаты обработки экспериментальных данных разными авторами для пароводяных и воздуховодяных потоков в виде зависимости $C_{\text{ср}}$ от относительной толщины пленки δ/R для развитых турбулентных потоков обобщаются со среднеквадратичной погрешностью $\pm 20\%$ следующей формулой [79]:

$$C_{\text{ср}} = 0,005 + 0,84 \cdot (\delta/R)^{1,1} \approx 0,005 + 0,6 \cdot \delta/R. \quad (2.168)$$

Отметим, что экспериментальные «воздуховодяные точки», соответствующие кольцевому режиму (без капель, а следовательно, и без брызгоуноса), хорошо согласуются с «пароводяными точками» и зависимостью (2.168). В то же время «воздуховодяные точки», соответствующие дисперсно-кольцевому режиму с брызгоуносом, существенно отклоняются от остальных точек. Это объясняется тем, что в воздуховодяных потоках при выбивании капель с поверхности пленки осаждающимися каплями предположение о равенстве скоростей газа и капель не выполняется.

Зависимость $C_{\text{ср}}$ от δ/R подтверждает гипотезу об аналогии трения турбулентного газокapельного ядра о пристенную жидкую пленку с трением развитого турбулентного потока однофазной жидкости ($Re \geq 10^5$) о шероховатую трубу, когда коэффициент трения не зависит от числа Рейнольдса, а зависит только от шероховатости трубы. При этом эффективная «шероховатость» пленки однозначно определяется ее средней толщиной.

Согласно [82], волны, имеющиеся на поверхности жидкости, создают сопротивление газовому потоку, приблизительно равное сопротивлению трубы с песчаной шероховатостью с диаметром зерен ($d_s = 4 \cdot \delta$). Несмотря на очевидную простоту, формулы подобного типа не получили большого распространения прежде всего из-за низкой точности. Сопоставление расчетов по формулам Леви и Уоллиса с экспериментальными данными ВНИИГАЗ, выполненное в работе [82], показало, что на всех диаметрах труб

имеются значительные расхождения между опытными и расчетными данными. Основной причиной указанного несоответствия является необоснованная схематизация реальной картины течения смеси, заключающаяся в недостаточном учете влияния жидкой фазы смеси на коэффициент гидравлического сопротивления. Жидкая фаза, по существу, исключена из рассмотрения и заменена некоторой волнистой поверхностью со свойствами твердой стенки (шероховатой поверхности трубы). Такая схематизация кольцевого потока исключает из рассмотрения пристенную зону течения смеси, оказывающую основное влияние на гидравлическое сопротивление.

В соответствии с монографией [82], кольцевая структура течения смеси характеризуется наличием достаточно четкой границы раздела между газовой и жидкой фазами смеси. Учитывая эту особенность указанной структуры потока, ряд исследователей строили математические модели, в которых движение каждой фазы смеси исследовалось обособленно, а воздействие фаз друг на друга учитывалось через касательное напряжение на границе раздела.

В рассматриваемой работе [82] среднее по периметру поперечного сечения касательное напряжение $Tr_{труба}$ (в данном случае здесь понимается именно касательное напряжение) на стенке трубы предлагается выражать в виде:

$$Tr_{труба} = \frac{\lambda_{см}}{8} \cdot (\psi_1 \cdot \rho_1 \cdot w_1^2 + \psi_2 \cdot \rho_2 \cdot w_2^2), \quad (2.169)$$

где $\lambda_{см}$ – коэффициент гидравлического сопротивления смеси. В общем случае данный коэффициент является сложной функцией параметров смеси. Введем безразмерный параметр Рейнольдса, относящийся к двухфазной смеси [82]:

$$Re_{см} = \frac{\psi_1 \cdot \rho_1 \cdot w_1^2 + \psi_2 \cdot \rho_2 \cdot w_2^2}{\psi_1 \cdot \mu_1 \cdot w_1 + \psi_2 \cdot \mu_2 \cdot w_2} \cdot D, \quad (2.170)$$

где μ_m – коэффициент динамической вязкости m -ой компоненты смеси.

Представляется удобным выразить коэффициент гидравлического сопротивления смеси произведением, предложенным С.Г. Телетовым [82]:

$$\lambda_{см} = \lambda(Re = Re_{см}, \bar{\Delta}) \cdot \varphi, \quad (2.171)$$

где $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ – коэффициент гидравлического сопротивления для течения гомогенной среды, этот коэффициент, как известно, однозначно выражается через число Рейнольдса жидкости и относительную шероховатость $\bar{\Delta}$ стенок трубы; φ – приведенный коэффициент, показывающий отклонение $\lambda_{см}$ смеси от λ при $Re = Re_{см}$. Коэффициент φ является функцией критериев двухфазного течения, кроме $Re_{см}$. Способы определения зависимостей $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ подробно описываются в Приложении 2.

Введем в рассмотрение следующие параметры [82]: Q_m – объемный расход m -ой компоненты, $м^3/с$; G_m – массовый расход m -ой компоненты, $кг/с$. С учетом предполагаемой однородности скорости m -ой компоненты по поверхности f_m , можно записать:

$$Q_m = w_m \cdot f_m = w_m \cdot \psi_m \cdot f. \quad (2.172a)$$

Объемный расход смеси, а также среднюю по сечению скорость смеси определим следующим образом [82]:

$$Q_{см} = Q_1 + Q_2; \quad (2.172б)$$

$$w_{cm} = \frac{Q_{cm}}{f} = w_1 \cdot \psi_1 + w_2 \cdot \psi_2. \quad (2.172в)$$

Объемные расходные концентрации компонент тогда выражаются в виде:

$$\beta_m = \frac{Q_m}{Q_{cm}} = \frac{w_m \cdot \psi_m}{w_1 \cdot \psi_1 + w_2 \cdot \psi_2}. \quad (2.173)$$

Введем в рассмотрение дополнительный безразмерный параметр для однофазных жидкостей (критерий Фруда [82]):

$$Fr = \frac{v^2}{g \cdot D}, \quad (2.174a)$$

где v – скорость жидкости. Согласно [86], диапазон изменения критерия подобия, в пределах которого его влияние на моделируемый процесс практически пренебрежимо мало, называется автомодельным. В [82] вводится критерий Фруда для смеси:

$$Fr_{cm} = \frac{\psi_1 \cdot \rho_1 \cdot w_1^2 + \psi_2 \cdot \rho_2 \cdot w_2^2}{(\psi_1 \cdot \rho_1 + \psi_2 \cdot \rho_2) \cdot g \cdot D}. \quad (2.174б)$$

Для пробковой структуры течения газожидкостных смесей в [82] приводится автомодельный диапазон критерия Фруда: $Fr_{cm} > 4 \div 6$.

В данной работе также предлагается обобщающая зависимость для φ при кольцевой структуре течения:

$$\varphi_k = \varphi_{пробк} - \Delta\varphi(\beta_2, \kappa_0), \quad (2.175a)$$

где

$$\kappa_0 = w_{cm} \cdot \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{g \cdot \sigma} \right)^{0,25}; \quad (2.175б)$$

φ_k и $\varphi_{пробк}$ – соответственно приведенные коэффициенты гидравлического сопротивления для кольцевой и пробковой структур течения смеси; $\Delta\varphi$ – разница между φ_k и $\varphi_{пробк}$ при фиксированном значении параметров β_2 и κ_0 ; σ – поверхностное натяжение. Эмпирическую формулу для коэффициента φ_k можно представить в виде [82]:

$$\varphi_k = \frac{1 - 0,78 \cdot \beta_2 \cdot \left[1 - \exp\left(-4,4 \cdot \sqrt{Fr_{cm}/Fr_A}\right) \right] - 0,22 \cdot \left[1 - \exp(-15 \cdot \bar{\rho}) \right] \cdot \beta_2}{1 - \beta_2 + 0,03 \cdot \exp\left(-1,35 \cdot 10^3 \cdot (1 - \beta_2)^3\right)} - t \cdot \exp\left(3,75 \cdot \overline{\kappa_0}\right), \quad (2.176a)$$

где

$$\overline{\kappa_0} = \sqrt{\kappa_0^3} \cdot \frac{1 - \beta_2}{20,6}; \quad (2.176б)$$

$$t = 7,3 \cdot \exp(-15 \cdot \bar{\rho}) - 1; \quad (2.176в)$$

$$\bar{\rho} = \rho_2 / \rho_1; \quad (2.176г)$$

Fr_A – автомодельный параметр Фруда¹; $\bar{\rho}$ – относительная плотность.

¹ По-видимому, в работе [82] данный параметр имеет смысл границы (начала) автомодельного диапазона.

В работе [82] приводятся два вида эмпирических зависимостей, определяющих атомодельный критерий Фруда для пробковой структуры течения двухфазной смеси:

$$\text{Fr}_A = 4 \cdot [1 - \exp(-0,1 \cdot \bar{\mu}_{ж})] - 3 \cdot [1 - \exp(1 - 0,05 \cdot \bar{\mu}_{ж})]; \quad (2.177)$$

$$\text{Fr}_A = \left(5 + \frac{1,6}{\mu_1}\right) \cdot (1 - \bar{\rho}), \quad \mu_1 \leq 26 \text{ сПз}; \quad (2.178a)$$

$$\text{Fr}_A = \frac{130}{\mu_1} \cdot (1 - \bar{\rho}), \quad \mu_1 > 26 \text{ сПз}, \quad (2.178б)$$

где $\bar{\mu}_{ж}$ – отношение вязкости исследуемой жидкости к вязкости воды; коэффициент динамической вязкости жидкой фазы μ_1 измеряется в сантипуазах. Авторы настоящей монографии предлагают для расчетов использовать формулы (2.178).

Для кольцевой структуры течения смеси, характеризующейся большими скоростями движения потока, обычно выполняется условие $\text{Fr}_{см} > \text{Fr}_A$. Это позволяет несколько упростить формулу (2.176a) и придать ей вид [82]:

$$\varphi_k = \frac{1 - 0,78 \cdot \beta_2 - 0,22 \cdot [1 - \exp(-15 \cdot \bar{\rho})] \cdot \beta_2}{1 - \beta_2 + 0,03 \cdot \exp(-1,35 \cdot 10^3 \cdot (1 - \beta_2)^3)} - t \cdot \exp\left(-\frac{1 - \beta_2}{5,5} \cdot \sqrt{\kappa_0^3}\right). \quad (2.179)$$

Опыты, проведенные на смесях «воздух – вязкая жидкость», выявили влияние параметра $\bar{\mu}_{ж}$ на приведенный коэффициент гидравлического сопротивления при кольцевой структуре течения смеси. Обработка опытных данных по гидравлическому сопротивлению труб при течения смеси «воздух – вязкая жидкость» позволяет скорректировать формулу для кольцевой структуры течения смеси путем введения дополнительной функции [82]:

$$f(\bar{\mu}_{ж}) = 1 + 0,03 \cdot \bar{\mu}_{ж}, \quad (2.180)$$

учитывающей влияние вязкости жидкости на коэффициент гидравлического сопротивления.

Влияние поверхностного натяжения (см. критерий Вебера $We = \frac{\sigma'}{g \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot D^2}$

[82]) на коэффициент φ_k в достаточной мере учитывается параметром κ_0 , что подтверждается результатами проведенного в [82] сопоставления расчетных и опытных данных. С учетом (2.179) и (2.180) формула для приведенного коэффициента гидравлического сопротивления трения при кольцевой структуре течения смеси имеет вид [82]:

$$\varphi_k = (1 + 0,03 \cdot \bar{\mu}_{ж}) \times \left[\frac{1 - 0,78 \cdot \beta_2 - 0,22 \cdot [1 - \exp(-15 \cdot \bar{\rho})] \cdot \beta_2}{1 - \beta_2 + 0,03 \cdot \exp(-1,35 \cdot 10^3 \cdot (1 - \beta_2)^3)} - t \cdot \exp\left(-\frac{1 - \beta_2}{5,5} \cdot \sqrt{\kappa_0^3}\right) \right]. \quad (2.181)$$

Введем вспомогательный параметр [82]:

$$s^* = \frac{w_{см} \cdot \sqrt{\bar{\rho}}}{3,3 \cdot (0,25 + 0,75 \cdot \sqrt[3]{\sin \alpha})} \cdot \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{g \cdot \sigma} \right)^{0,25}, \quad (2.182)$$

где α – угол наклона трубы по отношению к горизонту. При $\beta_2 = 1$, т.е. в режиме бар-

бортажа газа¹, переход пробковой структуры течения в кольцевую структуру в вертикальных трубах осуществляется при скорости смеси, определяемой соотношением [82]:

$$w = \frac{0,86 \cdot \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}}{1 + 2,75 \cdot 10^{-3} \cdot (\bar{\mu}_{жс} - 1)} \cdot \left(\frac{g \cdot \sigma}{\rho_1 - \rho_2} \right)^{0,25}. \quad (2.183)$$

Параметр s^* , соответствующий началу кольцевой структуры течения смеси в режиме барботажа, в этом случае будет выражаться формулой [82]:

$$s_k^* = \frac{0,86}{3,3 \cdot [1 + 2,75 \cdot 10^{-3} \cdot (\bar{\mu}_{жс} - 1)]}. \quad (2.184)$$

Согласно [82], истинное газосодержание определяется так:

$$\psi_2 = (\psi_2)_{пробк} + \Delta\psi_2, \quad (2.185)$$

где $(\psi_2)_{пробк}$ – истинное газосодержание при пробковой структуре течения смеси; $\Delta\psi_2$ – разность между значениями истинного газосодержания при кольцевой и пробковой структуре течения смеси. С учетом введенных обозначений, для истинного газосодержания в [82] приводится следующая эмпирическая зависимость:

$$\begin{aligned} \psi_2 = \beta_2 \cdot (0,5 + 0,31 \cdot \exp[0,067 \cdot (1 - \bar{\mu}_{жс})]) \cdot \left[1 - \exp\left(-4,4 \cdot \sqrt{\frac{Fr_{см}}{Fr_A}}\right) \right] + \\ + \left[(0,5 - 0,31 \cdot \exp[0,067 \cdot (1 - \bar{\mu}_{жс})]) \cdot \frac{s^* - s_k^*}{1 - s_k^*} - 2 \cdot (1 - \beta_2) \right] \cdot \exp(-7,5 \cdot \sqrt{1 - \beta_2}), \end{aligned} \quad (2.186a)$$

$$s_k^* \leq s^* \leq 1;$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = \beta_2 \cdot (0,5 + 0,31 \cdot \exp[0,067 \cdot (1 - \bar{\mu}_{жс})]) + \\ + \left[(0,5 - 0,31 \cdot \exp[0,067 \cdot (1 - \bar{\mu}_{жс})]) - 2 \cdot (1 - \beta_2) \right] \cdot \exp(-7,5 \cdot \sqrt{1 - \beta_2}), \end{aligned} \quad (2.186b)$$

$$s^* > 1.$$

При $s^* \leq s_k^*$ имеет место пробковая структура течения смеси [82] (диапазон кольцевой структуры будет рассмотрен ниже), при которой $\Delta\psi_2 = 0$, и формула для истинного газосодержания преобразуется к виду для пробковой структуры течения смеси.

Кольцевая структура течения смеси занимает сравнительно малую зону на структурной диаграмме и наблюдается при больших значениях расходного газосодержания β_2 и высоких скоростях потока [82]. Переход в кольцевую структуру может осуществляться как со стороны пробковой, так и со стороны расслоенной зон течения газожидкостных смесей в трубах. В вертикальных трубах переход в кольцевую зону происходит со стороны пробковой структуры при скорости течения смеси, превышающей некоторую критическую величину $w_{кр}$. В горизонтальных трубах переход может осуществляться как со стороны расслоенной, так и со стороны пробковой структур течения смеси, в зависимости от расходного газосодержания.

¹ Барботаж – это процесс образования газожидкостной среды, насыщенной пузырьками газа [85].

Образование кольцевой структуры течения смеси связано:

- в горизонтальном трубопроводе с условиями разрушения волнистой границы раздела фаз и срывом пленки жидкости с ее поверхности;
- в наклонных и вертикальных трубах с условиями смыкания газовых пробок в единый поток, а также условиями реверса пленки жидкости.

Эти условия необходимо учитывать при определении обобщающих параметров для оконтуривания зоны существования кольцевой структуры течения смеси в горизонтальных и наклонных трубах.

В работе [82] приводится полуэмпирическая формула для скорости смеси, соответствующей переходу расслоенной и пробковой структур течения смеси в кольцевую структуру в трубах с углом наклона α :

$$w_{k,\alpha} = \frac{\frac{0,86 \cdot \sqrt{\rho_1 / \rho_2}}{1 + 2,75 \cdot 10^{-3} \cdot (\bar{\mu}_{ж} - 1)} \cdot \left(\frac{g \cdot \sigma}{\rho_1 - \rho_2} \right)^{0,25}}{\exp[-9 \cdot (1 - \beta_2)] - \Delta w_0 \cdot \exp\left[-\frac{(1 + 0,5 \cdot \sin \alpha) \cdot 10^2}{1 - \sqrt{\sin \alpha}} \cdot (1 - \beta_2)\right]}, \quad (2.187a)$$

где

$$\Delta w_0 = 1 - \frac{\frac{0,86 \cdot \sqrt{\rho_1 / \rho_2}}{1 + 2,75 \cdot 10^{-3} \cdot (\bar{\mu}_{ж} - 1)} \cdot \left(\frac{g \cdot \sigma}{\rho_1 - \rho_2} \right)^{0,25}}{2,3 \cdot \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cdot \left(\frac{g \cdot \sigma}{\rho_1 - \rho_2} \right)^{0,25} + 0,1 \cdot \frac{\sigma}{\mu_1} + 0,8 \cdot \frac{\mu_1}{\sigma} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot \sigma}{\rho_1 - \rho_2}}}. \quad (2.187b)$$

В частности [82], при $\alpha = 90^\circ$ формула (2.187) переходит в формулу для вертикальных труб. Формула (2.187) применима к условиям течения смесей с различными физическими свойствами компонент в горизонтальных, наклонных и вертикальных трубах с восходящим направлением потока. В связи с отсутствием аналогичной информации для течений с нисходящим направлением потока при расчете параметров данных течений предполагается также использовать (2.187).

Интенсивность теплообмена между пленкой и стенкой канала Φ_{oc} будем относить к полному перепаду температур в пленке $(T_{труба} - T_{cp})$ ($T_{труба}$ и T_{cp} – значение температуры на стенке трубы и на границе раздела жидкой и газовой фазы соответственно), вводя коэффициент теплоотдачи или критерий Нуссельта [79]:

$$\Phi_{oc} = \pi \cdot D \cdot q_{труба}, \quad q_{труба} = k_1 \cdot Nu_{труба} \cdot \frac{T_{труба} - T_{cp}}{\delta}, \quad (2.188)$$

где k_1 – коэффициент теплопроводности жидкости; $Nu_{труба}$ – критерий Нуссельта.

В ламинарной пленке $q(r) = k_1 \cdot (\partial T / \partial r)$, и коэффициент теплоотдачи существенно зависит от гидродинамических условий и от теплового фактора $\Omega = \Phi_{1(cp)} / \Phi_{oc}$ ($\Phi_{1(cp)}$ – удельный тепловой поток от жидкой фазы к межфазной границе с газовым ядром), определяющего ту долю подводимого извне к пленке тепла, которая уходит из нее к границе с ядром потока. В частности, для течения с фиксированным сдвигом легко получить следующую формулу [79]:

$$Nu_{труба} = \frac{3}{2 + \Omega}. \quad (2.189)$$

При турбулентном течении в пленке основное тепловое сопротивление пленки сосредоточено в тонком пристенном слое, поэтому влияние условий на границе с ядром потока, характеризующее параметром Ω , на профиль температур в ней и параметр теплообмена $Nu_{\text{труба}}$ будет незначительным. Тогда так же, как для трения, теплообмен в турбулентной пленке можно описать, используя аналогию теплообмена в приведенном однофазном потоке.

Следуя данной аналогии, пристенной жидкой пленке будем ставить в соответствие эквивалентный, или «приведенный», однофазный поток той же жидкости, занимающий все сечение канала и реализующий в пристенном кольцевом слое толщиной δ ($R - \delta < r < R$) тот же перепад температур от $T_{\text{труба}}$ до T_{cp} [79]. При этом будем предполагать, что распределение температур в эквивалентном потоке экстраполирует на все сечение канала степенное распределение температур:

$$T_L(r) - T_{\text{труба}} = (T_L^\circ - T_{\text{труба}}) \cdot (1 - r/R)^{\theta_1}, \quad (2.190)$$

где T_L° – значение температуры эквивалентного однофазного потока на оси канала (параметры эквивалентного однофазного потока будем отмечать нижним индексом L); θ_1 – показатель степени.

Для эквивалентного однофазного потока теплообмен между жидкостью и стенкой трубы выражается следующей известной полуэмпирической формулой [79]:

$$q_{\text{труба}} = k_1 \cdot Nu_{\text{труба}(L)} \cdot (T_{\text{труба}} - \bar{T}_L) / D; \quad (2.191a)$$

$$Nu_{\text{труба}(L)} = 0,023 \cdot Re_L^{0,8} \cdot Pr_1^{0,4}, \quad (2.1916)$$

где $\bar{T}_L$ – средняя по сечению трубы температура эквивалентного потока; $Pr_1 = \nu_1^{(v)} / \nu_1^{(T)} = \mu_1 \cdot c_{p,1} / k_1$ – критерий Прандтля для жидкой фазы; $\nu_1^{(v)}$ – коэффициент кинематической вязкости жидкости; $\nu_1^{(T)}$ – коэффициент температуропроводности жидкости; μ_1 и $c_{p,1}$ – коэффициенты динамической вязкости и теплоемкости при постоянном давлении жидкой фазы.

Для степенного распределения как скоростей, так и температур в эквивалентном потоке с показателями $\nu_1 = \theta_1 = 1/7$ имеет место (2.165) и (см. [79]):

$$\bar{T}_L - T_{\text{труба}} = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{\delta}{R} \right)^{-1/7} \cdot (T_{\text{cp}} - T_{\text{труба}}); \quad (2.192a)$$

$$Nu_{\text{труба}} = Nu_{\text{труба}(L)} \cdot \frac{2 \cdot R}{\delta} \cdot \frac{T_{\text{труба}} - \bar{T}_L}{T_{\text{труба}} - T_{\text{cp}}}. \quad (2.1926)$$

В итоге легко получить [79]:

$$Nu_{\text{труба}} = 0,016 \cdot Re_1^{0,8} \cdot Pr_1^{0,4} \cdot (\delta/R)^{-0,057}. \quad (2.193)$$

Сравнение полученной формулы с экспериментальными данными показало, что в отличие от сопротивления трению тепловое сопротивление турбулентной пленки несколько выше теплового сопротивления такого же слоя жидкости в эквивалентном однофазном потоке [79]. Данное обстоятельство может быть учтено, если за основу вместо формулы (2.191) для эквивалентного однофазного потока использовать формулу, полученную из расчетов теплообмена свободно стекающей пленки под действием силы

тяжести (Д.А. Лабунцов, 1957 год). В результате всех выкладок в [79] получена зависимость:

$$Nu_{труба} = 0,010 \cdot Re_1^{0,83} \cdot Pr_1^{0,5}, \quad (2.194)$$

которая удовлетворительно описывает опытные данные по теплообмену в турбулентных пленках ($Re_1 > 300$). На основе анализа соответствующих зависимостей для ламинарных и турбулентных пленок определена следующая формула [79]:

$$Nu_{труба} = \sqrt{\left(\frac{3}{2 + \Omega}\right)^2 + \left(0,010 \cdot Re_1^{0,83} \cdot Pr_1^{0,5}\right)^2}, \quad (2.195)$$

которая обобщает опытные данные в указанном выше диапазоне со средней относительной погрешностью $\pm 19\%$.

При турбулентном течении жидкости в шероховатых трубах [87] происходят существенные гидродинамические изменения. Эти изменения связаны с высотой выступов шероховатой поверхности $\delta_{ш}$ и толщиной вязкого подслоя δ_n . Упрощая явление, можно рассматривать два основных случая: выступы шероховатости глубоко погружены в подслоя ($\delta_{ш} \ll \delta_n$); выступы шероховатости выходят за пределы вязкого подслоя ($\delta_{ш} \gg \delta_n$).

В первом случае выступы шероховатости не нарушают течения в подслое, они обтекаются без отрыва потока. При этом нет никакой разницы между гладкой и шероховатой трубами. Такое омывание выступов шероховатости тем вероятнее, чем меньше число Re и относительная шероховатость $\delta_{ш}/D$ (где D – внутренний диаметр трубы), так как с уменьшением числа Re толщина подслоя увеличивается. Понятие относительной шероховатости при этом приобретает чисто гидродинамический смысл.

Если ($\delta_{ш} \gg \delta_n$), течение в вязком подслое нарушается, происходит отрывное, вихревое обтекание выступов шероховатости. Турбулентные пульсации у стенки, особенно у вершин выступов, увеличиваются. Так как при турбулентном течении жидкости основное термическое сопротивление передаче тепла сосредоточено в подслое, то изменение течения приводит к увеличению теплоотдачи. При ламинарном течении коэффициент теплоотдачи и гидравлическое сопротивление не зависят от относительной шероховатости. В этом случае теплоотдача может увеличиваться за счет того, что шероховатая стенка имеет большую поверхность теплообмена, чем гладкая (эффект оребрения).

При турбулентном движении жидкости шероховатость начинает сказываться на теплоотдаче и гидравлическом сопротивлении при различных значениях чисел Re . Чем меньше $\delta_{ш}/D$, тем больше предельное число $Re_{пр}$, соответствующее изменению закона теплоотдачи. При этом одновременно с ростом коэффициента теплоотдачи увеличивается и гидравлическое сопротивление.

В экспериментах шероховатость создается путем механической обработки (накатки, нарезки). Опыты показывают, что теплоотдача в шероховатых трубах по сравнению с гладкими дополнительно зависит от формы неровностей поверхности, значения относительной шероховатости $\delta_{ш}/D$ и расстояния между выступами.

При искусственной шероховатости коэффициент теплоотдачи может быть и ниже, чем для гладкой трубы. Снижение коэффициента теплоотдачи может иметь место в случае высоких выступов шероховатости, так как за ними у поверхности стенки может образовываться застойная зона. Этот эффект проявляется по-разному в зависимости от

числа Рейнольдса, формы выступов шероховатости, расстояния между ними и т.п. При одной и той же относительной высоте $\delta_{ш}/D$ можно получить как улучшение, так и ухудшение теплоотдачи. Поэтому необоснованная экстраполяция результатов эксперимента на неисследованную область определяющих параметров в данном случае особенно опасна.

Согласно [87], для опытов целесообразно создавать шероховатость с относительными шагами $(s_{ш}/\delta_{ш})_{онм} = 12 \div 14$ (где s – расстояние по потоку между соседними неровностями). При $s_{ш}/\delta_{ш} \geq 8$ для расчета среднего коэффициента теплоотдачи может быть использована известная формула В.И. Гомелаури, обобщившего данные своих опытов с водой и трансформаторным маслом, Нуннера – с воздухом, Брауэра и Федынского – с водой [87]:

$$Nu_{труба(L)} = 0,022 \cdot Re_L^{0,8} \cdot Pr_1^{0,47} \cdot (Pr_1/Pr_{стенка})^{0,25} \cdot \varepsilon_{ш}, \quad (2.196)$$

где $Pr_{стенка}$ – критерий Прандтля для стенки трубы; $\varepsilon_{ш}$ – поправка, учитывающая шероховатость трубы:

$$\varepsilon_{ш} = \exp \left[0,85 \cdot \frac{(s_{ш}/\delta_{ш})_{онм}}{s_{ш}/\delta_{ш}} \right] \quad \text{при} \quad \frac{s_{ш}}{\delta_{ш}} \geq \left(\frac{s_{ш}}{\delta_{ш}} \right)_{онм}; \quad (2.197a)$$

$$\varepsilon_{ш} = \exp \left[0,85 \cdot \frac{s_{ш}/\delta_{ш}}{(s_{ш}/\delta_{ш})_{онм}} \right] \quad \text{при} \quad \frac{s_{ш}}{\delta_{ш}} < \left(\frac{s_{ш}}{\delta_{ш}} \right)_{онм}. \quad (2.197б)$$

Формулы (2.196), (2.197) получены в результате обработки экспериментальных данных по теплопередаче при турбулентном течении теплоносителей в трубах и кольцевых щелях. Можно принять [87], что оптимальный относительный шаг $(s_{ш}/\delta_{ш})_{онм} = 13$ при любом значении числа Прандтля в интервале от 1 до 80.

По аналогии с представленными выше рассуждениями будем условно считать, что тепловой поток через стенки трубы для кольцевого двухфазного течения подобен тепловому потоку через стенки трубы при течении жидкости в эквивалентном однофазном потоке. Таким образом, для вычисления функции теплообмена жидкости и стенки трубы, можно использовать формулу (см. (2.188)):

$$\Phi_{ос} = \pi \cdot D \cdot q_{труба}, \quad q_{труба} = k_1 \cdot Nu_{труба(L)} \cdot \frac{T_{труба} - T_1}{D}, \quad (2.198)$$

где $Nu_{труба(L)}$ определяется из (2.196) и (2.197).

В первом приближении будем полагать, что теплообмен между газом и жидкой фазой аналогичен теплообмену между газом и эквивалентной трубой с подобными жидкой «стенке» значениями диаметра, шероховатости внутренней поверхности и т.п. Также будем условно считать, что температура $T_{сп}$ поверхности раздела жидкости и газа практически совпадает со средней температурой жидкой фазы (см., например, [79]):

$$T_{сп} \approx T_1. \quad (2.199)$$

В этом случае зависимости (2.198) можно переписать в виде:

$$\Phi_{2,сп} = \pi \cdot D \cdot q_{2,сп}, \quad q_{2,сп} = k_2 \cdot Nu_{2,сп} \cdot \frac{T_{сп} - T_2}{2 \cdot (R - \delta)}, \quad (2.200)$$

где k_2 – коэффициент теплопроводности газа. При $s_{волны}/\delta_{волны} \geq 8$ (где $\delta_{волны}$ и $s_{волны}$ –

высота волн поверхности раздела фаз и расстояние по потоку между двумя соседними волнами соответственно) для расчета среднего коэффициента теплоотдачи будем использовать аналог (2.196):

$$\text{Nu}_{2, \text{cp}} = 0,022 \cdot \overline{\text{Re}}_2^{0,8} \cdot \text{Pr}_2^{0,47} \cdot (\text{Pr}_2 / \text{Pr}_1)^{0,25} \cdot \varepsilon_{\text{волны}}, \quad (2.201)$$

где Pr_2 – параметр Прандтля газовой фазы; $\overline{\text{Re}}_2$ – число Рейнольдса для течения газа в эквивалентной трубе (здесь – в трубе, эквивалентной жидкой фазе):

$$\overline{\text{Re}}_2 = \frac{2 \cdot \rho_2 \cdot |w_{\text{cp}} - w_2| \cdot (R - \delta)}{\mu_2}, \quad (2.202)$$

где μ_2 – коэффициент динамической вязкости газа; $\varepsilon_{\text{волны}}$ – поправка (см. (2.197)), учитывающая шероховатость эквивалентной трубы (здесь – трубы, эквивалентной жидкой фазе, т.е. в данном случае шероховатость будут создавать волны на поверхности раздела жидкой и газовой фаз):

$$\varepsilon_{\text{волны}} = \exp \left[0,85 \cdot \frac{(s_{\text{волны}} / \delta_{\text{волны}})_{\text{опт}}}{s_{\text{волны}} / \delta_{\text{волны}}} \right] \text{ при } \frac{s_{\text{волны}}}{\delta_{\text{волны}}} \geq \left(\frac{s_{\text{волны}}}{\delta_{\text{волны}}} \right)_{\text{опт}}; \quad (2.203a)$$

$$s_{\text{волны}} = \exp \left[0,85 \cdot \frac{s_{\text{волны}} / \delta_{\text{волны}}}{(s_{\text{волны}} / \delta_{\text{волны}})_{\text{опт}}} \right] \text{ при } \frac{s_{\text{волны}}}{\delta_{\text{волны}}} < \left(\frac{s_{\text{волны}}}{\delta_{\text{волны}}} \right)_{\text{опт}}. \quad (2.203b)$$

Как и в ранних рассуждениях будем считать, что оптимальный относительный шаг $(s_{\text{волны}} / \delta_{\text{волны}})_{\text{опт}} = 13$ при любом значении числа Прандтля в интервале от 1 до 80.

Если информация о характере волновой поверхности раздела жидкой и газовой фаз при течении газожидкостной смеси в кольцевом режиме неизвестна, будем условно считать, что данная поверхность не имеет волн, т.е. $\delta_{\text{волны}} = 0$. Согласно (2.203), в данном случае $\lim_{\delta_{\text{волны}} \rightarrow 0} \varepsilon_{\text{волны}} = 1$, т.е. можно положить $\varepsilon_{\text{волны}} = 1$.

Объединяя результаты, полученные выше, приведем систему одномерных дифференциальных уравнений, описывающих нестационарное течение газожидкостной среды по трубопроводу в кольцевом режиме:

$$\frac{\partial(\rho_m \cdot f_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m \cdot w_m \cdot f_m)}{\partial x} = 0; \quad (2.204a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_m \cdot w_m \cdot f_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta_m^{V2} \cdot \rho_m \cdot w_m^2 \cdot f_m)}{\partial x} = & - \left(\frac{\partial(\rho_m \cdot f_m)}{\partial x} - \beta_m^{P\omega} \cdot p_m \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x} \right) + \text{Tr}_{m, \text{cp}} \cdot \chi_{\text{cp}} + \\ & + \delta^{1m} \cdot \text{Tr}_{\text{труба}} \cdot \chi_{\text{труба}} + \rho_m \cdot F_m^x \cdot f_m - \rho_m \cdot a_m^x \cdot f_m; \end{aligned} \quad (2.204b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_m \cdot \varepsilon_m \cdot f_m + \tilde{\beta}_m^{V2} \cdot \rho_m \cdot \frac{w_m^2}{2} \cdot f_m \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_m^{VE} \cdot \rho_m \cdot \varepsilon_m \cdot w_m \cdot f_m + \beta_m^{V3} \cdot \rho_m \cdot \frac{w_m^3}{2} \cdot f_m \right) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_m^{PV} \cdot p_m \cdot w_m \cdot f_m \right) - \beta_m^{PV\omega} \cdot p_m \cdot w_{m, \text{cp}}^n \cdot \chi_{\text{cp}} + A_m^{Tp} \cdot \chi_{\text{cp}} + \beta_m^{gw} \cdot \rho_m \cdot w_m \cdot F_m^x \cdot f_m - \\ - \beta_m^{aw} \cdot \rho_m \cdot w_m \cdot a_m^x \cdot f_m + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_m \cdot f_m \cdot \frac{\partial T_m}{\partial x} \right) - \Phi_{m, \text{cp}} - \delta^{1m} \cdot \Phi_{\text{oc}} + Q_m \cdot f_m; \end{aligned} \quad (2.204b)$$

$$m = 1, 2; \quad \text{Tr}_{1, \text{cp}} = -\text{Tr}_{2, \text{cp}}; \quad A_1^{Tp} = -A_2^{Tp}; \quad \Phi_{1, \text{cp}} = -\Phi_{2, \text{cp}}. \quad (2.204r)$$

Данную систему предполагается решать относительно функций p_m , ρ_m , w_m , ε_m и f_m при независимых переменных x и t . Остальные функции, входящие в уравнения (2.204), могут выражаться через искомые функции или задаваться явным образом.

Таким образом, математическая модель (2.204) представляет собой в развернутом виде систему шести одномерных дифференциальных уравнений в частных производных (2.204а–в) относительно десяти неизвестных функций пространственной координаты и времени. Соотношения (2.204г) учитываются при решении как условия сопряжения на межфазной границе. Для замыкания системы (2.204) ее следует дополнить уравнениями связи термодинамических параметров. Чтобы получить однозначное решение данной системы требуется также задать граничные и начальные условия (краевые условия).

Рассмотрим частный случай уравнений (2.204), имеющий место при принятии следующих допущений и упрощений:

- единственной действующей массовой силой является сила тяжести;
- влияние сил инерции пренебрежимо мало;
- различием давления в жидкой и газовой фазах потока можно пренебречь;
- газовая фаза в поперечном сечении потока образует круг с центром, лежащим на оси трубы;
- $w_{cp}^x \approx 1,1 \cdot w_1$;
- режим течения при кольцевой структуре двухфазного потока является турбулентным как для жидкой, так и для газовой фаз;
- массообмен между газовой и жидкой фазами пренебрежимо мал;
- все корреляционные коэффициенты в случае турбулентного потока при отсутствии влияния сил инерции мало отличаются от единицы;
- сжимаемостью жидкой фазы по сравнению с газовой фазой можно пренебречь.

С учетом принятых допущений и упрощений, систему уравнений, описывающих течение газожидкостной смеси по трубопроводу в кольцевом режиме, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial(w_1 \cdot f_1)}{\partial x} = 0; \quad (2.205a)$$

$$\frac{\partial(\rho_2 \cdot f_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 \cdot w_2 \cdot f_2)}{\partial x} = 0; \quad (2.205б)$$

$$\frac{\partial(w_1 \cdot f_1)}{\partial t} + \frac{\partial(w_1^2 \cdot f_1)}{\partial x} = -\frac{f_1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2 \cdot T_{p_{1, cp}}}{\rho_1} \cdot \sqrt{\pi \cdot f_2} + \frac{2 \cdot T_{p_{mpyба}} \cdot \sqrt{\pi \cdot f}}{\rho_1} - g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot f_1; \quad (2.205в)$$

$$\frac{\partial(\rho_2 \cdot w_2 \cdot f_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 \cdot w_2^2 \cdot f_2)}{\partial x} = -f_2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \cdot T_{p_{2, cp}} \cdot \sqrt{\pi \cdot f_2} - \rho_2 \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot f_2; \quad (2.205г)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[f_1 \cdot \left(\varepsilon_1 + \frac{w_1^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[w_1 \cdot f_1 \cdot \left(\varepsilon_1 + \frac{w_1^2}{2} \right) \right] = & -\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (p \cdot w_1 \cdot f_1) + \\ & + \frac{2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) \cdot p}{\rho_1} \cdot \frac{w_{cp}^x \cdot \delta'_x + w_{cp}^r}{\sqrt{1 + (\delta'_x)^2}} + \frac{2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) \cdot T_{p_{1, cp}} \cdot w_{cp}^x}{\rho_1} - \\ & - w_1 \cdot f_1 \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \cdot f_1 \cdot \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) - \frac{\Phi_{1, cp}}{\rho_1} - \frac{\Phi_{oc}}{\rho_1} + \frac{Q_1 \cdot f_1}{\rho_1}; \end{aligned} \quad (2.205д)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_2 \cdot f_2 \cdot \left(\varepsilon_2 + \frac{w_2^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_2 \cdot w_2 \cdot f_2 \cdot \left(\varepsilon_2 + \frac{w_2^2}{2} \right) \right] = & - \frac{\partial}{\partial x} (p \cdot w_2 \cdot f_2) - \\ & - 2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) \cdot p \cdot \frac{w_{ep}^x \cdot \delta'_x + w_{ep}^r}{\sqrt{1 + (\delta'_x)^2}} + 2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) \cdot Tp_{2,ep} \cdot w_{ep}^x - \\ & - \rho_2 \cdot w_2 \cdot f_2 \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_2 \cdot f_2 \cdot \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) - \Phi_{2,ep} + Q_2 \cdot f_2; \end{aligned} \quad (2.205е)$$

$$Tp_{1,ep} = -Tp_{2,ep}; \quad (2.205ж)$$

$$\Phi_{1,ep} = -\Phi_{2,ep}; \quad (2.205з)$$

$$R - \delta = \sqrt{f_2 / \pi}; \quad (2.205и)$$

$$\delta'_x = - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot f_2}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}; \quad (2.205к)$$

$$w_{ep}^x = 1, 1 \cdot w_1; \quad w_{ep}^r = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot f_2}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial t}; \quad (2.205л)$$

$$p = p_2(\rho_2, T_2); \quad \varepsilon_m = \varepsilon_m(p, T_m), \quad m = 1, 2. \quad (2.205м)$$

При постановке задачи замыкающие систему (2.205) зависимости (для межфазного трения и теплообмена, трения и теплообмена между жидкой фазой и стенкой трубы) задавались в качестве исходных данных. Источниками данной информации по указанию специалистов ВНИИГАЗ служили работы [79, 82] (см. также [81, 88]). Пример применения данной модели представлен в монографии [6].

При введении параметров ψ_m (см. выше) уравнения системы (2.205а–е) преобразуются к виду:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial (w_1 \cdot \psi_1)}{\partial x} = 0; \quad (2.206а)$$

$$\frac{\partial (\rho_2 \cdot \psi_2)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_2 \cdot w_2 \cdot \psi_2)}{\partial x} = 0; \quad (2.206б)$$

$$\frac{\partial (w_1 \cdot \psi_1)}{\partial t} + \frac{\partial (w_1^2 \cdot \psi_1)}{\partial x} = - \frac{\psi_1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2 \cdot Tp_{1,ep}}{\rho_1} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot \psi_2}{f}} + \frac{2 \cdot Tp_{мруба}}{\rho_1} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{f}} - g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot \psi_1; \quad (2.206в)$$

$$\frac{\partial (\rho_2 \cdot w_2 \cdot \psi_2)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_2 \cdot w_2^2 \cdot \psi_2)}{\partial x} = - \psi_2 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \cdot Tp_{2,ep} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot \psi_2}{f}} - \rho_2 \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot \psi_2; \quad (2.206г)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\psi_1 \cdot \left(\varepsilon_1 + \frac{w_1^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[w_1 \cdot \psi_1 \cdot \left(\varepsilon_1 + \frac{w_1^2}{2} \right) \right] = & - \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (p \cdot w_1 \cdot \psi_1) + \\ & + \frac{2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) \cdot p}{f \cdot \rho_1} \cdot \frac{w_{ep}^x \cdot \delta'_x + w_{ep}^r}{\sqrt{1 + (\delta'_x)^2}} + \frac{2 \cdot \pi \cdot (R - \delta)}{f \cdot \rho_1} \cdot Tp_{1,ep} \cdot w_{ep}^x - \\ & - w_1 \cdot \psi_1 \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \cdot \psi_1 \cdot \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) - \frac{\Phi_{1,ep}}{f \cdot \rho_1} - \frac{\Phi_{oc}}{f \cdot \rho_1} + \frac{Q_1 \cdot \psi_1}{\rho_1}; \end{aligned} \quad (2.206д)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_2 \cdot \psi_2 \cdot \left(\varepsilon_2 + \frac{w_2^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_2 \cdot w_2 \cdot \psi_2 \cdot \left(\varepsilon_2 + \frac{w_2^2}{2} \right) \right] = - \frac{\partial}{\partial x} (p \cdot w_2 \cdot \psi_2) - \\
& - \frac{2 \cdot \pi \cdot (R - \delta) \cdot p}{f} \cdot \frac{w_{zp}^x \cdot \delta'_x + w_{zp}^r}{\sqrt{1 + (\delta'_x)^2}} + \frac{2 \cdot \pi \cdot (R - \delta)}{f} \cdot T p_{2,zp} \cdot w_{zp}^x - \\
& - \rho_2 \cdot w_2 \cdot \psi_2 \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_2 \cdot \psi_2 \cdot \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) - \frac{\Phi_{2,zp}}{f} + Q_2 \cdot \psi_2.
\end{aligned} \tag{2.206e}$$

2.4. Моделирование течений в разветвленном трубопроводе

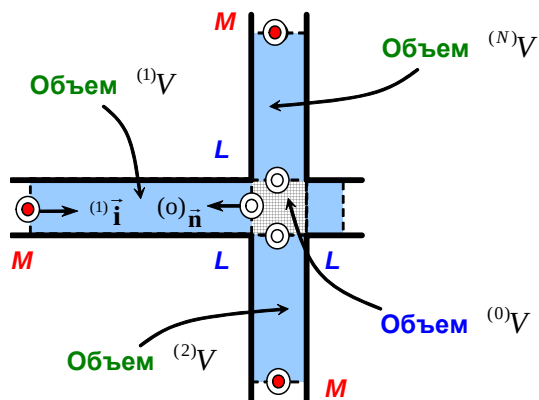
2.4.1. Моделирование течений в узле сочленения газопроводов

При моделировании неустановившихся течений газовой смеси через узлы сочленения (разветвления) многониточных трубопроводов для сохранения высокой точности расчетных оценок во всей трубопроводной системе необходимо стремиться к обеспечению строгого выполнения законов сохранения массы, импульса и энергии в области узла сочленения. В связи с вышесказанным С.Н. Пряловым при участии В.Е. Селезнева была предложена и научно обоснована математическая модель нестационарного низкоскоростного неизотермического турбулентного течения вязкого сжимаемого теплопроводного природного газа через сочленение N трубопроводов с круглыми поперечными сечениями и с абсолютно жесткими шероховатыми теплопроводными стенками [1, 6]. Суть подхода к моделированию в этом случае заключается в стремлении максимально (с практической точки зрения) обеспечить выполнение основных законов сохранения.

Рассмотрим для примера вариант математической модели нестационарного низкоскоростного неизотермического турбулентного течения вязкой сжимаемой теплопроводной гомогенной газовой смеси через сочленение N длинных трубопроводов (диаметр поперечного сечения трубопровода много меньше его длины) с круглыми поперечными сечениями и с абсолютно жесткими шероховатыми теплопроводными стенками (модель сочленения С.Н. Прялова).

Построение данной модели производится путем адаптации полной системы уравнений газовой динамики к условиям течения в сочленении длинных трубопроводов. Для обозначения принадлежности какой-либо величины к трубе с номером n будем использовать верхний индекс слева от величины, поместив этот номер в круглые скобки, например: $^{(n)}\rho$. Для каждой трубы вводится ось координат $^{(n)}Ox$, связанная с осью симметрии трубы. Направление введенной оси («в сочленение» или «из сочленения») может быть произвольным. Для каждой трубы рассмотрим два поперечных сечения (рис. 2.11): $^{(n)}f_L$ – сечение¹, примыкающее к сочленению (пусть координата данного сечения равна $^{(n)}x_L$), и $^{(n)}f_M$ – сечение, отстоящее от $^{(n)}f_L$ на расстояние $^{(n)}\Delta x$ (координата данного сечения равна $^{(n)}x_M$). Будем считать, что трубы на участках, примыкающих к сочленению, не меняют площади своего поперечного сечения, т.е. $^{(n)}f_L = ^{(n)}f_M$, $n = \overline{1, N}$.

¹ Символом f будем обозначать как само поперечное (проходное) сечение трубы, так и его площадь. Аналогично, обозначение Δx будет соответствовать как участку трубы с границами x_M и x_L , так и его длине.



⊙, ⊙ – соответственно предпоследний (M) и последний (L) узлы на пространственной сетке каждой нитки.

Рис. 2.11. Схематичное представление сочленения N трубопроводов

Величины, соответствующие поперечному сечению в точке $^{(n)}x_M$, будут обозначаться правым нижним индексом M , а в точке $^{(n)}x_L$ – правым нижним индексом L . Через $^{(n)}V$, где $n = \overline{1, N}$, обозначим объем трубы n (см. рис. 2.11), ограниченный поперечными сечениями с индексами M и L , а также боковой поверхностью этой трубы. Через $^{(0)}V$ обозначим объем, соприкасающийся со всеми объемами $^{(n)}V$. При этом обобщенный объем сочленения равен $V = \bigcup_{n=0}^N ^{(n)}V$. Поверхность, ограничивающую объем $^{(n)}V$, назовем $^{(n)}S$.

Пусть $^{(n)}\vec{i}$ – орт оси $^{(n)}Ox$, $^{(0)}\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к поверхности $^{(0)}S$. Учитывая коллинеарность $^{(n)}\vec{i}$ и $^{(0)}\vec{n}$ на поверхности $^{(n)}f_L$, введем параметр, характеризующий направление оси $^{(n)}Ox$:

$$^{(n)}s = -\left(^{(0)}\vec{n} \cdot ^{(n)}\vec{i}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left(^{(0)}\vec{n} \cdot ^{(n)}\vec{i}\right) < 0, \\ -1, & \text{если } \left(^{(0)}\vec{n} \cdot ^{(n)}\vec{i}\right) > 0. \end{cases} \quad (2.207)$$

Другими словами, если $^{(n)}s = -1$, то n -ая труба примыкает к сочленению левым концом (с координатой $^{(n)}x_L = 0$). При $^{(n)}s = 1$ n -ая труба примыкает к сочленению правым концом (с координатой $^{(n)}x_L = ^{(n)}Length$, где $^{(n)}Length$ – длина n -ой трубы).

В этом случае длину отрезка $^{(n)}\Delta X$ можно найти по следующей формуле:

$$^{(n)}\Delta X = \left| ^{(n)}x_L - ^{(n)}x_M \right| = \left(^{(n)}x_L - ^{(n)}x_M \right) \cdot ^{(n)}s. \quad (2.208)$$

Справедливость (2.208) доказывается рассмотрением возможных вариантов направления орта $^{(n)}\vec{i}$.

Введем некоторый сравнительный параметр $\Delta\bar{X}$. Данный параметр не имеет физического смысла и может принимать любое положительное значение, например, максимальное или минимальное значение из множества $\left\{ {}^{(n)}\Delta X, n = \overline{1, N} \right\}$. Введем также набор параметров

$${}^{(n)}\gamma = \frac{{}^{(n)}\Delta X}{\Delta\bar{X}}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (2.209)$$

по сути являющихся коэффициентами пропорциональности шагов ${}^{(n)}\Delta X$.

Для описания течения газа через сочленение будем использовать модель, в которой объем ${}^{(0)}V$ исчезающе мал. Пример соответствующей такому объему ${}^{(0)}V$ трансформации сочленения схематично представлен на рис. 2.12. При подходе к узлу сочленения трубопроводы, не меняя площади поперечного сечения, меняют его форму. Если условно считать, что воздействие на поток газа со стороны стенок трубы (сопротивление течению) при этом не меняется, то система уравнений, описывающая движение газа по подходящему к узлу сочленения трубопроводу, будет такой же, как и в случае круглой трубы.

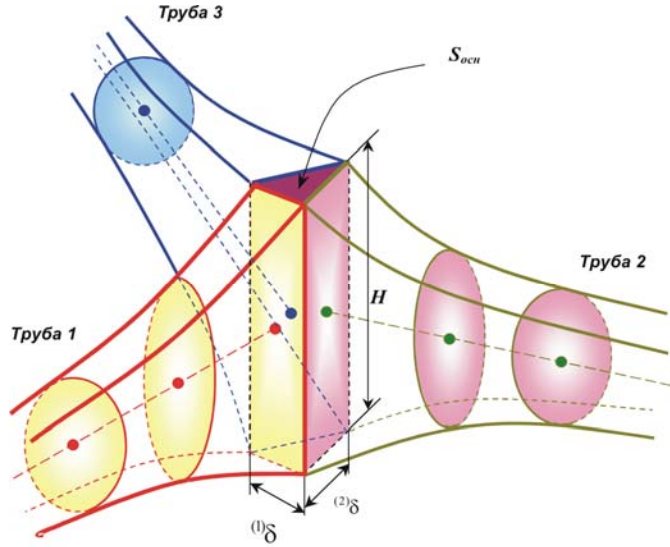


Рис. 2.12. Модельное представление сочленения трубопроводов

Объем ${}^{(0)}V$ можно представить в виде прямой призмы с площадью основания $S_{осн}$ и высотой H (см. рис. 2.12). Для сторон призмы, имеющих линейные размеры ${}^{(n)}\delta$, справедливо соотношение: ${}^{(n)}\delta = {}^{(n)}f/H$. Площадь основания призмы можно представить следующим образом: $S_{осн} = \varsigma_{осн} \cdot {}^{(1)}\delta^2$, где $\varsigma_{осн}$ – коэффициент, зависящий только от геометрии основания призмы. С учетом последних двух формул, объем ${}^{(0)}V$ можно определить так:

$${}^{(0)}V = H \cdot S_{осн} = H \cdot \varsigma_{осн} \cdot \left(\frac{{}^{(1)}f}{H} \right)^2 = \frac{\varsigma_{осн} \cdot {}^{(1)}f^2}{H}.$$

Из последнего соотношения следует, что

$$\lim_{H \rightarrow \infty} {}^{(0)}V = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\zeta_{очн} \cdot {}^{(1)}f^2}{H} = 0.$$

Выделим объем V , являющийся объединением всех объемов ${}^{(n)}V$, где $n = \overline{0, N}$. Пусть S – поверхность, ограничивающая V . Площади поперечного сечения у труб при подходе к сочленению не меняются. Тогда можно записать:

$${}^{(n)}V = {}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}\Delta X = {}^{(n)}f_M \cdot {}^{(n)}\Delta X = {}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}\gamma \cdot \Delta \bar{X}, \quad n = \overline{1, N}; \quad (2.210)$$

$$V \approx \sum_{n=1}^N {}^{(n)}V = \sum_{n=1}^N {}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}\Delta X = \sum_{n=1}^N {}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}\gamma \cdot \Delta \bar{X}. \quad (2.211)$$

Введем еще один параметр:

$${}^{(n)}\Theta = \frac{{}^{(n)}V}{V} = \frac{{}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}\gamma}{\sum_{k=1}^N {}^{(k)}f_L \cdot {}^{(k)}\gamma}, \quad 0 < {}^{(n)}\Theta < 1, \quad \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\Theta = 1, \quad (2.212a)$$

$${}^{(n)}f \cdot {}^{(n)}\Delta X = {}^{(n)}\Theta \cdot V. \quad (2.212б)$$

Величину ${}^{(n)}\Theta$ можно трактовать как коэффициент присутствия трубы n в объеме V .

При построении математической модели течения природного газа через сочленение будем считать температуру $\hat{T}$, удельную (на единицу массы) внутреннюю энергию $\hat{\varepsilon}$, давление $\hat{p}$, плотность $\hat{\rho}$, коэффициент теплопроводности $\hat{k}$, удельную (на единицу объема) мощность источников тепла $\hat{Q}$ и высоту прокладки трубопровода $\hat{z}_1$ непрерывными по времени и пространству функциями (непрерывной по времени будет считаться также функция скорости $\hat{\mathbf{v}}$). «Крышка» над функциями означает, что их значения берутся в каждой точке моделируемого объема. Также, в силу малости объема ${}^{(0)}V$, данные величины будем полагать одинаковыми по объему ${}^{(0)}V$.

Модель сочленения с исчезающе малым объемом ${}^{(0)}V$ предполагает разрывность функции скорости при «переходе» через сочленение. Это, в свою очередь, ведет к разрывности функций удельных импульса и кинетической энергии. Отметим также, что при использовании в последующих выкладках теорем о среднем предполагается, что рассматриваемые функции удовлетворяют условиям этих теорем.

Чтобы не загромождать изложение материала чисто техническими деталями, проиллюстрируем возможный подход к адаптации полной системы уравнений газовой динамики для случая сочленения длинных газопроводов на примере адаптации уравнения неразрывности. Как известно, интегральное уравнение неразрывности имеет вид:

$$\iiint_V \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} dV + \iint_S \hat{\rho} \cdot \mathbf{v}_n dS = 0. \quad (2.213)$$

Рассмотрим сначала уравнение неразрывности для объема ${}^{(0)}V$. С учетом фиксированности последнего и отсутствия потоков газа через боковые стенки рассматриваемого объема, можно записать:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{[{}^{(0)}V]} \hat{\rho} dV + \sum_{n=1}^N \left(\iint_{[{}^{(n)}f_L]} \hat{\rho} \cdot \mathbf{v}_n df \right) = 0. \quad (2.214)$$

При ${}^{(0)}V \rightarrow 0$ для первого слагаемого, при условии конечности $\hat{\rho}$, имеем:

$$\lim_{{}^{(0)}V \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{[{}^{(0)}V]} \hat{\rho} dV = \frac{\partial}{\partial t} \left(\lim_{{}^{(0)}V \rightarrow 0} \iiint_{[{}^{(0)}V]} \hat{\rho} dV \right) = 0. \quad (2.215)$$

Рассмотрим теперь в (2.214) слагаемые суммы:

$$\iint_{[{}^{(n)}f_L]} \hat{\rho} \cdot v_n df = \iint_{[{}^{(n)}f_L]} \hat{\rho} \cdot v_x \cdot \left({}^{(0)}\vec{n} \cdot {}^{(n)}\vec{i} \right) df = - {}^{(n)}(\rho \cdot w \cdot f)_L \cdot {}^{(n)}s, \quad (2.216)$$

где v_x – проекция $\vec{v}$ на ось Ox ; ρ и w – средние по сечению значения $\hat{\rho}$ и v_x . Подставим (2.216) в (2.214) и учтем (2.215). Получим закон Кирхгофа в виде:

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}\rho_L \cdot {}^{(n)}w_L \cdot {}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}s = 0. \quad (2.217a)$$

С учетом равенства между собой всех ${}^{(n)}\rho_L$ (см. выше), также имеем:

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}w_L \cdot {}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}s = 0. \quad (2.217b)$$

Из формул (2.217) следует разрывность скорости в узле сочленения.

Рассмотрим теперь уравнение неразрывности для объема V . Данный объем фиксирован и отсутствует поток газа через стенки трубы. Тогда выражение (2.213) можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \hat{\rho} dV + \sum_{n=1}^N \left(\iint_{[{}^{(n)}f_M]} \hat{\rho} \cdot v_n df \right) = 0. \quad (2.218)$$

Распишем почленно каждое слагаемое уравнения (2.218):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \hat{\rho} dV = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \cdot V) = V \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}, \quad (2.219)$$

где $\bar{\rho}$ – среднее по объему V значение плотности,

$$\iint_{[{}^{(n)}f_M]} \hat{\rho} \cdot v_n df = \iint_{[{}^{(n)}f_M]} \hat{\rho} \cdot v_x \cdot \left(\vec{n} \cdot {}^{(n)}\vec{i} \right) df = - {}^{(n)}(\rho \cdot w \cdot f)_M \cdot {}^{(n)}s, \quad (2.220)$$

где $\vec{n}$ – внешняя по отношению к рассматриваемому объему единичная нормаль к поверхности интегрирования. В данном случае она сонаправлена с ${}^{(0)}\vec{n}$.

Таким образом, получаем уравнение:

$$V \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} - \sum_{n=1}^N {}^{(n)}(\rho \cdot w \cdot f)_M \cdot {}^{(n)}s = 0. \quad (2.221a)$$

Сложим полученное уравнение с (2.217a) и учтем равенство площадей ${}^{(n)}f_L$ и ${}^{(n)}f_M$:

$$V \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \sum_{n=1}^N {}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}s \cdot \left[{}^{(n)}(\rho \cdot w)_L - {}^{(n)}(\rho \cdot w)_M \right] = 0. \quad (2.221b)$$

Применяя теорему Лагранжа о конечном приращении, а также формулы (2.208) и (2.209), запишем:

$$\begin{aligned}
& {}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}S \cdot \left[{}^{(n)}(\rho \cdot w)_L - {}^{(n)}(\rho \cdot w)_M \right] = \\
& = {}^{(n)}f_L \cdot \frac{{}^{(n)}S \cdot \left[{}^{(n)}(\rho \cdot w)_L - {}^{(n)}(\rho \cdot w)_M \right] \cdot {}^{(n)}\Delta X}{\left({}^{(n)}x_L - {}^{(n)}x_M \right) \cdot {}^{(n)}S} = {}^{(n)}f_L \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial x} \right)_c \cdot {}^{(n)}\gamma \cdot \Delta \bar{X}, \quad (2.222)
\end{aligned}$$

где $\left(\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial x} \right)_c$ – значение соответствующей производной в некоторой точке ${}^{(n)}x_c \in ({}^{(n)}x_M, {}^{(n)}x_L)$.

Подставим (2.222) в (2.221), поделим на V и учтем (2.211) и (2.212):

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\Theta \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial x} \right)_c = 0. \quad (2.223)$$

Объединяя узлы L в общий «узел сочленения», стягивая к нему объем V и опуская индекс L , получаем одномерное дифференциальное уравнение неразрывности для узла сочленения N трубопроводов:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\Theta \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.224)$$

Данное уравнение можно трактовать следующим образом: изменение во времени удельной массы газа в узле разветвления зависит от ее суммарного потока из труб, примыкающих к сочленению, причем коэффициент влияния каждой трубы зависит как от площади поперечного сечения этой трубы, так и от ее относительной длины ${}^{(n)}\gamma$ (см. (2.209)). При построении модели течения газовой смеси через узел сочленения элементарные отрезки ${}^{(n)}\Delta X$, $n = \overline{1, N}$, будем считать равными между собой¹. Отсюда ${}^{(n)}\gamma = 1$, $n = \overline{1, N}$.

Аналогичная адаптация выполняется для уравнения движения. Для удобства последующих расчетов вместо уравнения полной энергии здесь используется уравнение изменения внутренней энергии. Его легко получить из полной системы уравнений газовой динамики с помощью широко известных преобразований, описанных в литературе по механике сплошных сред и вычислительной газодинамике (см., например, Главу 5). После получения уравнения изменения внутренней энергии оно адаптируется для сочленения по аналогии с адаптацией уравнения неразрывности.

Итоговую одномерную систему уравнений, описывающую течение природного газа через сочленение длинных газопроводов, можно при условии ${}^{(n)}\Delta X = \Delta X \rightarrow 0$ представить в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\Theta \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial x} \right) = 0; \quad (2.225a)$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot Y_m)}{\partial t} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial(\rho \cdot Y_m \cdot w)}{\partial x} \right) \cdot {}^{(n)}\Theta - \sum_{n=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right] \cdot {}^{(n)}\Theta = 0, \quad (2.225b)$$

$$m = \overline{1, N_S - 1}; \quad {}^{(n)}Y_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} {}^{(n)}Y_m;$$

¹ В силу произвольности их выбора при построении геометрии модели.

$$\begin{aligned}
& {}^{(n)}\left(\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t}\right) + {}^{(n)}\left(\frac{\partial(\rho \cdot w^2)}{\partial x}\right) = \\
& = - {}^{(n)}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - g \cdot \rho \cdot {}^{(n)}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right) - \frac{1}{4 \cdot {}^{(n)}R} \cdot {}^{(n)}(\lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w|), \quad n = \overline{1, N};
\end{aligned} \tag{2.225в}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho \cdot \varepsilon)}{\partial t} + \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\left(\frac{\partial(\rho \cdot \varepsilon \cdot w)}{\partial x}\right) \cdot {}^{(n)}\Theta = - \sum_{n=1}^N {}^{(n)}p \cdot {}^{(n)}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \cdot {}^{(n)}\Theta + \\
& + \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{{}^{(n)}R} \cdot {}^{(n)}\lambda \cdot {}^{(n)}\rho \cdot {}^{(n)}|w|^3 \cdot {}^{(n)}\Theta + Q + \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right)\right] \cdot {}^{(n)}\Theta - \\
& - \sum_{n=1}^N \frac{{}^{(n)}\Phi(T, T_{oc})}{{}^{(n)}f} \cdot {}^{(n)}\Theta + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{N_S} {}^{(n)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x}\right)\right] \cdot {}^{(n)}\Theta;
\end{aligned} \tag{2.225г}$$

$$\begin{aligned}
& {}^{(n)}T = {}^{(\xi)}T, \quad \varepsilon = {}^{(n)}\varepsilon = {}^{(\xi)}\varepsilon, \quad {}^{(n)}(\varepsilon_m) = {}^{(\xi)}(\varepsilon_m), \quad \rho = {}^{(n)}\rho = {}^{(\xi)}\rho, \quad {}^{(n)}p = {}^{(\xi)}p, \quad {}^{(n)}k = {}^{(\xi)}k, \\
& {}^{(n)}(D_m) = {}^{(\xi)}(D_m), \quad Y_m = {}^{(n)}(Y_m) = {}^{(\xi)}(Y_m), \quad {}^{(n)}(z_1) = {}^{(\xi)}(z_1) \text{ для любых } n, \xi \in \overline{1, N} \text{ и} \\
& m \in \overline{1, N_S}; \quad {}^{(n)}T_1 = {}^{(n)}T_2 = \dots = {}^{(n)}T_{N_S} = {}^{(n)}T, \quad n \in \overline{1, N};
\end{aligned} \tag{2.225д}$$

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}w \cdot {}^{(n)}f \cdot {}^{(n)}s = 0; \tag{2.225е}$$

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \cdot {}^{(n)}f \cdot {}^{(n)}s = 0; \tag{2.225ж}$$

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}\left(\frac{\partial Y_m}{\partial x}\right) \cdot {}^{(n)}f \cdot {}^{(n)}s = 0; \tag{2.225з}$$

$${}^{(n)}s = - \left({}^{(0)}\vec{n} \cdot {}^{(n)}\vec{i} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left({}^{(0)}\vec{n} \cdot {}^{(n)}\vec{i} \right) < 0; \\ -1, & \text{если } \left({}^{(0)}\vec{n} \cdot {}^{(n)}\vec{i} \right) > 0; \end{cases} \tag{2.225и}$$

$${}^{(n)}\Theta = \frac{{}^{(n)}V}{V} = \frac{{}^{(n)}f_L}{\sum_{k=1}^N {}^{(k)}f_L}, \quad 0 < {}^{(n)}\Theta < 1, \quad \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\Theta = 1. \tag{2.225к}$$

Уравнения связи термодинамических параметров здесь опущены.

Уравнения (2.225д–з) в системе (2.225) играют роль дополнительных соотношений для узловой точки сочленения, учитываемых при решении уравнений (2.225а–г) совместно с уравнениями связи термодинамических параметров.

Здесь целесообразно отметить, что модель сочленения предполагает разрывность функций удельных импульса и кинетической энергии. Рассмотрим эту проблему более подробно.

Для объемов ${}^{(n)}V$, $n = \overline{1, N}$, при ${}^{(n)}\Delta x \rightarrow 0$ дифференциальная форма уравнения (2.2) имеет вид (2.225в). Перейдем к рассмотрению (2.2) для объема ${}^{(0)}V$. При описании течения газа через сочленение используется модель, в которой вязкость для объема ${}^{(0)}V$ полагается равной нулю. Учет процессов сопротивления течению вязкого газа внутри ${}^{(0)}V$ производится за счет изменения гидравлического сопротивления труб в зонах, при-

мыкающих к данному объему. Для введения подобных изменений могут быть использованы как экспериментальные данные, так и результаты численных экспериментов. С учетом вышесказанного, а также из-за малости объема $^{(0)}V$, уравнение (2.2) для него преобразуется к виду:

$$\iint_{[^{(0)}S]} \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot v_n dS = - \iint_{[^{(0)}S]} \hat{\rho} \cdot \vec{n} dS = - \iiint_{[^{(0)}V]} \vec{\nabla} \hat{p} dV. \quad (2.226)$$

В ряде работ (см., например, [91]) при моделировании условно предполагается равенство давлений в прилегающих к сочленению узлах. Покажем, что уравнение движения (2.226) для объема $^{(0)}V$ при данном предположении не выполняется. Для этого рассмотрим интегралы в (2.226). С одной стороны, из-за постоянства давления по рассматриваемому объему имеем

$$\iint_{[^{(0)}S]} \hat{\rho} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{[^{(0)}V]} \vec{\nabla} \hat{p} dV = 0. \quad (2.227)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \iint_{[^{(0)}S]} \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot v_n dS &= \sum_{n=1}^N \iint_{[^{(n)}f_L]} \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot v_n df = \sum_{n=1}^N \iint_{[^{(n)}f_L]} \hat{\rho} \cdot v_x \cdot {}^{(n)}\vec{i} \cdot v_x \cdot ({}^{(n)}\vec{i} \cdot {}^{(0)}\vec{n}) df = \\ &= - \sum_{n=1}^N {}^{(n)}(\rho_L \cdot s \cdot f_L \cdot w_L^2 \cdot \vec{i}). \end{aligned} \quad (2.228)$$

Закон Кирхгофа для сочленения можно записать в виде:

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}\rho_L \cdot {}^{(n)}w_L \cdot {}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}s = 0. \quad (2.229)$$

Если умножить каждое слагаемое суммы (2.229) на отличающиеся в общем случае множители $-({}^{(n)}w \cdot {}^{(n)}\vec{i})$, получим сумму, которая нулю уже не равна. Получающаяся сумма, согласно (2.228), определяет $\iint_{[^{(0)}S]} \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot v_n dS$. Таким образом, показана некорректность

(2.226) для объема $^{(0)}V$ в предположении о постоянстве давления по этому объему.

Проанализируем следствия, к которым приводит некорректность описания уравнения движения в объеме $^{(0)}V$, а также пути их преодоления. Для простоты изложения, сохраняя общность рассуждений, рассмотрим пример сочленения двух трубопроводов разного диаметра (рис. 2.13).

Объем $^{(0)}V$ в этом случае представляет собой усеченный конус с основаниями, образованными поперечными сечениями примыкающих труб и высотой $\Delta\xi$. Используемая модель предполагает плавное изменение потока при переходе через сочленение с конечным параметром $\Delta\xi$. Другими словами, ядро потока успевает «расшириться» или «сузиться» так, чтобы оно занимало все поперечное сечение.

Для того чтобы существовал поток газа через $^{(0)}V$, необходимо наличие перепада давления на отрезке $\Delta\xi$. При этом удельный поток импульса $(\rho \cdot w^2)$ будет различным

в точках $x_{лев}$ и $x_{прав}$ (см. рис. 2.13). В случае конечного значения величины $\Delta\xi$, функция давления $p(x)$ остается непрерывной (см. график, приведенный пунктиром на рис. 2.13). При стремлении $\Delta\xi$ к нулю выполнение закона сохранения импульса в рассматриваемой модели приводит к разрывности функции $p(x)$. В данном случае предположение о мгновенном расширении ядра потока на все поперечное сечение трубы некорректно. Однако ниже будет показано, что данная некорректность не вносит больших ошибок и модель остается применимой.

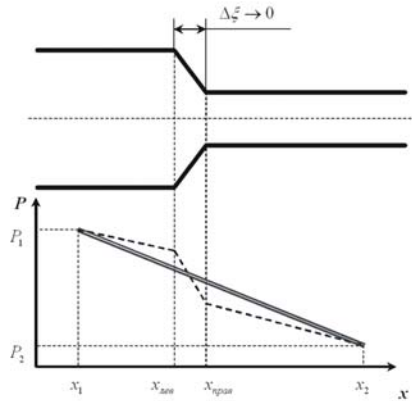


Рис. 2.13. Схематичное представление функции давления на участке сочленения двух труб

Функция $p(x)$ остается непрерывной при $\Delta\xi \rightarrow 0$ (см. график функции, изображенный на рис. 2.13 удвоенной жирной линией). Согласно рис. 2.13, некорректному описанию уравнения движения в объеме $^{(0)}V$ соответствуют большие перепады давления на отрезках $[x_1, x_{лев}]$ и $[x_{прав}, x_2]$, что в свою очередь должно привести к большим скоростям газа на указанных отрезках. Этого можно избежать, изменив, например, гидравлические сопротивления в окрестности точки сочленения.

Вторым следствием, к которому приводит некорректность описания уравнения движения в объеме $^{(0)}V$, является некорректное определение функции давления, связанное с «отбрасыванием» влияния на эту функцию разрывов потока импульса (динамического давления) при «переходе» через сочленение. Согласно [91], если скорости малы, т.е. $(0,5 \cdot \rho \cdot v^2)$ много меньше общего уровня давления в трубе, а также перепадов давления, обусловленных действием инерционных сил и сопротивлений по длине трубы, то распределение давлений на переходном участке приближается к статическому и можно считать:

$$^{(k)}p_L = ^{(n)}p_L \text{ для любых } n, k \in \overline{1, N}. \quad (2.230)$$

Действительно, рабочее давление в магистральном газопроводе, как правило, находится в диапазоне $3,5 \div 7,8 \text{ МПа}$, максимальная рабочая скорость транспортировки газа по трубам составляет примерно 20 м/с , плотность транспортируемого метана равна примерно 50 кг/м^3 . Динамическое давление в данном случае будет являться величиной порядка 10^{-2} МПа . Из этого следует, что влиянием динамического давления (а значит и

перепадов данного давления) на статическое давление в магистральном газопроводе можно пренебречь.

Согласно вышеизложенному, допущение (2.230) будет приемлемо для моделирования газодинамических процессов в трубопроводных системах в случае, если перепадом **динамического** давления можно пренебречь по сравнению со статическим давлением.

Итак, объединяя (2.54) и (2.225), получим итоговый вид газодинамической модели неустановившегося неизотермического турбулентного течения вязкой химически инертной сжимаемой многокомпонентной теплопроводной газовой смеси в разветвленном трубопроводе с трубами круглого переменного поперечного сечения и абсолютно жесткими шероховатыми теплопроводными стенками:

– для каждой трубы, примыкающей к узлу сочленения

$$\frac{\partial(\rho \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot w \cdot f) = 0; \quad (2.231a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot Y_m \cdot f) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot Y_m \cdot w \cdot f) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot f \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x}\right) = 0, \quad m = \overline{1, N_s - 1}, \quad (2.231б)$$

$$Y_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} Y_m;$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w^2 \cdot f)}{\partial x} = -f \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} + g \cdot \rho \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) - \frac{\pi}{4} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w| \cdot R; \quad (2.231в)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot f \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot w \cdot f \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] = & - \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot w \cdot f) - \rho \cdot w \cdot f \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} - \\ & - p \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + Q \cdot f + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \Phi(T, T_{oc}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot f \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (2.231г)$$

– для каждого из узлов сочленения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\Theta \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial x} \right) = 0; \quad (2.231д)$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot Y_m)}{\partial t} + \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\left(\frac{\partial(\rho \cdot Y_m \cdot w)}{\partial x} \right) \cdot {}^{(n)}\Theta - \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right] \cdot {}^{(n)}\Theta = 0, \quad (2.231е)$$

$$m = \overline{1, N_s - 1}; \quad {}^{(n)}Y_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} {}^{(n)}Y_m;$$

$$\begin{aligned} {}^{(n)}\left(\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} \right) + {}^{(n)}\left(\frac{\partial(\rho \cdot w^2)}{\partial x} \right) = \\ = - {}^{(n)}\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - g \cdot \rho \cdot {}^{(n)}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{4 \cdot {}^{(n)}R} \cdot {}^{(n)}(\lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w|), \quad n = \overline{1, N}; \end{aligned} \quad (2.231ж)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho \cdot \varepsilon)}{\partial t} + \sum_{n=1}^N \binom{(n)}{\left(\frac{\partial(\rho \cdot \varepsilon \cdot w)}{\partial x} \right)} \cdot \binom{(n)}{\Theta} = - \sum_{n=1}^N \binom{(n)}{p} \cdot \binom{(n)}{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)} \cdot \binom{(n)}{\Theta} + \\
& + \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{\binom{(n)}{R}} \cdot \binom{(n)}{\lambda} \cdot \binom{(n)}{\rho} \cdot \binom{(n)}{|w|^3} \cdot \binom{(n)}{\Theta} + Q + \sum_{n=1}^N \binom{(n)}{\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]} \cdot \binom{(n)}{\Theta} - \\
& - \sum_{n=1}^N \frac{\binom{(n)}{\Phi(T, T_{oc})}}{\binom{(n)}{f}} \cdot \binom{(n)}{\Theta} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{N_S} \binom{(n)}{\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right]} \cdot \binom{(n)}{\Theta};
\end{aligned} \tag{2.231з}$$

$$\begin{aligned}
& \binom{(n)}{T} = \binom{(\xi)}{T}, \quad \varepsilon = \binom{(n)}{\varepsilon} = \binom{(\xi)}{\varepsilon}, \quad \binom{(n)}{(\varepsilon_m)} = \binom{(\xi)}{(\varepsilon_m)}, \quad \rho = \binom{(n)}{\rho} = \binom{(\xi)}{\rho}, \quad \binom{(n)}{p} = \binom{(\xi)}{p}, \quad \binom{(n)}{k} = \binom{(\xi)}{k}, \\
& \binom{(n)}{(D_m)} = \binom{(\xi)}{(D_m)}, \quad Y_m = \binom{(n)}{(Y_m)} = \binom{(\xi)}{(Y_m)}, \quad \binom{(n)}{(z_1)} = \binom{(\xi)}{(z_1)} \text{ для любых } n, \xi \in \overline{1, N} \text{ и} \\
& m \in \overline{1, N_S};
\end{aligned} \tag{2.231и}$$

$$\sum_{n=1}^N \binom{(n)}{w} \cdot \binom{(n)}{f} \cdot \binom{(n)}{s} = 0; \quad \sum_{n=1}^N \binom{(n)}{\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)} \cdot \binom{(n)}{f} \cdot \binom{(n)}{s} = 0; \quad \sum_{n=1}^N \binom{(n)}{\left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)} \cdot \binom{(n)}{f} \cdot \binom{(n)}{s} = 0; \tag{2.231к}$$

$$\binom{(n)}{s} = - \binom{(0)}{\vec{n} \cdot \binom{(n)}{\vec{i}}} = \begin{cases} 1, \text{ если } \binom{(0)}{\vec{n} \cdot \binom{(n)}{\vec{i}}} < 0; \\ -1, \text{ если } \binom{(0)}{\vec{n} \cdot \binom{(n)}{\vec{i}}} > 0; \end{cases} \tag{2.231л}$$

$$\binom{(n)}{\Theta} = \frac{\binom{(n)}{V}}{V} = \frac{\binom{(n)}{f_L}}{\sum_{k=1}^N \binom{(k)}{f_L}}, \quad 0 < \binom{(n)}{\Theta} < 1, \quad \sum_{n=1}^N \binom{(n)}{\Theta} = 1; \tag{2.231м}$$

– **УРС и дополнительные соотношения:**

$$\begin{aligned}
& p = p(\{S_{\text{смеси}}\}); \quad \varepsilon = \varepsilon(\{S_{\text{смеси}}\}); \quad k = k(\{S_{\text{смеси}}\}); \quad \varepsilon_m = \varepsilon_m(\{S_{\text{смеси}}\}), \quad D_m = D_m(\{S_{\text{смеси}}\}), \\
& m \in \overline{1, N_S}; \quad T_1 = T_2 = \dots = T_{N_S} = T.
\end{aligned} \tag{2.231н}$$

Моделирование неизоэтермического низкоскоростного стационарного движения газа по многониточному многосекционному трубопроводу является более простой задачей по сравнению с анализом неустановившихся режимов транспорта газа. Соответствующие модели могут быть построены упрощением системы уравнений (2.231).

Аналогичным способом могут быть построены математические модели не только течений газовых смесей в трубопроводах, но и течений многокомпонентных жидкостей по разветвленным трубопроводным сетям и каналам с открытыми руслами, широко применяемым в энергетике и коммунальном хозяйстве (см. Главу 5).

В завершение данного Раздела следует отметить то, что в монографии [71] с математической строгостью доказывается: решаемая в данном случае система одномерных уравнений газовой динамики (2.231) является гиперболической при условии, что скорость течения транспортируемого газа не превышает местную скорость звука. Поперечное сечение канала при этом может изменяться во времени и по длине трубопровода (или быть стационарным).

2.4.2. О моделировании течений в разветвленном трубопроводе, транспортирующем жидкости

Изложение материала данного Раздела будем проводить на примере магистральных тепловых сетей [11]. При моделировании считается, что плотность смеси жидкостей является постоянной величиной¹:

$$\rho = \text{const.} \quad (2.232)$$

Будем также полагать, что изменение динамического давления $(0,5 \cdot \rho \cdot w^2)$ при движении смеси через сочленение практически не влияет на статическое давление p .

В этом случае модель течения несжимаемой смеси жидкостей по разветвленной трубопроводной сети можно представить в виде подсистемы (2.76), описывающей течение жидкости по каждому неразветвленному участку трубопровода, а также ряда дополнительных соотношений. Одним из них является равенство давлений на границах труб, примыкающих к узлу сочленения, т.е.

$$^{(n)}p_L = {}^{(\xi)}p_L \text{ для любых } n, \xi = \overline{1, N}. \quad (2.233)$$

Перейдем к построению уравнений неразрывности компонент для узла сочленения. При этом будем считать, что **при слиянии потоков в узле сочленения смесь мгновенно перемешивается**. В качестве первого варианта рассмотрим течение среды с учетом диффузии. Здесь адаптация трехмерных уравнений неразрывности компонент (2.50а) для описания течений в объеме $^{(0)}V$ даст закон Кирхгофа (2.225з) для диффузионных потоков:

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \cdot {}^{(n)} f \cdot {}^{(n)} s = 0, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (2.234)$$

Аналогичная адаптация уравнений неразрывности компонент по объему V приведет к уравнению (2.225б). При условии постоянства плотности данное уравнение преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_m}{\partial t} + \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left(\frac{\partial (Y_m \cdot w)}{\partial x} \right) \cdot {}^{(n)} \Theta - \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right] \cdot {}^{(n)} \Theta = 0, \\ m = \overline{1, N_s - 1}; \quad {}^{(n)} Y_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} {}^{(n)} Y_m. \end{aligned} \quad (2.235)$$

В качестве второго варианта рассмотрим течение среды без учета диффузии. Используя предположение о мгновенном перемешивании потоков в узле сочленения, можно заключить, что функции $Y_m, m = \overline{1, N_s}$, в общем случае являются разрывными по пространственной координате. Это наблюдается, если в узле сочленения смешиваются несколько потоков с разными концентрациями компонент. Тогда при «втекании» данных потоков в объем $^{(0)}V$ концентрации компонент мгновенно изменяются до некоторого осредненного значения. Отметим, что подобный эффект при учете диффузии не наблюдается, т.к. диффузионное слагаемое обладает «сглаживающим» эффектом, «заставляя» пространственное распределение функций $Y_m, m = \overline{1, N_s}$, быть непрерывными и дифференцируемыми зависимостями. При этом зона плавного изменения концентраций компонент между данными значениями в объеме $^{(0)}V$ и в каждой «подво-

¹ В противном случае можно воспользоваться моделью (2.231).

дыщей» трубе имеет вид малого участка на «выходной»¹ границе этой «подводящей» трубы. Размер указанного участка определяется величинами конвективного $(\rho \cdot Y_m \cdot w)$ и диффузионного $\left(\rho \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x}\right)$ переноса массы каждой компоненты. Т.к. в данном случае за счет диффузии масса компоненты переносится против потока среды, то размер рассматриваемого участка тем больше, чем сильнее диффузионный перенос массы компоненты и чем слабее конвективный перенос массы компоненты.

Проинтегрировав трехмерные уравнения неразрывности компоненты (2.46а) по объему $^{(0)}V$, получим:

$$\sum_{n=1}^N \rho \cdot {}^{(n)} \left[(Y_m)_L \cdot w_L \cdot f_L \cdot s \right] = \rho \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left[(Y_m)_L \cdot w_L \cdot f_L \cdot s \right] = 0, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (2.236)$$

Введем множество «подводящих» труб $\mathbb{C}_{IN}$ и множество «отводящих» труб $\mathbb{C}_{OUT}$. К первым относятся трубы, по которым смесь втекает в сочленение, ко вторым – в которые смесь втекает из сочленения. Тогда (2.236) можно переписать в виде:

$$\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} \left[(Y_m)_L \cdot w_L \cdot f_L \cdot s \right] + \sum_{n \in \mathbb{C}_{OUT}} {}^{(n)} \left[(Y_m)_L \cdot w_L \cdot f_L \cdot s \right] = 0, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (2.237)$$

Для всех «отводящих» труб концентрации компонент в сечениях ${}^{(n)}f_L$ ($n \in \mathbb{C}_{OUT}$) совпадают, т.к. подвод многокомпонентной жидкости в данные трубы совершается из одного источника – объема $^{(0)}V$. Концентрации компонент в сечениях ${}^{(n)}f_L$ «подводящих» труб ($n \in \mathbb{C}_{IN}$), напротив, могут различаться, т.к. они определяются свойствами среды и параметрами ее течения до узла сочленения. В силу этого преобразуем (2.237):

$$\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} \left[(Y_m)_L \cdot w_L \cdot f_L \cdot s \right] + {}^{(0)}Y_m \cdot \sum_{n \in \mathbb{C}_{OUT}} {}^{(n)} \left[w_L \cdot f_L \cdot s \right] = 0, \quad m = \overline{1, N_s}; \quad (2.238a)$$

$${}^{(n)}(Y_m)_L = {}^{(0)}Y_m, \quad n \in \mathbb{C}_{OUT}, \quad (2.238b)$$

где ${}^{(0)}Y_m$ – концентрация m -ой компоненты в объеме $^{(0)}V$. Тогда из (2.238) следует, что

$${}^{(0)}Y_m = - \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} \left[(Y_m)_L \cdot w_L \cdot f_L \cdot s \right]}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{OUT}} {}^{(n)} \left[w_L \cdot f_L \cdot s \right]}, \quad m = \overline{1, N_s}; \quad (2.239a)$$

$${}^{(n)}(Y_m)_L = {}^{(0)}Y_m, \quad n \in \mathbb{C}_{OUT}. \quad (2.239b)$$

На основе способа введения параметров ${}^{(n)}s, n = \overline{1, N}$, (см. (2.207)), а также множеств $\mathbb{C}_{IN}$ и $\mathbb{C}_{OUT}$, запишем:

$${}^{(n)} \left[w_L \cdot f_L \cdot s \right] = {}^{(n)}(|w_L| \cdot f_L) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{C}_{IN}; \quad (2.240a)$$

$${}^{(n)} \left[w_L \cdot f_L \cdot s \right] = - {}^{(n)}(|w_L| \cdot f_L) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{C}_{OUT}. \quad (2.240b)$$

¹ Под термином «выходная» граница трубы понимается граница, через которую смесь покидает трубу.

С другой стороны, преобразование уравнения Кирхгофа (2.217б) для расходов среды через сочленение при использовании (2.240) приводит к записям:

$$\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}}^{(n)} [w_L \cdot f_L \cdot s] + \sum_{n \in \mathbb{C}_{OUT}}^{(n)} [w_L \cdot f_L \cdot s] = 0; \quad (2.241a)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}}^{(n)} [w_L \cdot f_L \cdot s] = - \sum_{n \in \mathbb{C}_{OUT}}^{(n)} [w_L \cdot f_L \cdot s]; \quad (2.241б)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}}^{(n)} (|w_L| \cdot f_L) = \sum_{n \in \mathbb{C}_{OUT}}^{(n)} (|w_L| \cdot f_L). \quad (2.241в)$$

Применяя (2.240) и (2.241в), получим окончательный вид (2.239):

$${}^{(0)}Y_m = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}}^{(n)} [(Y_m)_L \cdot |w_L| \cdot f_L]}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{OUT}}^{(n)} (|w_L| \cdot f_L)} = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}}^{(n)} [(Y_m)_L \cdot |w_L| \cdot f_L]}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}}^{(n)} (|w_L| \cdot f_L)}, \quad m = \overline{1, N_S}; \quad (2.242a)$$

$${}^{(n)}(Y_m)_L = {}^{(0)}Y_m, \quad n \in \mathbb{C}_{OUT}. \quad (2.242б)$$

Уравнения (2.242) можно трактовать как закон Кирхгофа для конвективных потоков компонент смеси. Фактически, в узле сочленения концентрация каждой компоненты осредняется по расходу жидкости, протекающей через данный узел. Напомним, что рассматриваемая модель не учитывает диффузию, по указанной причине концентрация каждой компоненты в объеме ${}^{(0)}V$ не влияет на аналогичную концентрацию в «подводящих» трубах. Другими словами, значения ${}^{(n)}(Y_m)_L$ для «подводящих» труб ($n \in \mathbb{C}_{IN}$) являются только решением задачи течения многокомпонентной смеси по каждой из рассматриваемых («подводящих») труб.

Перейдем к уравнению энергии. Как и ранее, рассмотрим два случая: первый случай – течение смеси с учетом диффузии и/или теплопроводности; второй – без учета диффузии и теплопроводности.

При учете теплопроводности адаптация трехмерного уравнения энергии для описания течений в объеме ${}^{(0)}V$ приводит к записи закона Кирхгофа (2.225ж) для потоков энергии, обусловленных теплопроводностью:

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot {}^{(n)} f \cdot {}^{(n)} s = 0. \quad (2.243)$$

Аналогичная адаптация уравнений энергии для течений в объеме V приведет к уравнению (2.225г). При условии постоянства плотности это уравнение можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left(\frac{\partial (\varepsilon \cdot w)}{\partial x} \right) \cdot {}^{(n)} \Theta = & - \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)} p \cdot {}^{(n)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot {}^{(n)} \Theta + \\ & + \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{{}^{(n)} R} \cdot {}^{(n)} \lambda \cdot {}^{(n)} |w|^3 \cdot {}^{(n)} \Theta + \frac{Q}{\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] \cdot {}^{(n)} \Theta - \\ & - \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{{}^{(n)} \Phi(T, T_{oc})}{{}^{(n)} f} \cdot {}^{(n)} \Theta + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{N_S} {}^{(n)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right] \cdot {}^{(n)} \Theta. \end{aligned} \quad (2.244)$$

Рассмотрим теперь второй случай, т.е. уравнение энергии без учета диффузии и теп-

лопроводности. Проводя выкладки, аналогичные варианту вывода уравнений (2.242), имеем:

$${}^{(0)}\varepsilon = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)}[\varepsilon_L \cdot |w_L| \cdot f_L]}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{OUT}} {}^{(n)}(|w_L| \cdot f_L)} = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)}[\varepsilon_L \cdot |w_L| \cdot f_L]}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)}(|w_L| \cdot f_L)}; \quad (2.245a)$$

$${}^{(n)}\varepsilon_L = {}^{(0)}\varepsilon, \quad n \in \mathbb{C}_{OUT}, \quad (2.245b)$$

где ${}^{(0)}\varepsilon$ – значение удельной (на единицу массы) внутренней энергии в объеме ${}^{(0)}V$.

В итоге систему уравнений, описывающую течение несжимаемой среды по разветвленной трубопроводной системе, можно записать так¹:

$$\rho = \text{const}; \quad (2.246a)$$

– для каждой трубы, примыкающей к узлу сочленения

$$w = w(t); \quad (2.246b)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot l} + g \cdot \frac{[(z_1)_1 - (z_1)_2]}{l} - \frac{\lambda \cdot w \cdot |w|}{4 \cdot R}; \quad (2.246b)$$

$$\frac{\partial Y_m}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad Y_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} Y_m; \quad (2.246г)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\lambda \cdot |w|^3}{4 \cdot R} + \frac{Q}{\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \frac{\Phi(T, T_{oc})}{f \cdot \rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{m=1}^{N_S} \left(\varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right]; \quad (2.246д)$$

– для каждого из узлов сочленения

$${}^{(n)}p_L = {}^{(\xi)}p_L \quad \text{для любых } n, \xi \in \overline{1, N}; \quad (2.246e)$$

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}[w_L \cdot f_L \cdot s] = 0; \quad (2.246ж)$$

$$\frac{\partial Y_m}{\partial t} + \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left(\frac{\partial (Y_m \cdot w)}{\partial x} \right) \cdot {}^{(n)}\Theta - \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right] \cdot {}^{(n)}\Theta = 0, \quad (2.246з)$$

$$m = \overline{1, N_S - 1}; \quad {}^{(n)}Y_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} {}^{(n)}Y_m;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left(\frac{\partial (\varepsilon \cdot w)}{\partial x} \right) \cdot {}^{(n)}\Theta = & - \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}p \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot {}^{(n)}\Theta + \\ & + \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{1}{R} \cdot {}^{(n)}\lambda \cdot {}^{(n)}|w|^3 \cdot {}^{(n)}\Theta + \frac{Q}{\rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] \cdot {}^{(n)}\Theta - \\ & - \frac{1}{\rho} \cdot \sum_{n=1}^N \frac{{}^{(n)}\Phi(T, T_{oc})}{f} \cdot {}^{(n)}\Theta + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{N_S} {}^{(n)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right] \cdot {}^{(n)}\Theta; \end{aligned} \quad (2.246и)$$

¹ Соответствует модели с учетом диффузии и теплопроводности.

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \cdot {}^{(n)} f \cdot {}^{(n)} s = 0, \quad m = \overline{1, N_s}; \quad (2.246к)$$

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot {}^{(n)} f \cdot {}^{(n)} s = 0; \quad (2.246л)$$

$${}^{(n)} s = - \left({}^{(0)} \vec{n} \cdot {}^{(n)} \vec{i} \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left({}^{(0)} \vec{n} \cdot {}^{(n)} \vec{i} \right) < 0; \\ -1, & \text{если } \left({}^{(0)} \vec{n} \cdot {}^{(n)} \vec{i} \right) > 0; \end{cases} \quad (2.246м)$$

$${}^{(n)} \Theta = \frac{{}^{(n)} V}{V} = \frac{{}^{(n)} f_L}{\sum_{k=1}^N {}^{(k)} f_L}, \quad 0 < {}^{(n)} \Theta < 1, \quad \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \Theta = 1; \quad (2.246н)$$

– **УРС и дополнительные соотношения:**

$$\varepsilon = h - p/\rho; \quad h = h(p, T, \{Y_m, m = \overline{1, N_s}\}); \quad \varepsilon_m = \varepsilon_m(\{S_{смеси}\}), \quad D_m = D_m(\{S_{смеси}\}), \\ m = \overline{1, N_s}; \quad T_1 = T_2 = \dots = T_{N_s} = T. \quad (2.246о)$$

При условии отсутствия диффузии ($D_m = 0$) уравнения неразрывности компонент (2.246з) и (2.246к) видоизменяются. Номера скорректированных уравнений ниже будут помечены символом «*»:

$${}^{(0)} Y_m = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} [(Y_m)_L \cdot |w_L| \cdot f_L]}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{OUT}} {}^{(n)} (|w_L| \cdot f_L)} = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} [(Y_m)_L \cdot |w_L| \cdot f_L]}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} (|w_L| \cdot f_L)}, \quad m = \overline{1, N_s}; \quad (2.246з*)$$

$${}^{(n)} (Y_m)_L = {}^{(0)} Y_m, \quad n \in \mathbb{C}_{OUT}. \quad (2.246к*)$$

Аналогично, при условии отсутствия диффузии ($D_m = 0$) и теплопроводности ($k = 0$), уравнения энергии (2.246и) и (2.246л) также принимают другой вид:

$${}^{(0)} \varepsilon = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} [\varepsilon_L \cdot |w_L| \cdot f_L]}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{OUT}} {}^{(n)} (|w_L| \cdot f_L)} = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} [\varepsilon_L \cdot |w_L| \cdot f_L]}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} (|w_L| \cdot f_L)}; \quad (2.246и*)$$

$${}^{(n)} \varepsilon_L = {}^{(0)} \varepsilon, \quad n \in \mathbb{C}_{OUT}. \quad (2.246л*)$$

2.5. Численный анализ математической модели разветвленных трубопроводов

В данной монографии решение систем уравнений (2.36), (2.54), (2.225) и (2.231) проводится с применением метода конечных разностей (МКР). Выбор МКР, а не метода контрольного (конечного) объема (МКО) [71, 72, 92], здесь объясняется следующими соображениями. Во-первых, во многих публикациях по вычислительной газодинамике МКО считают одним из способов построения разностных аналогов для МКР (см., например, [63, 92, 93]). Авторы настоящей монографии разделяют это мнение. Во-вторых, построенные МКО разностные схемы, как правило, оказываются консервативными, если конечно-разностные аналоги для потоков через прилегающие грани контрольных объемов одинаковы на одних и тех же границах соседних ячеек. Этим же свойством обладает

и интегральный метод [69, 92] построения разностных аналогов для МКР, если он применяется к исходным дифференциальным уравнениям газовой динамики, записанным в дивергентной форме. В-третьих, ниже для построения разностных схем с использованием МКР будет широко применяться интегро-интерполяционный метод А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [70, 94], являющийся, по сути, российским предшественником и в значительной степени аналогом МКО [71, 95]. В-четвертых, не только консервативность, характерная для МКО, определяет достоинства схемы, т.к. исходные дифференциальные уравнения описывают не только законы сохранения в точке, но и содержат информацию о характеристических направлениях и областях зависимости от краевых условий [71]. Схема должна, по возможности, правильно описывать и эти свойства. Теперь перейдем к рассмотрению решения исходных систем уравнений с использованием МКР.

Введем неравномерную пространственно-временную сетку $\{x_i, t_j\}$ (рис. 2.14), где x_i и t_j – координаты узла сетки с номером i по пространству и j по времени, $i, j \in Z$, Z – множество неотрицательных целых чисел.

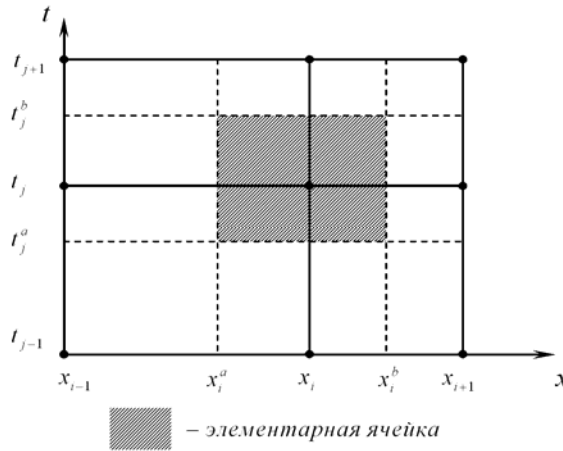


Рис. 2.14. Пространственно-временная сетка (фрагмент)

Рассмотрим элементарную ячейку (см. рис. 2.14), содержащую узел $\{x_i, t_j\}$ (базовый узел ячейки) и ограниченную прямыми $x = x_i^a$, $x = x_i^b$, $t = t_j^a$ и $t = t_j^b$ ($x_{i-1} \leq x_i^a \leq x_i$, $x_i \leq x_i^b \leq x_{i+1}$, $t_{j-1} \leq t_j^a \leq t_j$, $t_j \leq t_j^b \leq t_{j+1}$, $x_i^a \neq x_i^b$, $t_j^a \neq t_j^b$). Введем так называемые весовые параметры:

$$r_i^a = \frac{x_i^a - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x_i^a - x_{i-1}}{h_i}; \quad r_i^b = \frac{x_i^b - x_i}{h_{i+1}}; \quad s_j^a = \frac{t_j^a - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} = \frac{t_j^a - t_{j-1}}{\tau_j}; \quad s_j^b = \frac{t_j^b - t_j}{\tau_{j+1}},$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$ и $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ – шаги «назад» и «вперед» по пространственной координате для i -го узла; $\tau_j = t_j - t_{j-1}$ и $\tau_{j+1} = t_{j+1} - t_j$ – шаги «назад» и «вперед» по временной координате на j -ом временном слое.

При дальнейшем изложении материала также будут использоваться обозначения: $\alpha_i = h_{i+1}/h_i$ и $\beta_j = \tau_{j+1}/\tau_j$ – сеточные параметры, характеризующие неоднородность пространственно-временной сетки. Сеточные функции $y = y(x, t)$ будут иметь вид:

$$y_i^j = y(x_i, t_j); \quad y_i = y_i(t) = y(x_i, t); \quad y^j = y^j(x) = y(x, t_j). \quad (2.247a)$$

В случае применения квадратичной аппроксимации

$$y(x, t) = a_i^{y-}(t) \cdot x^2 + b_i^{y-}(t) \cdot x + c_i^{y-}(t), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]; \quad (2.247б)$$

$$y(x, t) = a_i^{y+}(t) \cdot x^2 + b_i^{y+}(t) \cdot x + c_i^{y+}(t), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (2.247в)$$

применяются обозначения:

$$\delta y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x} = 2 \cdot a_i^{y-}(t) \cdot x + b_i^{y-}(t), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]; \quad (2.247г)$$

$$\delta y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x} = 2 \cdot a_i^{y+}(t) \cdot x + b_i^{y+}(t), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]; \quad (2.247д)$$

$$(\delta y^a)_i^j = \delta y(x_i^a, t) = 2 \cdot a_i^{y-}(t_j) \cdot x^a + b_i^{y-}(t_j); \quad (\delta y^b)_i^j = 2 \cdot a_i^{y+}(t_j) \cdot x^b + b_i^{y+}(t_j). \quad (2.247е)$$

Введем также следующие безындексные обозначения:

$$y = y_i^j, \quad h = h_i, \quad \alpha = \alpha_i, \quad \tau = \tau_j, \quad \beta = \beta_j, \quad x = x_i, \quad t = t_j, \quad \hat{y} = y_i^{j+1}, \quad \check{y} = y_i^{j-1},$$

$$y(+1) = y_{i+1}^j, \quad y(-1) = y_{i-1}^j, \quad r^a = r_i^a, \quad r^b = r_i^b, \quad s^a = s_j^a, \quad s^b = s_j^b, \quad i, j \in Z;$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma \cdot y + (1 - \sigma) \cdot \check{y}; \quad y_{(\theta)} = \theta \cdot y + (1 - \theta) \cdot y(-1); \quad y^{(\sigma, \theta)} = \sigma \cdot \hat{y} + (1 - \sigma - \theta) \cdot y + \theta \cdot \check{y};$$

$$y^{(-s)} = s^a \cdot y + (1 - s^a) \cdot \check{y}; \quad y^{(+s)} = s^b \cdot \hat{y} + (1 - s^b) \cdot y;$$

$$y_{(-R)} = r^a \cdot y + (1 - r^a) \cdot y(-1); \quad y_{(+R)} = r^b \cdot y(+1) + (1 - r^b) \cdot y;$$

$$y_{(-R)}(+1) = y_{(+R)}; \quad y_{(+R)}(-1) = y_{(-R)}; \quad \hat{y}^{(-s)} = y^{(+s)}; \quad \check{y}^{(+s)} = y^{(-s)};$$

$$\Delta t^- = t - t^a = (1 - s^a) \cdot \tau; \quad \Delta t^+ = t^b - t = s^b \cdot \hat{\tau} = \beta \cdot s^b \cdot \tau;$$

$$\Delta x^- = x - x^a = (1 - r^a) \cdot h; \quad \Delta x^+ = x^b - x = r^b \cdot h(+1) = \alpha \cdot r^b \cdot h;$$

$$\Delta t = t^b - t^a = \Delta t^+ + \Delta t^- = (1 - s^a) \cdot \tau + s^b \cdot \hat{\tau} = (1 - s^a) \cdot \tau + \beta \cdot s^b \cdot \tau;$$

$$\Delta x = x^b - x^a = \Delta x^+ + \Delta x^- = (1 - r^a) \cdot h + r^b \cdot h(+1) = (1 - r^a) \cdot h + \alpha \cdot r^b \cdot h;$$

$$\gamma^- = \frac{\Delta x^-}{\Delta x} = \frac{(1 - r^a) \cdot h}{(1 - r^a) \cdot h + r^b \cdot h(+1)} = \frac{1 - r^a}{1 - r^a + \alpha \cdot r^b};$$

$$\gamma^+ = \frac{\Delta x^+}{\Delta x} = \frac{r^b \cdot h(+1)}{(1 - r^a) \cdot h + r^b \cdot h(+1)} = \frac{\alpha \cdot r^b}{1 - r^a + \alpha \cdot r^b};$$

$$\delta y^a(+1) = \delta y^b; \quad \delta y^b(-1) = \delta y^a; \quad y_x = \frac{y(+1) - y}{h(+1)}; \quad y_{\bar{x}} = \frac{y - y(-1)}{h}; \quad y_{\bar{x}}(+1) = y_x;$$

$$y_x(-1) = y_{\bar{x}}; \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{0,5 \cdot (1 + \beta) \cdot \tau}; \quad y_{\bar{x}} = \frac{y(+1) - y}{0,5 \cdot (1 + \alpha) \cdot h}; \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\Delta t}; \quad y_{\bar{x}} = \frac{y(+1) - y}{\Delta x}. \quad (2.248)$$

Для численного анализа математической модели (2.231) С.Н. Пряловым и В.Е. Селезевым было построено несколько параметрических классов разностных схем (см., например, [1, 2, 6]). В качестве примера рассмотрим один из характерных вариантов данных классов, построенный интегральным методом на девятиточечном шаблоне (см. рис. 2.14) для численного анализа системы одномерных дифференциальных уравнений (2.54), описывающей неустановившееся неизотермическое течение вязкой газовой смеси по трубе круглого переменного поперечного сечения. Используемые обозначения соответствуют (2.248).

Для получения конечно-разностных аналогов применяется интегральный метод, сущность которого заключается в том, что разностные уравнения строятся на основе ин-

тегральных соотношений, выражающих законы сохранения для элементарной ячейки [70, 92]. Не загромождая изложение материала рутинными операциями, покажем принцип получения разностных соотношений на примере уравнения движения (2.54в). Проинтегрируем данное уравнение по рассматриваемой ячейке:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int \int_{\Delta x \Delta t} \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial t} dt dx + \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int \int_{\Delta x \Delta t} \frac{\partial(\rho \cdot w^2 \cdot f)}{\partial x} dt dx = \\ & = -\frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int \int_{\Delta x \Delta t} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot f dt dx - \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int \int_{\Delta x \Delta t} g \cdot \rho \cdot \frac{\partial z_i}{\partial x} \cdot f dt dx - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int \int_{\Delta x \Delta t} \lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w| \cdot R dt dx. \end{aligned} \quad (2.249)$$

Рассмотрим каждое слагаемое уравнения (2.249).

Первое слагаемое:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int \int_{\Delta x \Delta t} \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial t} dt dx = \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \left(\int_{\Delta x} \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial t} dx \right) dt = \\ & = \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\Delta x} \rho \cdot w \cdot f dx \right] \right) dt = \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{\rho(t) \cdot w(t)} \cdot \int_{\Delta x} f dx \right] \right) dt = \\ & = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{\rho(t) \cdot w(t)} \cdot F_i(t) \right] \right) dt \approx \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial t} [\rho_i \cdot w_i \cdot F_i(t)] \right) dt = \\ & = \frac{\rho_i(t_j^b) \cdot w_i(t_j^b) \cdot F_i(t_j^b) - \rho_i(t_j^a) \cdot w_i(t_j^a) \cdot F_i(t_j^a)}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.250a)$$

где $\overline{\rho(t) \cdot w(t)}$ – некоторое среднее значение произведения на промежутке Δx (будем относить это значение к i -ому узлу);

$$F_i = \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{\Delta x} f dx \quad (2.251)$$

(среднее значение площади проходного сечения трубопровода на участке трубопровода длиной Δx). Выберем для произведения $(\rho_i \cdot w_i \cdot F_i)$ в точках t_j^a и t_j^b следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned} & (\rho_i \cdot F_i \cdot w_i)|_{t=t_j^a} = (\rho_i \cdot F_i)|_{t=t_j^a} \cdot w_i|_{t=t_j^a} = [s_j^a \cdot (\rho \cdot F)_i^j + (1-s_j^a) \cdot (\rho \cdot F)_i^{j-1}] \times \\ & \times [s_j^a \cdot w_i^j + (1-s_j^a) \cdot w_i^{j-1}] = [s^a \cdot (\rho \cdot F) + (1-s^a) \cdot (\bar{\rho} \cdot \bar{F})] \cdot [s^a \cdot w + (1-s^a) \cdot \bar{w}] = (\rho \cdot F)^{(-s)} \cdot w^{(-s)}; \\ & (\rho_i \cdot F_i \cdot w_i)|_{t=t_j^b} = (\rho_i \cdot F_i)|_{t=t_j^b} \cdot w_i|_{t=t_j^b} \rightarrow (\rho \cdot F)^{(+s)} \cdot w^{(+s)}. \end{aligned}$$

Здесь символ « $\rightarrow$ » обозначает способ аппроксимации. Таким образом, первое слагаемое уравнения (2.249) приводится к виду:

$$\frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int \int_{\Delta x \Delta t} \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial t} dt dx \rightarrow \frac{(\rho \cdot F)^{(+s)} \cdot w^{(+s)} - (\rho \cdot F)^{(-s)} \cdot w^{(-s)}}{\Delta t} = \left[(\rho \cdot F)^{(-s)} \cdot w^{(-s)} \right]_t^+ \quad (2.250б)$$

Второе слагаемое:

$$\frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int \int_{\Delta x \Delta t} \frac{\partial(\rho \cdot w^2 \cdot f)}{\partial x} dt dx = \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \left(\int_{\Delta x} \frac{\partial(\rho \cdot w^2 \cdot f)}{\partial x} dx \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \frac{(\rho \cdot w^2 \cdot f)|_{x=x_i^b} - (\rho \cdot w^2 \cdot f)|_{x=x_i^a}}{\Delta x} dt = \frac{\overline{(\rho \cdot w^2 \cdot f)|_{x_i^b}} - (\rho \cdot w^2 \cdot f)|_{x_i^a}}{\Delta x}. \quad (2.252a)$$

Здесь черта над выражением (2.252a) обозначает осреднение на временном промежутке Δt . Выберем следующие аппроксимации слагаемых последнего выражения в (2.252a):

$$\begin{aligned} (\rho \cdot w^2 \cdot f)|_{x_i^a} &= (\rho \cdot w \cdot f)|_{x_i^a} \cdot w|_{x_i^a} = [r_i^a \cdot (\rho \cdot w \cdot f)_i + (1 - r_i^a) \cdot (\rho \cdot w \cdot f)_{i-1}] \times \\ &\quad \times [r_i^a \cdot w_i + (1 - r_i^a) \cdot w_{i-1}] = (\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \cdot w_{(-R)}; \\ (\rho \cdot w^2 \cdot f)|_{x_i^b} &= (\rho \cdot w \cdot f)|_{x_i^b} \cdot w|_{x_i^b} \rightarrow (\rho \cdot w \cdot f)_{(+R)} \cdot w_{(+R)}. \end{aligned}$$

Таким образом, второе слагаемое уравнения (2.249) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta x} \int_{\Delta t} \frac{\partial(\rho \cdot w^2 \cdot f)}{\partial x} dt dx &\rightarrow \frac{(\rho \cdot w \cdot f)_{(+R)} \cdot w_{(+R)} - (\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \cdot w_{(-R)}}{\Delta x} = \\ &= \overline{((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \cdot w_{(-R)})_x} \rightarrow ((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \cdot w_{(-R)})_x^{(\sigma, \theta)}. \end{aligned} \quad (2.252b)$$

Последний переход определяет способ осреднения по временному шагу.

Третье слагаемое:

$$\frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta x} \int_{\Delta t} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot f dt dx = \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \left(\int_{\Delta x} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot f dx \right) dt. \quad (2.253)$$

При кусочно-линейной аппроксимации функции давления $p(x, t)$ на отрезке Δx в фиксированный момент времени имеем:

$$\frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{\Delta x} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot f dx = \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\int_{x^a}^{x_i} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot f dx + \int_{x_i}^{x_i^b} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot f dx \right) = \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{p_i - p_{i-1}}{h_i} \cdot \int_{x^a}^{x_i} f dx + \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \cdot \int_{x_i}^{x_i^b} f dx \right). \quad (2.254)$$

Введем следующие параметры:

$$B_i^- = \frac{1}{\Delta x^-} \cdot \int_{x_i^a}^{x_i} f(x, t) dx; \quad B_i^+ = \frac{1}{\Delta x^+} \cdot \int_{x_i}^{x_i^b} f(x, t) dx. \quad (2.255)$$

С учетом (2.255) и обозначений (2.248) перепишем (2.254) в виде:

$$\frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{\Delta x} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot f dx = \frac{p_i - p_{i-1}}{h_i} \cdot \gamma_i^- \cdot B_i^- + \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \cdot \gamma_i^+ \cdot B_i^+ \rightarrow \gamma^- \cdot B^- \cdot p_{\bar{x}} + \gamma^+ \cdot B^+ \cdot p_x. \quad (2.256)$$

Подставляя (2.256) в (2.253), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta x} \int_{\Delta t} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot f dt dx &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \left(\frac{p_i - p_{i-1}}{h_i} \cdot \gamma_i^- \cdot B_i^- + \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \cdot \gamma_i^+ \cdot B_i^+ \right) dt \rightarrow \\ &\rightarrow (\gamma^- \cdot B^- \cdot p_{\bar{x}} + \gamma^+ \cdot B^+ \cdot p_x)^{(\sigma, \theta)}. \end{aligned} \quad (2.257)$$

Четвертое слагаемое (по аналогии с третьим слагаемым):

$$\frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta x} \int_{\Delta t} g \cdot \rho \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot f dt dx = \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \left(g \cdot \bar{\rho} \cdot \int_{\Delta x} \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot f dx \right) dt \approx$$

$$\approx \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \left(g \cdot \rho_i \cdot \int_{\Delta x} \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot f dx \right) dt \rightarrow g \cdot \left[\rho \cdot (B^- \cdot \gamma^- \cdot (z_1)_{\bar{x}} + B^+ \cdot \gamma^+ \cdot (z_1)_x) \right]^{(\sigma, \theta)}. \quad (2.258)$$

Пятое слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta x \Delta t} \lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w| \cdot R dt dx &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \left(\int_{\Delta x} \lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w| \cdot R dx \right) dt \approx \\ &\approx \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \left(\lambda_i \cdot \rho_i \cdot w_i \cdot |w_i| \cdot \left[\frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{\Delta x} R dx \right] \right) dt = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{\Delta t} (\lambda_i \cdot \rho_i \cdot w_i \cdot |w_i| \cdot r_i) dt \rightarrow \frac{\pi}{4} \cdot (\lambda \cdot \rho \cdot |w| \cdot r)^{(\sigma, \theta)} \cdot w^{(\sigma, \theta)}, \end{aligned} \quad (2.259)$$

где

$$r_i = \frac{1}{\Delta x} \cdot \int_{\Delta x} R dx. \quad (2.260)$$

Подставляя в уравнение (2.249) найденные разностные выражения его слагаемых, получим разностное уравнение движения:

$$\begin{aligned} \left[(\rho \cdot F)^{(-S)} \cdot w^{(-S)} \right]_{\substack{t \\ +}} + \left((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \cdot w_{(-R)} \right)_{\substack{x \\ +}}^{(\sigma, \theta)} &= - (B^- \cdot \gamma^- \cdot p_{\bar{x}} + B^+ \cdot \gamma^+ \cdot p_x)^{(\sigma, \theta)} - \\ &- g \cdot \left[\rho \cdot (B^- \cdot \gamma^- \cdot (z_1)_{\bar{x}} + B^+ \cdot \gamma^+ \cdot (z_1)_x) \right]^{(\sigma, \theta)} - \frac{\pi}{4} \cdot (\lambda \cdot \rho \cdot |w| \cdot r)^{(\sigma, \theta)} \cdot w^{(\sigma, \theta)}. \end{aligned} \quad (2.261)$$

Аналогичным образом строятся остальные уравнения класса параметрических разностных схем на девятиточечном шаблоне (см. рис. 2.14) для математической модели неизоэтермического неустановившегося движения многокомпонентной газовой смеси по одностациональному многосекционному трубопроводу (2.54), сокращенная запись которого имеет следующий вид:

$$\left[(\rho \cdot F)^{(-S)} \right]_{\substack{t \\ +}} + \left((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \right)_{\substack{x \\ +}}^{(\sigma, \theta)} = 0; \quad (2.262a)$$

$$\begin{aligned} \left[(\rho \cdot F)^{(-S)} \cdot (Y_m)^{(-S)} \right]_{\substack{t \\ +}} + \left((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \cdot (Y_m)_{(-R)} \right)_{\substack{x \\ +}}^{(\sigma, \theta)} - \\ - \left[(\rho \cdot f \cdot D_m)_{(-R)} \cdot \delta(Y_m)^a \right]_{\substack{x \\ +}}^{(\sigma, \theta)} = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad Y_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} Y_m; \end{aligned} \quad (2.262b)$$

$$\begin{aligned} \left[(\rho \cdot F)^{(-S)} \cdot w^{(-S)} \right]_{\substack{t \\ +}} + \left((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \cdot w_{(-R)} \right)_{\substack{x \\ +}}^{(\sigma, \theta)} &= - (B^- \cdot \gamma^- \cdot p_{\bar{x}} + B^+ \cdot \gamma^+ \cdot p_x)^{(\sigma, \theta)} - \\ &- g \cdot \left[\rho \cdot (B^- \cdot \gamma^- \cdot (z_1)_{\bar{x}} + B^+ \cdot \gamma^+ \cdot (z_1)_x) \right]^{(\sigma, \theta)} - \frac{\pi}{4} \cdot (\lambda \cdot \rho \cdot |w| \cdot r)^{(\sigma, \theta)} \cdot w^{(\sigma, \theta)}; \end{aligned} \quad (2.262b)$$

$$\begin{aligned} \left[(\rho \cdot F)^{(-S)} \cdot \varepsilon^{(-S)} \right]_{\substack{t \\ +}} + \left((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \cdot \varepsilon_{(-R)} \right)_{\substack{x \\ +}}^{(\sigma, \theta)} + K_t \left(\rho \cdot F \cdot \frac{w^2}{2} \right) + K_x \left(\rho \cdot w \cdot f \cdot \frac{w^2}{2} \right) &= \\ = - \left((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \right)_{\substack{x \\ +}}^{(\sigma, \theta)} - g \cdot \left[\rho \cdot (B^- \cdot \gamma^- \cdot (z_1)_{\bar{x}} + B^+ \cdot \gamma^+ \cdot (z_1)_x) \right]^{(\sigma, \theta)} \cdot w^{(\sigma, \theta)} - \\ - p^{(\sigma, \theta)} \cdot \left[F^{(-S)} \right]_{\substack{t \\ +}} + (Q \cdot F)^{(\sigma, \theta)} + \left[(k \cdot f)_{(-R)} \cdot \delta T^a \right]_{\substack{x \\ +}}^{(\sigma, \theta)} - \phi^{(\sigma, \theta)} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=1}^{N_S} \left[(\rho \cdot D_m \cdot f)_{(-R)} \cdot (\varepsilon_m)_{(-R)} \cdot \delta(Y_m)^a \right]_{x_+}^{(\sigma, \theta)}; \quad (2.262\text{г})$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(\{S_{\text{смеси}}\}), \quad m = \overline{1, N_S}; \quad T_1 = T_2 = \dots = T_{N_S}; \quad (2.262\text{д})$$

$$p = p(\{S_{\text{смеси}}\}); \quad \varepsilon = \varepsilon(\{S_{\text{смеси}}\}); \quad (2.262\text{е})$$

$$k = k(\{S_{\text{смеси}}\}); \quad (2.262\text{ж})$$

$$D_m = D_m(\{S_{\text{смеси}}\}), \quad m = \overline{1, N_S}, \quad (2.262\text{з})$$

где F , B^+ , B^- и r – разностные выражения, аппроксимирующие величины f и R (вид данных выражений определяется при выделении конкретной схемы из класса схем); K_t и K_x – операторы разностного дифференцирования функций $(0,5 \cdot \rho \cdot F \cdot w^2)$ и $(0,5 \cdot \rho \cdot w \cdot f \cdot w^2)$ соответственно по времени и по пространству (вид данных операторов определяется при выделении конкретной схемы из класса схем); $\phi^{(\sigma, \theta)}$ – разностное выражение, аппроксимирующее функцию $\Phi(T, T_{oc})$. Уравнения (2.262) дополняются разностными аналогами краевых условий и условий сопряжения.

Как показано в работах [1, 2, 6], параметры класса схем (2.262) позволяют выделять из него схемы с различными свойствами: двухслойные и трехслойные; явные и неявные; неконсервативные, консервативные и полностью консервативные; с центральными разностями и с противопоточными разностями. В их числе можно выделить схемы идейно близкие к классической схеме «крест» и разностным схемам модифицированного метода Эйлера, метода «чехарды» Дюфорта – Франкеля, метода Лаасонена, противопоточного метода Роуча и т.д. [63, 92].

Разностная схема называется консервативной [70, 96], если ее следствием является сеточный аналог интегрального закона сохранения. Для класса параметрических разностных схем (2.262) данное условие выполняется при соблюдении равенств:

$$r_i^a = r_{i-1}^b; \quad s_j^a = s_{j-1}^b. \quad (2.263)$$

Первое равенство определяет взаимосвязь параметров в пространственных производных для соседних областей интегрирования, располагающихся на одном временном слое. Второе равенство устанавливает взаимосвязь параметров во временных производных для соседних областей интегрирования, соответствующих одному пространственному узлу. Таким образом, конечно-разностные выражения для потоков через прилегающие границы разностных ячеек одинаковы. Поэтому схема (2.262) с параметрами (2.263) является консервативной.

Рассматриваемый класс параметрических разностных схем (2.262) с учетом параметров (2.263) является консервативным по построению (исходная система уравнений в частных производных является дивергентной, для построения разностных аналогов применялся интегральный метод) [63, 92, 97].

При исследовании аппроксимации класса параметрических разностных схем для численного анализа неизотермических течений многокомпонентной газовой смеси газа в круглой трубе будем использовать следующие разложения в ряд Тейлора для сеточной функции $y_i^j = y(x_i, t_j)$, определенной на пространственно-временной сетке $\mathfrak{Z} = \{x_i, t_j\}$:

$$y_{i-1}^j = y_i^j - h_i \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_i + \frac{h_i^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_i + O(h^3) = y_i^j - h_i \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_i + O(h^2); \quad (2.264\text{а})$$

$$y_{i+1}^j = y_i^j + \alpha_i \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_i^j + \frac{(\alpha_i \cdot h_i)^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_i^j + O(h^3) = y_i^j + \alpha_i \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_i^j + O(h^2); \quad (2.264б)$$

$$y_i^{j-1} = y_i^j - \tau_j \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_i^j + \frac{\tau_j^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_i^j + O(\tau^3) = y_i^j - \tau_j \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_i^j + O(\tau^2); \quad (2.264в)$$

$$y_i^{j+1} = y_i^j + \beta_j \cdot \tau_j \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_i^j + \frac{(\beta_j \cdot \tau_j)^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_i^j + O(\tau^3) = y_i^j + \beta_j \cdot \tau_j \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_i^j + O(\tau^2); \quad (2.264г)$$

$$y^{(\sigma, \theta)} = \sigma_j \cdot y_i^{j+1} + (1 - \sigma_j - \theta_j) \cdot y_i^j + \theta_j \cdot y_i^{j-1} = y_i^j + O(\tau). \quad (2.264д)$$

Учтем также, что

$$F_i^j = \frac{1}{\Delta x} \cdot \int f(x, t_j) dx = \frac{1}{\Delta x} \cdot \int (f_i^j + O(h)) dx = f_i^j + O(h); \quad (2.264е)$$

$$(B^+)_i^j = f_i^j + O(h), \quad (B^-)_i^j = f_i^j + O(h); \quad (2.264ж)$$

$$r_i^j = R_i^j + O(h); \quad (2.264з)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_i^j = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_i^j + O(h). \quad (2.264и)$$

Разностное уравнение неразрывности (2.262а)

Первая разность:

$$\begin{aligned} [(\rho \cdot F)^{(-s)}]_+^t &= \frac{s_j^b \cdot \rho_i^{j+1} \cdot F_i^{j+1} + (1 - s_j^b - s_j^a) \cdot \rho_i^j \cdot F_i^j - (1 - s_j^a) \cdot \rho_i^{j-1} \cdot F_i^{j-1}}{\Delta t_j} = \\ &= \frac{s_j^b \cdot \left((\rho \cdot F)_i^j + (\beta \cdot \tau)_j \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot F)}{\partial t} \right)_i^j + O(\tau^2) \right) + (1 - s_j^b - s_j^a) \cdot (\rho \cdot F)_i^j}{\Delta t_j} - \\ &- \frac{(1 - s_j^a) \cdot \left((\rho \cdot F)_i^j - \tau_j \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot F)}{\partial t} \right)_i^j + O(\tau^2) \right)}{\Delta t_j} = \\ &= \frac{[(1 - s_j^a) \cdot \tau_j + \beta_j \cdot s_j^b \cdot \tau_j] \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot F)}{\partial t} \right)_i^j + O(\tau^2)}{(1 - s_j^a) \cdot \tau_j + \beta_j \cdot s_j^b \cdot \tau_j} = \frac{\partial(\rho \cdot F)}{\partial t} + O(\tau) = \frac{\partial(\rho \cdot f)}{\partial t} + O(\tau, h). \end{aligned} \quad (2.265)$$

Вторая разность. С учетом (2.264д) запишем:

$$\begin{aligned} \left((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \right)_+^{(\sigma, \theta)} &= \left((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \right)_+^x + O(\tau) = \\ &= \frac{r_i^b \cdot \rho_{i+1}^j \cdot f_{i+1}^j \cdot w_{i+1}^j + (1 - r_i^b - r_i^a) \cdot \rho_i^j \cdot f_i^j \cdot w_i^j - (1 - r_i^a) \cdot \rho_{i-1}^j \cdot f_{i-1}^j \cdot w_{i-1}^j}{\Delta x_i} + O(\tau) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r_i^b \cdot \left[(\rho \cdot w \cdot f)_i^j + (\alpha \cdot h)_i \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} \right)_i^j + O(h^2) \right]}{\Delta x_i} + \frac{(1 - r_i^b - r_i^a) \cdot (\rho \cdot w \cdot f)_i^j}{\Delta x_i} - \\
&- \frac{(1 - r_i^a) \cdot \left[(\rho \cdot w \cdot f)_i^j - h_i \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} \right)_i^j + O(h^2) \right]}{\Delta x_i} + O(\tau) = \\
&= \frac{\left[(1 - r_i^a) \cdot h_i + \alpha_i \cdot r_i^b \cdot h_i \right] \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} \right)_i^j + O(h^2)}{(1 - r_i^a) \cdot h_i + \alpha_i \cdot r_i^b \cdot h_i} + O(\tau) = \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} + O(\tau, h).
\end{aligned} \tag{2.266}$$

Таким образом, параметрическое разностное уравнение (2.262а) аппроксимирует на неравномерной пространственно-временной сетке исходное дифференциальное уравнение (2.54а) с точностью не ниже первого порядка аппроксимации по времени и пространству:

$$\frac{\partial(\rho \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w)}{\partial x} + O(\tau, h) = 0. \tag{2.267}$$

Аппроксимация разностным уравнением (2.262б) исходного уравнения (2.54б) анализируется способом, сходным с анализом аппроксимации разностным уравнением (2.262а) уравнения (2.54а).

Разностное уравнение движения (2.262в)

Первая разность:

$$\begin{aligned}
\left[(\rho \cdot F)^{(-s)} \cdot w^{(-s)} \right]_t &= \frac{\left[s_j^b \cdot \rho_i^{j+1} \cdot F_i^{j+1} + (1 - s_j^b) \cdot \rho_i^j \cdot F_i^j \right] \cdot \left[s_j^b \cdot w_i^{j+1} + (1 - s_j^b) \cdot w_i^j \right]}{\Delta t_j} - \\
&- \frac{\left[s_j^a \cdot \rho_i^j \cdot F_i^j + (1 - s_j^a) \cdot \rho_i^{j-1} \cdot F_i^{j-1} \right] \cdot \left[s_j^a \cdot w_i^j + (1 - s_j^a) \cdot w_i^{j-1} \right]}{\Delta t_j} = \\
&= \frac{\left[(\rho \cdot F)_i^j + s_j^b \cdot (\beta \cdot \tau)_j \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot F)}{\partial t} \right)_i^j + O(\tau^2) \right] \cdot \left[w_i^j + s_j^b \cdot (\beta \cdot \tau)_j \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_i^j + O(\tau^2) \right]}{\Delta t_j} - \\
&- \frac{\left[(\rho \cdot F)_i^j - (1 - s_j^a) \cdot \tau_j \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot F)}{\partial t} \right)_i^j + O(\tau^2) \right] \cdot \left[w_i^j - (1 - s_j^a) \cdot \tau_j \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_i^j + O(\tau^2) \right]}{\Delta t_j} = \\
&= \frac{\left[(\rho \cdot w \cdot F)_i^j + s_j^b \cdot (\beta \cdot \tau)_j \cdot w_i^j \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot F)}{\partial t} \right)_i^j \right] + \left[s_j^b \cdot (\beta \cdot \tau)_j \cdot (\rho \cdot F)_i^j \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_i^j + O(\tau^2) \right]}{\Delta t_j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left[(\rho \cdot w \cdot F)_i^j - (1 - s_j^a) \cdot \tau_j \cdot w_i^j \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot F)}{\partial t} \right)_i^j \right] - \left[(1 - s_j^a) \cdot \tau_j \cdot (\rho \cdot F)_i^j \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_i^j + O(\tau^2) \right]}{\Delta t_j} = \\
& = \left(\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot F)}{\partial t} \right)_i^j + O(\tau) = \left(\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial t} \right)_i^j + O(h, \tau) = \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial t} + O(h, \tau).
\end{aligned} \tag{2.268}$$

Вторая разность. Используя (2.264д), запишем:

$$\begin{aligned}
& \left((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \cdot w_{(-R)} \right)_x^{(\sigma, \theta)} = \left((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \cdot w_{(-R)} \right)_x + O(\tau) = \\
& = \left(\frac{\left[r_i^b \cdot \rho_{i+1}^j \cdot f_{i+1}^j \cdot w_{i+1}^j + (1 - r_i^b) \cdot \rho_i^j \cdot f_i^j \cdot w_i^j \right] \cdot \left[r_i^b \cdot w_{i+1}^j + (1 - r_i^b) \cdot w_i^j \right]}{\Delta x_i} - \right. \\
& - \left. \frac{\left[r_i^a \cdot \rho_i^j \cdot f_i^j \cdot w_i^j + (1 - r_i^a) \cdot \rho_{i-1}^j \cdot f_{i-1}^j \cdot w_{i-1}^j \right] \cdot \left[r_i^a \cdot w_i^j + (1 - r_i^a) \cdot w_{i-1}^j \right]}{\Delta x_i} \right) + O(\tau) = \\
& = \frac{\left[(\rho \cdot w \cdot f)_i^j + r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} \right)_i^j + O(h^2) \right] \cdot \left[w_i^j + r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^j + O(h^2) \right]}{\Delta x_i} - \\
& - \frac{\left[(\rho \cdot w \cdot f)_i^j - (1 - r_i^a) \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} \right)_i^j + O(h^2) \right] \cdot \left[w_i^j - (1 - r_i^a) \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^j + O(h^2) \right]}{\Delta x_i} + \\
& + O(\tau) = \\
& = \frac{\left[(\rho \cdot w^2 \cdot f)_i^j + r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i \cdot w_i^j \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} \right)_i^j \right] + \left[r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i \cdot (\rho \cdot w \cdot f)_i^j \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^j + O(h^2) \right]}{\Delta x_i} - \\
& - \frac{\left[(\rho \cdot w^2 \cdot f)_i^j - (1 - r_i^a) \cdot h_i \cdot w_i^j \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} \right)_i^j \right] - \left[(1 - r_i^a) \cdot h_i \cdot (\rho \cdot w \cdot f)_i^j \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^j + O(h^2) \right]}{\Delta x_i} + \\
& + O(\tau) = \left(\frac{\partial(\rho \cdot w^2 \cdot f)}{\partial x} \right)_i^j + O(\tau, h) = \frac{\partial(\rho \cdot w^2 \cdot f)}{\partial x} + O(\tau, h).
\end{aligned} \tag{2.269}$$

Третья разность. Используя (2.264д), запишем:

$$\begin{aligned}
& (B^- \cdot \gamma^- \cdot p_{\bar{x}} + B^+ \cdot \gamma^+ \cdot p_x)^{(\sigma, \theta)} = B^- \cdot \gamma^- \cdot p_{\bar{x}} + B^+ \cdot \gamma^+ \cdot p_x + O(\tau) = \\
& = (B^-)_i^j \cdot (\gamma^-)_i^j \cdot \frac{p_i^j - p_{i-1}^j}{h_i} + (B^+)_i^j \cdot (\gamma^+)_i^j \cdot \frac{p_{i+1}^j - p_i^j}{h_{i+1}} + O(\tau) = \\
& = f_i^j \cdot (\gamma^-)_i^j \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_i^j + f_i^j \cdot (\gamma^+)_i^j \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_i^j + O(\tau, h) = f \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + O(\tau, h).
\end{aligned} \tag{2.270}$$

Четвертая разность (по аналогии с (2.270)):

$$g \cdot \left[\rho \cdot (B^- \cdot \gamma^- \cdot (z_1)_{\bar{x}} + B^+ \cdot \gamma^+ \cdot (z_1)_x) \right]^{(\sigma, \theta)} = f \cdot g \cdot \rho \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + O(\tau, h). \quad (2.271)$$

Пятая разность. Используя (2.264д) и (2.264з), запишем:

$$\frac{\pi}{4} \cdot (\lambda \cdot \rho \cdot |w| \cdot r)^{(\sigma, \theta)} \cdot w^{(\sigma, \theta)} = \frac{\pi}{4} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w| \cdot R + O(\tau, h). \quad (2.272)$$

Таким образом, параметрическое разностное уравнение (2.262в) аппроксимирует на неравномерной пространственно-временной сетке исходное дифференциальное уравнение (2.54в) с точностью не ниже первого порядка аппроксимации по времени и пространству:

$$\frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w^2)}{\partial x} = -f \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} + g \cdot \rho \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) - \frac{\pi}{4} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w| \cdot R + O(\tau, h). \quad (2.273)$$

Разностное уравнение энергии (2.262г)

Первая разность (по аналогии с (2.268)):

$$\left[(\rho \cdot F)^{(-s)} \cdot \varepsilon^{(-s)} \right]_{+}^t = \frac{\partial(\rho \cdot \varepsilon \cdot f)}{\partial t} + O(\tau, h). \quad (2.274)$$

Вторая разность (по аналогии с (2.269)):

$$\left((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \cdot \varepsilon_{(-R)} \right)_{+}^x = \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot \varepsilon \cdot f)}{\partial x} + O(\tau, h). \quad (2.275)$$

Третья и четвертая разности изменяются в зависимости от конкретного задания параметров в системе уравнений (2.262). Так, например, для неявной трехслойной разностной схемы **операторы** K_t и K_x будут иметь следующий дивергентный вид:

$$K_t \left(\rho \cdot F \cdot \frac{w^2}{2} \right) = \frac{(\rho_i^{j+1} \cdot F_i^{j+1} + \rho_i^j \cdot F_i^j) \cdot w_i^{j+1} \cdot w_i^j - (\rho_i^j \cdot F_i^j + \rho_i^{j-1} \cdot F_i^{j-1}) \cdot w_i^j \cdot w_i^{j-1}}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j},$$

$$K_x \left(\rho \cdot w \cdot f \cdot \frac{w^2}{2} \right) = \frac{(\rho_{i+1}^{j+1} \cdot w_{i+1}^{j+1} \cdot f_{i+1}^{j+1} + \rho_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1}) \cdot w_{i+1}^{j+1} \cdot w_i^{j+1}}{2 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot h_i} -$$

$$- \frac{(\rho_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} + \rho_{i-1}^{j+1} \cdot w_{i-1}^{j+1} \cdot f_{i-1}^{j+1}) \cdot w_i^{j+1} \cdot w_{i-1}^{j+1}}{2 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot h_i}.$$

По аналогии с (2.268) и (2.269) соответственно можно показать, что данные разностные отношения аппроксимируют соответствующие им дифференциальные слагаемые с порядком $O(\tau, h)$ на неравномерной пространственно-временной сетке.

Пятая разность (по аналогии с (2.266)):

$$\left((\rho \cdot w \cdot f)_{(-R)} \right)_{+}^x = \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} + O(\tau, h). \quad (2.276)$$

Шестая разность оценивается с учетом (2.271) и (2.264д):

$$g \cdot \left[\rho \cdot \left(B^- \cdot \gamma^- \cdot (z_1)_{\bar{x}} + B^+ \cdot \gamma^+ \cdot (z_1)_x \right) \right]^{(\sigma, \theta)} \cdot w^{(\sigma, \theta)} = f \cdot w \cdot g \cdot \rho \cdot \frac{\partial(z_1)}{\partial x} + O(\tau, h). \quad (2.277)$$

Седьмая разность (по аналогии с (2.265), а также с учетом (2.264д)):

$$p^{(\sigma, \theta)} \cdot \left[F^{(-s)} \right]_t = p \cdot \frac{\partial F}{\partial t} + O(\tau) = p \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + O(\tau, h). \quad (2.278)$$

Восьмая разность (с учетом (2.264д)):

$$(Q \cdot F)^{(\sigma, \theta)} = (Q \cdot F)_i^j + O(\tau) = (Q \cdot f)_i^j + O(\tau, h) = Q \cdot f + O(\tau, h). \quad (2.279)$$

Девятая разность. Введем функцию:

$$u(x, t) = k(x, t) \cdot f(x, t). \quad (2.280)$$

Покажем, что в случае линейности функции $T(x, t)$ на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$ (при этом δT^a и δT^b заменяются соответственно на $T_{\bar{x}}$ и T_x) рассматриваемое разностное слагаемое обладает аппроксимацией лишь при определенном соотношении весовых параметров r_i^a и r_i^b . С этой целью сделаем запись:

$$\begin{aligned} \left[(k \cdot f)_{(-R)} \cdot \delta T^a \right]_x^{(\sigma, \theta)} &= \left[u_{(-R)} \cdot \delta T^a \right]_x^{(\sigma, \theta)} + O(\tau) = \\ &= \frac{\left[r_i^b \cdot u_{i+1}^j + (1 - r_i^b) \cdot u_i^j \right] \cdot \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{(\alpha \cdot h)_i} - \left[r_i^a \cdot u_i^j + (1 - r_i^a) \cdot u_{i-1}^j \right] \cdot \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{h_i}}{\Delta x_i} + O(\tau) = \\ &= \frac{\left[u_i^j + r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j + O(h^2) \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^j + \frac{(\alpha \cdot h)_i}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^j + O(h^2) \right]}{r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i + (1 - r_i^a) \cdot h_i} - \\ &- \frac{\left[u_i^j - (1 - r_i^a) \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j + O(h^2) \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^j - \frac{h_i}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^j + O(h^2) \right]}{r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i + (1 - r_i^a) \cdot h_i} + O(\tau) = \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^j \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j + u_i^j \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^j + u_i^j \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^j \cdot \frac{h_i \cdot \left[0,5 \cdot (\alpha_i + 1) - (\alpha_i \cdot r_i^b + (1 - r_i^a)) \right]}{r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i + (1 - r_i^a) \cdot h_i} + O(\tau, h) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^j + u_i^j \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^j \cdot \frac{\left[\alpha_i \cdot (0,5 - r_i^b) - (0,5 - r_i^a) \right]}{r_i^b \cdot \alpha_i + (1 - r_i^a)} + O(\tau, h) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^j + k_i^j \cdot f_i^j \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^j \cdot \frac{\left[\alpha_i \cdot (0,5 - r_i^b) - (0,5 - r_i^a) \right]}{r_i^b \cdot \alpha_i + (1 - r_i^a)} + O(\tau, h). \end{aligned} \quad (2.281)$$

Согласно (2.281), для обеспечения аппроксимации рассматриваемого слагаемого требуется выполнение условия:

$$r_i^a = 0,5 - \alpha_i \cdot (0,5 - r_i^b). \quad (2.282)$$

Частным решением (2.282) является набор параметров

$$r_i^a = r_i^b = \frac{1}{2}, \quad (2.283)$$

определяющий аппроксимацию пространственных производных с помощью центральных разностей.

Покажем теперь, что при квадратичной аппроксимации функции $T(x, t)$ полученное ограничение снимается¹:

$$\begin{aligned} \left[(k \cdot f)_{(-R)} \cdot \delta T^a \right]_{x_+}^{(\sigma, \theta)} &= \left[u_{(-R)} \cdot \delta T^a \right]_{x_+} + O(\tau) = \frac{u_{(+R)} \cdot \delta T^b - u_{(-R)} \cdot \delta T^a}{\Delta x_i} + O(\tau) = \\ &= \frac{\left[r_i^b \cdot u_{i+1}^j + (1 - r_i^b) \cdot u_i^j \right] \cdot \left[r_i^b \cdot \delta T_{i+1}^j + (1 - r_i^b) \cdot \delta T_i^j \right]}{\Delta x_i} - \\ &- \frac{\left[r_i^a \cdot u_i^j + (1 - r_i^a) \cdot u_{i-1}^j \right] \cdot \left[r_i^a \cdot \delta T_i^j + (1 - r_i^a) \cdot \delta T_{i-1}^j \right]}{\Delta x_i} + O(\tau) = \\ &= \frac{1}{\Delta x_i} \cdot \left[\left(u_i^j + r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(h^2) \right) \cdot \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i + r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i + O(h^2) \right) - \right. \\ &- \left. \left(u_i^j - [1 - r_i^a] \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(h^2) \right) \cdot \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i - [1 - r_i^a] \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i + O(h^2) \right) \right] + O(\tau) = \\ &= \frac{\left(u_i^j \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i + u_i^j \cdot r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i \cdot r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(h^2) \right)}{r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i + (1 - r_i^a) \cdot h_i} - \\ &- \frac{\left(u_i^j \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i - u_i^j \cdot (1 - r_i^a) \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_i \cdot (1 - r_i^a) \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + O(h^2) \right)}{r_i^b \cdot (\alpha \cdot h)_i + (1 - r_i^a) \cdot h_i} + O(\tau) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right)_i + O(h, \tau) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + O(h, \tau). \end{aligned} \quad (2.284)$$

Десятая разность (с учетом (2.264д)):

$$\phi^{(\sigma, \theta)} = \phi_i^j + O(\tau) = \Phi_i^j + O(\tau, h) = \Phi + O(\tau, h). \quad (2.285)$$

Таким образом, если третья, четвертая и девятая разности подобраны так, что обеспечивают порядок аппроксимации не ниже первого по времени и по пространству, то разностное уравнение (2.262г) на неравномерной пространственно-временной сетке аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (2.54г) с точностью аппроксимации не ниже первого порядка по времени и пространству:

¹ В этом случае функция $\delta T(x, t = \text{const})$ может быть представлена в виде кусочно-линейной зависимости.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot f \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot f \cdot w \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] = - \frac{\partial}{\partial x} (p \cdot f \cdot w) - \rho \cdot f \cdot w \cdot g \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} - \\ - p \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + Q \cdot f + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \Phi(T, T_{oc}) + O(\tau, h). \end{aligned} \quad (2.286)$$

На основании проведенного выше анализа можно заключить, что класс параметрических разностных схем (2.262) аппроксимирует исходную систему уравнений (2.54) на неравномерной пространственно-временной сетке с порядком аппроксимации не ниже первого. При этом возможно повышение порядка аппроксимации на равномерной пространственно-временной сетке для конкретных схем, выделяемых из рассматриваемого класса схем (2.262) путем задания конкретных значений параметров. Так, например, выделяемая из класса неявная трехслойная разностная схема с центральными разностями аппроксимирует исходную систему уравнений (2.54) с порядком $O(h^2, \tau)$ на равномерной по пространству сетке.

Для численного анализа системы уравнений (2.225) разностные аналоги строятся интегро-интерполяционным методом [69, 70, 96]. Разностная схема при этом имеет вид (см. (3.27) в монографии [1])¹:

– **конечно-разностный аналог уравнения неразрывности для смеси газов**

$$\frac{\rho_L^{j+1} - \rho_L^{j-1}}{(1 + \beta_j) \cdot \tau_j} \cdot V - 0,5 \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\rho_M^{j+1} \cdot {}^{(n)}w_M^{j+1} \cdot {}^{(n)}f_M^{j+1} \cdot {}^{(n)}s = 0; \quad (2.287a)$$

– **конечно-разностный аналог уравнения неразрывности для компонент газовой смеси**

$$\begin{aligned} V \cdot \frac{(\rho_L^{j+1} + \rho_L^j) \cdot ((Y_m)_L^{j+1} + (Y_m)_L^j) - (\rho_L^j + \rho_L^{j-1}) \cdot ((Y_m)_L^j + (Y_m)_L^{j-1})}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j} - 0,25 \times \\ \times \sum_{n=1}^N {}^{(n)}f_L^{j+1} \cdot ({}^{(n)}\rho_M^{j+1} \cdot {}^{(n)}w_M^{j+1} + {}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}w_L^{j+1}) \cdot ((Y_m)_M^{j+1} + (Y_m)_L^{j+1}) \cdot {}^{(n)}s + \\ + 0,5 \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}f_L^{j+1} \cdot ({}^{(n)}\rho_M^{j+1} \cdot (D_m)_M^{j+1} + {}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot (D_m)_L^{j+1}) \cdot \frac{{}^{(n)}(Y_m)_L^{j+1} - {}^{(n)}(Y_m)_M^{j+1}}{2 \cdot {}^{(n)}\Delta X} = 0; \end{aligned} \quad (2.287b)$$

– **конечно-разностный аналог уравнения Кирхгофа**

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}\rho_L \cdot {}^{(n)}w_L \cdot {}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}s = 0 \quad (2.287b')$$

или, с учетом равенства всех ${}^{(n)}\rho_L$,

¹ При построении разностных уравнений здесь используются объемы ${}^{(n)}V$, $n = \overline{1, N}$, каждый из которых ограничен внутренней поверхностью n -ой трубы и поперечными сечениями в точках с координатами ${}^{(n)}x_L$ и $0,5 \cdot [{}^{(n)}x_L + {}^{(n)}x_M]$ (см. рис. 2.11). Вывод разностных уравнений аналогичен получению дифференциальных уравнений для течения газовой смеси в узле сочленения. Например, аналог уравнения неразрывности (2.221a) для используемого здесь объема $V = \bigcup_{n=0}^N {}^{(n)}V$ будет выглядеть так:

$$V \cdot \partial \bar{\rho} / \partial t - 0,5 \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}[(\rho \cdot w \cdot f)_L + (\rho \cdot w \cdot f)_M] \cdot {}^{(n)}s = 0.$$
Связывая $\bar{\rho}$ с узлом L и используя закон Кирхгофа (2.217a), получаем уравнение (2.287a).

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}w_L \cdot {}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}s = 0; \quad (2.287\text{В}'')$$

– **конечно-разностный аналог уравнения движения газовой смеси**

$$\begin{aligned} & {}^{(n)}V \cdot \frac{\left({}^{(n)}\rho_L^{j+1} + {}^{(n)}\rho_L^j\right) \cdot \left({}^{(n)}w_L^{j+1} + {}^{(n)}w_L^j\right) - \left({}^{(n)}\rho_L^j + {}^{(n)}\rho_L^{j-1}\right) \cdot \left({}^{(n)}w_L^j + {}^{(n)}w_L^{j-1}\right)}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j} + \\ & + {}^{(n)}s \cdot {}^{(n)}f_L^{j+1} \cdot \left({}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot \left({}^{(n)}w_L^{j+1}\right)^2 - 0,25 \cdot \left[{}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}w_L^{j+1} + {}^{(n)}\rho_M^{j+1} \cdot {}^{(n)}w_M^{j+1}\right] \cdot \left[{}^{(n)}w_L^{j+1} + {}^{(n)}w_M^{j+1}\right]\right) = \\ & = -\frac{{}^{(n)}f_L^{j+1}}{2} \cdot \left({}^{(n)}p_L^{j+1} - {}^{(n)}p_M^{j+1}\right) \cdot {}^{(n)}s - \frac{\sqrt{\pi \cdot {}^{(n)}f_L^{j+1}}}{4} \cdot {}^{(n)}\lambda_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}w_L^{j+1} \cdot \left|{}^{(n)}w_L^{j+1}\right| \cdot {}^{(n)}\Delta X - \\ & - 0,5 \cdot \left({}^{(n)}(z_1)_L^{j+1} - {}^{(n)}(z_1)_M^{j+1}\right) \cdot g \cdot {}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}f_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}s; \end{aligned} \quad (2.287\Gamma)$$

– **конечно-разностный аналог уравнения изменения внутренней энергии газовой смеси**

$$\begin{aligned} & V \cdot \frac{\left(\rho_L^{j+1} + \rho_L^j\right) \cdot \left(\varepsilon_L^{j+1} + \varepsilon_L^j\right) - \left(\rho_L^j + \rho_L^{j-1}\right) \cdot \left(\varepsilon_L^j + \varepsilon_L^{j-1}\right)}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j} - \\ & - 0,25 \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}f_L^{j+1} \cdot \left({}^{(n)}\rho_M^{j+1} \cdot {}^{(n)}w_M^{j+1} + {}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}w_L^{j+1}\right) \cdot \left({}^{(n)}\varepsilon_M^{j+1} + {}^{(n)}\varepsilon_L^{j+1}\right) \cdot {}^{(n)}s = \\ & = 0,5 \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}p_M^{j+1} \cdot {}^{(n)}f_L^{j+1} \cdot \left({}^{(n)}w_M^{j+1} - {}^{(n)}w_L^{j+1}\right) \cdot {}^{(n)}s + \\ & + \sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{\pi \cdot {}^{(n)}f_L^{j+1}}}{4} \cdot {}^{(n)}\lambda_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot \left|{}^{(n)}w_L^{j+1}\right|^3 \cdot {}^{(n)}\Delta X + Q_L^{j+1} \cdot V - \\ & - \sum_{n=1}^N \left[0,5 \cdot \left({}^{(n)}k_M^{j+1} + {}^{(n)}k_L^{j+1}\right) \cdot \frac{{}^{(n)}T_L^{j+1} - {}^{(n)}T_M^{j+1}}{2 \cdot {}^{(n)}\Delta X} \cdot {}^{(n)}f_L^{j+1} + {}^{(n)}\phi_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}\Delta X\right] - 0,25 \times \\ & \times \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N {}^{(n)}f_L^{j+1} \cdot \left({}^{(n)}\rho_M^{j+1} \cdot \left({}^{(n)}(D_m)_M^{j+1} + {}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot \left({}^{(n)}(D_m)_L^{j+1}\right)\right) \cdot \left({}^{(n)}(\varepsilon_m)_M^{j+1} + {}^{(n)}(\varepsilon_m)_L^{j+1}\right) \times \\ & \times \frac{{}^{(n)}(Y_m)_L^{j+1} - {}^{(n)}(Y_m)_M^{j+1}}{2 \cdot {}^{(n)}\Delta X}. \end{aligned} \quad (2.287\text{Д}')$$

Данная система дополняется разностными аналогами условий (2.225д), (2.225ж), (2.225з) и уравнений связи термодинамических параметров. Здесь необходимо напомнить, что используемая в (2.287) величина ${}^{(n)}\Delta X$ равна половине расстояния между сечениями ${}^{(n)}f_L$ и ${}^{(n)}f_M$ (см. рис. 2.11), а ${}^{(n)}V = {}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}\Delta X$.

Исследование аппроксимации разностными аналогами (2.287) исходной системы (2.225) показало, что разностная схема (2.287) аппроксимирует исходную систему уравнений (2.225) на неравномерной пространственно-временной сетке с порядком аппроксимации не ниже первого [1].

Как отмечалось выше, разностная схема консервативна, если она обеспечивает выполнение разностных аналогов основных законов сохранения. В нашем случае – это законы сохранения массы, импульса и полной энергии. Рассмотрим дифференциальное уравнение изменения внутренней энергии. Преобразованиями системы (2.54) можно показать, что для участков труб постоянного сечения, участвующих в сочленении, данное уравнение выглядит следующим образом (левый верхний индекс « n » здесь и ниже

опущен):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot \varepsilon \cdot w)}{\partial x} = & -p \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{4 \cdot R} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot |w|^3 + Q + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\Phi(T, T_{oc})}{f} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.288)$$

Если умножить (2.288) для каждой трубы на $^{(n)}\Theta$ и сложить все результирующие уравнения, получим общее уравнение изменения внутренней энергии (2.225г).

Аналогично можно получить общее уравнение неразрывности (2.225а). Для этого необходимо сложить уравнения неразрывности для каждой трубы, умноженные на $^{(n)}\Theta$. Уравнение неразрывности (2.54а) для трубы постоянного сечения будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial x} = 0. \quad (2.289)$$

Умножая уравнение движения (2.225в) на w , вычитая из получившегося выражения уравнение (2.289), умноженное на $(w^2/2)$, и преобразуя слагаемые по формулам:

$$w \cdot \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} - \frac{w^2}{2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \cdot \frac{w^2}{2} \right); \quad (2.290a)$$

$$w \cdot \frac{\partial(\rho \cdot w^2)}{\partial x} - \frac{w^2}{2} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot w \cdot \frac{w^2}{2} \right), \quad (2.290б)$$

получаем уравнение баланса кинетической энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \cdot \frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot w \cdot \frac{w^2}{2} \right) = -w \frac{\partial p}{\partial x} - g \cdot \rho \cdot w \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{1}{4 \cdot R} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot |w|^3. \quad (2.291)$$

Складывая (2.288) и (2.291), приходим к уравнению сохранения полной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot w \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] = \\ = - \frac{\partial(p \cdot w)}{\partial x} - g \cdot \rho \cdot w \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + Q + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\Phi(T, T_{oc})}{f}. \end{aligned} \quad (2.292)$$

Для доказательства консервативности приведенной выше разностной схемы необходимо показать, что, пользуясь непрерывными алгебраическими преобразованиями, из нее можно получить разностный аналог уравнения (2.292), не содержащий дисбалансных слагаемых. Запишем разностные аналоги уравнений неразрывности и баланса внутренней энергии (для неразветвленных трубопроводов) применительно к объему $^{(n)}V$. Эти уравнения можно получить интегро-интерполяционным методом, расписывая уравнения (2.231а) и (2.288) для разностной ячейки $\left[0, 5 \cdot \left(^{(n)}x_L + ^{(n)}x_M \right); ^{(n)}x_L \right]^1$:

¹ В качестве отступления отметим, что уравнение неразрывности (2.293) является также следствием уравнения (2.262а) для $s_i^a = s_i^b = r_i^a = r_i^b = 0,5$, $\sigma = 1$, $\theta = 0$, $f = \text{const}$. При этом достаточно сделать замены $L = i$, $M = i - 1$, а для произвольного параметра y (например, x , p , w и т.д.) положить $y_{i+1}^{j+1} = y_L^{j+1}$.

$$\frac{{}^{(n)}\rho_L^{j+1} - {}^{(n)}\rho_L^{j-1}}{{(1 + \beta_j)} \cdot \tau_j} + \frac{{}^{(n)}(\rho \cdot w)_L^{j+1} - 0,5 \cdot {}^{(n)}\left((\rho \cdot w)_L^{j+1} + (\rho \cdot w)_M^{j+1}\right)}{{}^{(n)}\Delta X \cdot {}^{(n)}s} = 0; \quad (2.293)$$

$$\begin{aligned} & \frac{{}^{(n)}(\rho_L^{j+1} + \rho_L^j) \cdot {}^{(n)}(\varepsilon_L^{j+1} + \varepsilon_L^j) - {}^{(n)}(\rho_L^j + \rho_L^{j-1}) \cdot {}^{(n)}(\varepsilon_L^j + \varepsilon_L^{j-1})}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j} + \\ & + \frac{{}^{(n)}(\rho \cdot \varepsilon \cdot w)_L^{j+1} - 0,25 \cdot {}^{(n)}\left((\rho \cdot w)_L^{j+1} + (\rho \cdot w)_M^{j+1}\right) \cdot {}^{(n)}(\varepsilon_L^{j+1} + \varepsilon_M^{j+1})}{{}^{(n)}\Delta X \cdot {}^{(n)}s} = \end{aligned} \quad (2.294)$$

$$\begin{aligned} & = {}^{(n)}A - {}^{(n)}P_M^{j+1} \cdot \frac{{}^{(n)}w_L^{j+1} - {}^{(n)}w_M^{j+1}}{2 \cdot {}^{(n)}\Delta X \cdot {}^{(n)}s} + \frac{1}{4 \cdot {}^{(n)}R_L^{j+1}} \cdot {}^{(n)}\lambda_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot \left| {}^{(n)}w_L^{j+1} \right|^3 + Q_L^{j+1} + \\ & + \frac{1}{{}^{(n)}\Delta X \cdot {}^{(n)}s} \cdot \left[{}^{(n)}k_L^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_L^{j+1} - 0,5 \cdot \left({}^{(n)}k_M^{j+1} + {}^{(n)}k_L^{j+1} \right) \cdot \frac{{}^{(n)}T_L^{j+1} - {}^{(n)}T_M^{j+1}}{2 \cdot {}^{(n)}\Delta X \cdot {}^{(n)}s} \right] - \frac{{}^{(n)}\phi_L^{j+1}}{{}^{(n)}f_L^{j+1}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} {}^{(n)}A = & \frac{{}^{(n)}s}{{}^{(n)}\Delta X} \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \left[{}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}(\varepsilon_m)^{j+1} \cdot {}^{(n)}(D_m)_L^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_L^{j+1} - \right. \\ & \left. - \frac{{}^{(n)}\rho_M^{j+1} \cdot {}^{(n)}(D_m)_M^{j+1} + {}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}(D_m)_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}(\varepsilon_m)_L^{j+1} + {}^{(n)}(\varepsilon_m)_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}(Y_m)_L^{j+1} - {}^{(n)}(Y_m)_M^{j+1}}{2 \cdot {}^{(n)}\Delta X} \right]. \end{aligned}$$

Далее нам потребуются следующие формулы, проверяемые прямой подстановкой:

сокращенная запись

$$\left[\rho^{(0,5)} \cdot w^{(0,5)} \right]_i \cdot \widehat{w} - \left[\rho^{(0,5)} \right]_i \cdot \frac{\widehat{w}^2}{2} = \left[\rho^{(0,5)} \cdot \frac{\widetilde{w} \cdot w}{2} \right]_i + (\widehat{w} - w) \cdot \rho^{(0,5)} \cdot \left[w^{(0,5)} \right]_i; \quad (2.295a)$$

развернутая запись

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho_L^{j+1} + \rho_L^j) \cdot (w_L^{j+1} + w_L^j) - (\rho_L^j + \rho_L^{j-1}) \cdot (w_L^j + w_L^{j-1})}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j} \cdot w_L^{j+1} - \frac{\rho_L^{j+1} - \rho_L^{j-1}}{(1 + \beta_j) \cdot \tau_j} \cdot \frac{(w_L^{j+1})^2}{2} = \\ & = \frac{(\rho_L^{j+1} + \rho_L^j) \cdot \frac{w_L^{j+1} \cdot w_L^j}{2} - (\rho_L^j + \rho_L^{j-1}) \cdot \frac{w_L^j \cdot w_L^{j-1}}{2}}{(1 + \beta_j) \cdot \tau_j} + (w_L^{j+1} - w_L^j) \cdot (\rho_L^j + \rho_L^{j-1}) \cdot \frac{w_L^{j+1} - w_L^{j-1}}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j}. \end{aligned} \quad (2.295b)$$

Умножим уравнение движения (2.287г) на $\left(\frac{{}^{(n)}w_L^{j+1}}{{}^{(n)}V} = \frac{{}^{(n)}w_L^{j+1}}{{}^{(n)}f \cdot {}^{(n)}\Delta X} \right)$ и вычтем из него

уравнение неразрывности (2.293), умноженное на $\left(\frac{{}^{(n)}(w_L^{j+1})^2}{2} \right)$. Проводя преобразования с учетом (2.295), приходим к уравнению изменения кинетической энергии в виде:

$$\frac{(\rho_L^{j+1} + \rho_L^j) \cdot \frac{w_L^{j+1} \cdot w_L^j}{2} - (\rho_L^j + \rho_L^{j-1}) \cdot \frac{w_L^j \cdot w_L^{j-1}}{2}}{(1 + \beta_j) \cdot \tau_j} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_L^{j+1} \cdot \frac{(w_L^{j+1})^3}{2} - 0,5 \cdot (\rho_L^{j+1} \cdot w_L^{j+1} + \rho_M^{j+1} \cdot w_M^{j+1}) \cdot \frac{w_L^{j+1} \cdot w_M^{j+1}}{2}}{\Delta X \cdot s} = \\
& = - \frac{p_L^{j+1} - p_M^{j+1}}{2 \cdot \Delta X \cdot s} \cdot w_L^{j+1} - \frac{1}{4 \cdot R_L^{j+1}} \cdot \lambda_L^{j+1} \cdot \rho_L^{j+1} \cdot |w_L^{j+1}|^3 - \\
& - \frac{\left({}^{(n)}(z_1)_L^{j+1} - {}^{(n)}(z_1)_M^{j+1} \right)}{2 \cdot \Delta X \cdot s} \cdot g \cdot \rho_L^{j+1} \cdot w_L^{j+1} - (w_L^{j+1} - w_L^j) \cdot (\rho_L^j + \rho_L^{j-1}) \cdot \frac{w_L^{j+1} - w_L^{j-1}}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j}.
\end{aligned} \tag{2.296}$$

Сложив (2.296) и (2.294), получим разностное уравнение сохранения полной энергии для объема ${}^{(n)}V$:

$$\begin{aligned}
& \frac{(\rho_L^{j+1} + \rho_L^j) \cdot (\varepsilon_L^{j+1} + \varepsilon_L^j) - (\rho_L^j + \rho_L^{j-1}) \cdot (\varepsilon_L^j + \varepsilon_L^{j-1})}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j} + \\
& + \frac{(\rho_L^{j+1} + \rho_L^j) \cdot \frac{w_L^{j+1} \cdot w_L^j}{2} - (\rho_L^j + \rho_L^{j-1}) \cdot \frac{w_L^j \cdot w_L^{j-1}}{2}}{(1 + \beta_j) \cdot \tau_j} + \\
& + \frac{(\rho \cdot \varepsilon \cdot w)_L^{j+1} - 0,25 \cdot ((\rho \cdot w)_L^{j+1} + (\rho \cdot w)_M^{j+1}) \cdot (\varepsilon_L^{j+1} + \varepsilon_M^{j+1})}{{}^{(n)}\Delta X \cdot {}^{(n)}s} + \\
& + \frac{\rho_L^{j+1} \cdot \frac{(w_L^{j+1})^3}{2} - 0,5 \cdot (\rho_L^{j+1} \cdot w_L^{j+1} + \rho_M^{j+1} \cdot w_M^{j+1}) \cdot \frac{w_L^{j+1} \cdot w_M^{j+1}}{2}}{\Delta X \cdot s} = \\
& = - \frac{p_L^{j+1} \cdot w_L^{j+1} - p_M^{j+1} \cdot w_M^{j+1}}{2 \cdot \Delta X \cdot s} - \frac{(z_1)_L^{j+1} - (z_1)_M^{j+1}}{2 \cdot \Delta X \cdot s} \cdot g \cdot \rho_L^{j+1} \cdot w_L^{j+1} + \\
& + \frac{1}{\Delta X \cdot s} \cdot \left[k_L^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_L^{j+1} - 0,5 \cdot (k_M^{j+1} + k_L^{j+1}) \cdot \frac{T_L^{j+1} - T_M^{j+1}}{2 \cdot \Delta X \cdot s} \right] + Q_L^{j+1} - \\
& - \frac{\phi_L^{j+1}}{f_L^{j+1}} - (w_L^{j+1} - w_L^j) \cdot (\rho_L^j + \rho_L^{j-1}) \cdot \frac{w_L^{j+1} - w_L^{j-1}}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j} + A.
\end{aligned} \tag{2.297}$$

Как видно из (2.297), рассматриваемая разностная схема является неконсервативной, т.к. не обеспечивает выполнение разностного аналога закона сохранения полной энергии (в уравнении (2.297) присутствует слагаемое чисто разностной природы – предпоследний член уравнения). Для того чтобы исследуемая разностная схема (2.287) была консервативной в совокупности со схемами, выделенными из класса (2.262) с учетом $r_i^a = 0,5$, можно в уравнение баланса внутренней энергии (2.287д') добавить искусственное дисбалансное слагаемое. В этом случае разностное уравнение (2.287д'), описывающее закон изменения внутренней энергии в объеме V , будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
& V \cdot \frac{(\rho_L^{j+1} + \rho_L^j) \cdot (\varepsilon_L^{j+1} + \varepsilon_L^j) - (\rho_L^j + \rho_L^{j-1}) \cdot (\varepsilon_L^j + \varepsilon_L^{j-1})}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j} - \\
& - 0,25 \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}f_L^{j+1} \cdot ({}^{(n)}\rho_M^{j+1} \cdot {}^{(n)}w_M^{j+1} + {}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}w_L^{j+1}) \cdot ({}^{(n)}\varepsilon_M^{j+1} + {}^{(n)}\varepsilon_L^{j+1}) \cdot {}^{(n)}s = \\
& = 0,5 \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}p_M^{j+1} \cdot {}^{(n)}f_L^{j+1} \cdot ({}^{(n)}w_M^{j+1} - {}^{(n)}w_L^{j+1}) \cdot {}^{(n)}s +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{\pi} \cdot {}^{(n)}f_L^{j+1}}{4} \cdot {}^{(n)}\lambda_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot \left| {}^{(n)}w_L^{j+1} \right|^3 \cdot {}^{(n)}\Delta X + Q_L^{j+1} \cdot V - \\
& - \sum_{n=1}^N \left[0,5 \cdot \left({}^{(n)}k_M^{j+1} + {}^{(n)}k_L^{j+1} \right) \cdot \frac{{}^{(n)}T_L^{j+1} - {}^{(n)}T_M^{j+1}}{2 \cdot {}^{(n)}\Delta X} \cdot {}^{(n)}f_L^{j+1} + {}^{(n)}\phi_L^{j+1} \cdot {}^{(n)}\Delta X \right] - \\
& - 0,25 \cdot \sum_{m=1}^{N_S} \sum_{n=1}^N {}^{(n)}f_L^{j+1} \cdot \left({}^{(n)}\rho_M^{j+1} \cdot (D_m)_M^{j+1} + {}^{(n)}\rho_L^{j+1} \cdot (D_m)_L^{j+1} \right) \cdot \left({}^{(n)}(\varepsilon_m)_M^{j+1} + {}^{(n)}(\varepsilon_m)_L^{j+1} \right) \times \\
& \times \frac{{}^{(n)}(Y_m)_L^{j+1} - {}^{(n)}(Y_m)_M^{j+1}}{2 \cdot {}^{(n)}\Delta X} + \sum_{n=1}^N \left[\left(w_L^{j+1} - w_L^j \right) \cdot \left(\rho_L^j + \rho_L^{j-1} \right) \cdot \frac{w_L^{j+1} - w_L^{j-1}}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j} \cdot f_L \cdot \Delta X \right] + \sum_{n=1}^N {}^{(n)}A.
\end{aligned} \tag{2.287д}$$

Таким образом, разностные схемы (2.262) и (2.287) позволяют проводить численный анализ неустановившегося неизотермического течения сжимаемой вязкой теплопроводной многокомпонентной газовой смеси по системе разветвленных в пространстве длинных трубопроводов (см. (2.231)).

Как известно [69], разностная схема обладает свойством сходимости, если она аппроксимирует исходную задачу и является устойчивой. Причем порядок точности (скорость сходимости) схемы определяется ее порядком аппроксимации. В общем случае, исследовать устойчивость разностных уравнений газовой динамики не удастся ввиду нелинейности уравнений [97]. На практике данное обстоятельство вынуждает ограничиться рассмотрением линейного приближения газовой динамики, т.е. акустики [97]. В этом случае модель течения газа в переменных Эйлера (без учета вязкости) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho_0 \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0; \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \vec{\nabla} p = 0; \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} p + \rho_0 \cdot c_0^2 \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0, \end{cases} \tag{2.298}$$

где $\vec{v}$, p , ρ – малые возмущения скорости, давления и плотности в акустической волне; c_0 – адиабатическая скорость звука в невозмущенном газе (как известно, для адиабатического течения идеального газа скорость звука определяется по формуле $c_0 = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T}$); $\vec{v}_0$, ρ_0 – параметры однородного невозмущенного газа. Уравнения (2.298) получены линеаризацией трехмерных дифференциальных уравнений газовой динамики и описывают процесс распространения малых возмущений при использовании непрерывной модели среды.

Исходя из (2.298), можно построить следующую модель, описывающую процесс распространения малых возмущений через сочленение многониточного трубопровода:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left(w_0 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \Theta \right) + \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left(\rho_0 \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \Theta \right) = 0; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + {}^{(n)} \left(w_0 \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho_0} \cdot {}^{(n)} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0, \quad n = \overline{1, N}; \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left(w_0 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \Theta \right) + \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left(\rho_0 \cdot c_0^2 \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \Theta \right) = 0. \end{cases} \tag{2.299}$$

Введем обозначения:

$$q = c_0^2 \cdot \rho - p; \quad a_1 = w_0; \quad \bar{\mathbf{a}}_1 = \bar{\mathbf{v}}_0. \quad (2.300)$$

Умножая первые уравнения систем (2.298) и (2.299) на c_0^2 и вычитая из них последние уравнения соответствующих им систем, получаем уравнения:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \bar{\nabla} q = 0; \quad (2.301a)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{n=1}^N \binom{(n)}{a_1 \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \Theta} = 0. \quad (2.301б)$$

Учитывая $(\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{a}}_1) = 0$, (2.301a) можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (q \cdot \bar{\mathbf{a}}_1) = 0. \quad (2.301в)$$

Интегрируя (2.301в) по объему V , можно получить следующее разностное уравнение, аппроксимирующее (2.301б)¹:

$$\frac{q_L^{j+1} - q_L^{j-1}}{2 \cdot \tau} - \sum_{n=1}^N \binom{(n)}{a_1 \cdot \frac{q_L^{j+1} + q_M^{j+1}}{2 \cdot \Delta X} \cdot s \cdot \Theta} = 0. \quad (2.302)$$

Оценку устойчивости (2.302) проведем по принципу максимума [97]. Перепишем уравнение (2.302) в виде:

$$q_L^{j+1} - \sum_{n=1}^N \binom{(n)}{(q_L^{j+1} + q_M^{j+1}) \cdot \frac{a_1 \cdot \tau}{\Delta X} \cdot s \cdot \Theta} = q_L^{j-1}. \quad (2.303)$$

Приведем (2.303) к «нормальной» форме, применяя неравенство треугольника для норм сеточных функций (для сеточной функции y будем использовать норму вида

$$\|y\|_C^j = \max_i |y_i^j| \quad [97]):$$

$$\|q\|_C^{j+1} = \left[1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^N \binom{(n)}{\left| \frac{a_1 \cdot \tau}{\Delta X} \cdot s \cdot \Theta \right|} \right]^{-1} \cdot \|q\|_C^{j-1}. \quad (2.304)$$

Согласно принципу максимума, из (2.304) следует безусловная устойчивость разностного уравнения (2.302) по начальным данным, так как $0 < \left[1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^N \binom{(n)}{\left| \frac{a_1 \cdot \tau}{\Delta X} \cdot s \cdot \Theta \right|} \right]^{-1} \leq 1$.

Перейдем к рассмотрению двух последних уравнений систем (2.298) и (2.299). Третье уравнение (2.299) можно получить простым суммированием соответствующих уравнений для объемов $^{(n)}V$, $n = \overline{1, N}$:

$$\binom{(n)}{\frac{\partial p}{\partial t}} + \binom{(n)}{w_0 \cdot \frac{\partial p}{\partial x}} + \binom{(n)}{\rho_0 \cdot c_0^2 \cdot \frac{\partial w}{\partial x}} = 0, \quad (2.305)$$

умноженных на $^{(n)}\Theta$. Систему уравнений, состоящую из уравнения (2.305) и второго уравнения системы (2.299), преобразуем к виду (верхние левые индексы « n » здесь и далее условно опущены):

¹ С целью упрощения изложения материала временная сетка считается равномерной.

$$\frac{\partial(p + \rho_0 \cdot c_0 \cdot w)}{\partial t} + (w_0 + c_0) \cdot \frac{\partial(p + \rho_0 \cdot c_0 \cdot w)}{\partial x} = 0; \quad (2.306a)$$

$$\frac{\partial(p - \rho_0 \cdot c_0 \cdot w)}{\partial t} + (w_0 - c_0) \cdot \frac{\partial(p - \rho_0 \cdot c_0 \cdot w)}{\partial x} = 0. \quad (2.306б)$$

Введем обозначения:

$$r^+ = c_0 \cdot \rho_0 \cdot w + p; \quad a_2 = w_0 + c_0; \quad r^- = -c_0 \cdot \rho_0 \cdot w + p; \quad a_3 = w_0 - c_0. \quad (2.307)$$

С учетом (2.307) система (2.306) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial r^+}{\partial t} + a_2 \cdot \frac{\partial r^+}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial r^-}{\partial t} + a_3 \cdot \frac{\partial r^-}{\partial x} = 0. \quad (2.308)$$

Теперь получим разностную схему, соответствующую (2.308):

$$\frac{(r^+)_L^{j+1} - (r^+)_L^{j-1}}{2 \cdot \tau} + a_2 \cdot \frac{(r^+)_L^{j+1} - (r^+)_M^{j+1}}{2 \cdot \Delta X \cdot s} = 0; \quad \frac{(r^-)_L^{j+1} - (r^-)_L^{j-1}}{2 \cdot \tau} + a_3 \cdot \frac{(r^-)_L^{j+1} - (r^-)_M^{j+1}}{2 \cdot \Delta X \cdot s} = 0. \quad (2.309)$$

Оценку устойчивости уравнений (2.309) проведем по принципу максимума [70]. Перепишем уравнения (2.309) в виде:

$$(r^+)_L^{j+1} + \frac{a_2 \cdot \tau}{\Delta X \cdot s} \cdot [(r^+)_L^{j+1} - (r^+)_M^{j+1}] = (r^+)_L^{j-1}; \quad (r^-)_L^{j+1} + \frac{a_3 \cdot \tau}{\Delta X \cdot s} \cdot [(r^-)_L^{j+1} - (r^-)_M^{j+1}] = (r^-)_L^{j-1}. \quad (2.310)$$

Учитывая $|s| = 1$, приведем уравнения (2.310) к «нормальной» форме, применяя неравенство треугольника для норм сеточных функций (см. выше):

$$\|r^+\|_C^{j+1} \cdot \left(1 + 2 \cdot \left|\frac{a_2 \cdot \tau}{\Delta X}\right|\right) = \|r^+\|_C^{j-1}; \quad \|r^-\|_C^{j+1} \cdot \left(1 + 2 \cdot \left|\frac{a_3 \cdot \tau}{\Delta X}\right|\right) = \|r^-\|_C^{j-1}. \quad (2.311)$$

Согласно принципу максимума, из (2.311) следует безусловная устойчивость системы

разностных уравнений (2.309) по начальным данным, так как $0 < \left[1 + 2 \cdot \left|\frac{a_2 \cdot \tau}{\Delta X}\right|\right]^{-1} \leq 1$ и

$$0 < \left[1 + 2 \cdot \left|\frac{a_3 \cdot \tau}{\Delta X}\right|\right]^{-1} \leq 1.$$

Таким образом, показана безусловная устойчивость по начальным данным разностной схемы (2.302), (2.309). Эта схема аппроксимирует систему уравнений, из которой эквивалентными преобразованиями можно построить систему (2.299). Так же можно получить из уравнений (2.302) и (2.309) разностную схему, аппроксимирующую систему (2.299). Данная схема тоже будет обладать свойством безусловной устойчивости, что в свою очередь не исключает безусловную устойчивость разностной схемы (2.287).

По аналогии с построением параметрического класса схем (2.262) в работе [2] был разработан другой класс схем (см. (2.3) в монографии [2]):

$$\left[(\rho \cdot F)^{(-s)}\right]_t^+ + \left(\rho_{(-R)} \cdot w_{(0,5)} \cdot f_{(0,5)}\right)_x^{(\sigma, \theta)} = 0; \quad (2.312a)$$

$$\begin{aligned} & \left[(\rho \cdot F)^{(-S)} \cdot (Y_m)^{(-S)} \right]_t + \left(\rho_{(-R)} \cdot w_{(0,5)} \cdot f_{(0,5)} \cdot (Y_m)_{(-R)} \right)_x^{(\sigma, \theta)} - \\ & - \left[(\rho \cdot f \cdot D_m)_{(-R)} \cdot \delta(Y_m)^a \right]_x^{(\sigma, \theta)} = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad Y_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} Y_m; \end{aligned} \quad (2.312б)$$

$$\begin{aligned} & \left[(\rho \cdot F)^{(-S)} \cdot w^{(-S)} \right]_t + \left(\rho_{(-R)} \cdot w_{(0,5)} \cdot f_{(0,5)} \cdot w_{(-R)} \right)_x^{(\sigma, \theta)} = - \left(B^- \cdot \gamma^- \cdot p_{\bar{x}} + B^+ \cdot \gamma^+ \cdot p_x \right)^{(\sigma, \theta)} - \\ & - g \cdot \left[\rho \cdot (B^- \cdot \gamma^- \cdot (z_1)_{\bar{x}} + B^+ \cdot \gamma^+ \cdot (z_1)_x) \right]^{(\sigma, \theta)} - \frac{\pi}{4} \cdot (\lambda \cdot \rho \cdot |w| \cdot r)^{(\sigma, \theta)} \cdot w^{(\sigma, \theta)}; \end{aligned} \quad (2.312в)$$

$$\begin{aligned} & \left[(\rho \cdot F)^{(-S)} \cdot \varepsilon^{(-S)} \right]_t + \left(\rho_{(-R)} \cdot w_{(0,5)} \cdot f_{(0,5)} \cdot \varepsilon_{(-R)} \right)_x^{(\sigma, \theta)} + K_t \left(\rho \cdot F \cdot \frac{w^2}{2} \right) + K_x \left(\rho \cdot w \cdot f \cdot \frac{w^2}{2} \right)^{(\sigma, \theta)} = \\ & = - \left(p_{(-R)} \cdot w_{(0,5)} \cdot f_{(0,5)} \right)_x^{(\sigma, \theta)} - g \cdot \left[\rho \cdot (B^- \cdot \gamma^- \cdot (z_1)_{\bar{x}} + B^+ \cdot \gamma^+ \cdot (z_1)_x) \right]^{(\sigma, \theta)} \cdot w^{(\sigma, \theta)} - \\ & - p^{(\sigma, \theta)} \cdot \left[F^{(-S)} \right]_t + (Q \cdot F)^{(\sigma, \theta)} + \left[(k \cdot f)_{(-R)} \cdot \delta T^a \right]_x^{(\sigma, \theta)} - \phi^{(\sigma, \theta)} + \\ & + \sum_{m=1}^{N_S} \left[(\rho \cdot D_m \cdot f)_{(-R)} \cdot (\varepsilon_m)_{(-R)} \cdot \delta(Y_m)^a \right]_x^{(\sigma, \theta)}; \end{aligned} \quad (2.312г)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(\{S_{\text{месяц}}\}), \quad m = \overline{1, N_S}; \quad T_1 = T_2 = \dots = T_{N_S}; \quad (2.312д)$$

$$p = p(\{S_{\text{месяц}}\}); \quad \varepsilon = \varepsilon(\{S_{\text{месяц}}\}); \quad (2.312е)$$

$$k = k(\{S_{\text{месяц}}\}); \quad (2.312ж)$$

$$D_m = D_m(\{S_{\text{месяц}}\}), \quad m = \overline{1, N_S}. \quad (2.312з)$$

Практика эксплуатации описанных в монографии классов разностных схем (2.262) и (2.312) при решении производственных задач показала, что предпочтение следует отдавать применению класса схем (2.312).

В заключение Раздела приведем еще одну разностную схему. Данная разностная схема строится на основе недивергентной формы записи дифференциальных уравнений в частных производных, являющейся следствием (2.54):

$$\frac{\partial(\rho \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} = 0; \quad (2.313а)$$

$$\begin{aligned} & \rho \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial t} + \rho \cdot w \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot f \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) = 0; \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \\ & Y_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} Y_m; \end{aligned} \quad (2.313б)$$

$$\rho \cdot f \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \cdot w \cdot f \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = -f \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} + g \cdot \rho \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) - \frac{\pi}{4} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w| \cdot R; \quad (2.313в)$$

$$\rho \cdot f \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \cdot w \cdot f \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -p \cdot \frac{\partial(w \cdot f)}{\partial x} - p \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + Q \cdot f + \frac{\pi}{4} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot |w|^3 \cdot R +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \Phi(T_{oc}, T) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot f \cdot \sum_{m=1}^{N_S} \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right); \quad (2.313r)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(\{S_{смеси}\}), \quad m = \overline{1, N_S}; \quad \varepsilon = \varepsilon(\{S_{смеси}\}); \quad T_1 = T_2 = \dots = T_{N_S}; \quad (2.313д)$$

$$p = p(\{S_{смеси}\}); \quad k = k(\{S_{смеси}\}); \quad D_m = D_m(\{S_{смеси}\}), \quad m = \overline{1, N_S}. \quad (2.313е)$$

Описываемая разностная схема и ее безындексная запись выглядят следующим образом:

$$\frac{\rho_i^{j+1} \cdot F_i^{j+1} - \rho_i^{j-1} \cdot F_i^{j-1}}{(1 + \beta_j) \cdot \tau_j} + \frac{\rho_{i+1}^{j+1} \cdot w_{i+1}^{j+1} \cdot f_{i+1}^{j+1} - \rho_{i-1}^{j+1} \cdot w_{i-1}^{j+1} \cdot f_{i-1}^{j+1}}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} = 0; \quad (2.314a)$$

$$\frac{(\rho_i^{j+1} \cdot F_i^{j+1} + \rho_i^j \cdot F_i^j) \cdot ((Y_m)_i^{j+1} - (Y_m)_i^j) + (\rho_i^j \cdot F_i^j + \rho_i^{j-1} \cdot F_i^{j-1}) \cdot ((Y_m)_i^j - (Y_m)_i^{j-1})}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j} +$$

$$+ \left[\frac{(\rho_{i+1}^{j+1} \cdot w_{i+1}^{j+1} \cdot f_{i+1}^{j+1} + \rho_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1}) \cdot ((Y_m)_{i+1}^{j+1} - (Y_m)_i^{j+1})}{2 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot h_i} + \right.$$

$$+ \left. \frac{(\rho_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} + \rho_{i-1}^{j+1} \cdot w_{i-1}^{j+1} \cdot f_{i-1}^{j+1}) \cdot ((Y_m)_i^{j+1} - (Y_m)_{i-1}^{j+1})}{2 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot h_i} \right] -$$

$$- \left[\frac{(\rho_{i+1}^{j+1} \cdot f_{i+1}^{j+1} \cdot (D_m)_{i+1}^{j+1} + \rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot (D_m)_i^{j+1}) \cdot ((Y_m)_{i+1}^{j+1} - (Y_m)_i^{j+1})}{(1 + \alpha_i) \cdot \alpha_i \cdot h_i^2} - \right.$$

$$- \left. \frac{(\rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot (D_m)_i^{j+1} + \rho_{i-1}^{j+1} \cdot f_{i-1}^{j+1} \cdot (D_m)_{i-1}^{j+1}) \cdot ((Y_m)_i^{j+1} - (Y_m)_{i-1}^{j+1})}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i^2} \right],$$

$$m = \overline{1, N_S - 1}, \quad (Y_{N_S})_i^{j+1} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} (Y_m)_i^{j+1}; \quad (2.314б)$$

$$\frac{(\rho_i^{j+1} \cdot F_i^{j+1} + \rho_i^j \cdot F_i^j) \cdot (w_i^{j+1} - w_i^j) + (\rho_i^j \cdot F_i^j + \rho_i^{j-1} \cdot F_i^{j-1}) \cdot (w_i^j - w_i^{j-1})}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j} +$$

$$+ \left[\frac{(\rho_{i+1}^{j+1} \cdot w_{i+1}^{j+1} \cdot f_{i+1}^{j+1} + \rho_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1}) \cdot (w_{i+1}^{j+1} - w_i^{j+1})}{2 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot h_i} + \right.$$

$$+ \left. \frac{(\rho_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} + \rho_{i-1}^{j+1} \cdot w_{i-1}^{j+1} \cdot f_{i-1}^{j+1}) \cdot (w_i^{j+1} - w_{i-1}^{j+1})}{2 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot h_i} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(B^-)_i^{j+1} \cdot [p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}] + (B^+)_i^{j+1} \cdot [p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}]}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} - \frac{\pi}{4} \cdot \lambda_i^{j+1} \cdot \rho_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot |w_i^{j+1}| \cdot r_i^{j+1} - \\
&- g \cdot \rho_i^{j+1} \cdot \frac{(B^-)_i^{j+1} \cdot [(z_1)_i^{j+1} - (z_1)_{i-1}^{j+1}] + (B^+)_i^{j+1} \cdot [(z_1)_{i+1}^{j+1} - (z_1)_i^{j+1}]}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i}; \quad (2.314\text{в})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(\rho_i^{j+1} \cdot F_i^{j+1} + \rho_i^j \cdot F_i^j) \cdot (\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j) + (\rho_i^j \cdot F_i^j + \rho_i^{j-1} \cdot F_i^{j-1}) \cdot (\varepsilon_i^j - \varepsilon_i^{j-1})}{2 \cdot (1 + \beta_j) \cdot \tau_j} + \\
&+ \left[\frac{(\rho_{i+1}^{j+1} \cdot w_{i+1}^{j+1} \cdot f_{i+1}^{j+1} + \rho_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1}) \cdot (\varepsilon_{i+1}^{j+1} - \varepsilon_i^{j+1})}{2 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot h_i} + \right. \\
&+ \left. \frac{(\rho_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} + \rho_{i-1}^{j+1} \cdot w_{i-1}^{j+1} \cdot f_{i-1}^{j+1}) \cdot (\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_{i-1}^{j+1})}{2 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot h_i} \right] = \\
&= - \left[\frac{p_{i+1}^{j+1} \cdot w_{i+1}^{j+1} \cdot f_{i+1}^{j+1} - p_{i-1}^{j+1} \cdot w_{i-1}^{j+1} \cdot f_{i-1}^{j+1}}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} - \right. \\
&- w_i^{j+1} \cdot \frac{(B^-)_i^{j+1} \cdot [p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}] + (B^+)_i^{j+1} \cdot [p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}]}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} \left. \right] - p_i^j \cdot \frac{F_i^{j+1} - F_i^{j-1}}{(1 + \beta_j) \cdot \tau_j} + \\
&+ \frac{\pi}{4} \cdot \lambda_i^{j+1} \cdot \rho_i^{j+1} \cdot |w_i^{j+1}|^3 \cdot r_i^{j+1} + Q_i^{j+1} \cdot F_i^{j+1} - \phi_i^j + \\
&+ \left[\frac{(k_{i+1}^{j+1} \cdot f_{i+1}^{j+1} + k_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1}) \cdot (T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}) - \alpha_i \cdot (k_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} + k_{i-1}^{j+1} \cdot f_{i-1}^{j+1}) \cdot (T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1})}{(1 + \alpha_i) \cdot \alpha_i \cdot h_i^2} \right] + \\
&+ \left[\frac{\sum_{m=1}^{N_S} [\rho_{i+1}^{j+1} \cdot f_{i+1}^{j+1} \cdot (\varepsilon_m)_{i+1}^{j+1} \cdot (D_m)_{i+1}^{j+1} + \rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot (\varepsilon_m)_i^{j+1} \cdot (D_m)_i^{j+1}] \cdot ((Y_m)_{i+1}^{j+1} - (Y_m)_i^{j+1})}{(1 + \alpha_i) \cdot \alpha_i \cdot h_i^2} - \right. \\
&- \left. \frac{\sum_{m=1}^{N_S} [\rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot (\varepsilon_m)_i^{j+1} \cdot (D_m)_i^{j+1} + \rho_{i-1}^{j+1} \cdot f_{i-1}^{j+1} \cdot (\varepsilon_m)_{i-1}^{j+1} \cdot (D_m)_{i-1}^{j+1}] \cdot ((Y_m)_i^{j+1} - (Y_m)_{i-1}^{j+1})}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i^2} \right]; \quad (2.314\text{г})
\end{aligned}$$

$$(\varepsilon_m)_i^{j+1} = \varepsilon_m \left(\{S_{\text{месяц}}\}_i^{j+1} \right), \quad m = \overline{1, N_S}; \quad (T_1)_i^{j+1} = (T_2)_i^{j+1} = \dots = (T_{N_S})_i^{j+1} = T_i^{j+1}; \quad (2.314\text{д})$$

$$p_i^{j+1} = p \left(\{S_{\text{месяц}}\}_i^{j+1} \right); \quad (2.314\text{е})$$

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon \left(\{S_{\text{месяц}}\}_i^{j+1} \right); \quad (2.314\text{ж})$$

$$k_i^{j+1} = k \left(\{S_{\text{месяц}}\}_i^{j+1} \right); \quad (2.314\text{з})$$

$$(D_m)_i^{j+1} = D_m \left(\{S_{смеси}\}_i^{j+1} \right), \quad m = \overline{1, N_S}; \quad (2.314и)$$

$$F_i^{j+1} = \frac{f_{i-1}^{j+1} + 4 \cdot \sqrt{f_{i-1}^{j+1} \cdot f_i^{j+1}} + 7 \cdot f_i^{j+1} \cdot (1 + \alpha_i) + 4 \cdot \alpha_i \cdot \sqrt{f_{i+1}^{j+1} \cdot f_i^{j+1}} + \alpha_i \cdot f_{i+1}^{j+1}}{12 \cdot (1 + \alpha_i)}; \quad (2.314к)$$

$$(B^-)_i^{j+1} = \frac{1}{12} \cdot \left(f_{i-1}^{j+1} + 4 \cdot \sqrt{f_{i-1}^{j+1} \cdot f_i^{j+1}} + 7 \cdot f_i^{j+1} \right); \quad (2.314л)$$

$$(B^+)_i^{j+1} = \frac{1}{12} \cdot \left(f_{i+1}^{j+1} + 4 \cdot \sqrt{f_{i+1}^{j+1} \cdot f_i^{j+1}} + 7 \cdot f_i^{j+1} \right); \quad (2.314м)$$

$$r_i^{j+1} = \frac{\sqrt{f_{i-1}^{j+1}} + 3 \cdot \sqrt{f_i^{j+1}} \cdot (1 + \alpha_i) + \sqrt{f_{i+1}^{j+1}} \cdot \alpha_i}{4 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot \sqrt{\pi}}. \quad (2.314н)$$

Безындексная запись:

$$\left[(\rho \cdot F)^{(0,5)} \right]_{\bar{i}} + \left[(\hat{\rho} \cdot \hat{w} \cdot \hat{f})_{(0,5)} \right]_{\bar{x}} = 0; \quad (2.315а)$$

$$\left[(\hat{\rho} \cdot \hat{F})^{(0,5)} \cdot (Y_m)_{\bar{i}} \right]^{(0,5)} + \left[(\hat{\rho} \cdot \hat{w} \cdot \hat{f})_{(0,5)} (+1) \cdot (\hat{Y}_m)_{\bar{x}} \right]_{(0,5)} - \left[(\hat{\rho} \cdot \hat{f} \cdot \hat{D}_m)_{(0,5)} \cdot (\hat{Y}_m)_{\bar{x}} \right]_{\bar{x}} = 0;$$

$$m = \overline{1, N_S - 1}, \quad \hat{Y}_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} \hat{Y}_m; \quad (2.315б)$$

$$\left[(\hat{\rho} \cdot \hat{F})^{(0,5)} \cdot \hat{w}_{\bar{i}} \right]^{(0,5)} + \left[(\hat{\rho} \cdot \hat{w} \cdot \hat{f})_{(0,5)} (+1) \cdot \hat{w}_{\bar{x}} \right]_{(0,5)} = -(\hat{\gamma}^- \cdot \hat{B}^- \cdot \hat{p}_{\bar{x}} + \hat{\gamma}^+ \cdot \hat{B}^+ \cdot \hat{p}_x) - \\ - g \cdot \hat{\rho} \cdot [\hat{\gamma}^- \cdot \hat{B}^- \cdot (\hat{z}_1)_{\bar{x}} + \hat{\gamma}^+ \cdot \hat{B}^+ \cdot (\hat{z}_1)_x] - \frac{\pi}{4} \cdot \hat{\lambda} \cdot \hat{\rho} \cdot \hat{w} \cdot |\hat{w}| \cdot \hat{r}; \quad (2.315в)$$

$$\left[(\hat{\rho} \cdot \hat{F})^{(0,5)} \cdot \hat{\varepsilon}_{\bar{i}} \right]^{(0,5)} + \left[(\hat{\rho} \cdot \hat{w} \cdot \hat{f})_{(0,5)} (+1) \cdot \hat{\varepsilon}_{\bar{x}} \right]_{(0,5)} = \\ = - \left(\left[(\hat{w} \cdot \hat{p} \cdot \hat{f})_{(0,5)} \right]_{\bar{x}} - \hat{w} \cdot (\hat{\gamma}^- \cdot \hat{B}^- \cdot \hat{p}_{\bar{x}} + \hat{\gamma}^+ \cdot \hat{B}^+ \cdot \hat{p}_x) \right) - \hat{p} \cdot [F^{(0,5)}]_{\bar{i}} + \\ + \frac{\pi}{4} \cdot \hat{\lambda} \cdot \hat{\rho} \cdot |\hat{w}|^3 \cdot \hat{r} + \hat{Q} \cdot \hat{F} + \left[(\hat{k} \cdot \hat{f})_{(0,5)} \cdot \hat{T}_{\bar{x}} \right]_{\bar{x}} - \hat{\phi} + \sum_{m=1}^{N_S} \left[(\hat{\rho} \cdot \hat{f} \cdot \hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{D}_m)_{(0,5)} \cdot (\hat{Y}_m)_{\bar{x}} \right]_{\bar{x}}; \quad (2.315г)$$

$$\hat{F} = \frac{\hat{f}(-1) + 4 \cdot \sqrt{\hat{f}(-1) \cdot \hat{f}} + 7 \cdot \hat{f} \cdot (1 + \alpha) + 4 \cdot \alpha \cdot \sqrt{\hat{f}(+1) \cdot \hat{f}} + \alpha \cdot \hat{f}(+1)}{12 \cdot (1 + \alpha)}; \quad (2.315д)$$

$$\hat{\varepsilon}_m = \varepsilon_m \left(\{ \hat{S}_{смеси} \} \right), \quad m = \overline{1, N_S}; \quad \hat{T}_1 = \hat{T}_2 = \dots = \hat{T}_{N_S} = \hat{T}; \quad (2.315е)$$

$$\hat{p} = p \left(\{ \hat{S}_{смеси} \} \right); \quad (2.315ж)$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon \left(\{ \hat{S}_{смеси} \} \right); \quad (2.315з)$$

$$\hat{k} = k \left(\{ \hat{S}_{смеси} \} \right); \quad (2.315и)$$

$$(\hat{D}_m) = D_m \left(\{ \hat{S}_{смеси} \} \right), \quad m = \overline{1, N_S}; \quad (2.315к)$$

$$\hat{B}^- = \frac{1}{12} \cdot \left(\hat{f}(-1) + 4 \cdot \sqrt{\hat{f}(-1) \cdot \hat{f}} + 7 \cdot \hat{f} \right); \quad (2.315\text{л})$$

$$\hat{B}^+ = \frac{1}{12} \cdot \left(\hat{f}(+1) + 4 \cdot \sqrt{\hat{f}(+1) \cdot \hat{f}} + 7 \cdot \hat{f} \right); \quad (2.315\text{м})$$

$$\hat{r} = \frac{\sqrt{\hat{f}(-1)} + 3 \cdot \sqrt{\hat{f}} \cdot (1 + \alpha) + \sqrt{\hat{f}(+1)} \cdot \alpha}{4 \cdot (1 + \alpha) \cdot \sqrt{\pi}}; \quad (2.315\text{н})$$

$$r^a = r^b = 0,5. \quad (2.315\text{о})$$

Схема (2.314) является неконсервативной¹. Несмотря на это, она обладает рядом положительных качеств, дающих ей право на практическое применение. В частности, многолетний опыт ее использования показал, что для некоторых классов задач указанная схема обладает повышенной устойчивостью по сравнению со схемами, описанными в начале Раздела.

2.5.1. Примеры разностных схем повышенного порядка аппроксимации

В предыдущем Разделе описывались разностные схемы, имеющие на равномерных по пространству сетках первый порядок аппроксимации по временной координате и второй порядок по пространственной координате. Рассмотрим один из подходов к построению класса неконсервативных разностных схем повышенного порядка аппроксимации. Для упрощения (но при этом сохраняя общность рассуждений) изложение материала будем проводить на примере математической модели транспортирования однокомпонентного газа по однониточному трубопроводу (2.36). Недивергентная форма записи данной модели будет иметь вид:

$$\frac{\partial(\rho \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} = 0; \quad (2.316\text{а})$$

$$\rho \cdot f \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \cdot w \cdot f \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = -f \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x} + g \cdot \rho \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) - \frac{\pi}{4} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot w \cdot |w| \cdot R; \quad (2.316\text{б})$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot f \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \cdot w \cdot f \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = & -p \cdot \frac{\partial(w \cdot f)}{\partial x} - p \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + Q \cdot f + \frac{\pi}{4} \cdot \lambda \cdot \rho \cdot |w|^3 \cdot R + \\ & + \frac{\partial(k \cdot f)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + k \cdot f \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \Phi(T_{oc}, T); \end{aligned} \quad (2.316\text{в})$$

$$p = p(\rho, T); \quad (2.316\text{г})$$

$$\varepsilon = \varepsilon(p, T); \quad (2.316\text{д})$$

$$k = k(p, T). \quad (2.316\text{е})$$

Сначала опишем принцип вычисления разностного значения производной повышенного порядка аппроксимации для произвольной функции $y(x)$ на примере нахождения первой производной третьего порядка аппроксимации с помощью разности против потока. Пусть скорость течения газа в узле i положительна. Тогда для вычисления

¹ Однако следует отметить, что закон сохранения массы (уравнение неразрывности) для данной схемы выполняется.

производной $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_i$ необходимо использовать значения $y(x)$ в узлах с индексами $j \leq i$.

Согласно формуле Тейлора, можно записать (производные относятся к узлу i):

$$\begin{aligned} y_{i-1} &= y_i - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot h_i + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{h_i^2}{2!} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{h_i^3}{3!} + O(h^4); \\ y_{i-2} &= y_i - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot (h_i + h_{i-1}) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{(h_i + h_{i-1})^2}{2!} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{(h_i + h_{i-1})^3}{3!} + O(h^4); \\ y_{i-3} &= y_i - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot (h_i + h_{i-1} + h_{i-2}) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})^2}{2!} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{(h_i + h_{i-1} + h_{i-2})^3}{3!} + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.317)$$

Отбросив слагаемые $O(h^4)$, уравнения (2.317) можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$. Решив систему (2.317), найдем значение $\frac{\partial y}{\partial x}$ с третьим порядком аппроксимации. Решение системы (2.317) относительно $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ дает значение второй производной второго порядка аппроксимации и т.д.

Введем следующие обозначения. Порядок производных обозначим символом «*DER*» (derivation). Количество узлов, на котором строится аппроксимация производных функции от переменной x , обозначим Kx . Количество узлов слева и справа от базового узла обозначим $Kx1$ и $Kx2$ соответственно. В этом случае:

$$Kx = Kx1 + Kx2 + 1. \quad (2.318)$$

Порядок аппроксимации производной обозначим «*APPR*» (approximation). В этом случае:

$$APPR = Kx - DER. \quad (2.319)$$

Множество узлов, используемых для аппроксимации производных, обозначим перечислением индексов граничных узлов внутри фигурных скобок, например $\{i - Kx1, i + Kx2\}$. При использовании противопоточной аппроксимации будем применять обозначение $\{UPSTREAM, Kx\}$. Аппроксимацию в точке x_i производной по x порядка *DER* функции $y(x)$ на описанном множестве узлов обозначим следующим образом:

$$\left. \begin{matrix} \{i - Kx1, i + Kx2\} \\ x\Delta \\ (DER = <...>) \end{matrix} \right\} (y_i) \quad (2.320a)$$

или, для противопоточных разностей:

$$\left. \begin{matrix} \{UPSTREAM, Kx\} \\ x\Delta \\ (DER = <...>) \end{matrix} \right\} (y_i), \quad (2.320б)$$

где $<...>$ – конкретное значение порядка производной.

Соответствующие формулам (2.320) сокращенные обозначения выглядят следующим образом:

$$\begin{matrix} \{-Kx1, Kx2\} \\ x\Delta \\ (DER=<...>) \end{matrix} (y) \quad (2.321a)$$

или, для противопоточных разностей:

$$\begin{matrix} \{UPSTREAM, Kx\} \\ x\Delta \\ (DER=<...>) \end{matrix} (y). \quad (2.321б)$$

Например, обозначение разностной аппроксимации $\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x_i}$ второго порядка, выполнен-

ной на узлах x_{i-1} , x_i и x_{i+1} , будет выглядеть следующим образом: $\begin{matrix} \{i-1, i+1\} \\ x\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} (\rho_i)$ или

$\begin{matrix} \{-1, 1\} \\ x\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} (\rho)$. В данном случае $Kx = 3$. Согласно (2.319), порядок аппроксимации равен $APPR = Kx - DER = 3 - 1 = 2$.

Вычисление производных произвольного конечного порядка аппроксимации можно проводить на основе решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений, аналогичной (2.317), методом Гаусса. Если значений производных выше первой знать не требуется, то при решении системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса можно ограничиться одним ходом данного метода. При этом следует использовать метод Гаусса с направлениями прямого и обратного хода, соответствующими методу левой прогонки [70].

С учетом вычисления параметров h_i^2 и $(h_i + h_{i-1})^2$ при решении системы двух линейных уравнений для нахождения параметра $\frac{\partial y}{\partial x}$ со вторым порядком аппроксимации, количество умножений равно 6 (деление условно относим к операциям умножения). Далее приведен способ уменьшения количества операций умножения в $1,5 \div 2$ раза.

Рассмотрим для определенности разность против потока для положительного направления скорости. При построении разностей другого вида принцип вычисления не меняется. Далее будут использоваться следующие обозначения:

$$\Delta y_{i-0,5}^{(1)} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}; \quad \Delta y_{i-1,5}^{(1)} = \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}, \quad (2.322)$$

где единица в скобках означает, что аппроксимируется первая производная. Используя формулы (2.317), можно записать (производные по-прежнему относятся к точке x_i):

$$\Delta y_{i-0,5}^{(1)} = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{h_i}{2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + O(h^2); \quad (2.323a)$$

$$\Delta y_{i-1,5}^{(1)} = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{2 \cdot h_i + h_{i-1}}{2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + O(h^2). \quad (2.323б)$$

Исключая из уравнений (2.323) слагаемое, содержащее $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, получим:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\Delta y_{i-0,5}^{(1)} \cdot \left(2 + \frac{h_{i-1}}{h_i} \right) - \Delta y_{i-1,5}^{(1)}}{\left(1 + \frac{h_{i-1}}{h_i} \right)} + O(h^2) \quad (2.324a)$$

или

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\Delta y_{i-1,5}^{(1)} \cdot \frac{h_i}{2 \cdot h_i + h_{i-1}} - \Delta y_{i-0,5}^{(1)}}{\left(\frac{h_i}{2 \cdot h_i + h_{i-1}} - 1 \right)} + O(h^2). \quad (2.3246)$$

Для скоростей с отрицательным направлением аналогичные формулы будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\Delta y_{i+0,5}^{(1)} \cdot \left(2 + \frac{h_{i+2}}{h_{i+1}} \right) - \Delta y_{i+1,5}^{(1)}}{\left(1 + \frac{h_{i+2}}{h_{i+1}} \right)} + O(h^2) \quad (2.325a)$$

или

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\Delta y_{i+1,5}^{(1)} \cdot \frac{h_{i+1}}{2 \cdot h_{i+1} + h_{i+2}} - \Delta y_{i+0,5}^{(1)}}{\left(\frac{h_{i+1}}{2 \cdot h_{i+1} + h_{i+2}} - 1 \right)} + O(h^2). \quad (2.325b)$$

При построении разностей, использующих значения функций в узлах x_{i-1} , x_i и x_{i+1} , по аналогии с (2.324) и (2.325), получаем:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\Delta y_{i+0,5}^{(1)} + \Delta y_{i-0,5}^{(1)} \cdot \frac{h_{i+1}}{h_i}}{\left(1 + \frac{h_{i+1}}{h_i} \right)} + O(h^2) \quad (2.326a)$$

или

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\Delta y_{i+0,5}^{(1)} \cdot \frac{h_i}{h_{i+1}} + \Delta y_{i-0,5}^{(1)}}{\left(\frac{h_i}{h_{i+1}} + 1 \right)} + O(h^2). \quad (2.326b)$$

Произведение $(2 \cdot h_i)$ можно вычислять по формуле $2 \cdot h_i = h_i + h_i$, что не требует операции умножения. Параметры $\alpha_i = \frac{h_{i+1}}{h_i}$, $i = \overline{1, N}$ (аналогично $\frac{h_i}{h_{i+1}}$, $\frac{h_i}{2 \cdot h_i + h_{i-1}}$ и т.п.) обычно известны, либо их можно найти вначале итерации или вначале расчета параметров на одном временном слое. Заметим, что эти параметры будут одинаковы для всех рассчитываемых разностей. При данных условиях количество операций умножения для вычисления первой производной второго порядка аппроксимации равно 4. Если при этом разности $\Delta y_{i+0,5}^{(1)}$, $i = \overline{1, N}$, рассчитать до начала итерации, то для вычисления производной $\frac{\partial y}{\partial x}$ по формулам (2.324), (2.325) и (2.326) требуется в среднем по 3 умножения. Таким образом, мы показали, что количество умножений можно уменьшить в $1,5 \div 2$ раза.

Пусть требуется по известному значению первой производной в узле найти значение функции повышенного порядка аппроксимации, используя известные значения функции в других узлах. В этом случае систему (2.317) можно рассматривать как систему трех

линейных уравнений относительно $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ и y_i . Очевидно при этом, что решение относительно y_i обладает четвертым порядком аппроксимации.

На основе вышеизложенного запишем соответствующий системе (2.316) класс неявных неконсервативных разностных схем произвольного конечного порядка аппроксимации на неравномерной пространственно-временной сетке:

$$\left\{ \begin{matrix} j+1-Kt1, j+1 \\ t\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} (\rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1}) + \left\{ \begin{matrix} i-Kx1, i+Kx2 \\ x\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} (\rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1}) = 0; \quad (2.327a)$$

$$\begin{aligned} & \rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot \left\{ \begin{matrix} j+1-Kt1, j+1 \\ t\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} (w_i^{j+1}) + \rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot \left\{ \begin{matrix} i-Kx1, i+Kx2 \\ x\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} (w_i^{j+1}) = \\ & = -f_i^{j+1} \cdot \left\{ \begin{matrix} i-Kx1, i+Kx2 \\ x\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} (p_i^{j+1}) - f_i^{j+1} \cdot g \cdot \rho_i^{j+1} \cdot \left\{ \begin{matrix} i-Kx1, i+Kx2 \\ x\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} ((z_1)_i^{j+1}) - \end{aligned} \quad (2.327б)$$

$$- \frac{\pi}{4} \cdot \lambda_i^{j+1} \cdot \rho_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot |w_i^{j+1}| \cdot R_i^{j+1};$$

$$\begin{aligned} & \rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot \left\{ \begin{matrix} j+1-Kt1, j+1 \\ t\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} (\varepsilon_i^{j+1}) + \rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot \left\{ \begin{matrix} i-Kx1, i+Kx2 \\ x\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} (\varepsilon_i^{j+1}) = \\ & = -p_i^{j+1} \cdot \left\{ \begin{matrix} i-Kx1, i+Kx2 \\ x\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} (w_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1}) - p_i^{j+1} \cdot \left\{ \begin{matrix} j+1-Kt1, j+1 \\ t\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} (f_i^{j+1}) + Q_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} + \frac{\pi}{4} \cdot \lambda_i^{j+1} \cdot \rho_i^{j+1} \cdot |w_i^{j+1}|^3 \cdot R_i^{j+1} + \\ & + \left\{ \begin{matrix} i-Kx1, i+Kx2 \\ x\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} (k_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1}) \cdot \left\{ \begin{matrix} i-Kx1, i+Kx2 \\ x\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} (T_i^{j+1}) + k_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot \left\{ \begin{matrix} i-Kx1, i+Kx2 \\ x\Delta \\ (DER=2) \end{matrix} \right\} (T_i^{j+1}) - \phi_i^{j+1}; \end{aligned} \quad (2.327в)$$

$$p_i^{j+1} = p(\rho_i^{j+1}, T_i^{j+1}); \quad (2.327г)$$

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon(p_i^{j+1}, T_i^{j+1}); \quad (2.327д)$$

$$k_i^{j+1} = k(p_i^{j+1}, T_i^{j+1}), \quad (2.327е)$$

где $Kt1$ – количество узлов, на котором строится аппроксимация производных функций по переменной t .

С целью сохранения порядка аппроксимации системы (2.327) при моделировании процессов, требующих учета второй производной в уравнении (2.327в), параметры $Kx1$ и $Kx2$ в данном уравнении следует выбирать так, чтобы выполнялось условие:

$$\overline{Kx1} + \overline{Kx2} \geq Kx1 + Kx2 + 1. \quad (2.328)$$

Соответствующий класс противоточных схем можно получить из (2.327), рассматривая аппроксимацию конвективных слагаемых на множестве узлов $\{UPSTREAM, Kx\}$.

Класс разностных схем (2.327) можно считать основой для численного моделирования газодинамических процессов в трубопроводе с повышенным порядком точности. Здесь следует отметить, что использование параметрического класса схем удобно при формализации, т.к. позволяет построить компактные программные процедуры, исключая алгоритмическое дублирование при использовании различных разностных схем

в процессе решения одной производственной задачи, что повышает надежность расчетов.

Класс разностных схем (2.327) был построен С.Н. Пряловым. Из этого класса разностных схем для решения задач газовой промышленности были выделены: неявная двухслойная противопоточная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространству и первого порядка аппроксимации по времени; неявная трехслойная противопоточная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространству и времени; неявная двухслойная противопоточная разностная схема третьего порядка аппроксимации по пространству и первого порядка аппроксимации по времени.

Для каждой из выделенных разностных схем класса рассмотрен вопрос об устойчивости. Оценки устойчивости проводились методом гармоник [69, 70]. При этом было установлено, что линейный аналог неявной двухслойной противопоточной разностной схемы второго порядка аппроксимации по пространству и первого порядка аппроксимации по времени является безусловно устойчивым. Устойчивость линейных аналогов остальных выделенных разностных схем построенного класса зависит от соотношения шагов пространственно-временной сетки и скорости газового потока в моделируемом процессе. Авторы монографии полагают, что при практическом применении данных схем возможно снижение скорости роста осцилляций решения за счет подбора соотношений шагов пространственно-временной сетки. Однако при большом числе временных шагов, что имеет место во многих практических случаях, придется прибегать к процедуре сглаживания получаемого решения.

Для решения построенных выше разностных схем используются различные модификации блочной прогонки, если задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. В случае перехода к решению систем нелинейных алгебраических уравнений применяются различные модификации метода Ньютона и квазиньютоновских методов.

2.5.2. О построении полностью консервативных сплайн-схем повышенного порядка аппроксимации

Рассмотрение данного типа схем начнем с наиболее простого случая – использования сплайнов при решении обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [98, 329]).

Пусть требуется на отрезке $x_L \leq x \leq x_R$ решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = p(x, y(x)), \quad (2.329)$$

где $p(x, y(x))$ – заданная функция. При интегрировании уравнения (2.329) появляется константа, значение которой находится с помощью заданного ГУ. Для определенности (при этом сохраняя общность рассуждений) будем считать, что на левой границе (x_L) задано ГУ первого рода:

$$y(x_L) = Y_L, \quad (2.330)$$

где Y_L – заданная константа.

Построим неравномерную (конечно-разностную [63]) сетку $\Sigma_h = \{x_i\}$, где x_i – координата i -го узла сетки, $i = \overline{0, N-1}$; N – количество узлов конечно-разностной сетки; $h_i = x_i - x_{i-1}$ – заданный для узла i шаг назад, $i = \overline{1, N-1}$ (рис. 2.15).



Рис. 2.15. Участок конечно-разностной сетки

Для численного решения уравнения (2.329) построим сплайн с условием выполнения уравнения (2.329) в узлах конечно-разностной сетки:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i = p(x_i, y(x_i)). \quad (2.331)$$

Введем для указания данного способа аппроксимации производной dy/dx следующее обозначение:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Spline, } <...> \\ x\Delta \\ (DER=<...>) \end{matrix} \right\} (y), \quad (2.332)$$

где запись $\{\text{Spline, } <...>\}$ указывает на использование сплайновой интерполяции, число на месте $<...>$ соответствует порядку используемого сплайна. Обозначение $(DER=<...>)$, как и в Разделе 2.5.1, соответствует порядку производной (в нашем случае он равен 1). С учетом (2.332) уравнение (2.331) можно переписать в виде:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Spline, } <...> \\ x\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} (y_i) = p(x_i, y(x_i)) \quad (2.333a)$$

или, в сокращенной форме записи:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Spline, } <...> \\ x\Delta \\ (DER=1) \end{matrix} \right\} (y) = p(x, y(x)). \quad (2.333б)$$

Для построения сплайна необходимо найти коэффициенты полиномов для каждой ячейки расчетной сетки $\Delta x_{i-0,5} = [x_{i-1}, x_i]$ при удовлетворении ряда условий, которые будут рассмотрены ниже.

Пусть порядок полиномов сплайна есть $K \geq 2$. Последнее условие требуется для обеспечения непрерывности первой производной от $y(x)$. Тогда каждой ячейке $\Delta x_{i-0,5}$, $i = \overline{1, N-1}$, расчетной схемы соответствует полином:

$$y_{i-0,5}(x) = \sum_{k=0}^K a_{k,(i-0,5)} \cdot (x - x_i)^k, \quad (2.334)$$

где $a_{k,(i-0,5)}$ – набор констант сплайна, $k = \overline{0, K}$, $i = \overline{1, N-1}$. Константы сплайна в нашем случае находятся из условий выполнения в узлах расчетной сетки уравнения (2.329) и обеспечения гладкости сплайна:

$$y_{i-0,5}^{(1)}(x_{i-1}) = p(x_{i-1}, y_{i-0,5}(x_{i-1})), \quad y_{i-0,5}^{(1)}(x_i) = p(x_i, y_{i-0,5}(x_i)), \quad i = \overline{1, N-1}; \quad (2.335)$$

$$y_{i-0,5}^{(m)}(x_i) = y_{i+0,5}^{(m)}(x_i), \quad m = 0, 2, 3, \dots, K-1, \quad i = \overline{1, N-2}, \quad (2.336)$$

где $y_{i-0,5}^{(m)}(x)$ – m -ая производная от функции $y_{i-0,5}(x)$.

В системе уравнений (2.335, 2.336) на $[(N-1) \cdot (K+1)]$ переменных $((N-1)$ – коли-

чество ячеек расчетной сетки; $(K+1)$ – количество констант в каждом полиноме) приходится $[2 \cdot (N-1) + (K-1) \cdot (N-2)]$ уравнений. Разница данных величин равна $(K-1)$. Т.е. для построения единственного сплайна требуется замкнуть систему (2.335, 2.336) еще $(K-1)$ -ым уравнением.

Применительно к решаемой задаче одним из замыкающих уравнений будет (2.330):

$$y_{0,5}(x_0) = Y_L. \quad (2.337)$$

Для получения остальных $(K-2)$ соотношений можно воспользоваться так называемыми нейтральными условиями: равенство нулю производных высших порядков для граничных точек системы, например, $\tilde{K} = (\text{int}(K/2) - 1)$ условий ($\text{int}(\dots)$ – взятие целой части) на правой границе и $(K - \tilde{K} - 1)$ условий на левой границе:

$$y_{N-1,5}^{(m)}(x_{N-1}) = 0, \quad m = \overline{(K - \tilde{K} + 1), K}; \quad (2.338)$$

$$y_{0,5}^{(m)}(x_0) = 0, \quad m = \overline{\tilde{K} + 2, K}. \quad (2.339)$$

Перейдем к анализу консервативности построенной сплайн-схемы.

Согласно [97, 99], разностные схемы, выражающие основные законы сохранения на сетке, называются **консервативными разностными схемами**. Рассмотрим пример не-консервативной разностной схемы.

Пример 1. Для построения конечно-разностной схемы, аппроксимирующей уравнение (2.329), воспользуемся интегральным методом [97, 99]. Для этого введем вспомогательную сетку (рис. 2.16) с узлами $x_{i+0,5} = 0,5 \cdot (x_i + x_{i+1})$ и проинтегрируем уравнение (2.329) по отрезку $\Delta x_i = [x_{i-0,5}, x_{i+0,5}]$:

$$\tilde{y}_{i+0,5} - \tilde{y}_{i-0,5} = \bar{p}_i \cdot \Delta x_i \quad (2.340)$$

или

$$\frac{\tilde{y}_{i+0,5} - \tilde{y}_{i-0,5}}{\Delta x_i} = \bar{p}_i, \quad (2.341)$$

где $\tilde{y}_{i+0,5}$ – некоторая аппроксимация функции y в точке $x_{i+0,5}$; $\bar{p}_i$ – среднее по отрезку Δx_i значение p . Будем относить $\bar{p}_i$ к узлу x_i : $\bar{p}_i = p_i$.

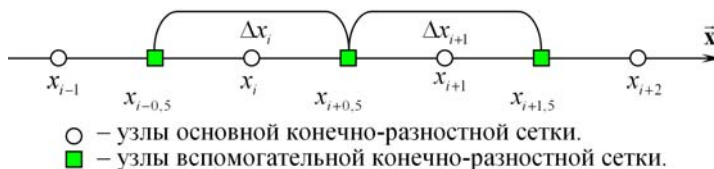


Рис. 2.16. Участок конечно-разностной сетки с вспомогательной сеткой

Для аппроксимации величин $\tilde{y}_{i-0,5}$ и $\tilde{y}_{i+0,5}$ в пределах каждой ячейки Δx_i будем использовать различные записи:

$$\tilde{y}_{i-0,5} = 0,5 \cdot (y_i + y_{i-1}) \quad \text{и} \quad \tilde{y}_{i+0,5} = \sqrt{y_i \cdot y_{i+1}}. \quad (2.342)$$

При условии положительности функции $y(x)$ данный способ аппроксимации имеет право на существование, поскольку окончательный вид разностного уравнения

$$\frac{\sqrt{y_i \cdot y_{i+1}} - 0,5 \cdot (y_i + y_{i-1})}{\Delta x_i} = p_i \quad (2.343)$$

аппроксимирует исходное уравнение (2.329). Покажем это. Выпишем разложения сеточной функции $\{y_i\}$ в ряд Тейлора.

$$y_{i-1} = y_i - h_i \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_i + O(h^2); \quad (2.344a)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{y_i \cdot y_{i+1}} &= \sqrt{y_i \cdot \left(y_i + h_{i+1} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_i + O(h^2) \right)} = y_i \cdot \sqrt{1 + \frac{h_{i+1}}{y_i} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_i + O(h^2)} = \\ &= y_i \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h_{i+1}}{y_i} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_i + O(h^2) \right) = y_i + \frac{1}{2} \cdot h_{i+1} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_i + O(h^2), \end{aligned} \quad (2.344b)$$

где $O(h^k)$ – погрешность аппроксимации k -го порядка по h . Подставляя (2.344) в (2.343) и учитывая, что

$$\Delta x_i = 0,5 \cdot (h_i + h_{i+1}), \quad (2.345)$$

получим:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_i = p_i + O(h), \quad (2.346)$$

что и требовалось доказать.

Однако построенная разностная схема (2.342) не обладает одним важным свойством, а именно – консервативностью. Для доказательства этого достаточно рассмотреть аппроксимацию величины $\tilde{y}_{i+0,5}$ для соседних ячеек Δx_i и Δx_{i+1} : $\sqrt{y_i \cdot y_{i+1}}$ и $0,5 \cdot (y_{i+1} + y_i)$ соответственно. При переходе из одной ячейки в другую наблюдается «нефизичный» скачок функции y чисто разностной природы, равный $\delta y_{i+0,5} = 0,5 \cdot (y_{i+1} + y_i) - \sqrt{y_i \cdot y_{i+1}}$. Данную величину можно рассматривать как некоторый фиктивный источник (сток) функции y , помещенный в узел y (см. также [100, 101]). Фактически в схеме нарушен баланс, а именно, величина y изменяется не только за счет наличия физического источника члена $p(x, y(x))$, но и за счет дисбалансного слагаемого $\delta y_{i+0,5}$.

Интеграл от дивергентного дифференциального слагаемого dy/dx по отрезку $[x_{i-0,5}, x_{i+1,5}]$ дает разность $(\tilde{y}_{i+1,5} - \tilde{y}_{i-0,5})$, в которой участвуют лишь аппроксимации функции y на границах отрезка. Проинтегрируем разностную производную по данному отрезку:

$$\left[\sqrt{y_{i+2} \cdot y_{i+1}} - 0,5 \cdot (y_{i+1} + y_i) \right] + \left[\sqrt{y_{i+1} \cdot y_i} - 0,5 \cdot (y_i + y_{i-1}) \right] = \tilde{y}_{i+1,5} - \tilde{y}_{i-0,5} - \delta y_{i+0,5}. \quad (2.347)$$

Интегрирование разностной схемы (2.343) по отрезку $[x_{i-0,5}, x_{i+1,5}]$ в этом случае приведет к следующему уравнению¹:

$$\tilde{y}_{i+1,5} - \tilde{y}_{i-0,5} = p_i \cdot \Delta x_i + p_{i+1} \cdot \Delta x_{i+1} - \delta y_{i+0,5}. \quad (2.348)$$

Как видно из (2.348), использованный способ задания величин $\tilde{y}_{i-0,5}$ и $\tilde{y}_{i+0,5}$ привел к получению неконсервативной схемы, поскольку разностный аналог не описывает интегральную форму уравнения (2.329) за счет наличия дисбалансного слагаемого.

Дисбалансное слагаемое имеет порядок $O(h)$ и поэтому может быть уменьшено сгущением сетки, однако на грубых сетках оно существенно искажает решение. Поэтому предпочтение в настоящее время отдают консервативным схемам [95, 100, 101].

Замечание 1. Для построения консервативной схемы требуется при аппроксимации дивергентных производных (в нашем случае dy/dx) использовать одинаковый способ задания дифференцируемой величины (y) на общих границах соседних ячеек, т.е. использовать *дивергентные разностные аналоги* для аппроксимации *дивергентных непрерывных производных*.

Построенная сплайн-схема (2.333) для решения обыкновенного дифференциального уравнения (2.329) не является конечно-разностной. Несмотря на это, исследуем свойство ее консервативности. Сплайн-схема оперирует непрерывными функциями (при достаточном порядке сплайнов), поэтому разрывы функций на любой проведенной границе принципиально отсутствуют. При доказательстве консервативности сплайн-схемы перейдем к ее разностному аналогу и исследуем данный вопрос уже для этого аналога.

Замечание 2. Покажем, что существует разбиение $\{\bar{x}_{i+0,5}(y)\}$ исходной области интегрирования (здесь узлы $\bar{x}_{i+0,5}$ необязательно лежат в середине ячеек h_i) и соответствующая этому разбиению кусочно-линейная аппроксимация функции $y(x)$ в виде $\{\bar{y}_{i+0,5}\}$, такие, что

$$\frac{\bar{y}_{i+0,5} - \bar{y}_{i-0,5}}{\bar{x}_{i+0,5} - \bar{x}_{i-0,5}} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_i = \frac{\{Spline, <...>\}}{(DER=1)}(y_i). \quad (2.349)$$

Для этого достаточно провести через узлы расчетной сетки касательные, точки пересечения которых и будут являться искомым разбиением $\{\bar{x}_{i+0,5}(y)\}$ (рис. 2.17).

В рассматриваемом случае разностное отношение (2.349) дивергентно по построению, т.к. значения функции $\bar{y}$ на общих границах соседних ячеек совпадают [92]. Заменяя левую часть уравнения (2.333) на (2.349), получаем консервативное разностное уравнение:

$$\frac{\bar{y}_{i+0,5} - \bar{y}_{i-0,5}}{\bar{x}_{i+0,5} - \bar{x}_{i-0,5}} = p_i. \quad (2.350)$$

Поскольку значения обоих слагаемых уравнения (2.350) для каждого отрезка

¹ Здесь интегрирование представляет собой сумму уравнений (2.340) для ячеек $[x_{i-0,5}, x_{i+0,5}]$ и $[x_{i+0,5}, x_{i+1,5}]$ с учетом применяемых аппроксимаций величин $\tilde{y}_{i-0,5}$, $\tilde{y}_{i+0,5}$ и $\bar{p}_i$.

$[\bar{x}_{i-0,5}, \bar{x}_{i+0,5}]$ абсолютно совпадают с аналогичными слагаемыми уравнения (2.333), можно считать, что построенная *сплайн-схема является консервативной в смысле существования консервативного дискретного аналога*.

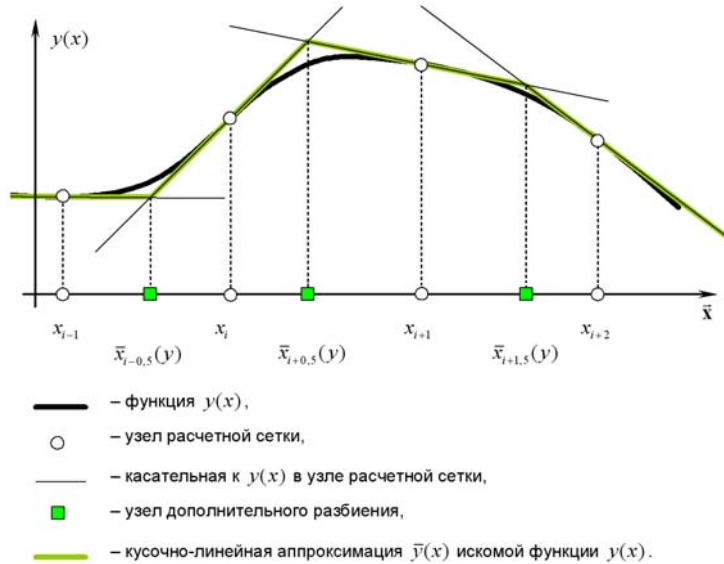


Рис. 2.17. Пример разбиения $\{\bar{x}_{i+0,5}(y)\}$ области интегрирования для функции $y(x)$

На основе доказательства данного замечания можно сделать следующий вывод:

Если для решения дифференциального уравнения используется некоторая параметрическая зависимость (это может быть не только сплайн, но и, например, единый полином порядка $(N+1)$ или разложение в ряд Фурье с конечным числом членов и т.д.), параметры которой подбираются так, чтобы удовлетворить дифференциальному уравнению в узлах расчетной сетки, то для обеспечения консервативности выбранной аппроксимации необходимо обеспечить непрерывность и дифференцируемость функций, стоящих под знаком производных.

С точки зрения классического понятия консервативности разностных схем, консервативность сплайн-схемы можно трактовать следующим образом. *Сплайн-схема является консервативной, поскольку для эквивалентного дискретного аналога рассмотренный закон сохранения (2.329) выполняется для ячеек $[\bar{x}_{i-0,5}(y), \bar{x}_{i+0,5}(y)]$.*

Здесь необходимо подчеркнуть, что при наличии в исходном законе сохранения нескольких дивергентных дифференциальных производных существование консервативности сплайн-схемы вступает в противоречие с классическим понятием консервативности разностных схем. Рассмотрим это замечание более подробно на примере уравнения:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} g(y) = p(x, y(x)). \quad (2.351)$$

При использовании сплайн-схемы для решения уравнения (2.351) данная аппроксимация является консервативной в смысле существования консервативного дискретного

аналога, т.к. в этом аналоге дивергентные дифференциальные производные (dy/dx и dg/dx) аппроксимируются дивергентными разностными аналогами. Однако ячейки дополнительного разбиения, на которых строятся дивергентные разностные аналоги рассматриваемых производных ($[\bar{x}_{i-0,5}(y), \bar{x}_{i+0,5}(y)]$ и $[\bar{x}_{i-0,5}(g), \bar{x}_{i+0,5}(g)]$), будут различными. Поэтому (в отличие от вышеизложенного) в общем случае не найдется ячейки, охватывающей узел расчетной сетки, для которой можно было бы трактовать выполнение уравнения (2.351), справедливого для рассматриваемого узла¹.

Пример 2. Одномерные уравнения неразрывности для смеси и ее компонент без учета процессов диффузии выглядят следующим образом (см. Раздел 2.3.2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial x} = 0; \quad (2.352a)$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot Y_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot Y_m)}{\partial x} = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad Y_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} Y_m, \quad (2.352b)$$

где t – время; x – пространственная координата; ρ – плотность смеси; w – скорость смеси; N_S – количество компонент смеси; $Y_m = \rho_m / \rho$ – массовая концентрация m -ой компоненты смеси; ρ_m – плотность m -ой компоненты (масса компоненты в единице объема смеси).

Обозначим через $\bar{\omega}$ пространственно-временную сетку с шагом h_i по пространству и шагом τ_j по времени:

$$\bar{\omega} = \left\{ (x_i, t^j) \mid x_i = x_{i-1} + h_i, \quad t_j = t_{j-1} + \tau_j \right\}. \quad (2.353)$$

Для численного решения уравнений (2.352) рассмотрим следующие явные разностные аналоги:

$$\frac{\rho_i^{j+1} - \rho_i^j}{\tau_j} + \frac{\frac{1}{4} \cdot (\rho_{i+1}^j + \rho_i^j) \cdot (w_{i+1}^j + w_i^j) - \frac{1}{4} \cdot (\rho_i^j + \rho_{i-1}^j) \cdot (w_i^j + w_{i-1}^j)}{0,5 \cdot (h_i + h_{i+1})}; \quad (2.354a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_i^{j+1} \cdot (Y_m)_i^{j+1} - \rho_i^j \cdot (Y_m)_i^j}{\tau_j} + \\ & + \frac{\frac{1}{4} \cdot (\rho_{i+1}^j \cdot w_{i+1}^j + \rho_i^j \cdot w_i^j) \cdot ((Y_m)_{i+1}^j + (Y_m)_i^j) - \frac{1}{4} \cdot (\rho_i^j \cdot w_i^j + \rho_{i-1}^j \cdot w_{i-1}^j) \cdot ((Y_m)_i^j + (Y_m)_{i-1}^j)}{0,5 \cdot (h_i + h_{i+1})}, \end{aligned}$$

$$m = \overline{1, N_S - 1}; \quad (Y_{N_S})_i^j = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} (Y_m)_i^j; \quad (Y_{N_S})_i^{j+1} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} (Y_m)_i^{j+1}. \quad (2.354b)$$

Данные уравнения представляют собой интегральные формы записи уравнений (2.352) для пространственно-временной ячейки, представленной на рис. 2.18, где $x_{i+0,5} = 0,5 \cdot (x_i + x_{i+1})$.

¹ Здесь следует напомнить, что сплайн-схема является консервативной.

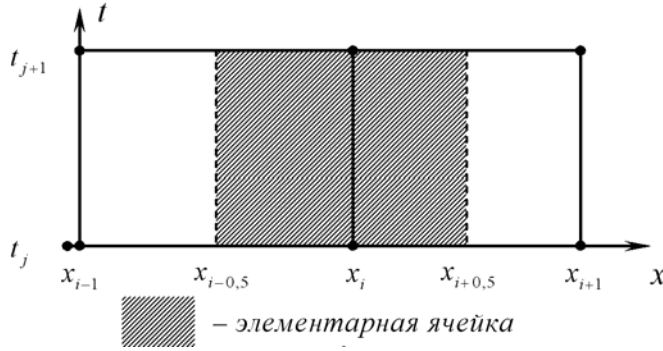


Рис. 2.18. Пространственно-временная сетка (фрагмент)

Уравнения (2.354) являются консервативными по построению, поскольку для аппроксимации дивергентных производных используются дивергентные разностные аналоги. Однако данная система не является полностью консервативной. Продемонстрируем вышесказанное.

Если в уравнении (2.352б) расписать слагаемые по правилу взятия производной от сложной функции и вычесть из него уравнение (2.352а), умноженное на Y_m , то окончательно получим:

$$\rho \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial t} + \rho \cdot w \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} = 0. \quad (2.355)$$

Следствием (2.355) является то, что при задании в качестве начального условия и граничного условия на входной границе постоянного значения концентрации Y_m получаем во всех точках задачи $\partial Y_m / \partial x = 0$, и, следовательно, $\partial Y_m / \partial t = 0$. Другими словами, параметр Y_m не должен изменяться в процессе решения задачи.

Построим аналогичными преобразованиями разностный аналог (2.355). Для этого из (2.354б) вычтем (2.354а), умноженное на $(Y_m)_i^j$. Опуская несложные преобразования, представим окончательный результат:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_i^{j+1} \cdot ((Y_m)_i^{j+1} - (Y_m)_i^j)}{\tau_j} + \\ & + \frac{\frac{1}{4} \cdot (\rho_{i+1}^j \cdot w_{i+1}^j + \rho_i^j \cdot w_i^j) \cdot ((Y_m)_{i+1}^j - (Y_m)_i^j) + \frac{1}{4} \cdot (\rho_i^j \cdot w_i^j + \rho_{i-1}^j \cdot w_{i-1}^j) \cdot ((Y_m)_i^j - (Y_m)_{i-1}^j)}{0,5 \cdot (h_i + h_{i+1})} + \delta K = 0, \end{aligned} \quad (2.356a)$$

где

$$\delta K = \frac{(\rho_{i+1}^j - \rho_i^j) \cdot (w_{i+1}^j - w_i^j) - (\rho_i^j - \rho_{i-1}^j) \cdot (w_i^j - w_{i-1}^j)}{2 \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot (Y_m)_i^j. \quad (2.356b)$$

Величину δK можно рассматривать как дисбалансное слагаемое, из-за чего разностная схема (2.354) не будет являться полностью консервативной. Для доказательства этого достаточно рассмотреть приведенную выше задачу. При начальных условиях в виде $Y_m(x) = \text{const}$ уравнение (2.356) для начального момента времени преобразуется к виду:

$$\frac{\rho_i^j \cdot ((Y_m)_i^{j+1} - (Y_m)_i^j)}{\tau_j} + \frac{(\rho_{i+1}^j - \rho_i^j) \cdot (w_{i+1}^j - w_i^j) - (\rho_i^j - \rho_{i-1}^j) \cdot (w_i^j - w_{i-1}^j)}{2 \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot (Y_m)_i^j = 0. \quad (2.357)$$

Из (2.357) следует, что при решении разностной задачи значение Y_m может изменяться не только за счет изменения граничных условий по Y_m , но и за счет изменения скорости и плотности смеси, что противоречит физическим соображениям. Объяснить это заключение можно следующим образом. При неизменном граничном условии масса компоненты, протекающая через единицу площади в единицу времени $(\rho \cdot w \cdot Y_m)$, может измениться только за счет увеличения количества протекающей смеси $(\rho \cdot w)$. По данной причине в рассмотренной задаче отношение указанных величин должно быть постоянным при любых значениях величины $(\rho \cdot w)$: $Y_m = \frac{\rho \cdot w \cdot Y_m}{\rho \cdot w} = const$. Однако зна-

чение массового расхода $(\rho \cdot w)_{i+0,5}$ смеси через единицу площади в разностных уравнениях (2.354а) и (2.354б) аппроксимировано различным способом: $[0,25 \cdot (\rho_{i+1}^j + \rho_i^j) \cdot (w_{i+1}^j + w_i^j)]$ для уравнения неразрывности смеси и $[0,5 \cdot (\rho_{i+1}^j \cdot w_{i+1}^j + \rho_i^j \cdot w_i^j)]$ для уравнения неразрывности компоненты. Их отношение, естественно, не является константой.

Пример 3. Дивергентный вид одномерных уравнений изотермического течения идеальной сжимаемой жидкости имеет вид [79, 99]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot w)}{\partial x} = 0; \quad (2.358a)$$

$$\frac{\partial (\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot w^2)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x, \quad (2.358б)$$

где t – время; x – пространственная координата; ρ – плотность жидкости; w – скорость жидкости; p – давление; F_x – проекция удельных (на единицу объема) массовых сил $\vec{F}$ на ось Ox . Для аппроксимации (2.358) воспользуемся следующей системой неявных разностных уравнений:

$$\frac{\rho_i^{j+1} - \rho_i^j}{\tau_j} + \frac{\frac{1}{8} \cdot (\rho_{i+1}^{j+1} + \rho_i^{j+1}) \cdot (w_{i+1}^{j+1} + w_i^{j+1}) - \frac{1}{8} \cdot (\rho_i^{j+1} + \rho_{i-1}^{j+1}) \cdot (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1})}{0,5 \cdot (h_i + h_{i+1})} = 0; \quad (2.359a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} - \rho_i^j \cdot w_i^j}{\tau_j} + \frac{\frac{1}{8} \cdot (\rho_{i+1}^{j+1} + \rho_i^{j+1}) \cdot (w_{i+1}^{j+1} + w_i^{j+1})^2 - \frac{1}{8} \cdot (\rho_i^{j+1} + \rho_{i-1}^{j+1}) \cdot (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1})^2}{0,5 \cdot (h_i + h_{i+1})} = \\ & = -\frac{0,5 \cdot (p_{i+1}^{j+1} + p_i^{j+1}) - 0,5 \cdot (p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1})}{0,5 \cdot (h_i + h_{i+1})} + (F_x)_i^{j+1}. \end{aligned} \quad (2.359б)$$

Как и в предыдущем примере эти уравнения представляют собой интегральные формы

записи уравнений (2.358) для пространственно-временной ячейки, представленной на рис. 2.18.

Если уравнение (2.358б) умножить на w и вычесть уравнение (2.358а), умноженное на $0,5 \cdot w^2$, получим закон сохранения кинетической энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \cdot w^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(w \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2} \right) = -w \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + w \cdot F_x. \quad (2.360)$$

Рассмотрим аналогичные выкладки для дискретного случая. Для этого умножим уравнение (2.359б) на w_i^{j+1} и вычтем из него уравнение (2.359а), умноженное на $0,5 \cdot (w_i^{j+1})^2$. Опуская преобразования, приведем окончательный вид уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_i^{j+1} \cdot \frac{(w_i^{j+1})^2}{2} - \rho_i^j \cdot w_i^{j+1} \left(w_i^j - \frac{1}{2} \cdot w_i^{j+1} \right)}{\tau_j} + \\ & + \frac{\frac{1}{4} \cdot (\rho_{i+1}^{j+1} + \rho_i^{j+1}) \cdot (w_{i+1}^{j+1} + w_i^{j+1}) \cdot \frac{w_{i+1}^{j+1} \cdot w_i^{j+1}}{2} - \frac{1}{4} \cdot (\rho_i^{j+1} + \rho_{i-1}^{j+1}) \cdot (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \cdot \frac{w_i^{j+1} \cdot w_{i-1}^{j+1}}{2}}{0,5 \cdot (h_i + h_{i+1})} = \\ & = - \frac{0,5 \cdot (p_{i+1}^{j+1} + p_i^{j+1}) - 0,5 \cdot (p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1})}{0,5 \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot w_i^{j+1} + (F_x)_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \end{aligned} \quad (2.361a)$$

или, выделяя дивергентные разностные производные:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_i^{j+1} \cdot \frac{(w_i^{j+1})^2}{2} - \rho_i^j \cdot \frac{(w_i^j)^2}{2}}{\tau_j} + \\ & + \frac{\frac{1}{4} \cdot (\rho_{i+1}^{j+1} + \rho_i^{j+1}) \cdot (w_{i+1}^{j+1} + w_i^{j+1}) \cdot \frac{w_{i+1}^{j+1} \cdot w_i^{j+1}}{2} - \frac{1}{4} \cdot (\rho_i^{j+1} + \rho_{i-1}^{j+1}) \cdot (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \cdot \frac{w_i^{j+1} \cdot w_{i-1}^{j+1}}{2}}{0,5 \cdot (h_i + h_{i+1})} = \\ & = - \frac{0,5 \cdot (p_{i+1}^{j+1} + p_i^{j+1}) - 0,5 \cdot (p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1})}{0,5 \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot w_i^{j+1} + (F_x)_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} + \delta K, \end{aligned} \quad (2.361б)$$

где

$$\delta K = - \frac{\rho \cdot (w_i^{j+1} - w_i^j)^2}{\tau_j} = - \frac{\rho \cdot \left(w_i^j + \tau_j \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_i + O(\tau_j^2) - w_i^j \right)^2}{\tau_j} = O(\tau). \quad (2.361в)$$

Величина δK имеет первый порядок аппроксимации, и поэтому при $(\tau_j, h_i \rightarrow 0)$ уравнение (2.361) преобразуется в дифференциальное уравнение (2.360). Другими словами, разностное уравнение (2.361) имеет первый порядок аппроксимации. Однако величина δK представляет собой дисбалансное слагаемое¹. По данной причине разностное уравнение является неконсервативным и, следовательно, система уравнений (2.359) не

¹ Оно является следствием различия в способах аппроксимации кинетической энергии на общих границах соседних временных слоев (см. производную по времени в (2.361а)).

обладает полной консервативностью.

Необходимо отметить, что существует бесконечное число преобразований системы разностных уравнений (2.359), дающих аппроксимацию уравнения кинетической энергии. Например, для аппроксимации скорости, на которую умножается уравнение движения при получении искомого разностного уравнения кинетической энергии, можно использовать величины w_i^j , $[0,5 \cdot (w_i^{j+1} + w_i^j)]$ и т.п. Вполне возможно, что существует преобразование, позволяющее получить вид разностного уравнения кинетической энергии с дивергентной формой записи частной производной по времени $\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \cdot \frac{w^2}{2} \right)$ (в отличие от (2.361)). Однако при этом «теряется» дивергентность разност-

ного аналога производной $\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot w \cdot \frac{w^2}{2} \right)$, поскольку ее дивергентный вид может быть

получен только с использованием преобразований, имевших место при получении (2.361). По обоснованной выше причине можно утверждать, что не существует преобразований системы разностных уравнений (2.359), позволяющих получить консервативное уравнение для кинетической энергии. Повторим еще раз, что данная система по указанной причине не является полностью консервативной. К сожалению, таким свойством обладали все неявные разностные схемы, с которыми авторам настоящей монографии приходилось иметь дело.

Вернемся к описанию сплайн-схем. Рассмотрим их применение на примере решения системы (2.36). Пусть порядок сплайнов по временной координате равен Kt , а по пространственной координате – Kx . Сплайн-схему для решения (2.36) в этом случае можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \rho_i^{j+1} \cdot \frac{t\Delta}{(DER=1)} \left(f_i^{j+1} \right) + f_i^{j+1} \cdot \frac{t\Delta}{(DER=1)} \left(\rho_i^{j+1} \right) + f_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot \frac{x\Delta}{(DER=1)} \left(\rho_i^{j+1} \right) + \\ + \rho_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot \frac{x\Delta}{(DER=1)} \left(f_i^{j+1} \right) + \rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot \frac{x\Delta}{(DER=1)} \left(w_i^{j+1} \right) = 0; \end{aligned} \quad (2.362a)$$

$$\begin{aligned} \rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot \frac{t\Delta}{(DER=1)} \left(w_i^{j+1} \right) + \rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot \frac{x\Delta}{(DER=1)} \left(w_i^{j+1} \right) = - f_i^{j+1} \cdot \frac{x\Delta}{(DER=1)} \left(p_i^{j+1} \right) - \\ - f_i^{j+1} \cdot g \cdot \rho_i^{j+1} \cdot \frac{x\Delta}{(DER=1)} \left((z_1)_i^{j+1} \right) - \frac{\pi}{4} \cdot \lambda_i^{j+1} \cdot \rho_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot |w_i^{j+1}| \cdot R_i^{j+1}; \end{aligned} \quad (2.362б)$$

$$\begin{aligned} \rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot \frac{t\Delta}{(DER=1)} \left(\varepsilon_i^{j+1} \right) + \rho_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} \cdot \frac{x\Delta}{(DER=1)} \left(\varepsilon_i^{j+1} \right) = \\ = - p_i^{j+1} \cdot \frac{x\Delta}{(DER=1)} \left(w_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \right) - p_i^{j+1} \cdot \frac{t\Delta}{(DER=1)} \left(f_i^{j+1} \right) + Q_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} + \frac{\pi}{4} \cdot \lambda_i^{j+1} \cdot \rho_i^{j+1} \cdot |w_i^{j+1}|^3 \cdot R_i^{j+1} + \\ + \frac{x\Delta}{(DER=1)} \left(k_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \right) \cdot \frac{x\Delta}{(DER=1)} \left(T_i^{j+1} \right) + k_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} \cdot \frac{x\Delta}{(DER=2)} \left(T_i^{j+1} \right) - \phi_i^{j+1}; \end{aligned} \quad (2.362в)$$

$$p_i^{j+1} = p \left(\rho_i^{j+1}, T_i^{j+1} \right); \quad (2.362г)$$

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon \left(p_i^{j+1}, T_i^{j+1} \right); \quad (2.362д)$$

Как и при рассмотрении неконсервативных схем повышенного порядка (см. Раздел 2.5.1) с целью сохранения порядка аппроксимации системы (2.362) при моделировании процессов, требующих учета второй производной по пространству в уравнении (2.362в), параметры Kx и $\overline{Kx}$ в данном уравнении следует выбирать так, чтобы выполнялось условие:

$$\overline{Kx} > Kx. \quad (2.363)$$

Сплайн-схема (2.362) аппроксимирует недивергентную форму записи законов сохранения массы, импульса и энергии (2.36). Поскольку **в узлах** пространственно-временной расчетной сетки **выполняются дифференциальные формы записи** данных законов, то **в узлах расчетной сетки также выполняются и дивергентные формы записи основных законов сохранения**.

Если порядок сплайнов обеспечивает непрерывность и дифференцируемость функций, стоящих в (2.36) под знаком производных (для этого требуется выполнение следующих условий: $Kt \geq 2$, $Kx \geq 2$, $\overline{Kx} \geq 3$), то для каждой дивергентной дифференциальной производной найдется дивергентный дискретный аналог. Следовательно, **сплайн-схема является консервативной также и для систем дифференциальных уравнений в частных производных**.

Выполнение законов сохранения в дифференциальной форме записи в узлах расчетной сетки приводит к выполнению в данных узлах всевозможных представлений данной системы (например, уравнения для кинетической энергии, полной энергии, энтропии и т.д.). Существование дивергентных дискретных аналогов для всех дивергентных дифференциальных производных в этом случае обеспечивает не только консервативность, но и **полную консервативность** [69, 70, 96] **сплайн-схемы**.

Данный вывод аналогично распространяется на уравнения механики сплошных сред любой размерности.

Таким образом, показано, что сплайн-схема обладает полной консервативностью. Это позволяет моделировать уравнения газо- и гидродинамики с повышенной адекватностью и точностью за счет корректного моделирования всех возможных законов сохранения [102].

С другой стороны, сплайн-схемы являются неявными, что повышает их устойчивость по сравнению с явными и полунеявными схемами [69, 70, 97]. Повышение порядка используемых сплайнов позволяет повысить порядок аппроксимации решаемых уравнений газо- и гидродинамики, что также повышает точность расчетов. Вопросы устойчивости сплайн-схем могут быть рассмотрены по ранее приведенным алгоритмам рассуждений.

Проанализируем порядок аппроксимации исходных уравнений газовой динамики. Введем стандартные обозначения:

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad \tau_j = t_j - t_{j-1}. \quad (2.364)$$

Рассмотрим интерполяцию произвольной функции $y(x, t)$ по каждой из переменных в виде, аналогичном (2.334). Полагая, что в узле (x_i, t_j) нам известно точное значение функции y_i^j , исследуем порядок аппроксимации данной зависимости сплайном в произвольных узлах расчетной сетки (x_{i+iH}, t_j) и (x_i, t_{j+jH}) , где iH и jH – некоторые целые числа.

Пусть $\tilde{y}$ – точное значение функции $y(x, t)$ в произвольном пространственно-временном узле. Для введенной функции справедливо разложение в ряд Тейлора (при условии того, что функция $y(x, t)$ имеет непрерывные производные по времени и пространству):

$$\tilde{y}(x_{i+iH}, t)_j = \sum_{k=1}^{Kx-1} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\partial^k y}{\partial x^k} \right)_i \cdot (x_{i+iH} - x_i)^k + \sum_{k=Kx}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\partial^k y}{\partial x^k} \right)_i \cdot (x_{i+iH} - x_i)^k; \quad (2.365a)$$

$$\tilde{y}(x_i, t_{j+jH}) = \sum_{n=1}^{Kt-1} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\partial^n y}{\partial t^n} \right)_i \cdot (t_{j+jH} - t_j)^n + \sum_{n=Kt}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\partial^n y}{\partial t^n} \right)_i \cdot (t_{j+jH} - t_j)^n. \quad (2.365b)$$

Для произвольного параметра y порядки аппроксимации сплайнов по пространству и по времени обозначим через $Kx(y)$ и $Kt(y)$ соответственно. Т.к. y построенного сплайна производные непрерывны вплоть до $(Kt(y)-1)$ -го порядка по времени и $(Kx(y)-1)$ -го порядка по пространству включительно, то для интерполируемой функции справедливы соотношения:

$$y(x_{i+iH}, t_j) = \tilde{y}(x_{i+iH}, t_j) + O[(x_{i+iH} - x_i)^{Kx}] = \tilde{y}(x_{i+iH}, t_m) + O[h^{Kx}]; \quad (2.366a)$$

$$y(x_i, t_{j+jH}) = \tilde{y}(x_i, t_{j+jH}) + O[(t_{j+jH} - t_j)^{Kt}] = \tilde{y}(x_i, t_{j+jH}) + O[\tau^{Kt}]. \quad (2.366b)$$

Аналогично можно показать, что

$$y(x_{i+iH}, t_{j+jH}) = \tilde{y}(x_{i+iH}, t_{j+jH}) + O[h^{Kx}, \tau^{Kt}], \quad (2.367a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x_{i+iH}, t_j) = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(x_{i+iH}, t_j) + O[h^{Kx-1}], \quad (2.367b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x_{i+iH}, t_j) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{y}(x_{i+iH}, t_j) + O[h^{Kx-2}], \quad (2.367b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x_i, t_{m+mH}) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{y}(x_i, t_{m+mH}) + O[\tau^{Kt-1}]. \quad (2.367r)$$

Применяя полученные формулы, не составляет труда исследовать аппроксимацию системы (2.362). Здесь, для общности рассуждений, будем считать, что распределения каждого газодинамического параметра аппроксимируются сплайнами со своим порядком аппроксимации.

Уравнение (2.362a):

$$\tilde{\rho} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \tilde{f} \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \tilde{\rho} \cdot \tilde{w} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \tilde{w} \cdot \tilde{f} \cdot \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \tilde{\rho} \cdot \tilde{f} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = O(h^{Kx_1}, \tau^{Kt_1}), \quad (2.368a)$$

где

$$Kx_1 = \min[Kx(\rho)-1; Kx(f)-1; Kx(w)-1], \quad (2.368b)$$

$$Kt_1 = \min[Kt(\rho)-1; Kt(f)-1; Kt(w)]. \quad (2.368b)$$

Уравнение (2.362b):

$$\tilde{\rho} \cdot \tilde{f} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{\rho} \cdot \tilde{w} \cdot \tilde{f} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = -\tilde{f} \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \tilde{f} \cdot g \cdot \tilde{\rho} \cdot \frac{\partial \tilde{z}_1}{\partial x} - \frac{\pi}{4} \cdot \tilde{\lambda} \cdot \tilde{\rho} \cdot \tilde{w} \cdot |\tilde{w}| \cdot \tilde{R} + O(h^{Kx_2}, \tau^{Kt_2}), \quad (2.369a)$$

где

$$Kx_2 = \min[Kx(\rho); Kx(f); Kx(w)-1; Kx(p)-1; Kx(z_1)-1; Kx(\lambda); Kx(R)], \quad (2.369б)$$

$$Kt_2 = \min[Kt(w)-1; Kt(\rho); Kt(f); Kt(p); Kt(z_1); Kt(\lambda); Kt(R)]. \quad (2.369в)$$

Уравнение (2.362в):

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \cdot \tilde{f} \cdot \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \tilde{\rho} \cdot \tilde{w} \cdot \tilde{f} \cdot \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} = & -\tilde{p} \cdot \tilde{w} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} - \tilde{p} \cdot \tilde{f} \cdot \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\pi}{4} \cdot \tilde{\lambda} \cdot \tilde{\rho} \cdot |\tilde{w}|^3 \cdot \tilde{R} - \\ & - \tilde{p} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \tilde{Q} \cdot \tilde{f} - \tilde{\Phi}(T, T_{oc}) + \tilde{k} \cdot \tilde{f} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} + \tilde{f} \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x} + \tilde{k} \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + O(h^{Kx_3}, \tau^{Kt_3}), \end{aligned} \quad (2.370а)$$

где

$$\begin{aligned} Kx_3 = \min[Kx(\rho); Kx(f)-1; Kx(\varepsilon)-1; Kx(p); Kx(w)-1; Kx(\lambda); \\ Kx(R); Kx(Q); Kx(\Phi); Kx(k)-1; Kx(T)-2], \end{aligned} \quad (2.370б)$$

$$\begin{aligned} Kt_3 = \min[Kt(\rho); Kt(f)-1; Kt(\varepsilon)-1; Kt(p); Kt(w); Kt(\lambda); \\ Kt(R); Kt(Q); Kt(\Phi); Kt(k); Kt(T)]. \end{aligned} \quad (2.370в)$$

Таким образом, построенная сплайн-схема аппроксимирует исходную систему дифференциальных уравнений с порядком $O(h^{Kx_{CXEMA}}, \tau^{Kt_{CXEMA}})$, где

$$\begin{aligned} Kx_{CXEMA} = \min[Kx(\rho)-1; Kx(f)-1; Kx(w)-1; Kx(p)-1; Kx(z_1)-1; Kx(\lambda); \\ Kx(R); Kx(Q); Kx(\varepsilon)-1; Kx(\Phi); Kx(k)-1; Kx(T)-2], \end{aligned} \quad (2.371а)$$

$$\begin{aligned} Kt_{CXEMA} = \min[Kt(\rho)-1; Kt(f)-1; Kt(w)-1; Kt(p); Kt(z_1); Kt(\lambda); Kt(R); \\ Kt(\varepsilon)-1; Kt(Q); Kt(\Phi); Kt(k); Kt(T)]. \end{aligned} \quad (2.371б)$$

Рассмотрим теперь общие принципы решения сплайн-схемы. Применительно к произвольной функции $y(x, t)$ для построения сплайна по пространственной координате (вдоль оси Ox) дополнительно необходимо $(Kx(y)+1)$ ГУ; для сплайна вдоль координаты по времени (по оси Ot) требуется $(Kt(y)+1)$ ГУ.

Сплайн по оси Ox строится стандартным способом. Если при решении системы дифференциальных уравнений на границе расчетной области накладывается граничное условие (условия) на некоторую функцию $y(x, t = const)$ или на ее производные, данные условия включаются в граничные соотношения при построении сплайна. В качестве остальных ГУ можно взять так называемые нейтральные условия: нулевые значения производных высших порядков.

При построении сплайна по оси Ot воспользуемся другим алгоритмом. Допустим, найдено решение на j -ом временном слое и временных слоях с меньшими номерами. Решение предлагается производить итерационно. Покажем вариант алгоритма на примере уравнения неразрывности. Данное дифференциальное уравнение (см. (2.36а)), записанное для узла (x_i, t_j) , можно преобразовать к виду:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^{j+1} = -\frac{1}{f_i^{j+1}} \cdot \left(\rho \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + \rho \cdot w \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + w \cdot f \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \cdot f \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1}. \quad (2.372)$$

Индексом n обозначим номер итерации численного решения этого уравнения. Очередное (n -ое) приближение произвольной величины y_i^{j+1} обозначим через $y_i^{(n)}$. Допустим, что на предыдущей (n -ой) итерации все параметры найдены. Тогда значение производной $\partial \rho / \partial t$ на следующей итерации ($n+1$) можно определить по формуле:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^{(n+1)} = -\frac{1}{f_i^{j+1}} \cdot \left[\rho_i^{(n)} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^{j+1} + \rho_i^{(n)} \cdot w_i^{(n)} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^{j+1} + w_i^{(n)} \cdot f_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_i^{(n)} + \rho_i^{(n)} \cdot f_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i^{(n)} \right] \quad (2.373a)$$

или, используя обозначения сплайн-схем,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_i^{(n+1)} = & -\frac{1}{f_i^{j+1}} \cdot \left[\rho_i^{(n)} \cdot \frac{\{Spline, Kt(f)\}}{t\Delta_{(DER=1)}} \left(f_i^{j+1}\right) + \rho_i^{(n)} \cdot w_i^{(n)} \cdot \frac{\{Spline, Kx(f)\}}{x\Delta_{(DER=1)}} \left(f_i^{j+1}\right) + \right. \\ & \left. + w_i^{(n)} \cdot f_i^{j+1} \cdot \frac{\{Spline, Kt(\rho)\}}{x\Delta_{(DER=1)}} \left(\rho_i^{(n)}\right) + \rho_i^{(n)} \cdot f_i^{j+1} \cdot \frac{\{Spline, Kx(w)\}}{x\Delta_{(DER=1)}} \left(w_i^{(n)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.373б)$$

Здесь считается, что значения площадей поперечного сечения заранее известны, поэтому для величины f используется верхний индекс « $j+1$ » вместо « (n) ».

Для построения $(n+1)$ -го приближения для полинома $\rho_i(t)$ на промежутке $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ (фактически, для продолжения сплайна до следующего слоя разностной сетки по времени) можно применить следующий алгоритм. Коэффициенты данного полинома (он имеет порядок $Kt(\rho)$) предлагается находить, используя значения функции и ее производных (производных от первого порядка до порядка $(Kt(\rho)-1)$) на границе t_j . Значения перечисленных выше величин рассчитываются, используя полином на промежутке $t_{j-1} \leq t \leq t_j$. Фактически, указанные соотношения обеспечивают «сшивку» функции и низших производных для соседних полиномов. Заключительным уравнением для построения искомого полинома является (2.373).

С использованием построенного полинома $\rho_i(t)$ на промежутке $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ значение $\rho_i^{(n+1)}$ вычисляется прямой подстановкой аргумента:

$$\rho_i^{(n+1)} = \rho_i(t_{j+1}). \quad (2.374)$$

Аналогично строится алгоритм для определения остальных неизвестных параметров на $(n+1)$ -ой итерации. При условии сходимости итерационного процесса для произвольного параметра y удовлетворяется соотношение $y_i^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_i^{j+1}$, т.е. предложенный выше итерационный процесс позволяет находить решение для сплайн-схем.

В заключение настоящего Раздела отметим, что термин «сплайн-схема» в литературе встречается достаточно давно (см., например, [103, 104]). Однако в указанных работах в него вкладывался несколько иной смысл. В частности, сплайновая интерполяция искомых переменных проводилась только по пространственной координате. При этом

производные по времени аппроксимировались стандартной для разностных схем разностью назад. Вероятно, поэтому в [103, 104] предложенный способ решения дифференциальных уравнений в частных уравнений был назван «*разностными сплайн-схемами*». Очевидно, данный способ не обеспечивает выполнения дифференциальных уравнений в узлах расчетной сетки. По этой причине для разностных сплайн-схем в общем случае не выполняется условие полной консервативности. Для отличия сплайн-схем, описанных в данном Разделе (от разностных сплайн-схем), предлагается называть их *полностью консервативными сплайн-схемами*.

2.5.3. К вопросу о построении неравномерных по длине трубопроводов фиксированных разностных сеток

Данный Раздел иллюстрирует возможные методы построения разностных сеток для практического применения рассмотренных выше разностных схем. Пусть на продольной оси трубопровода задан отрезок длиной H . Длины крайних левой и правой пространственных ячеек разностной сетки, строящейся для численного анализа режимов транспортирования продуктов по трубопроводу, равны h^- и h^+ соответственно. Также задан максимально возможный коэффициент расширения/сужения соседних ячеек сетки (при дальнейшем изложении материала в Разделе этот коэффициент обозначается символом Q). Требуется построить оптимальную по количеству пространственных ячеек разностную сетку. Коэффициент расширения/сужения пространственных ячеек у разностной сетки должен удовлетворять неравенству: $1 \leq q \leq Q$, где q – указанный коэффициент.

Для упрощения изложения материала Раздела введем понятия монотонной и немонотонной сеток. *Монотонной сеткой* будет называться разностная сетка с монотонным увеличением (или уменьшением) размера ее пространственных ячеек при последовательном переходе между ними¹. В противном случае пространственная разностная сетка будет называться *немонотонной*. При этом из возможного множества немонотонных сеток здесь будут использоваться только сетки, расширяющиеся к центру моделируемого участка трубопровода.

Нахождение требуемой разностной сетки будем производить в два последовательных этапа: построение немонотонной сетки; построение монотонной сетки. В свою очередь, нахождение оптимальной (или близкой к оптимальной) немонотонной сетки будем производить также в два этапа:

- построение сетки методом «общей средней ячейки»;
- построение сетки методом «равенства последних ячеек».

В качестве *итоговой оптимальной* (или близкой к оптимальной) *неравномерной сетки* Σ из трех исследуемых вариантов сетки будет выбираться тот вариант, в котором содержится минимальное количество N пространственных ячеек. Здесь необходимо отметить, что в общем случае для заданных параметров H , h^- , h^+ и Q сетки может либо не существовать вообще, либо не существовать для какой-то части из трех исследуемых вариантов сетки. В этом случае оптимальная сетка выбирается из удавшихся вариантов построения сетки. Заметим также, что при условии существования немонотонной сетки монотонная сетка будет, по крайней мере, не лучше (по количеству ячеек), чем немонотонная.

¹ Другими словами, коэффициент увеличения длины пространственных ячеек должен быть либо только больше (или равен) единицы, либо только меньше единицы.

Построение немонотонной сетки методом «общей средней ячейки». Будем считать, что искомая сетка Σ состоит из двух подсеток: левой Σ^- и правой Σ^+ . Левая и правая сетки являются сетками, расширяющимися к центру пространственного отрезка длиной H . Нумерация пространственных ячеек данных сеток производится от границ отрезка H к его центру (см. ниже). Будем считать, что **последняя ячейка левой сетки совпадает с последней ячейкой правой сетки**. Поскольку данная ячейка является внутренней для сетки Σ , условно назовем представленный метод **методом «общей средней ячейки»**.

Параметры левой подсетки будем обозначать правым верхним индексом « $-$ », параметры правой подсетки – правым верхним индексом « $+$ », например, Σ^- и Σ^+ . Количество ячеек левой и правой подсеток обозначим через: N^- и N^+ . Общее количество ячеек искомой сетки Σ тогда равно: $N = N^- + N^+ - 1$.

Нумерация пространственных ячеек для правой и левой подсеток начинается с номера «0». Например, длины ячеек для левой подсетки будут обозначаться $h_0^-, h_1^-, h_2^-, \dots, h_{(N^--1)}^-$, для правой подсетки – $h_0^+, h_1^+, h_2^+, \dots, h_{(N^+-1)}^+$. Если считать, что каждая последующая ячейка в обеих подсетках расширяется по сравнению с предыдущей ячейкой в Q раз, то размер пространственных ячеек можно определить по формулам:

$$h_k^- = Q \cdot h_{k-1}^- = Q^k \cdot h_0^-; \quad h_k^+ = Q \cdot h_{k-1}^+ = Q^k \cdot h_0^+.$$

Используя формулы для геометрической прогрессии, можно выразить суммарные длины отрезков левой и правой подсеток:

$$H^- = h_0^- + h_1^- + h_2^- + \dots + h_{(N^--1)}^- = h_0^- \cdot \left(1 + Q + Q^2 + \dots + Q^{(N^--1)}\right) = h_0^- \cdot \frac{1 - Q^{N^-}}{1 - Q};$$

$$H^+ = h_0^+ + h_1^+ + h_2^+ + \dots + h_{(N^+-1)}^+ = h_0^+ \cdot \left(1 + Q + Q^2 + \dots + Q^{(N^+-1)}\right) = h_0^+ \cdot \frac{1 - Q^{N^+}}{1 - Q}.$$

Поскольку последние ячейки у рассматриваемых подсеток общие, справедливы следующие соотношения:

$$h_{(N^--1)}^- = h_{(N^+-1)}^+; \quad (2.375a)$$

$$Q^{(N^--1)} \cdot h_0^- = Q^{(N^+-1)} \cdot h_0^+; \quad (2.375b)$$

$$H = H^- + H^+ - h_{(N^+-1)}^+; \quad (2.376a)$$

$$H = h_0^- \cdot \frac{1 - Q^{N^-}}{1 - Q} + h_0^+ \cdot \frac{1 - Q^{N^+}}{1 - Q} - Q^{(N^+-1)} \cdot h_0^+. \quad (2.376b)$$

Учитывая то, что длины крайних ячеек h^- и h^+ общей сетки Σ заданы, имеют место равенства:

$$h_0^- = h^-; \quad h_0^+ = h^+. \quad (2.377)$$

Таким образом, количество ячеек левой и правой подсеток при заданных параметрах H , h^- , h^+ и Q являются решением системы нелинейных уравнений (2.375b), (2.376b), (2.377). Данная система сводится к нелинейному алгебраическому уравнению, которое можно решить численными методами, например, широко известным методом дихотомии (половинного деления):

$$f_1(N^+) = h^- \cdot \frac{1 - Q^{N^-(N^+)}}{1 - Q} + h^+ \cdot \frac{1 - Q^{N^+}}{1 - Q} - Q^{(N^+-1)} \cdot h^+ - H = 0, \quad (2.378a)$$

где

$$N^-(N^+) = 1 + \log_Q \left(\frac{h^+}{h^-} \cdot Q^{N^+-1} \right). \quad (2.378b)$$

Найденные из решения (2.378) параметры N^- и N^+ , вообще говоря, не являются целыми числами. **Ближайшие меньшие целые значения** (например, для числа 5,32 ближайшее меньшее целое значение равно 5) от параметров N^- и N^+ дают сетку Σ такую, что отрезок с этой сеткой имеет длину меньшую, чем H . **Ближайшие большие целые значения** от N^- и N^+ , напротив, дают сетку Σ такую, что отрезок с этой сеткой имеет длину большую, чем H .

При практической реализации численного метода решения уравнения (2.378) требуется задавать границы диапазона искомого корня. Для параметра N^+ можно предложить следующий интервал: $(0, \log_Q [1 - H \cdot (1 - Q)/h^+])$. Левая граница соответствует варианту, когда сетка Σ состоит только из левой сетки; правая граница – варианту, когда сетка Σ состоит только из правой сетки. В последнем случае выполняется соотношение

$$H = h^+ \cdot \frac{1 - Q^{N^+}}{1 - Q},$$

из которого и следует формула для правой границы диапазона.

Вернемся к поиску параметров искомой сетки. Округлим найденные величины N^- и N^+ до **ближайших больших целых значений**¹. Ниже при изложении метода «общей средней ячейки» под символами N^- и N^+ будем понимать именно округленные значения. Такой способ округления позволяет получить левую и правую подсетки с коэффициентами расширения q^- и q^+ , не превышающими Q .

В заключение алгоритма построения неравномерной немонотонной сетки методом «общей средней ячейки» требуется найти q^- и q^+ . При фиксированных целых числах N^- и N^+ их значения являются решением системы нелинейных уравнений (уравнения аналогичны (2.375), (2.376)):

$$\begin{aligned} (q^-)^{(N^--1)} \cdot h^- &= (q^+)^{(N^+-1)} \cdot h^+; \\ H &= h^- \cdot \frac{1 - (q^-)^{N^-}}{1 - (q^-)} + h^+ \cdot \frac{1 - (q^+)^{N^+}}{1 - (q^+)} - (q^+)^{(N^+-1)} \cdot h^+. \end{aligned}$$

Данная система преобразуется к нелинейному уравнению, которое можно решить численными методами:

$$f_2(q^+) = h^- \cdot \frac{1 - [q^-(q^+)]^{N^-}}{1 - [q^-(q^+)]} + h^+ \cdot \frac{1 - (q^+)^{N^+}}{1 - (q^+)} - (q^+)^{(N^+-1)} \cdot h^+ - H = 0,$$

¹ Если рассматриваемые параметры равны целым числам, то ближайшие большие значения совпадают с указанными параметрами.

где

$$q^-(q^+) = \left(\frac{h^+}{h^-} \cdot (q^+)^{(N^+-1)} \right)^{\frac{1}{N^--1}}.$$

Параметр q^+ предлагается искать в полуинтервале $(0, Q]$. Если какой-нибудь из найденных параметров окажется меньшим 1, то можно считать, что искомой сетки с заданными параметрами H , h^- , h^+ и Q не существует.

Описанный алгоритм можно улучшить. Например, в некоторых случаях существуют варианты искомой сетки, когда один из параметров N^- и N^+ можно округлить до ближайшего меньшего, а другой до ближайшего большего целого значения. Если при этом параметры q^- и q^+ окажутся не больше Q , то сетка будет удовлетворять налагаемым требованиям и иметь количество ячеек, меньшее на единицу, чем у описанного выше алгоритма.

Построение немонотонной сетки методом «равенства последних ячеек». Будем считать, что искомая сетка Σ состоит из двух подсеток: левой Σ^- и правой Σ^+ . Левая и правая подсетки являются расширяющимися к центру. Будем считать, что левая Σ^- и правая Σ^+ подсетки не имеют общих ячеек. При этом **длины последней ячейки левой сетки и последней ячейки правой сетки равны**. Данный метод условно назовем **методом «равенства последних ячеек»**.

Параметры левой подсетки будем обозначать правым верхним индексом «-», параметры правой подсетки – правым верхним индексом «+», например, Σ^- , Σ^+ . Количество ячеек левой и правой подсеток обозначим через: N^- и N^+ . Общее количество ячеек искомой сетки Σ тогда равно: $N = N^- + N^+$.

Нумерацию ячеек для правой и левой подсеток начинается с номера «0». Например, длины ячеек для левой подсетки будут обозначаться: $h_0^-, h_1^-, h_2^-, \dots, h_{(N^--1)}^-$, для правой подсетки: $h_0^+, h_1^+, h_2^+, \dots, h_{(N^+-1)}^+$. Если считать, что каждая последующая ячейка в обеих подсетках расширяется по сравнению с предыдущей ячейкой в Q раз, то длину ячеек можно определить по формулам:

$$h_k^- = Q \cdot h_{k-1}^- = Q^k \cdot h_0^-; \quad h_k^+ = Q \cdot h_{k-1}^+ = Q^k \cdot h_0^+.$$

Используя формулы для геометрической прогрессии, можно выразить суммарные длины отрезков левой и правой подсеток:

$$H^- = h_0^- + h_1^- + h_2^- + \dots + h_{(N^--1)}^- = h_0^- \cdot (1 + Q + Q^2 + \dots + Q^{(N^--1)}) = h_0^- \cdot \frac{1 - Q^{N^-}}{1 - Q};$$

$$H^+ = h_0^+ + h_1^+ + h_2^+ + \dots + h_{(N^+-1)}^+ = h_0^+ \cdot (1 + Q + Q^2 + \dots + Q^{(N^+-1)}) = h_0^+ \cdot \frac{1 - Q^{N^+}}{1 - Q}.$$

Поскольку длины последних ячеек у рассматриваемых подсеток равны, справедливы следующие соотношения:

$$h_{(N^--1)}^- = h_{(N^+-1)}^+; \quad (2.379a)$$

$$Q^{(N^- - 1)} \cdot h_0^- = Q^{(N^+ - 1)} \cdot h_0^+; \quad (2.379б)$$

$$H = H^- + H^+; \quad (2.380а)$$

$$H = h_0^- \cdot \frac{1 - Q^{N^-}}{1 - Q} + h_0^+ \cdot \frac{1 - Q^{N^+}}{1 - Q}. \quad (2.380б)$$

Учитывая то, что длины крайних ячеек h^- и h^+ общей сетки Σ заданы, имеют место равенства:

$$h_0^- = h^-; \quad h_0^+ = h^+. \quad (2.381)$$

Таким образом, количество ячеек левой и правой подсеток при заданных параметрах H , h^- , h^+ и Q являются решением системы нелинейных уравнений (2.379б), (2.380б), (2.381). Данная система сводится к нелинейному уравнению, которое можно решить численными методами:

$$f_3(N^+) = h^- \cdot \frac{1 - Q^{N^-(N^+)}}{1 - Q} + h^+ \cdot \frac{1 - Q^{N^+}}{1 - Q} - H = 0; \quad (2.382а)$$

где

$$N^-(N^+) = 1 + \log_Q \left(\frac{h^+}{h^-} \cdot Q^{N^+ - 1} \right). \quad (2.382б)$$

При практической реализации численного метода решения уравнения (2.382) требуется задавать границы диапазона искомого корня. Для параметра N^+ , по аналогии с изложенным выше в данном Разделе материалом, можно предложить следующий интервал: $(0, \log_Q [1 - H \cdot (1 - Q)/h^+])$.

Округлим найденные величины N^- и N^+ до ближайших бóльших целых значений. Ниже при изложении метода «равенства последних ячеек» под символами N^- и N^+ будем понимать именно округленные значения. Такой способ округления позволяет получить левую и правую подсетки с коэффициентами расширения q^- и q^+ , не большими, чем Q .

В заключение алгоритма построения неравномерной немонотонной сетки методом «равенства последних ячеек» требуется найти q^- и q^+ . При фиксированных целых числах N^- и N^+ их значения являются решением системы нелинейных уравнений (уравнения аналогичны (2.379), (2.380)):

$$(q^-)^{(N^- - 1)} \cdot h^- = (q^+)^{(N^+ - 1)} \cdot h^+;$$

$$H = h^- \cdot \frac{1 - (q^-)^{N^-}}{1 - (q^-)} + h^+ \cdot \frac{1 - (q^+)^{N^+}}{1 - (q^+)}.$$

Данная система преобразуется к нелинейному уравнению, которое можно решить численными методами:

$$f_4(q^+) = h^- \cdot \frac{1 - [q^-(q^+)]^{N^-}}{1 - [q^-(q^+)]} + h^+ \cdot \frac{1 - (q^+)^{N^+}}{1 - (q^+)} - H = 0;$$

где

$$q^-(q^+) = \left(\frac{h^+}{h^-} \cdot (q^+)^{(N^+-1)} \right)^{\frac{1}{N^+-1}}.$$

Параметр q^+ предлагается искать в полуинтервале $(0, Q]$. Если какой-нибудь из найденных параметров окажется меньшим 1, то можно считать, что искомой сетки с заданными параметрами H , h^- , h^+ и Q не существует.

Описанный алгоритм имеет возможности улучшения. Во-первых, в некоторых случаях можно более оптимально выбрать количество ячеек правой и левой подсеток. Во-вторых, для последних ячеек правой и левой подсеток можно задавать не строгое равенство их длин, а неравенство с учетом заданного коэффициента расширения/сужения. Однако в последнем случае требуется решать задачу нелинейного программирования, что заметно усложнит алгоритм.

Построение монотонной сетки. Будем считать, что выполняется условие: $h^- \leq h^+$. В противном случае распределение ячеек будет зеркально отраженным.

Необходимо найти разбиение для отрезка между пространственными ячейками h^- и h^+ . Обозначим указанный отрезок через $\bar{H}$. Длина отрезка $\bar{H}$ в этом случае равна: $\bar{H} = H - h^- - h^+$. Размер пространственных ячеек разностной сетки применительно к отрезку $\bar{H}$ будем обозначать через $h_0, h_1, h_2, \dots, h_{\bar{N}-1}$, где $\bar{N}$ – количество ячеек сетки для отрезка длиной $\bar{H}$. Для определения количества ячеек сетки на отрезке длиной H в этом случае можно использовать формулу: $N = \bar{N} + 2$.

По аналогии с предыдущим материалом Раздела можно записать:

$$h_k = q \cdot h_{k-1} = q^k \cdot h_0; \quad \bar{H} = h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_{\bar{N}-1} = h_0 \cdot \frac{1 - q^{\bar{N}}}{1 - q},$$

где q – искомый коэффициент расширения пространственных ячеек разностной сетки. В данном случае приемлемый результат может получиться только в случае, если для найденного значения параметра q выполняется условие $1 \leq q \leq Q$.

Как и ранее, построение пространственной разностной сетки произведем в два этапа: на первом этапе найдем оценку для количества ячеек сетки, на втором – задавшись округленным значением количества ячеек, подберем реальные коэффициенты расширения. При поиске количества ячеек зададимся сеткой, в которой коэффициент расширения q одинаков как для соседних ячеек отрезка $\bar{H}$, так и для пар ячеек $\{h^-, h_0\}$ и $\{h_{\bar{N}-1}, h^+\}$. В этом случае искомые параметры будут являться решением системы нелинейных уравнений:

$$h_0 = q \cdot h^-; \tag{2.383a}$$

$$h_{\bar{N}-1} = q^{\bar{N}-1} \cdot h_0 = \frac{1}{q} \cdot h^+; \tag{2.383б}$$

$$\bar{H} = h_0 \cdot \frac{1 - q^{\bar{N}}}{1 - q}. \tag{2.383в}$$

Покажем, что данная система сводится к нелинейному уравнению. Подставив выра-

жение для h_0 из (2.383а) в (2.383б), получаем:

$$h^+ = q^{\bar{N}+1} \cdot h^-. \quad (2.384а)$$

Подставим выражение для h_0 из (2.383а) в (2.383в):

$$\bar{H} = q \cdot h^- \cdot \frac{1 - q^{\bar{N}}}{1 - q}. \quad (2.384б)$$

Выразив $\bar{N} = \bar{N}(q)$ из (2.384а), получаем, что для нахождения искомых значений q и $\bar{N}$ достаточно решить следующее нелинейное уравнение:

$$f_5(q) = q \cdot h^- \cdot \frac{1 - q^{\bar{N}(q)}}{1 - q} - \bar{H} = 0, \quad (2.385а)$$

где

$$\bar{N}(q) = -1 + \log_q \frac{h^+}{h^-}. \quad (2.385б)$$

Если найденные из решения (2.385) значения q окажутся больше Q , то искомой сетки не существует (**как монотонной, так и немонотонной**). Объяснить утверждение об отсутствии немонотонной сетки можно следующим. У немонотонных сеток коэффициент расширения/сужения ячеек больше, чем у монотонных сеток, поскольку необходимо обеспечить как расширение ячеек (при последовательном переходе между ячейками), так и их сужение (для правой подсетки). По данной причине для левой подсетки коэффициент расширения будет большим, чем значение q . Данный факт можно использовать как критерий абсолютного отсутствия сетки при заданных параметрах H , h^- , h^+ и Q .

Вернемся к построению монотонной сетки. Округлим найденную величину $\bar{N}$ до ближайшего большего целого значения, чтобы коэффициент расширения не получился больше заданного параметра Q . Будем искать сетку, в которой коэффициент расширения ячеек для отрезка $\bar{H}$ равен q_{in} , а коэффициент расширения для пар ячеек $\{h^-, h_0\}$ и $\{h_{N-1}, h^+\}$ равен q_{bound} . В этом случае имеет место система нелинейных алгебраических уравнений:

$$h_0 = q_{bound} \cdot h^-; \quad (2.386а)$$

$$h^+ = q_{bound} \cdot h_{N-1} = q_{bound} \cdot q_{in}^{\bar{N}-1} \cdot h_0; \quad (2.386б)$$

$$\bar{H} = h_0 \cdot \frac{1 - q_{in}^{\bar{N}}}{1 - q_{in}}. \quad (2.386в)$$

Подставив выражение для h_0 из (2.386а) в (2.386б) и (2.386в), получим следующее нелинейное уравнение:

$$f_6(q_{in}) = q_{bound}(q_{in}) \cdot h^- \cdot \frac{1 - q_{in}^{\bar{N}}}{1 - q_{in}} - \bar{H} = 0, \text{ где } q_{bound}(q_{in}) = \sqrt{\frac{h^+}{h^- \cdot q_{in}^{\bar{N}-1}}}.$$

Если найденные параметры q_{in} и q_{bound} будут лежать в диапазоне

$$q_{in} \in [1/Q, Q]; \quad q_{bound} \in [1/Q, Q], \quad (2.387)$$

то можно считать, что параметры сетки найдены.

Отметим, что при выполнении условий (2.387) возможна ситуация, когда один из параметров q_{in} и q_{bound} меньше единицы, т.е. лежит в диапазоне $[1/Q, 1)$. Такие сетки монотонными назвать нельзя, поскольку при этом значения дробей h^-/h_0 и h_1/h_0 принадлежат разным диапазонам ($[1/Q, 1)$ и $[1, Q]$). Аналогично можно сказать про дроби $h_{\bar{N}-2}/h_{\bar{N}-1}$ и $h_{\bar{N}-1}/h^+$. Другими словами, разность длин соседних ячеек меняет знак по длине отрезка H . Поскольку основной участок отрезка H (отрезок $\bar{H}$) разбит на монотонную сетку, назовем сетку отрезка H «квазимонотонной». Учитывая, что отношение длин соседних ячеек отрезка H лежит в диапазоне $[1/Q, Q]$, можно считать данную сетку приемлемой, т.е. удовлетворяющей заданным требованиям.

2.5.4. Численный анализ работы крана

В данном Разделе будут рассмотрены модели, позволяющие рассчитывать параметры течения многокомпонентных газовых смесей через краны. Для наглядности изложения материала здесь анализируются модели без учета теплопроводности и диффузии. Такие допущения правомерны в силу относительно больших скоростей течения газа через кран.

Наиболее распространенной является модель, в которой перепад давления между входом и выходом крана описывается с помощью так называемого местного сопротивления. Согласно справочнику [66], потеря полного давления, вызванная местным сопротивлением, определяется по формуле:

$$\Delta p_i = \zeta_0 \cdot \frac{\rho_0 \cdot w_0^2}{2}, \quad (2.388)$$

где нижний индекс «0» соответствует некоторому конкретному сечению трубопровода. Фактически уравнение (2.388) можно интерпретировать как уравнение движения по трубопроводу в окрестности крана применительно к установившемуся течению газа.

Как правило, зависимости для коэффициента местного сопротивления ζ от параметров потока, а также характеристик крана и содержащей его трубы, подбираются на основании натурных экспериментов для установившихся течений. Значение ζ зависит от того, к какой расчетной скорости, а следовательно, к какому сечению он приведен.

Коэффициент сопротивления $\zeta_i = \frac{\Delta p_i}{\rho_i \cdot w_i^2 / 2}$, приведенный к скорости потока w_i в i -ом сечении (f_i), пересчитывается для другого сечения (например, f_0) в общем случае (плотность ρ_i изменяется вдоль потока) по формуле [66]:

$$\zeta_0 = \frac{\Delta p_i}{\rho_0 \cdot w_0^2 / 2} = \zeta_i \cdot \frac{\rho_i}{\rho_0} \cdot \frac{w_i^2}{w_0^2}, \quad (2.389)$$

так как общая сумма $\Delta p_i = \zeta_0 \cdot \frac{\rho_0 \cdot w_0^2}{2} = \zeta_i \cdot \frac{\rho_i \cdot w_i^2}{2}$.

С учетом уравнения неразрывности для установившихся течений

($\rho_0 \cdot w_0 \cdot f_0 = \rho_i \cdot w_i \cdot f_i$), получаем:

$$\zeta_0 = \zeta_i \cdot \frac{\rho_0}{\rho_i} \cdot \left(\frac{f_0}{f_i} \right)^2. \quad (2.390)$$

При $\rho_0 = \rho_i = \rho$ имеем:

$$\zeta_0 = \zeta_i \cdot \left(\frac{f_0}{f_i} \right)^2. \quad (2.391)$$

Согласно [66], применительно к описанию течения газа через запорные устройства нужно учитывать возможность значительного изменения плотности (в отличие от жидкости), что объясняется большими потерями давления. Для решения этой проблемы в данном справочнике предлагается следующая формула:

$$\Delta p_m = k_{сжс} \cdot \zeta \cdot \frac{\rho_{вх} \cdot w_{0,вх}^2}{2}, \quad (2.392)$$

где $w_{0,вх}$ – модуль средней скорости потока перед запорным устройством при давлении p_0 ; $\rho_{вх}$ – плотность газа перед запорным устройством, $k_{сжс}$ – поправка на сжимаемость газа, зависящая от отношения давления p_0 перед запорным устройством и давления p_1 за ним:

$$p_1/p_0 = 1 - \Delta p_m/p_0. \quad (2.393)$$

Тогда поправки будут иметь вид [66]:

$$k_{сжс} \approx 1,0 \text{ при } p_1/p_0 > 0,9 \text{ или } \Delta p_m < 0,1 \cdot p_0;$$

$$k_{сжс} = \frac{\Delta p_m}{p_0} \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma \cdot \left[(p_1/p_0)^{2/\gamma} - (p_1/p_0)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]} \quad (2.394)$$

при $(p_1/p_0)_{крит} < p_1/p_0 < 0,9$ или $1 - (p_1/p_0)_{крит} > \Delta p_m/p_0 > 0,1$ или приближенно

$$k_{сжс} = \frac{1}{[1 - 0,46 \cdot \Delta p_m/p_0]}, \quad (2.395)$$

где $(p_1/p_0)_{крит}$ – критическое отношение давления за запорным устройством и перед ним, при котором скорость потока в узком сечении становится равной местной скорости звука; γ – показатель адиабаты. Для воздуха и двухатомного газа $(p_1/p_0)_{крит} = 0,53$ и $1 - (p_1/p_0)_{крит} = 0,47$ [66].

Как видно, зависимость (2.392–2.395) является неявной относительно Δp_m . По рекомендации [66], расчет Δp_m , p_1/p_0 и $k_{сжс}$ следует проводить методом последовательного приближения.

По данным справочника [66], формулы (2.392–2.395) были представлены в работе [105]. При этом коэффициент $k_{сжс}$, вероятно, вводился для обеспечения возможности расчета потери давления при течении газа через арматуру с использованием формулы для ζ , полученной при натуральных экспериментах для несжимаемой жидкости. В про-

тивном случае¹ зависимость для ζ (см. (2.388)) будет включать коэффициент $k_{сж}$.

Для численной реализации рассматриваемой модели можно предложить следующий подход. Схематичное представление крана, совмещенное с расчетной пространственной сеткой, приведено на рис. 2.19. **Окрестностью крана** условно будет называться отрезок $[x_{iL-1,5}, x_{iR+1,5}]$, где $x_{iL-1,5} = 0,5 \cdot (x_{iL-1} + x_{iL-2})$ и $x_{iR+1,5} = 0,5 \cdot (x_{iR+1} + x_{iR+2})$.

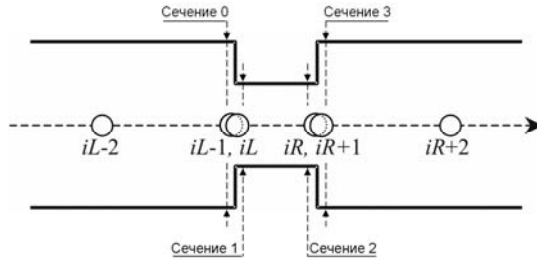


Рис. 2.19. Схематичное представление крана

Допустим, геометрическая координата крана находится между узлами iL и iR ($iR = iL + 1$). Сместим координаты узлов с индексами $(iL - 1)$, iL , iR , $(iR + 1)$ следующим образом:

$$\Delta Z = (z_1)_{iR+2} - (z_1)_{iL-2}; \quad (z_1)_{iL-1} = (z_1)_{iL} = (z_1)_{iR} = (z_1)_{iR+1} = (z_1)_{iL-2} + \frac{\Delta Z}{2};$$

$$\Delta L = x_{iR+2} - x_{iL-2}; \quad x_{iL-1} = x_{iL} = x_{iR} = x_{iR+1} = x_{iL-2} + \frac{\Delta L}{2}, \quad (2.396a)$$

где x_i — координата по длине трубы узла с индексом i , $(z_1)_i$ — высота прокладки трубопровода в узле i . На рис. 2.19 узлы iL и iR принадлежат крану (с изменяющимися сечениями), узлы $(iL - 1)$ и $(iR + 1)$ относятся к трубам, примыкающим к крану и имеющим постоянные сечения.

Для повышения наглядности при визуализации результатов расчета между парами узлов $(iL - 1, iL)$ и $(iR, iR + 1)$ можно условно задать некоторый промежуток, пропорциональный пространственному шагу. Указанный промежуток должен быть, с одной стороны, мал по сравнению с пространственным шагом расчетной сетки (чтобы расстояние $|(x_{iL-1} - x_{iL-2}) + (x_{iR+2} - x_{iR+1})|$ было близким к длине отрезка $[x_{iL-2}, x_{iR+2}]$), а с другой стороны, координаты узлов $x_{iL} = x_{iL-1}$ и $x_{iR} = x_{iR+1}$ не были бы тождественными (т.е. $x_{iL} \neq x_{iR}$), чтобы при визуализации результатов расчетов можно было различать параметры, относящиеся к каждому из узлов. Пусть длина отрезка $[x_{iL}, x_{iR}]$ определяется так:

$$\Delta x_{[iL, iR]} = k_{[iL, iR]} \cdot \frac{(x_{iR+2} - x_{iL-2})}{2}, \quad (2.397a)$$

где $k_{[iL, iR]} \in (0, 1)$ — коэффициент пропорциональности отрезка $[x_{iL}, x_{iR}]$ по сравнению с

¹ Здесь имеется в виду проведение экспериментов, связанных с исследованием течения газа по конкретной трубопроводной конструкции.

² Так как при расчетах фактически будем пренебрегать участком трубы, который соответствует отрезку $[x_{iL}, x_{iR}]$ на разностной сетке.

пространственным шагом расчетной сетки (например, $k_{[iL, iR]} = 0, 2$). Введем также величину

$$\Delta z_{[iL, iR]} = k_{[iL, iR]} \cdot \frac{[(z_1)_{iR+2} - (z_1)_{iL-2}]}{2}. \quad (2.3976)$$

В этом случае (2.396а) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta Z &= (z_1)_{iR+2} - (z_1)_{iL-2}; \quad \Delta L = x_{iR+2} - x_{iL-2}; \\ (z_1)_{iL-1} &= (z_1)_{iL} = (z_1)_{iL-2} + \frac{\Delta Z - \Delta z_{[iL, iR]}}{2}; \quad (z_1)_{iR} = (z_1)_{iR+1} = (z_1)_{iL} + \Delta z_{[iL, iR]}; \\ x_{iL-1} &= x_{iL} = x_{iL-2} + \frac{\Delta L - \Delta x_{[iL, iR]}}{2}; \quad x_{iR} = x_{iR+1} = x_{iL} + \Delta x_{[iL, iR]}. \end{aligned} \quad (2.396б)$$

Здесь при построении геометрии расчетной модели крана считалось, что

$$x_{iL-2} < x_{iL-1} = x_{iL} < x_{iR} = x_{iR+1} < x_{iR+2}. \quad (2.398а)$$

Далее при описании метода оценки параметров течения газа через кран последовательность рассматриваемых узлов будет определяться направлением потока газа. При положительном направлении потока нумерация узлов будет соответствовать (2.398а), а при отрицательном – задаваться согласно следующему условию:

$$x_{iR+2} < x_{iR+1} = x_{iR} < x_{iL} = x_{iL-1} < x_{iL-2}. \quad (2.398б)$$

Кран в трубопроводной системе при течении через него газа (или жидкости) образует местное гидравлическое сопротивление, которое можно аппроксимировать зависимостью (2.392) (или (2.388)). Если использовать формулу (2.392), то сечение, к которому относится коэффициент местного сопротивления (а также плотность и скорость газа), соответствует узлу $(iL-1)^1$.

В этом случае учет работы крана при моделировании течения продуктов по трубопроводной системе можно производить следующим образом. Для всех пространственных узлов расчетной сетки (за исключением четырех узлов: $(iL-1)$, iL , iR , $(iR+1)$), параметры течения находятся из решения разностной схемы². Рассмотрим способ расчета параметров течения для узлов $(iL-1)$ и $(iR+1)$. Предполагая длину крана малой по сравнению с длиной трубопроводной системы, будем считать течение продуктов через кран установившимся. В этом случае для рассматриваемых узлов справедливо уравнение неразрывности (площадь соответствующих поперечных сечений трубы считаем одинаковой)³:

$$\rho_{iL-1} \cdot w_{iL-1} = \rho_{iR+1} \cdot w_{iR+1}. \quad (2.399)$$

Общее количество неизвестных параметров для двух пространственных узлов рас-

¹ Предполагается, что продукт в трубопроводе на рис. 2.19 течет слева направо.

² Обратим внимание на то, что в общем случае параметры течения для внутренних пространственных узлов расчетной сетки должны находиться совместно с параметрами течения продукта в окрестности крана.

³ Поскольку здесь используется квазистационарная модель течения газа через кран, то для большей наглядности, при условии сохранения общности рассуждений, индекс по времени будет иногда опускаться.

четной сетки равно десяти (плотность ρ , скорость w , давление p , температура T и удельная внутренняя энергия ε продукта для каждого узла).

Список уравнений, соответствующих левому узлу $(iL-1)$, представлен в табл. 2.1.

Таблица 2.1

1.	Разностное уравнение неразрывности для ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$.
2.	Уравнение неразрывности (2.399) для сегмента крана между входным и выходным сечениями.
3.	Термическое УРС $p_{iL-1} = p(\rho_{iL-1}, T_{iL-1})$.
4.	Разностное уравнение энергии для ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$.
5.	Калорическое УРС $T_{iL-1} = T(\varepsilon_{iL-1}, p_{iL-1})$.

Для упрощения рассуждений каждому уравнению можно поставить в соответствие переменную. Один из вариантов данного соответствия представим в виде: первое уравнение – плотность ρ_{iL-1} ; второе уравнение – скорость w_{iL-1} ; третье уравнение – давление p_{iL-1} ; четвертое – удельная внутренняя энергия ε_{iL-1} ; пятое уравнение – температура T_{iL-1} . Предложение провести соответствие между уравнением и параметром ни в коем случае не означает, что конкретный параметр следует находить напрямую из соответствующего уравнения. Как было отмечено ранее, каждый неизвестный параметр является решением всей системы разностных уравнений. Однако такое соответствие наглядно помогает «связать» количество неизвестных с количеством уравнений. К тому же при решении системы разностных уравнений методами типа «предиктор – корректор»¹ на каждой итерации очередное приближение каждого искомого параметра может определяться из соответствующего ему уравнения.

Поясним один из способов расчета параметров для разностной ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$, используемой в представленном списке. Рассмотрим сначала внутренние ячейки разностной сетки. Каждая из данных ячеек (с базовым узлом i) характеризуется отрезком $[x_{i-0,5}, x_{i+0,5}]$, где $x_{i\pm 0,5} = 0,5 \cdot (x_i + x_{i\pm 1})$. Отсюда видно, что в каждой внутренней ячейке задействованы три соседних узла сетки. Назовем такие ячейки «трехузловыми». По отношению к ячейке $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$ (с базовым узлом $(iL-1)$) можно сказать, что она является «двухузловой», т.к. $x_{iL-1,5} = 0,5 \cdot (x_{iL-1} + x_{iL-2})$. Представленные в настоящей монографии разностные схемы предназначены для описания течения газа применительно к «трехузловой» разностной ячейке $[x_{i-0,5}, x_{i+0,5}]$. Покажем способ использования разностных схем, разработанных для «трехузловой» ячейки, применительно к расчету параметров течения газа для «двухузловой» ячейки. Пусть $i = iL-1$. Также для однозначности (при этом не теряя общности), скорость течения газа будем считать положительной (тогда $i+1 = iL$). Примем узел $(i+1)$ в качестве фиктивного узла. В этом

¹ К таким методам можно отнести метод простой итерации, метод Зейделя и др.

случае $y_{i+1} = y_i$, где y_k – любой параметр разностной схемы для k -го узла расчетной сетки. В качестве параметра y_k могут выступать x_k , f_k , ρ_k , w_k и т.д. Тогда решение схемы для «трехузловой» ячейки $[x_{i-0,5}, x_{i+0,5}]$ будет полностью идентично решению для «двухузловой» ячейки $[x_{i-0,5}, x_i] = [x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$.

Аналогично можно показать, как разностную схему для «трехузловой» ячейки $[x_{i-0,5}, x_{i+0,5}]$ с помощью фиктивного узла $(i-1)$ привести в соответствие со схемой для «двухузловой» ячейки $[x_i, x_{i+0,5}]$.

Вернемся к рассмотрению модели течения продуктов через кран. Список уравнений, соответствующих правому узлу $(iR+1)$, представлен в табл. 2.2.

Таблица 2.2

1.	Закон сопротивления крана (2.392) или (2.388).
2.	Разностное уравнение движения для ячейки $[x_{iR+1}, x_{iR+1,5}]$.
3.	Термическое УРС $\rho_{iR+1} = \rho(p_{iR+1}, T_{iR+1})$.
4.	Уравнение (2.400) связи значений удельной внутренней энергии для сечений трубы, соответствующих (по направлению течения газа) входу и выходу крана (см. ниже).
5.	Калорическое УРС $T_{iR+1} = T(\varepsilon_{iR+1}, p_{iR+1})$.

$$\begin{aligned}
 & \left[\rho_{iR+1} \cdot \left(\varepsilon_{iR+1} + \frac{w_{iR+1}^2}{2} \right) + p_{iR+1} \right] \cdot w_{iR+1} \cdot f_{iR+1} = \\
 & = \left[\rho_{iL-1} \cdot \left(\varepsilon_{iL-1} + \frac{w_{iL-1}^2}{2} \right) + p_{iL-1} \right] \cdot w_{iL-1} \cdot f_{iL-1} - \frac{\tilde{\Phi} \cdot (iR - iL)}{f_{iL-1}}, \quad (2.400)
 \end{aligned}$$

где $\tilde{\Phi}$ – тепловой поток через стенки крана ($\tilde{\Phi} > 0$ – идет отвод тепла), Вт. Вывод уравнения (2.400) будет продемонстрирован при рассмотрении модели течения газа через автоматический регулятор давления (см. ниже – Раздел 2.7.3). Вывод уравнения для модели крана полностью аналогичен. Присутствие коэффициента $(iR - iL)$ перед источником слагаемым позволяет моделировать течения продукта как с положительными скоростями, так и с отрицательными (в этом случае номер узла с индексом iL на единицу больше номера узла с индексом iR (см. выше)). Здесь отметим, что в первом приближении значением $\tilde{\Phi}$ можно пренебречь.

Один из вариантов соответствия уравнений газодинамическим параметрам для пространственного узла $(iR+1)$ можно представить в виде: первое уравнение – плотность ρ_{iR+1} ; второе уравнение – скорость w_{iR+1} ; третье уравнение – давление p_{iR+1} ; четвертое – удельная внутренняя энергия ε_{iR+1} ; пятое уравнение – температура T_{iR+1} .

Сделаем небольшое отступление. Как видно из рассмотренного ранее материала настоящего Раздела, в предложенной модели крана не осуществляется решение уравнения

движения для левой ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$, а также – уравнения неразрывности и энергии для правой ячейки $[x_{iR+1}, x_{iR+1,5}]$. Несмотря на это, можно утверждать, что аппроксимация указанных уравнений для рассматриваемых ячеек существует. Аргументируем это на примере уравнения движения для ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$.

Запишем уравнение (2.399) в виде:

$$w_{iL-1} = \frac{Q_{valve}}{\rho_{iL-1} \cdot f_{iL-1}}, \quad (2.401a)$$

где Q_{valve} – массовый расход газа через кран:

$$Q_{valve} = w_{iR+1} \cdot \rho_{iR+1} \cdot f_{iR+1}. \quad (2.401a)$$

Представленный список уравнений для расчета параметров в узле $(iL-1)$ (см. табл. 2.1) соответствует численной реализации ГУ¹ $Q = Q_{valve}(t)$ (где Q – массовый расход).

Многолетний опыт решения предложенных в данной Главе разностных схем показывает, что при использовании подобной численной реализации ГУ для гладких точных решений наблюдаются гладкие численные решения². Под этим термином для произвольного расчетного параметра y (это может быть ρ , p , w и т.д.) понимается стремление

$$y_i \rightarrow y_{i+1} \quad (2.402)$$

при стремлении пространственно-временных шагов разностной сетки к нулю.

Отсутствие условия гладкости решения (2.402) для пары узлов $(iL-2, iL-1)$ может означать разрывный характер поведения функций, значения которых оцениваются численным методом, хотя точное решение является гладким. Покажем это на примере схемы с центральными разностями. Согласно табл. 2.1, для численного расчета параметров течения газа на входе крана решается уравнение неразрывности, но уравнение движения не решается. Используя принцип схемы с центральными разностями, данное «двухузловое» разностное уравнение применительно к установившемуся течению для ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$ можно записать в виде:

$$\frac{\rho_{iL-1} \cdot w_{iL-1} \cdot f_{iL-1} - 0,5 \cdot (\rho_{iL-1} \cdot w_{iL-1} \cdot f_{iL-1} + \rho_{iL-2} \cdot w_{iL-2} \cdot f_{iL-2})}{0,5 \cdot (x_{iL-1} - x_{iL-2})} = 0, \quad (2.403)$$

откуда для трубы постоянного поперечного сечения следует, что

$$\rho_{iL-1} = \rho_{iL-2} \cdot \frac{w_{iL-2}}{w_{iL-1}}. \quad (2.404)$$

Отсутствие уравнения движения для дополнительной связи четырех параметров формулы (2.404) позволяет сделать допущение о том, что существует возможность появления таких течений, для которых выполняется разностное уравнение неразрывности (2.403),

¹ В научно-технической литературе такие ГУ часто называют условиями в зоне сопряжения или контактными условиями.

² При условии, что решение для внутренних узлов разностной сетки обладает подобным свойством.

т.е. массовый расход по длине трубы постоянен¹, но плотность (как и скорость) при переходе между узлами $(iL-2)$ и $(iL-1)$ терпит разрыв. Поскольку (2.401) выполняется для любых значений пространственных шагов расчетной сетки, могут наблюдаться скачки плотности и скорости даже при сколь угодно малом измельчении пространственных шагов разностной сетки, т.е. разностное решение будет разрывным. Другими словами, условие гладкости (2.399) соблюдаться не будет.

Если численное решение (для предложенного способа моделирования течения газа через кран) было бы гладким (см. выше), то при стремлении пространственно-временных шагов расчетной сетки к нулю для произвольного параметра y (это может быть ρ , p , w и т.д.) была бы справедлива запись:

$$y_{iL-2} \rightarrow y_{iL-1}. \quad (2.405)$$

Заметим, что аппроксимация основных законов сохранения (массы, импульса и полной энергии) для «трехузловой» ячейки с базовым узлом $(iL-2)$ существует². Таким образом, **при стремлении разностных уравнений к их дифференциальным аналогам** (за счет уменьшения пространственно-временных шагов) **в узле $(iL-1)$ будет наблюдаться выполнение всех дифференциальных законов сохранения** (т.к. данный узел будет совпадать с узлом $(iL-2)$). Это доказывает то, что для узла $(iL-1)$ также существует аппроксимация основных законов сохранения.

Покажем, что при использовании схем с центральными разностями условие гладкости решения (2.402) для пары узлов $(iL-2, iL-1)$ выполняется³. Рассмотрим для наглядности (однако не теряя общности рассуждений⁴) установившееся течение идеального газа в горизонтальной трубе постоянного поперечного сечения. Дифференциальное уравнение движения (2.36) для такого течения примет вид:

$$\frac{d(\rho \cdot w^2)}{dx} = 0. \quad (2.406)$$

Применяя принцип схем с центральными разностями, «трехузловой» разностный аналог данного уравнения для ближайшей к крану внутренней ячейки расчетной сетки (с базовым узлом $(iL-2)$) можно записать в виде:

$$\frac{1}{0,5 \cdot (x_{iL-1} - x_{iL-3})} \cdot [0,25 \cdot (\rho_{iL-1} \cdot w_{iL-1} + \rho_{iL-2} \cdot w_{iL-2}) \cdot (w_{iL-1} + w_{iL-2}) - 0,25 \cdot (\rho_{iL-2} \cdot w_{iL-2} + \rho_{iL-3} \cdot w_{iL-3}) \cdot (w_{iL-2} + w_{iL-3})] = 0. \quad (2.407)$$

Т.к. для внутренних узлов расчетной сетки выполняется условие гладкости решения (см. выше), то при стремлении пространственных шагов к нулю

$$y_{iL-3} \rightarrow y_{iL-2}. \quad (2.408)$$

¹ Напомним, что рассматриваются установившиеся течения.

² Заметим, что данная ячейка $[x_{iL-2,5}, x_{iL-1,5}]$ граничит с рассмотренной выше ячейкой $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$.

³ При условии, что решение для внутренних узлов разностной сетки также обладает этим свойством.

⁴ Доказательство для общего случая проводится аналогичным способом, но более громоздко.

Обозначим удельный (на единицу площади) поток импульса для внутренних узлов расчетной сетки через

$$K = \rho_{iL-2} \cdot w_{iL-2}^2 = \rho_{iL-3} \cdot w_{iL-3}^2. \quad (2.409)$$

Правая часть разности (2.407), находящейся в квадратных скобках, согласно (2.408, 2.409), равна K (при условии стремления пространственных шагов к нулю). Умножим (2.407) на $[0,5 \cdot (x_{iL-1} - x_{iL-3})]$:

$$0,25 \cdot (\rho_{iL-1} \cdot w_{iL-1} + \rho_{iL-2} \cdot w_{iL-2}) \cdot (w_{iL-1} + w_{iL-2}) = K. \quad (2.410)$$

Подставим (2.404) в (2.410):

$$0,5 \cdot \rho_{iL-2} \cdot w_{iL-2} \cdot (w_{iL-1} + w_{iL-2}) = K = \rho_{iL-2} \cdot w_{iL-2}^2. \quad (2.411)$$

Отсюда

$$w_{iL-1} = w_{iL-2}. \quad (2.412)$$

С учетом (2.401) имеем:

$$\rho_{iL-1} = \rho_{iL-2}. \quad (2.413)$$

Таким образом, показано, что **решение задачи является гладким**. Другими словами, **численное решение** для функций $\rho = \rho(x)$ и $w = w(x)$ **не испытывает разрыв при стремлении пространственных шагов к нулю**. Что и требовалось доказать.

Доказательство гладкости функций при использовании предложенного подхода моделирования ГУ основано на гладкости решения для внутренних узлов расчетной сетки. К сожалению, данное свойство решения наблюдается не всегда. Иногда решение системы разностных уравнений носит так называемый «пилообразный» характер. В этом случае значения параметров, полученные с использованием разностной схемы, поочередно располагаются сверху и снизу относительно истинного решения. Подобная «рябь» может объясняться отсутствием монотонности разностной схемы (см. также [95]). «Пилообразный» характер решения может наблюдаться при сколь угодно измельчении сетки. Этим объясняется возможное отличие плотности газа в узлах $(iL-1)$ и $(iL-2)$ (присутствующее в уравнении (2.404)) при стремлении длины пространственных шагов разностной сетки к нулю.

Рассмотрим другое свойство решения, полученного с использованием предложенного в настоящем Разделе подхода. Как было показано, способ моделирования ГУ $Q = Q(t)$ (как и способ моделирования течения газа через кран) позволяет аппроксимировать систему уравнений газовой динамики. Однако на ячейках расчетной сетки, примыкающих к границам, может не наблюдаться консервативности. Объясняется это тем, что для некоторых ячеек интегральные законы сохранения напрямую не реализуются. Например, для ячейки $[x_{iR+1}, x_{iR+1,5}]$ отсутствует выполнение разностного уравнения неразрывности. Рассмотрим, как и ранее, установившееся течение¹. Для внутренних узлов разностной сетки рассматриваемое уравнение ($Q_{i-0,5} = Q_{i+0,5}$, где $Q_{i\pm 0,5} = 0,5 \cdot [\rho_i \cdot w_i \cdot f_i + \rho_{i\pm 1} \cdot w_{i\pm 1} \cdot f_{i\pm 1}]$) выполняется автоматически. Для ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$, согласно пункту 1 табл. 2.1, имеем: $Q_{iL-1,5} = Q_{iL-1}$, где

¹ Не теряя общности рассуждений, будем рассматривать схему с центральными разностями.

$Q_{iL-1,5} = 0,5 \cdot [\rho_{iL-1} \cdot w_{iL-1} \cdot f_{iL-1} + \rho_{iL-2} \cdot w_{iL-2} \cdot f_{iL-2}]$; $Q_{iL-1} = \rho_{iL-1} \cdot w_{iL-1} \cdot f_{iL-1}$. Для узлов $(iL-1)$ и $(iR+1)$, характеризующих ограничивающие кран сечения трубы (см. рис. 2.19), аналогичное уравнение можно записать в виде (см. (2.399)): $Q_{iL-1} = Q_{iR+1}$, где $Q_{iR+1} = \rho_{iR+1} \cdot w_{iR+1} \cdot f_{iR+1}$.

Проанализируем теперь ячейки разностной сетки, начиная с левого конца трубы до узла $(iR+1)$ (т.е. до границы ячеек с координатой x_{iR+1}). Согласно представленным выше рассуждениям, массовый расход газа при установившемся течении для каждой из границ рассматриваемых ячеек одинаков, что соответствует физике процесса. Аналогичный вывод можно сделать для ячеек разностной сетки, начиная с границы¹ $x_{iR+1,5} = 0,5 \cdot (x_{iR+1} + x_{iR+2})$ до правого конца трубы. Однако прямая связь массовых расходов для границ с координатами x_{iR+1} и $x_{iR+1,5}$ (границ ячейки с базовым узлом $(iR+1)$) отсутствует, т.к. для ограниченной этими сечениями ячейки отсутствует выполнение уравнения неразрывности (см. табл. 2.2).

Приведенные выше рассуждения демонстрируют, что при установившемся течении газа может наблюдаться «нефизичный» скачок массового расхода для границ ячейки $[x_{iR+1}, x_{iR+1,5}]$. Таким образом, здесь будет присутствовать фиктивный дисбаланс потоков массы на границах ячейки одновременно с тем, что масса газа в ячейке с течением времени не изменяется. Данный вывод подтверждает возможное отсутствие консервативности численного решения. Все вышесказанное можно отнести и к остальным законам сохранения. Вместе с тем, в силу наличия аппроксимации законов сохранения (см. выше), можно говорить о том, что данный дисбаланс массовых расходов имеет величину порядка погрешности аппроксимации. По указанной причине для подробных разностных сеток этой погрешностью в первом приближении можно пренебречь. Однако для разностных сеток с крупным шагом по пространству данная погрешность может стать существенной.

Для решения исследуемой проблемы (связанной с отсутствием консервативности) разработан подход, базирующийся на использовании разностных схем на смещенных сетках. Он достаточно подробно будет изложен в Главе 5 применительно к схемам с разностями против потока. С небольшими модификациями данный подход применим и для схем с центральными разностями.

Опыт моделирования течения газовых смесей по трубопроводным системам показывает, что для подобного способа задания ГУ предпочтительным является использование схем с центральными разностями². Одной из причин такого заключения является следующее свойство схемы: при анализе параметров установившихся режимов транспортирования продуктов по трубопроводным системам уравнение неразрывности для граничной ячейки³ соблюдается⁴. Указанное свойство схемы было обнаружено в процессе серии численных экспериментов и при практическом использовании схем с центральными разностями в ГДС.

¹ Данная граница является левой границей для «трехузловой» внутренней ячейки $[x_{iR+1,5}, x_{iR+2,5}]$ (с базовым узлом $(iR+2)$) и правой границей для «двухузловой» ячейки $[x_{iR+1}, x_{iR+1,5}]$ (с базовым узлом $(iR+1)$), относящейся к окрестности крана.

² По сравнению со схемой, построенной на базе разностей против потока.

³ Речь идет о равенстве массовых потоков газа на границах ячейки.

⁴ Даже если оно не участвует в вычислительных алгоритмах (включая алгоритмы установления [69]) в силу специфики записи ГУ.

Вернемся к построению модели течения газа через кран. Для возможности анализа параметров течения газа внутри крана (рассматриваются узлы iL и iR , см. рис. 2.19) представим кран в виде участка трубы с меньшим поперечным сечением площадью

$$f_{\text{valve}} = k_{\text{valve}} \cdot f, \quad (2.414)$$

где f – площадь поперечного сечения однониточного участка трубопровода, содержащего кран; $k_{\text{valve}} \in [0,1]$ – уровень (степень) открытости крана. В случае $k_{\text{valve}} = 1$ параметры в узлах $(iL-1)$, iL , iR , $(iR+1)$ соответственно приравниваются друг к другу. При $k_{\text{valve}} = 0$ параметры потока следует моделировать, используя так называемое ГУ «Полное перекрытие».

Опишем метод расчета параметров течения газа внутри крана. Данный метод имеет ряд допущений, в силу чего значения искомых параметров можно рассматривать как оценочные для области течения газа, находящейся внутри крана.

Рассмотрим сначала узел iL . Будем полагать, что узлы $(iL-1)$ и iL соответствуют течению с развитой турбулентностью, при этом параметры осреднены по сечению каждой из труб. В данной модели предполагается, что скорость газа терпит разрыв. В реальности сужение потока происходит плавно на некотором сегменте трубы до участка с меньшим поперечным сечением (рис. 2.20).

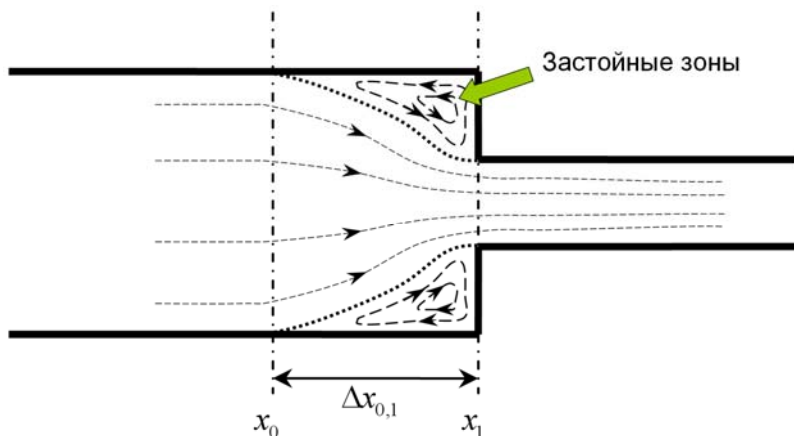


Рис. 2.20. Схема течения газа через сужение поперечного сечения

В предлагаемой здесь модели течения газа условно считается, что между узлами $(iL-1)$ и iL (см. рис. 2.19) существует малый участок трубы (по сравнению с общей длиной трубопровода), на котором поток успевает сузиться. В первом приближении поверхность, где скорости газа малы по сравнению со скоростью потока, будем моделировать как стенку трубы. В этом случае для анализа параметров течения газа по рассматриваемому переходному участку можно применить модель (2.36).

Обобщенный алгоритм моделирования течения газа через кран можно разделить на три шага:

- 1) моделирование сужения потока;
- 2) учет сопротивления течению газа в узком поперечном сечении модельного крана;
- 3) моделирование расширения газового потока.

Эффективная длина модельного крана в данном случае может отличаться от значения длины реального крана. Это объясняется тем, что на участках сужения и расширения потока также присутствует гидравлическое сопротивление [66]. Фактически эффективная длина модельного крана при этом учитывает общую длину потока, на котором оказывается основное сопротивление течению, обусловленное наличием крана.

Итак, с учетом отсутствия трения, а также пренебрегая действием массовых сил (в силу малой длины крана), уравнение движения (2.36б) для установившегося течения примет вид:

$$\frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w^2)}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2.415)$$

Проинтегрируем данное уравнение по отрезку $\Delta x_{0,1} = [x_0, x_1]$ (см. рис. 2.20).

$$\rho_1 \cdot f_1 \cdot w_1^2 - \rho_0 \cdot f_0 \cdot w_0^2 + \bar{f} \cdot (p_1 - p_0) = 0, \quad (2.416a)$$

где $\bar{f}$ – некоторое среднее значение f на отрезке $\Delta x_{0,1}$. Будем оценивать его следующим образом:

$$\bar{f} = \frac{f_0 + f_1}{2}. \quad (2.417)$$

Уравнение неразрывности (2.36a) и уравнение энергии (2.36в) для рассматриваемого течения газа на отрезке $\Delta x_{0,1}$ (см. рис. 2.20) будут выглядеть так:

$$(\rho \cdot f \cdot w)_1 - (\rho \cdot f \cdot w)_0 = 0; \quad (2.416б)$$

$$\left[\rho \cdot f \cdot w \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right]_1 - \left[\rho \cdot f \cdot w \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right]_0 = 0. \quad (2.416в)$$

Будем относить тепловой поток, характеризующий теплообмен транспортируемого газа с окружающей средой, к узкой части крана. По данной причине параметр $\tilde{\Phi}$ в уравнении (2.416в) отсутствует.

Преобразуя (2.416a) и (2.416в) с учетом (2.416б), окончательно получаем систему уравнений для расчета параметров течения газа в сечении крана, определяемого координатой x_1 (см. рис. 2.20):

$$w_1 = \frac{\rho_0 \cdot f_0 \cdot w_0}{f_1 \cdot \rho_1}; \quad (2.418a)$$

$$p_1 = p_0 - \frac{\rho_1 \cdot f_1 \cdot w_1^2 - \rho_0 \cdot f_0 \cdot w_0^2}{\bar{f}} = p_0 - \rho_0 \cdot f_0 \cdot w_0 \cdot \frac{w_1 - w_0}{\bar{f}}; \quad (2.418б)$$

$$\varepsilon_1 = \left(\varepsilon_0 + \frac{w_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \right) - \left(\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right); \quad (2.418в)$$

$$T_1 = T(\varepsilon_1, p_1); \quad \rho_1 = \rho(p_1, T_1); \quad (2.418г)$$

$$\bar{f} = 0,5 \cdot (f_0 + f_1). \quad (2.418д)$$

Рассуждения для области расширения потока можно провести по аналогии, в силу чего результирующая система уравнений для нее будет подобна системе (2.418). В этом случае сечение с координатой x_1 следует понимать как начальное (по потоку газа) сече-

ние переходного участка потока газа, относящееся к узкой части конструкции модельного крана. Поперечное сечение с координатой x_0 – это конечное (по потоку газа) сечение переходного участка, относящееся к участку одностороннего трубопровода, содержащего кран.

Окончательно, используя для обозначения индексы расчетной сетки в окрестности крана (а также ряд введенных ранее параметров), систему уравнений для расчета параметров течения газа внутри него можно записать в следующем виде. Для входного (по потоку газа) сечения узкой части крана:

$$w_{iL} = \frac{\rho_{iL-1} \cdot w_{iL-1}}{k_{valve} \cdot \rho_{iL}}; \quad (2.419a)$$

$$p_{iL} = p_{iL-1} - \rho_{iL-1} \cdot f_{iL-1} \cdot w_{iL-1} \cdot \frac{w_{iL} - w_{iL-1}}{\bar{f}_{iL-0,5}}; \quad (2.419б)$$

$$\varepsilon_{iL} = \left(\varepsilon_{iL-1} + \frac{w_{iL-1}^2}{2} + \frac{p_{iL-1}}{\rho_{iL-1}} \right) - \left(\frac{w_{iL}^2}{2} + \frac{p_{iL}}{\rho_{iL}} \right); \quad (2.419в)$$

$$T_{iL} = T(\varepsilon_{iL}, p_{iL}); \quad \rho_{iL} = \rho(p_{iL}, T_{iL}); \quad (2.419г)$$

$$\bar{f}_{iL-0,5} = 0,5 \cdot f_{iL-1} \cdot (1 + k_{valve}). \quad (2.419д)$$

Для выходного (по потоку газа) сечения узкой части крана:

$$w_{iR} = \frac{\rho_{iR+1} \cdot w_{iR+1}}{k_{valve} \cdot \rho_{iR}}; \quad (2.420a)$$

$$p_{iR} = p_{iR+1} - \rho_{iR+1} \cdot f_{iR+1} \cdot w_{iR+1} \cdot \frac{w_{iR} - w_{iR+1}}{\bar{f}_{iR+0,5}}; \quad (2.420б)$$

$$\varepsilon_{iR} = \left(\varepsilon_{iR+1} + \frac{w_{iR+1}^2}{2} + \frac{p_{iR+1}}{\rho_{iR+1}} \right) - \left(\frac{w_{iR}^2}{2} + \frac{p_{iR}}{\rho_{iR}} \right); \quad (2.420в)$$

$$T_{iR} = T(\varepsilon_{iR}, p_{iR}); \quad \rho_{iR} = \rho(p_{iR}, T_{iR}); \quad (2.420г)$$

$$\bar{f}_{iR+0,5} = 0,5 \cdot f_{iR+1} \cdot (1 + k_{valve}). \quad (2.420д)$$

Анализ параметров в узлах iL и iR позволяет учесть возможность сверхкритического течения газа через кран. Опишем физическую сущность данного явления.

Процесс течения газа через кран (область с суженным поперечным сечением) можно условно представить в виде истечения газа через сопло из сосуда. В данном случае сосудом является часть трубы, расположенная до крана. Соплом является суженная часть модельного крана.

Как известно (см., например, [84]), если давление p_0 в емкости, куда происходит истечение¹ (данная величина в [84] называется **противодавлением**), меньше критического значения², то скорость течения газа на срезе сопла равна местной скорости звука. Данный эффект имеет простое физическое объяснение. Слабые возмущения, а следовательно, и небольшие изменения противодавления распространяются по частицам среды со скоростью звука. Но сами частицы на срезе сопла имеют скорость, равную

¹ Данная емкость соответствует части трубы, находящейся после крана (по потоку газа).

² Критическое давление является функцией от параметров течения газа, находящегося в сосуде.

скорости звука, и возмущения не могут проникнуть внутрь сопла, они сносятся потоком. Частицы, находящиеся внутри сопла, после достижения критического режима течения «не знают» о том, что происходит вне сопла.

Однако изменение противодействия p_0 будет сказываться на течении газа **вне** сопла. В свободной струе вне сопла скорость при понижении p_0 может стать сверхзвуковой, но поток в свободной струе не будет однородным (скорость существенно меняется по сечению трубы). При этом формируется система скачков уплотнения.

Наличие сверхкритического течения газа через кран будем определять, анализируя скорость его течения в узком сечении крана (в узле iR). Переход на алгоритм анализа данного режима необходимо производить, если расчетное значение¹ скорости течения газа (точнее, его модуль) в узле iR превышает местную скорость звука:

$$c_0 = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T}, \quad (2.421)$$

где γ – показатель адиабаты; R – газовая постоянная. При установлении данного факта необходимо применять модель сверхкритического течения газа.

Ограничение скорости течения газа через узкое поперечное сечение крана, фактически, означает газодинамическое «запирание» потока, т.е. ограничение массового расхода газа через кран. Учитывая это, можно говорить о том, что основное сопротивление транспортированию газа при рассматриваемом течении оказывают скачки уплотнения. На основании вышесказанного при моделировании сверхкритического течения газа через кран будем пренебрегать местным сопротивлением в окрестности крана (т.е. до и после системы скачков уплотнения). Также здесь мы будем относить теплообмен с окружающей средой к участку потока газа после крана (области расширения потока). Используя перечисленные допущения, мы приходим к модели установившегося изотропического течения газа для участка крана между сечениями, соответствующими пространственным узлам $(iL-1)$ и iR разностной сетки. По данной причине значения газодинамических параметров в узлах iL и iR (см. рис. 2.19) будут равны, т.к. они соответствуют участку трубы с одинаковым поперечным сечением без трения и теплообмена:

$$y_L = y_R, \quad (2.422)$$

где y – значение произвольного газодинамического параметра (например, давления, скорости, температуры транспортируемого газа и т.д.).

Для вычисления газодинамических параметров в рассматриваемых узлах воспользуемся подходом, предложенным выше при использовании рис. 2.20. В этом случае систему уравнений, описывающую связь параметров в узлах iL и $(iL-1)$, можно записать в виде (см. также (2.419), (2.421)):

$$w_{iL} = w_{iR} = (iR - iL) \cdot (c_0)_{iR}; \quad (2.423a)$$

$$w_{iL-1} = \frac{w_{iL} \cdot k_{valve} \cdot \rho_{iL}}{\rho_{iL-1}}; \quad (2.423б)$$

$$p_{iL} = p_{iL-1} - \rho_{iL-1} \cdot f_{iL-1} \cdot w_{iL-1} \cdot \frac{w_{iL} - w_{iL-1}}{f_{iL-0,5}}; \quad (2.423в)$$

¹ Здесь имеется ввиду расчетное значение, найденное из совместного решения модели течения газа по трубопроводу и модели течения газа через кран (см. табл. 2.1 и 2.2, а также уравнения (2.419), (2.420)).

$$\varepsilon_{iL} = \left(\varepsilon_{iL-1} + \frac{w_{iL-1}^2}{2} + \frac{p_{iL-1}}{\rho_{iL-1}} \right) - \left(\frac{w_{iL}^2}{2} + \frac{p_{iL}}{\rho_{iL}} \right); \quad (2.423r)$$

$$T_{iL} = T(\varepsilon_{iL}, p_{iL}); \quad \rho_{iL} = \rho(p_{iL}, T_{iL}); \quad (2.423д)$$

$$\bar{f}_{iL-0,5} = 0,5 \cdot f_{iL-1} \cdot (1 + k_{valve}); \quad (2.423е)$$

$$(c_0)_{iR} = \sqrt{\gamma_{iR} \cdot R \cdot T_{iR}}. \quad (2.423ж)$$

В формуле (2.423а) коэффициент $(iR - iL)$ нужен для задания знака скорости. В частности, если газ течет справа налево, то $iL > iR$ (из чего следует, что $iR - iL = -1$). Другими словами, коэффициент $(iR - iL)$ в этом случае позволяет задать отрицательное значение скорости течения газа в узлах iL и iR .

Для нахождения давления, плотности, температуры и удельной внутренней энергии необходимо совместно решить разностную задачу о течении газа в подводящем к крану трубопроводе с использованием ГУ (в поперечном сечении, относящемся к узлу $(iL - 1)$), аналогичному ГУ $Q = Q_{valve}(t)$. Для реализации указанного ГУ можно воспользоваться системой уравнений, приведенной в табл. 2.3 для «получайки» $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$ (с базовым узлом $(iL - 1)$).

Таблица 2.3

1.	Равенство массовых расходов для сечений, соответствующих узлам iL и $(iL - 1)$.
2.	Разностное уравнение неразрывности для ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$.
3.	Термическое УРС $p_{iL-1} = p(\rho_{iL-1}, T_{iL-1})$.
4.	Разностное уравнение энергии для ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$.
5.	Калорическое УРС $T_{iL-1} = T(\varepsilon_{iL-1}, p_{iL-1})$.

Приведем объяснение физической сущности численной реализации данного ГУ. Допустим, плотность газа в узле iR известна. В этом случае ограничение по скорости течения газа в суженной части крана вызывает ограничение по массовому расходу газа через кран: $Q_{valve} = \rho_{iR} \cdot w_{iR} \cdot f_{iR} = \rho_{iR} \cdot w_{iR} \cdot f_{iL-1} \cdot k_{valve}$. В силу использования квазистационарной модели транспорта газа через кран данное значение массового расхода Q_{valve} будет наблюдаться во всех узлах крана: $(iL - 1)$, iL , iR и $(iR + 1)$ (см., например, (2.423б)). При известном массовом расходе в сечении $(iL - 1)$ параметры потока в трубе до данного сечения включительно можно определить, заменяя кран его эквивалентным влиянием, а именно, заданием на данной границе ГУ $Q_{iL-1} = Q_{valve}$. Этим объясняется содержание табл. 2.3.

С другой стороны, плотность газа в узкой части крана в общем случае неизвестна.

Однако эта величина связана с давлением и удельной внутренней энергией через термическое и калорическое УРС. Рассчитав данные значения, мы автоматически определяем плотность газа. Для вычисления p_{iL} и ε_{iL} в системе уравнений (2.423) использованы законы сохранения импульса (2.423в) и полной энергии (2.423г). Они позволяют «связать» давление и удельную внутреннюю энергию в узлах iL и $(iL-1)$. Параметры же потока в узле $(iL-1)$ находятся из уравнений, включенных в табл. 2.3.

Опишем способ расчета параметров течения газа в узле $(iR+1)$ при известных (расчитанных) значениях газодинамических параметров в узле iR . Будем условно считать, что сечение трубы, соответствующее узлу $(iR+1)$, находится на значительном расстоянии от крана¹, обеспечивающем однородность течения газа в указанном сечении. Поскольку газовый поток после крана не оказывает никакого воздействия на параметры потока до крана и в узкой части крана, то для анализа параметров течения газа после крана его модель будем представлять в виде функциональных зависимостей, имитирующих влияние этого крана. Подобно тому, как это было сделано выше, зададим в сечении $(iR+1)$ ГУ: $Q_{iR+1} = Q_{valve}$. Тогда список уравнений (соответствующих узлу $(iR+1)$) для расчета рассматриваемых газодинамических параметров будет иметь вид, приведенный в табл. 2.4.

Таблица 2.4

1.	Равенство массовых расходов для сечений, соответствующих узлам iR и $(iR+1)$.
2.	Разностное уравнение неразрывности для ячейки $[x_{iR+1}, x_{iR+1,5}]$.
3.	Термическое УРС $p_{iR+1} = p(\rho_{iR+1}, T_{iR+1})$.
4.	Закон сохранения полной энергии (2.424) для участка трубы между сечениями в узлах iR и $(iR+1)$ (см. ниже).
5.	Калорическое УРС $T_{iR+1} = T(\varepsilon_{iR+1}, p_{iR+1})$.

$$\varepsilon_{iR+1} = \left(\varepsilon_{iR} + \frac{(w_{iR})^2}{2} + \frac{p_{iR}}{\rho_{iR}} \right) - \left(\frac{(w_{iR+1})^2}{2} + \frac{p_{iR+1}}{\rho_{iR+1}} \right) - \frac{(iR - iL) \cdot \tilde{\Phi}}{\rho_{iR+1} \cdot w_{iR+1} \cdot f_{iR+1}}. \quad (2.424)$$

Уравнение (2.424) получено по аналогии с (2.416в). Отличием от указанного уравнения является учет теплообмена газа с окружающей средой.

Далее предлагается список формул, являющийся обобщением изложенного выше материала. При этом данный список формулируется в виде, позволяющем его применять в итерационном процессе метода решения типа «предиктор – корректор». Его совместное использование с разностными уравнениями², описывающими течение газа для внутрен-

¹ Но данное расстояние мало по сравнению с размерами трубопроводной системы.

² При условии записи данных уравнений в форме, позволяющей реализовать итерационный процесс решения, используемый в ГДС.

них узлов разностной сетки, позволяет анализировать течение газа по разветвленной системе трубопроводов. Используемые обозначения номеров узлов имеют следующий смысл (см. рис. 2.19). Узел iL соответствует начальному (по потоку газа) узкому поперечному сечению крана; узел iR – конечному (по потоку газа) узкому поперечному сечению крана; узлы $(iL - 1)$ и $(iR + 1)$ – ближайшие (соответственно к узлам iL и iR) узлы разностной сетки трубопроводов, не изменяющих свое проходное сечение.

Если на некоторых этапах метода моделирования течений через кран возникнет необходимость в решении каких-либо разностных уравнений газовой динамики, то совместно с указанием этого факта будет приведен один из возможных вариантов записи данных уравнений (для участков трубы постоянного сечения). Приводимые здесь варианты двухслойных разностных уравнений газовой динамики построены на базе центральных разностей. По данной причине их целесообразно применять совместно с разностными уравнениями для внутренних узлов расчетной сетки, построенными по тому же принципу.

Номер итерации обозначим через k . Для произвольного газодинамического параметра y (например, давления, скорости, температуры и т.д.) при условии сходимости итерационного процесса выполняется равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} y_i^k = y_i^{j+1}$ (предполагается, что значения параметров течения на j -ом слое по времени известны). Формулы итерационного процесса предназначены для нахождения параметров на $(j + 1)$ -ом временном слое.

1. ДЛЯ ДОКРИТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ЧЕРЕЗ КРАН.

1.1. Формулы для оценки параметров течения газа в узле $(iL - 1)$.

1.1.1. Разностное уравнение неразрывности для ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$ (искомая величина ρ_{iL-1}^{k+1}). Например¹,

$$\frac{\rho_{iL-1}^{k+1} - \rho_{iL-1}^j}{t_{j+1} - t_j} + \frac{\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k - 0,5 \cdot (\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k + \rho_{iL-2}^k \cdot w_{iL-2}^k)}{0,5 \cdot (x_{iL-1} - x_{iL-2})} = 0 \quad (2.425a^*)$$

или, после приведения параметров:

$$\frac{\rho_{iL-1}^{k+1} - \rho_{iL-1}^j}{t_{j+1} - t_j} + \frac{\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k - \rho_{iL-2}^k \cdot w_{iL-2}^k}{x_{iL-1} - x_{iL-2}} = 0. \quad (2.425a)$$

1.1.2. Уравнение неразрывности (см. (2.399)) для сегмента крана между его входным и выходным поперечными сечениями (искомая величина w_{iL-1}^{k+1}):

$$w_{iL-1}^{k+1} = \frac{\rho_{iR+1}^k \cdot w_{iR+1}^k}{\rho_{iL-1}^k}. \quad (2.425b)$$

¹ Данное уравнение предназначено для вычисления значения ρ_{iL-1}^{k+1} , т.е. плотности в узле $(iL - 1)$ на $(k + 1)$ -ой итерации. Искомый параметр легко выражается из данного уравнения через известные величины с предыдущего слоя по времени и предыдущей итерации. Здесь и далее использование подобной формы записи позволяет отобразить физическую сущность применяемых уравнений.

1.1.3. Термическое УРС для узла $(iL-1)$ (искомая величина p_{iL-1}^{k+1}):

$$p_{iL-1}^{k+1} = p(\rho_{iL-1}^k, T_{iL-1}^k). \quad (2.425в)$$

1.1.4. Разностное уравнение энергии для ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$ (искомая величина ε_{iL-1}^{k+1}). Например,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{iL-1}^k \cdot \varepsilon_{iL-1}^{k+1} - \rho_{iL-1}^j \cdot \varepsilon_{iL-1}^j}{t_{j+1} - t_j} + \frac{\rho_{iL-1}^k \cdot (w_{iL-1}^k)^2 - \rho_{iL-1}^j \cdot (w_{iL-1}^j)^2}{2 \cdot (t_{j+1} - t_j)} + \\ & + \frac{\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k \cdot \varepsilon_{iL-1}^k - 0,25 \cdot (\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k + \rho_{iL-2}^k \cdot w_{iL-2}^k) \cdot (\varepsilon_{iL-1}^k + \varepsilon_{iL-2}^k)}{0,5 \cdot (x_{iL-1} - x_{iL-2})} + \\ & + \frac{0,5 \cdot \rho_{iL-1}^k \cdot (w_{iL-1}^k)^3 - 0,25 \cdot (\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k + \rho_{iL-2}^k \cdot w_{iL-2}^k) \cdot w_{iL-1}^k \cdot w_{iL-2}^k}{0,5 \cdot (x_{iL-1} - x_{iL-2})} = \\ & = - \frac{p_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k - p_{iL-2}^k \cdot w_{iL-2}^k}{x_{iL-1} - x_{iL-2}} - \rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k \cdot g \cdot \frac{(z_1)_{iL-1}^k - (z_1)_{iL-2}^k}{x_{iL-1} - x_{iL-2}} + \\ & + Q_{iL-1}^{j+1} - \frac{\Phi(T_{iL-1}^k, T_{oc})}{f_{iL-1}}. \end{aligned} \quad (2.425г)$$

1.1.5. Калорическое УРС для узла $(iL-1)$ (искомая величина T_{iL-1}^{k+1}):

$$T_{iL-1}^{k+1} = T(\varepsilon_{iL-1}^k, p_{iL-1}^k). \quad (2.425д)$$

1.2. Формулы для оценки параметров течения газа в узле $(iR+1)$.

1.2.1. Закон газодинамического сопротивления крана (2.392) (искомая величина p_{iR+1}^{k+1}):

$$p_{iR+1}^{k+1} = p_{iL-1}^k - K_{сжс}^k \cdot \zeta(w_{0,ex}^k) \cdot \frac{\rho_{ex}^k \cdot [w_{0,ex}^k]^2}{2}; \quad (2.426а)$$

$$K_{сжс}^k = \frac{p_{iL-1}^k - p_{iR+1}^k}{p_{iL-1}^k} \cdot \frac{\gamma_{iL-1}^k - 1}{\gamma_{iL-1}^k \cdot \left[\left(p_{iR+1}^k / p_{iL-1}^k \right)^{2/\gamma_{iL-1}^k} - \left(p_{iR+1}^k / p_{iL-1}^k \right)^{\frac{\gamma_{iL-1}^k}{\gamma_{iL-1}^k - 1}} \right]}. \quad (2.426б)$$

Если параметр ζ приведен к поперечному сечению до крана (соответствующему узлу $(iL-1)$), то

$$\rho_{ex}^k = \rho_{iL-1}^k, \quad w_{0,ex}^k = w_{iL-1}^k. \quad (2.426в)$$

В случае если сжимаемостью газа можно пренебречь или зависимость для $\zeta(w_{0,ex}^k)$ получена с учетом его сжимаемости, полагаем $K_{сж}^k = 1$. При условии

$$\frac{p_{iL-1}^k - p_{iR+1}^k}{p_{iL-1}^k} < \delta,$$

где $\delta > 0$ – некоторая малая величина, также полагаем $K_{сж}^k = 1$.

- 1.2.2. Разностное уравнение движения для ячейки $[x_{iR+1}, x_{iR+1,5}]$ (искомая величина w_{iR+1}^{k+1}). Например,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{iR+1}^k \cdot w_{iR+1}^{k+1} - \rho_{iR+1}^j \cdot w_{iR+1}^j}{t_{j+1} - t_j} + \\ & + \frac{0,25 \cdot (\rho_{iR+1}^k \cdot w_{iR+1}^k + \rho_{iR+2}^k \cdot w_{iR+2}^k) \cdot (w_{iR+1}^k + w_{iR+2}^k) - \rho_{iR+1}^k \cdot (w_{iR+1}^k)^2}{0,5 \cdot (x_{iR+2} - x_{iR+1})} = \\ & = - \frac{p_{iR+2}^k - p_{iR+1}^k}{x_{iR+2} - x_{iR+1}} - \rho_{iR+1}^k \cdot g \cdot \frac{(z_1)_{iR+2}^k - (z_1)_{iR+1}^k}{x_{iR+2} - x_{iR+1}} - \\ & - \frac{\lambda(w_{iR+1}^k) \cdot \rho_{iR+1}^k \cdot w_{iR+1}^k \cdot |w_{iR+1}^k| \cdot \sqrt{\pi}}{4 \cdot \sqrt{f_{iR+1}}}. \end{aligned} \quad (2.426г)$$

- 1.2.3. Термическое УРС для узла $(iR+1)$ (искомая величина ρ_{iR+1}^{k+1}):

$$\rho_{iR+1}^{k+1} = \rho(p_{iR+1}^k, T_{iR+1}^k). \quad (2.426д)$$

- 1.2.4. Уравнение связи значений удельной внутренней энергии для сечений трубы, соответствующих (по направлению течения газа) входу и выходу крана (искомая величина ε_{iR+1}^{k+1}) (см. (2.400)):

$$\varepsilon_{iR+1}^{k+1} = \varepsilon_{iL-1}^k + \frac{(w_{iL-1}^k)^2 - (w_{iR+1}^k)^2}{2} + \left(\frac{p_{iL-1}^k}{\rho_{iL-1}^k} - \frac{p_{iR+1}^k}{\rho_{iR+1}^k} \right) - \frac{\tilde{\Phi} \cdot (iR - iL)}{w_{iR+1}^k \cdot f_{iR+1} \cdot \rho_{iR+1}^k}, \quad (2.426е)$$

где $\tilde{\Phi}$ – тепловой поток через стенки крана ($\tilde{\Phi} > 0$ – идет отвод тепла), Bm . В первом приближении значением $\tilde{\Phi}$ можно пренебречь.

- 1.2.5. Калорическое УРС для узла $(iR+1)$ (искомая величина T_{iR+1}^{k+1}):

$$T_{iR+1}^{k+1} = T(\varepsilon_{iR+1}^k, p_{iR+1}^k). \quad (2.426ж)$$

1.3. Формулы для оценки параметров течения газа в узле iL .

- 1.3.1. Уравнение неразрывности для сегмента трубы между узлами $(iL-1)$ и iL (см.

(2.419а)) (искомая величина w_{iL}^{k+1}):

$$w_{iL}^{k+1} = \frac{\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k}{k_{valve} \cdot \rho_{iL}^k}. \quad (2.427a)$$

1.3.2. Уравнение движения для сегмента трубы между узлами $(iL-1)$ и iL (см. (2.419б)) (искомая величина p_{iL}^{k+1}):

$$p_{iL}^{k+1} = p_{iL-1}^k - \rho_{iL-1}^k \cdot f_{iL-1} \cdot w_{iL-1}^k \cdot \frac{w_{iL}^k - w_{iL-1}^k}{\bar{f}_{iL-0,5}}, \quad (2.427б)$$

где

$$\bar{f}_{iL-0,5} \approx 0,5 \cdot f_{iL-1} \cdot (1 + k_{valve}). \quad (2.427в)$$

1.3.3. Уравнение энергии для сегмента трубы между узлами $(iL-1)$ и iL (см. (2.419в)) (искомая величина ε_{iL}^{k+1}):

$$\varepsilon_{iL}^{k+1} = \left(\varepsilon_{iL-1}^k + \frac{(w_{iL-1}^k)^2}{2} + \frac{p_{iL-1}^k}{\rho_{iL-1}^k} \right) - \left(\frac{(w_{iL}^k)^2}{2} + \frac{p_{iL}^k}{\rho_{iL}^k} \right). \quad (2.427г)$$

1.3.4. Термическое и калорическое УРС для узла iL (см. (2.419г)) (искомые величины T_{iL}^{k+1} и ρ_{iL}^{k+1}):

$$T_{iL}^{k+1} = T(p_{iL}^k, T_{iL}^k); \quad \rho_{iL}^{k+1} = \rho(p_{iL}^k, T_{iL}^k). \quad (2.427д)$$

1.4. Формулы для оценки параметров течения газа в узле iR .

1.4.1. Уравнение неразрывности для сегмента трубы между узлами iR и $(iR+1)$ (см. (2.420а)) (искомая величина w_{iR}^{k+1}):

$$w_{iR}^{k+1} = \frac{\rho_{iR+1}^k \cdot w_{iR+1}^k}{k_{valve} \cdot \rho_{iR}^k}. \quad (2.428a)$$

1.4.2. Уравнение движения для сегмента трубы между узлами iR и $(iR+1)$ (см. (2.420б)) (искомая величина p_{iR}^{k+1}):

$$p_{iR}^{k+1} = p_{iR+1}^k - \rho_{iR+1}^k \cdot f_{iR+1} \cdot w_{iR+1}^k \cdot \frac{w_{iR}^k - w_{iR+1}^k}{\bar{f}_{iR+0,5}}, \quad (2.428б)$$

где

$$\bar{f}_{iR+0,5} \approx 0,5 \cdot f_{iR+1} \cdot (1 + k_{valve}). \quad (2.428в)$$

1.4.3. Уравнение энергии для сегмента трубы между узлами iR и $(iR+1)$ (см.

(2.420в)) (искомая величина ε_{iR}^{k+1}):

$$\varepsilon_{iR}^{k+1} = \left(\varepsilon_{iR+1}^k + \frac{(w_{iR+1}^k)^2}{2} + \frac{p_{iR+1}^k}{\rho_{iR+1}^k} \right) - \left(\frac{(w_{iR}^k)^2}{2} + \frac{p_{iR}^k}{\rho_{iR}^k} \right). \quad (2.428г)$$

1.4.4. Термическое и калорическое УРС для узла iR (см. (2.420г)) (искомые величины T_{iR}^{k+1} и ρ_{iR}^{k+1}):

$$T_{iR}^{k+1} = T(\varepsilon_{iR}^k, p_{iR}^k); \quad \rho_{iR}^{k+1} = \rho(p_{iR}^k, T_{iR}^k). \quad (2.428д)$$

2. ДЛЯ СВЕРХКРИТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ЧЕРЕЗ КРАН. Наличие данного режима определяется после расчета параметров течения газа (например, после одной итерации) по алгоритму анализа **докритического течения газа через кран**. Переход к моделированию сверхкритического режима происходит при выполнении условия:

$$(w_{iR}^{k+1})^2 \geq (c_{iR}^{k+1})^2 = \gamma_{iR}^{k+1} \cdot R \cdot T_{iR}^{k+1}. \quad (2.429)$$

2.1. Формулы для оценки параметров течения газа в узле iR .

2.1.1. Задание скорости газа в узле iR (см. (2.423)) (искомая величина w_{iR}^{k+1}):

$$w_{iR}^{k+1} = (iR - iL) \cdot \sqrt{\gamma_{iR}^k \cdot R \cdot T_{iR}^k}. \quad (2.430а)$$

2.1.2. Расчет давления газа в узле iR (см. (2.422)) (искомая величина p_{iR}^{k+1}):

$$p_{iR}^{k+1} = p_{iL}^k. \quad (2.430б)$$

2.1.3. Расчет плотности газа в узле iR (см. (2.422)) (искомая величина ρ_{iR}^{k+1}):

$$\rho_{iR}^{k+1} = \rho_{iL}^k. \quad (2.430в)$$

2.1.4. Расчет удельной внутренней энергии газа в узле iR (см. (2.422)) (искомая величина ε_{iR}^{k+1}):

$$\varepsilon_{iR}^{k+1} = \varepsilon_{iL}^k. \quad (2.430г)$$

2.1.5. Расчет температуры газа в узле iR (см. (2.422)) (искомая величина T_{iR}^{k+1}):

$$T_{iR}^{k+1} = T_{iL}^k. \quad (2.430д)$$

2.2. Формулы для оценки параметров течения газа в узле iL .

2.2.1. Расчет скорости газа в узле iL (см. (2.422)) (искомая величина w_{iL}^{k+1}):

$$w_{iL}^{k+1} = w_{iR}^k. \quad (2.431а)$$

2.2.2. Уравнение движения для сегмента трубы между узлами iL и $(iL-1)$ (см.

(2.423в)) (искомая величина p_{iL}^{k+1}):

$$p_{iL}^{k+1} = p_{iL-1}^k - \rho_{iL-1}^k \cdot f_{iL-1} \cdot w_{iL-1}^k \cdot \frac{w_{iL}^k - w_{iL-1}^k}{f_{iL-0,5}}. \quad (2.431б)$$

2.2.3. Уравнение энергии для сегмента трубы между узлами iL и $(iL-1)$ (см. (2.423г)) (искомая величина ε_{iL}^{k+1}):

$$\varepsilon_{iL}^{k+1} = \left(\varepsilon_{iL-1}^k + \frac{(w_{iL-1}^k)^2}{2} + \frac{p_{iL-1}^k}{\rho_{iL-1}^k} \right) - \left(\frac{(w_{iL}^k)^2}{2} + \frac{p_{iL}^k}{\rho_{iL}^k} \right). \quad (2.431в)$$

2.2.4. Термическое и калорическое УРС для узла iL (см. (2.423д)) (искомые величины T_{iL}^{k+1} и ρ_{iL}^{k+1}):

$$T_{iL}^{k+1} = T(\varepsilon_{iL}^k, p_{iL}^k); \quad \rho_{iL}^{k+1} = \rho(p_{iL}^k, T_{iL}^k). \quad (2.431г)$$

2.3. Формулы для оценки параметров течения газа в узле $(iL-1)$.

2.3.1. Равенство массовых расходов газа для сечений, соответствующих узлам iL и $(iL-1)$ (см. (2.423б)) (искомая величина w_{iL-1}^{k+1})¹:

$$w_{iL-1}^{k+1} = \frac{w_{iL}^k \cdot k_{\text{valve}} \cdot \rho_{iL}^k}{\rho_{iL-1}^k}. \quad (2.432а)$$

2.3.2. Разностное уравнение неразрывности для ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$ (искомая величина ρ_{iL-1}^{k+1}). Например,

$$\frac{\rho_{iL-1}^{k+1} - \rho_{iL-1}^j}{t_{j+1} - t_j} + \frac{\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k - \rho_{iL-2}^k \cdot w_{iL-2}^k}{x_{iL-1} - x_{iL-2}} = 0. \quad (2.432б)$$

2.3.3. Разностное уравнение энергии для ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$ (искомая величина ε_{iL-1}^{k+1}). Например,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{iL-1}^k \cdot \varepsilon_{iL-1}^{k+1} - \rho_{iL-1}^j \cdot \varepsilon_{iL-1}^j}{t_{j+1} - t_j} + \frac{\rho_{iL-1}^k \cdot (w_{iL-1}^k)^2 - \rho_{iL-1}^j \cdot (w_{iL-1}^j)^2}{2 \cdot (t_{j+1} - t_j)} + \\ & + \frac{\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k \cdot \varepsilon_{iL-1}^k - 0,25 \cdot (\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k + \rho_{iL-2}^k \cdot w_{iL-2}^k) \cdot (\varepsilon_{iL-1}^k + \varepsilon_{iL-2}^k)}{0,5 \cdot (x_{iL-1} - x_{iL-2})} + \\ & + \frac{0,5 \cdot \rho_{iL-1}^k \cdot (w_{iL-1}^k)^3 - 0,25 \cdot (\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k + \rho_{iL-2}^k \cdot w_{iL-2}^k) \cdot w_{iL-1}^k \cdot w_{iL-2}^k}{0,5 \cdot (x_{iL-1} - x_{iL-2})} = \end{aligned}$$

¹ Данное соотношение играет роль уравнения неразрывности при установившемся течении для сегмента трубы, ограниченного указанными поперечными сечениями.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{p_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k - p_{iL-2}^k \cdot w_{iL-2}^k}{x_{iL-1} - x_{iL-2}} - \rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k \cdot g \cdot \frac{(z_1)_{iL-1}^k - (z_1)_{iL-2}^k}{x_{iL-1} - x_{iL-2}} + \\
&+ Q_{iL-1}^{j+1} - \frac{\Phi(T_{iL-1}^k, T_{oc})}{f_{iL-1}}.
\end{aligned} \tag{2.432в}$$

2.3.4. Термическое и калорическое УРС для узла $(iL-1)$ (искомые величины T_{iL-1}^{k+1} и p_{iL-1}^{k+1}):

$$T_{iL-1}^{k+1} = T(\varepsilon_{iL-1}^k, p_{iL-1}^k); \quad p_{iL-1}^{k+1} = p(\rho_{iL-1}^k, T_{iL-1}^k). \tag{2.432г}$$

2.4. Формулы для оценки параметров течения газа в узле $(iR+1)$.

2.4.1. Равенство массовых расходов газа для сечений, соответствующих узлам iR и $(iR+1)$ (искомая величина w_{iR+1}^{k+1}):

$$w_{iR+1}^{k+1} = \frac{w_{iR}^k \cdot k_{valve} \cdot \rho_{iR}^k}{\rho_{iR+1}^k}. \tag{2.433а}$$

2.4.2. Уравнение неразрывности для ячейки $[x_{iR+1}, x_{iR+1,5}]$ (искомая величина ρ_{iR+1}^{k+1}). Например,

$$\frac{\rho_{iR+1}^{k+1} - \rho_{iR+1}^j}{t_{j+1} - t_j} + \frac{\rho_{iR+1}^k \cdot w_{iR+1}^k - \rho_{iR+2}^k \cdot w_{iR+2}^k}{x_{iR+1} - x_{iR+2}} = 0. \tag{2.433б}$$

2.4.3. Уравнение энергии для сегмента трубы между узлами iR и $(iR+1)$ (см. (2.424)) (искомая величина ε_{iR+1}^{k+1}):

$$\varepsilon_{iR+1}^{k+1} = \left(\varepsilon_{iR}^k + \frac{(w_{iR}^k)^2}{2} + \frac{p_{iR}^k}{\rho_{iR}^k} \right) - \left(\frac{(w_{iR+1}^k)^2}{2} + \frac{p_{iR+1}^k}{\rho_{iR+1}^k} \right) - \frac{(iR - iL) \cdot \tilde{\Phi}}{\rho_{iR+1}^k \cdot w_{iR+1}^k \cdot f_{iR+1}}. \tag{2.433в}$$

2.4.4. Термическое и калорическое УРС для узла $(iR+1)$ (искомые величины T_{iR+1}^{k+1} и p_{iR+1}^{k+1}) соответственно:

$$T_{iR+1}^{k+1} = T(\varepsilon_{iR+1}^k, p_{iR+1}^k); \quad p_{iR+1}^{k+1} = p(\rho_{iR+1}^k, T_{iR+1}^k). \tag{2.433г}$$

Обобщим рассмотренную модель на случай течения многокомпонентной газовой смеси (напомним, что здесь рассматриваются течения без учета теплопроводности и диффузии). Для этого проинтегрируем уравнение (2.54б) по отрезку трубы между произвольными поперечными сечениями «1» и «2». Для установившегося течения без учета диффузии оно будет выглядеть следующим образом:

$$(\rho \cdot w \cdot f \cdot Y_m)_2 - (\rho \cdot w \cdot f \cdot Y_m)_1 = 0, \quad m = \overline{1, N_s}, \tag{2.434а}$$

или, с учетом равенства $\left[(\rho \cdot w \cdot f)_2 = (\rho \cdot w \cdot f)_1 \right]$:

$$(Y_m)_2 = (Y_m)_1, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (2.434б)$$

На основании данных уравнений получаем, что в силу использования квазистационарной модели течения газа через кран, концентрации компонент газовой смеси в узлах $(iL-1)$, iL , iR , $(iR+1)$ равны:

$$(Y_m)_{iL-1} = (Y_m)_{iL} = (Y_m)_{iR} = (Y_m)_{iR+1}, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (2.434б)$$

Дополним и изменим представленные выше списки уравнений для возможности численного анализа параметров транспортирования многокомпонентных газовых смесей через трубопроводные системы, содержащие краны.

Следует отметить, что запись применяемых УРС при моделировании течения многокомпонентных газовых смесей претерпевает изменения. В частности, вместо термического УРС $p = p(\rho, T)$ и калорического УРС $\varepsilon = \varepsilon(p, T)$ в (2.54) используются соответственно следующие формы их записи: $p = p(\{S_{смеси}\})$ и $\varepsilon = \varepsilon(\{S_{смеси}\})$, где $\{S_{смеси}\}$ – набор параметров, определяющих описываемую величину. Применительно к рассматриваемым течениям данные формы записи можно конкретизировать следующим образом: $p = p(\rho, T, Y_0, Y_1, \dots, Y_{N_s})$; $\varepsilon = \varepsilon(p, T, Y_0, Y_1, \dots, Y_{N_s})$.

Ниже будут представлены модификации и дополнения (по отношению к приведенному списку уравнений), позволяющие моделировать течения многокомпонентных газовых смесей. Для модифицированных уравнений их номера будут помечаться символом «*». Номера списков модифицированных уравнений также будут помечены указанным символом.

1*. Для докритического течения многокомпонентной газовой смеси через кран (дополнения и модификации).

1.1*. Формулы для оценки параметров течения газовой смеси в узле $(iL-1)$ (дополнения и модификации).

1.1.3*. Термическое УРС для узла $(iL-1)$ (искомая величина p_{iL-1}^{k+1}):

$$p_{iL-1}^{k+1} = p\left(\rho_{iL-1}^k, T_{iL-1}^k, (Y_0)_{iL-1}^k, (Y_1)_{iL-1}^k, \dots, (Y_{N_s})_{iL-1}^k\right). \quad (2.425в*)$$

1.1.5*. Калорическое УРС для узла $(iL-1)$ (искомая величина T_{iL-1}^{k+1}):

$$T_{iL-1}^{k+1} = T\left(\varepsilon_{iL-1}^k, p_{iL-1}^k, (Y_0)_{iL-1}^k, (Y_1)_{iL-1}^k, \dots, (Y_{N_s})_{iL-1}^k\right). \quad (2.425д*)$$

1.1.6. Разностные уравнения неразрывности компонент для ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$ (искомые величины $(Y_m)_{iL-1}^{k+1}, m = \overline{1, N_s}$). Например,

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_{iL-1}^k \cdot (Y_m)_{iL-1}^{k+1} - \rho_{iL-1}^j \cdot (Y_m)_{iL-1}^j}{t_{j+1} - t_j} + \\
& + \frac{\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k \cdot (Y_m)_{iL-1}^k - 0,25 \cdot (\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k + \rho_{iL-2}^k \cdot w_{iL-2}^k) \cdot ((Y_m)_{iL-1}^k + (Y_m)_{iL-2}^k)}{0,5 \cdot (x_{iL-1} - x_{iL-2})} = 0, \\
& m = \overline{1, N_S - 1}; \quad (Y_{N_S})_{iL-1}^{k+1} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} (Y_m)_{iL-1}^{k+1}.
\end{aligned} \tag{2.425e}$$

1.2*. Формулы для оценки параметров течения газовой смеси в узле $(iR+1)$ (дополнения и модификации).

1.2.3*. Термическое УРС для узла $(iR+1)$ (искомая величина ρ_{iR+1}^{k+1}):

$$\rho_{iR+1}^{k+1} = \rho \left(p_{iR+1}^k, T_{iR+1}^k, (Y_0)_{iR+1}^k, (Y_1)_{iR+1}^k, \dots, (Y_{N_S})_{iR+1}^k \right). \tag{2.426д*}$$

1.2.5*. Калорическое УРС для узла $(iR+1)$ (искомая величина T_{iR+1}^{k+1}):

$$T_{iR+1}^{k+1} = T \left(\varepsilon_{iR+1}^k, p_{iR+1}^k, (Y_0)_{iR+1}^k, (Y_1)_{iR+1}^k, \dots, (Y_{N_S})_{iR+1}^k \right). \tag{2.426ж*}$$

1.2.6. Задание концентрации компонент для узла $(iR+1)$ (искомые величины $(Y_m)_{iR+1}^{k+1}$, $m = \overline{1, N_S}$):

$$(Y_m)_{iR+1}^{k+1} = (Y_m)_{iL-1}^k, \quad m = \overline{1, N_S}. \tag{2.426з}$$

1.3*. Формулы для оценки параметров течения газовой смеси в узле iL (дополнения и модификации).

1.3.4*. Термическое и калорическое УРС для узла iL (искомые величины T_{iL}^{k+1} и ρ_{iL}^{k+1}):

$$\begin{aligned}
T_{iL}^{k+1} &= T \left(\varepsilon_{iL}^k, p_{iL}^k, (Y_0)_{iL}^k, (Y_1)_{iL}^k, \dots, (Y_{N_S})_{iL}^k \right); \\
\rho_{iL}^{k+1} &= \rho \left(p_{iL}^k, T_{iL}^k, (Y_0)_{iL}^k, (Y_1)_{iL}^k, \dots, (Y_{N_S})_{iL}^k \right).
\end{aligned} \tag{2.427д*}$$

1.3.5. Задание концентрации компонент для узла iL (искомые величины $(Y_m)_{iL}^{k+1}$, $m = \overline{1, N_S}$):

$$(Y_m)_{iL}^{k+1} = (Y_m)_{iL-1}^k, \quad m = \overline{1, N_S}. \tag{2.427е}$$

1.4*. Формулы для оценки параметров течения газовой смеси в узле iR (дополнения и модификации).

1.4.4*. Термическое и калорическое УРС для узла iR (искомые величины T_{iR}^{k+1} и ρ_{iR}^{k+1}):

$$\begin{aligned}
 T_{iR}^{k+1} &= T\left(\varepsilon_{iR}^k, p_{iR}^k, (Y_0)_{iR}^k, (Y_1)_{iR}^k, \dots, (Y_{N_s})_{iR}^k\right); \\
 \rho_{iR}^{k+1} &= \rho\left(p_{iR}^k, T_{iR}^k, (Y_0)_{iR}^k, (Y_1)_{iR}^k, \dots, (Y_{N_s})_{iR}^k\right).
 \end{aligned}
 \quad (2.428\text{д}^*)$$

1.4.5. Задание концентрации компонент для узла iR (искомые величины $(Y_m)_{iR}^{k+1}$, $m = \overline{1, N_s}$):

$$(Y_m)_{iR}^{k+1} = (Y_m)_{iL-1}^k, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (2.428\text{е})$$

2*. Для сверхкритического течения многокомпонентной газовой смеси через кран (дополнения и модификации).

2.1*. Формулы для оценки параметров течения газовой смеси в узле iR (дополнения).

2.1.6. Задание концентрации компонент для узла iR (искомые величины $(Y_m)_{iR}^{k+1}$, $m = \overline{1, N_s}$):

$$(Y_m)_{iR}^{k+1} = (Y_m)_{iL-1}^k, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (2.430\text{е})$$

2.2*. Формулы для оценки параметров течения газовой смеси в узле iL (дополнения и модификации).

2.2.4*. Термическое и калорическое УРС для узла iL (искомые величины T_{iL}^{k+1} и ρ_{iL}^{k+1}):

$$\begin{aligned}
 T_{iL}^{k+1} &= T\left(\varepsilon_{iL}^k, p_{iL}^k, (Y_0)_{iL}^k, (Y_1)_{iL}^k, \dots, (Y_{N_s})_{iL}^k\right); \\
 \rho_{iL}^{k+1} &= \rho\left(p_{iL}^k, T_{iL}^k, (Y_0)_{iL}^k, (Y_1)_{iL}^k, \dots, (Y_{N_s})_{iL}^k\right).
 \end{aligned}
 \quad (2.431\text{г}^*)$$

2.2.5. Задание концентрации компонент для узла iL (искомые величины $(Y_m)_{iL}^{k+1}$, $m = \overline{1, N_s}$):

$$(Y_m)_{iL}^{k+1} = (Y_m)_{iL-1}^k, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (2.431\text{д})$$

2.3*. Формулы для оценки параметров течения газовой смеси в узле $(iL-1)$ (дополнения и модификации).

2.3.4*. Термическое и калорическое УРС для узла $(iL-1)$ (искомые величины T_{iL-1}^{k+1} и ρ_{iL-1}^{k+1}):

$$T_{iL-1}^{k+1} = T\left(\varepsilon_{iL-1}^k, p_{iL-1}^k, (Y_0)_{iL-1}^k, (Y_1)_{iL-1}^k, \dots, (Y_{N_s})_{iL-1}^k\right);$$

$$p_{iL-1}^{k+1} = p \left(\rho_{iL-1}^k, T_{iL-1}^k, (Y_0)_{iL-1}^k, (Y_1)_{iL-1}^k, \dots, (Y_{N_s})_{iL-1}^k \right). \quad (2.432\Gamma^*)$$

2.3.5. Разностные уравнения неразрывности компонент для ячейки $[x_{iL-1,5}, x_{iL-1}]$ (искомые величины $(Y_m)_{iL-1}^{k+1}, m = \overline{1, N_s}$). Например,

$$\frac{\rho_{iL-1}^k \cdot (Y_m)_{iL-1}^{k+1} - \rho_{iL-1}^j \cdot (Y_m)_{iL-1}^j}{t_{j+1} - t_j} + \frac{\rho_{iL-1}^k \cdot (w_{iL-1}^k) \cdot (Y_m)_{iL-1}^k - 0,5 \cdot (\rho_{iL-1}^k \cdot w_{iL-1}^k + \rho_{iL-2}^k \cdot w_{iL-2}^k) \cdot ((Y_m)_{iL-1}^k + (Y_m)_{iL-2}^k)}{0,5 \cdot (x_{iL-1} - x_{iL-2})} = 0,$$

$$m = \overline{1, N_s - 1}; \quad (Y_{N_s})_{iL-1}^{k+1} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} (Y_m)_{iL-1}^{k+1}. \quad (2.432\Delta)$$

2.4*. Формулы для оценки параметров течения газовой смеси в узле $(iR+1)$ (дополнения и модификации).

2.4.4*. Термическое и калорическое УРС для узла $(iR+1)$ (искомые величины T_{iR+1}^{k+1} и p_{iR+1}^{k+1}):

$$T_{iR+1}^{k+1} = T \left(\varepsilon_{iR+1}^k, p_{iR+1}^k, (Y_0)_{iR+1}^k, (Y_1)_{iR+1}^k, \dots, (Y_{N_s})_{iR+1}^k \right);$$

$$p_{iR+1}^{k+1} = p \left(\rho_{iR+1}^k, T_{iR+1}^k, (Y_0)_{iR+1}^k, (Y_1)_{iR+1}^k, \dots, (Y_{N_s})_{iR+1}^k \right). \quad (2.433\Gamma^*)$$

2.4.5. Задание концентрации компонент для узла $(iR+1)$ (искомые величины $(Y_m)_{iR+1}^{k+1}, m = \overline{1, N_s}$):

$$(Y_m)_{iR+1}^{k+1} = (Y_m)_{iL-1}^k, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (2.433\Delta)$$

Проанализируем возможность применения *модели крана, построенной на основе имитации гидравлического влияния крана с помощью участка трубы переменного диаметра*. Данная модель имеет ряд достоинств по сравнению с моделью, построенной с использованием коэффициента местного сопротивления ζ . В частности, эта модель позволяет анализировать нестационарные процессы не только в трубопроводе, содержащем кран, но и в области самого крана.

Будем полагать, что у трубы существует участок меньшего диаметра (см. рис. 2.19). Местоположение указанного участка соответствует местоположению крана. Обозначим площадь поперечного сечения рассматриваемого участка как f_1 , а площадь поперечного сечения содержащей его трубы — f_0 . Как и ранее, через k будет обозначаться отношение:

$$k = \frac{f_1}{f_0}. \quad (2.435)$$

Будем считать, что параметр k соответствует коэффициенту открытости реального крана.

Возможность использования рассматриваемой модели оценим на примере транспортирования несжимаемой жидкости. Коэффициенты пересчета параметра ζ для случая сжимаемой жидкости (газа) были описаны выше.

В применяемой модели будем полагать, что в окрестности переходов между разными диаметрами трубы (с f_0 на f_1 , а также с f_2 на f_3 (см. рис. 2.19)) используются модели течений в сочленениях труб. В этом случае скорость движения жидкости на участке трубы переменного диаметра (как и в трубе, содержащей кран) можно считать осредненной по поперечному сечению. Тогда при анализе параметров течения жидкости по исследуемой трубопроводной конструкции можно применить рассмотренные выше модели¹ для каждого из сегментов конструкции.

Как отмечено выше, для несжимаемой жидкости потери давления, вызванные местным сопротивлением, можно найти по формуле:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \cdot \zeta_0 \cdot \rho \cdot w_0^2, \quad (2.436)$$

где ζ_0 – коэффициент местного сопротивления; ρ – плотность жидкости; w_0 – скорость течения жидкости. Параметры ζ_0 и w_0 соответствуют сечению «0» на рис. 2.19.

Будем полагать, что эквивалентное сопротивление оказывает участок трубы уменьшенного поперечного сечения. В этом случае для вычисления потери давления можно использовать формулу:

$$\Delta p = \frac{l}{2 \cdot D_1} \cdot \lambda_1 \cdot \rho \cdot w_1^2, \quad (2.437)$$

где λ_1 – коэффициент гидравлического сопротивления трения (см. Приложение 2); w_1 – скорость течения жидкости; D_1 – диаметр суженной части трубы; l – длина участка трубы меньшего диаметра. Параметры λ_1 и w_1 соответствуют сечению «1» на рис. 2.19.

Используя уравнение неразрывности ($\rho \cdot w_1 \cdot f_1 = \rho \cdot w_0 \cdot f_0$), а также (2.435), получим связь между скоростями течения жидкости применительно к сечениям «0» и «1»:

$$w_1 = w_0 \cdot \frac{f_0}{f_1} = \frac{w_0}{k}. \quad (2.438)$$

Из (2.435) также следует, что

$$D_1 = \sqrt{k} \cdot D_0, \quad (2.439)$$

где D_0 – диаметр трубы, соответствующий сечению «0» (см. рис. 2.19).

Таким образом, приравнявая правые части (2.436) и (2.437), имеем:

$$\bar{l} = \frac{k^{2.5} \cdot \zeta_0(\text{Re}_0, k)}{\lambda_1(\text{Re}_1, \bar{\Delta})} = \frac{k^{2.5} \cdot \zeta_0(\text{Re}_0, k)}{\lambda_1(\text{Re}_0/k, \bar{\Delta})}, \quad (2.440)$$

¹ Здесь имеются в виду модели нестационарного неизотермического течения жидкости (газа) по одностороннему трубопроводу.

где $\bar{l} = l/D_0$ – приведенная (к диаметру трубы D_0) длина модельного крана (участка трубы меньшего диаметра); $\bar{\Delta} = \Delta/D_1$ – относительная шероховатость стенки участка трубы меньшего диаметра; Δ – абсолютная шероховатость стенки трубы меньшего диаметра.

Очевидно, приведенная длина модельного крана зависит от многих характеристик и составляющих. К ним, в частности, относятся число Рейнольдса Re , коэффициент открытости реального крана k , конструкция реального крана и др. Оценим приведенную к диаметру трубы длину $\bar{l}$ на примере крана, изложенном в справочнике [66] как «кран в сети (цилиндрический)». Его схематичное представление дано на рис. 2.21.

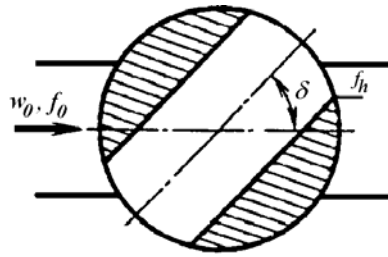


Рис. 2.21. Схематичное представление «крана в сети (цилиндрического)»¹

На рис. 2.21 величина f_h характеризует минимальную площадь проходного сечения крана. Таким образом, $k = f_h/f_0$.

Для данного крана в [66] приведен коэффициент местного сопротивления в зависимости от угла открытия δ (см. рис. 2.21) и коэффициента открытости k . В табличной форме записи данные характеристики имеют вид, представленный в табл. 2.5. Эти характеристики, согласно [66], соответствуют $Re > 10^4$. Отметим сразу, что в работе [66] принято, что функция ζ , описанная в табл. 2.5, не зависит от числа Re . Это говорит о том, что режим течения жидкости через данный кран является квадратичным.

Таблица 2.5

δ°	5	10	20	30	40	50	55	67
k	0,93	0,85	0,69	0,52	0,35	0,19	0,11	0
ζ	0,05	0,31	1,84	6,15	20,7	95,3	275	∞

Используя кусочно-линейную интерполяцию, построим графики зависимости $\bar{l}$ для разных значений числа Re_0 и k . Способ вычисления коэффициента гидравлического трения $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$ описан в Приложении 2.

Графический вид зависимостей $\bar{l} = \bar{l}(Re, k)$ для значения $\bar{\Delta} = 0,05$ представлен на рис. 2.22 и 2.23. Как видно из этих рисунков, параметр $\bar{l}$ практически не зависит от числа Re . Данное свойство можно объяснить довольно большим значением параметра

¹ Рисунок заимствован из справочника [66].

$\bar{\Delta}$. Для такого значения $\bar{\Delta}$ режим течения жидкости по участку трубы суженного сечения является квадратичным (переходный режим течения практически отсутствует). Поскольку для исследуемого крана значения ζ не зависят от числа Re (при $Re > 10^4$), выбор больших значений $\bar{\Delta}$ в данном случае является предпочтительным.

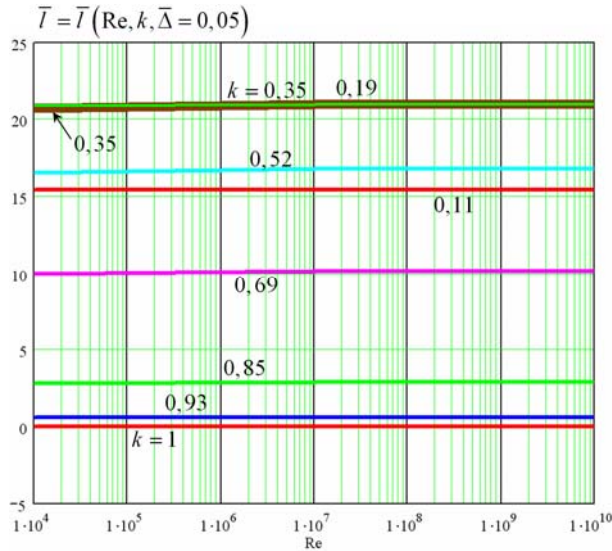


Рис. 2.22. Зависимость $\bar{T} = \bar{T}(Re)$ при некоторых значениях коэффициента открытости крана k для $\bar{\Delta} = 0,05$

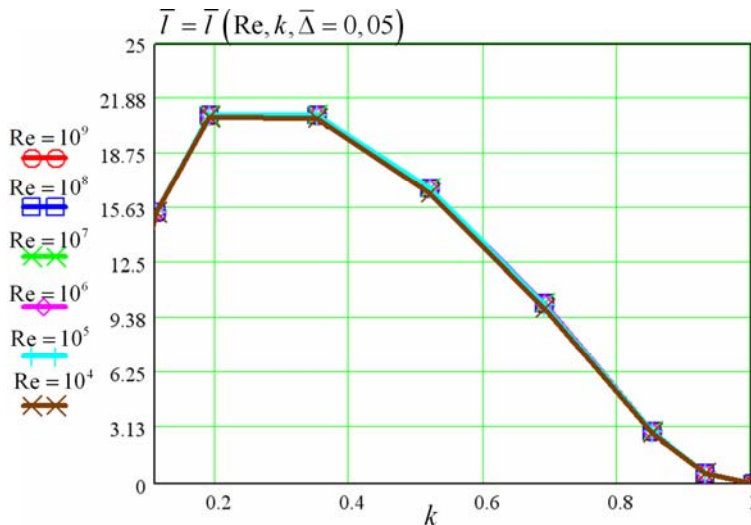


Рис. 2.23. Зависимость $\bar{T} = \bar{T}(k)$ при некоторых значениях числа Re для $\bar{\Delta} = 0,05$

Как видно из рис. 2.22 и 2.23, значения $\bar{T}$ существенным образом зависят от уровня открытости крана. При этом для большей части области изменения параметра k

($0,3 < k \leq 1$) уменьшение открытости крана (значения k) приводит к увеличению приведенной длины модельного крана $\bar{L}$. С физической точки зрения, обнаруженный эффект можно объяснить следующим образом. В реальности сужение потока происходит на конечном участке, при этом угол сужения имеет ограниченную величину. По данной причине при сужении потока до меньшего диаметра длина участка, на котором происходит сужение потока, возрастает.

Таким образом, при численном анализе параметров транспортирования природного газа для получения адекватных оценок с использованием рассматриваемой модели крана потребуются эпизодическая перестройка разностной сетки в зависимости от уровня открытости крана (т.е. в зависимости от параметра k).

В соответствии с работой [66], в запорных устройствах (как и в трубах) существуют три характерных режима течения: ламинарный, переходный и квадратичный. Поскольку коэффициент $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ учитывает особенности каждого из перечисленных режимов¹, подбор эффективного значения параметра $\bar{\Delta}$ может обеспечить адекватность моделирования транспортирования жидкости через кран даже при условии ламинарного и переходного режимов течения.

Аргументируем вышесказанное на примере рассмотренного ранее «крана в сети (цилиндрического)». Используемое при этом значение параметра $\bar{\Delta} = 0,05$ характеризует трубы с шероховатыми стенками. Для данной шероховатости применяемые на рис. 2.22 и 2.23 значения числа Re соответствуют квадратичному режиму течения. Уменьшение значения параметра $\bar{\Delta}$ соответствует трубам с меньшей шероховатостью стенок. Для данных значений относительной шероховатости квадратичный режим течения наблюдается при больших значениях числа Re . Таким образом, применительно к каждому конкретному крану (и конкретному диаметру содержащей его трубы) можно подбирать значение параметра $\bar{\Delta}$, при котором переходный и ламинарный режимы течения жидкости по модельному участку трубы меньшего диаметра будут соответствовать переходному и ламинарному режимам течения через кран. Если функция $\bar{L} = \bar{L}(\text{Re}, k)$ при найденном значении параметра $\bar{\Delta}$ не будет зависеть от числа Re , то можно говорить о том, что рассматриваемая модель крана является адекватной реальному процессу. Данное условие является желательным. При этом для фиксированного значения k не надо перестраивать разностную сетку при нестационарных процессах.

Для переходного режима течения коэффициент сопротивления имеет большее значение, чем для квадратичного режима (см., например, [66] и Приложение 2). Т.к. для рассмотренного типа крана коэффициент ζ соответствует квадратичному режиму, то, если в формуле (2.440) задавать значения $\bar{\Delta}$, меньшие чем 0,05, мы должны прийти к ситуации, когда на рис. 2.22 и 2.23 будут появляться диапазоны аргумента Re , для которых зависимость $\bar{L}(\text{Re})$ при фиксированном значении k не является горизонтальной прямой. Это можно объяснить так. Поскольку коэффициент сопротивления (при переходном режиме течения) уменьшается при увеличении числа Re , стремясь к значению коэффициента сопротивления для квадратичного режима (см., например, [66] и Приложение 2), то зависимость $\bar{L}(\text{Re})$ (при фиксированном значении k) в пределах данных диапазонов должна иметь возрастающий характер².

¹ Применительно к описанию потери давления на трение.

² Это утверждение относится к рассматриваемому «крану в сети (цилиндрическому)».

Вид зависимостей $\bar{I}(\text{Re})$ при некоторых значениях k , а также зависимостей $\bar{I}(k)$ при некоторых значениях Re представлен на рис. 2.24 – 2.29. Здесь рассмотрены следующие значения относительной шероховатости $\bar{\Delta}$: 0,01; 0,001; 0,0001.

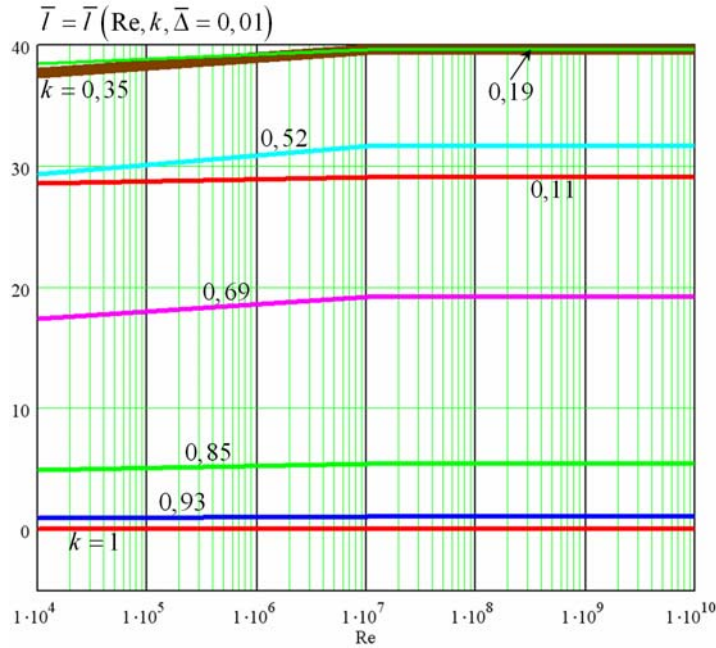


Рис. 2.24. Зависимость $\bar{I} = \bar{I}(\text{Re})$ при некоторых значениях коэффициента открытости крана k для $\bar{\Delta} = 0,01$

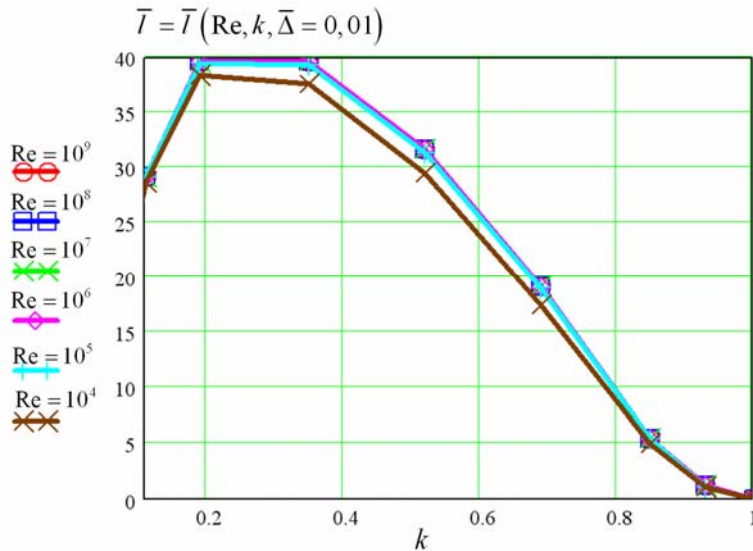


Рис. 2.25. Зависимость $\bar{I} = \bar{I}(k)$ при некоторых значениях числа Re для $\bar{\Delta} = 0,01$

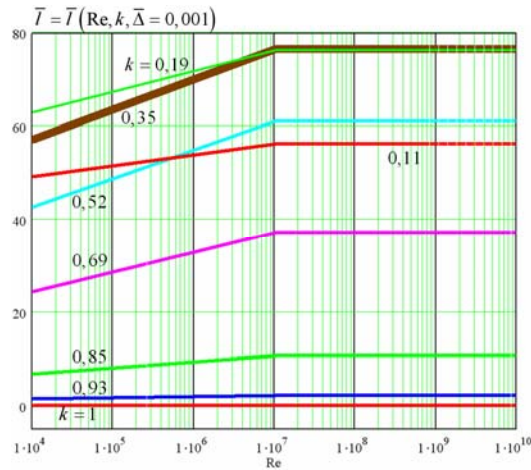


Рис. 2.26. Зависимость $\bar{T} = \bar{T}(Re)$ при некоторых значениях коэффициента открытости крана k для $\bar{\Delta} = 0,001$

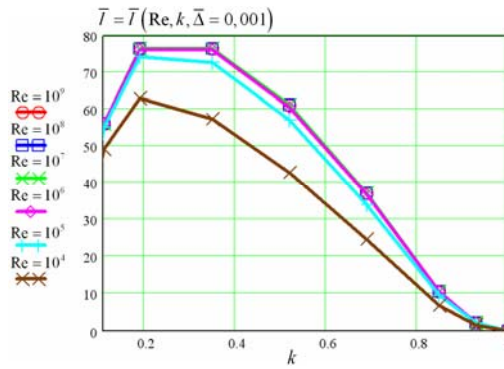


Рис. 2.27. Зависимость $\bar{T} = \bar{T}(k)$ при некоторых значениях числа Re для $\bar{\Delta} = 0,001$

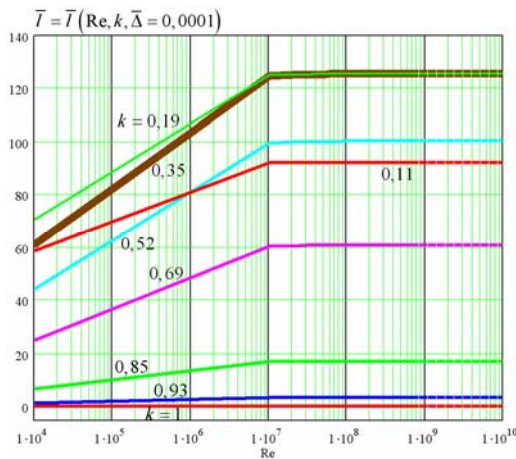


Рис. 2.28. Зависимость $\bar{T} = \bar{T}(Re)$ при некоторых значениях коэффициента открытости крана k для $\bar{\Delta} = 0,0001$

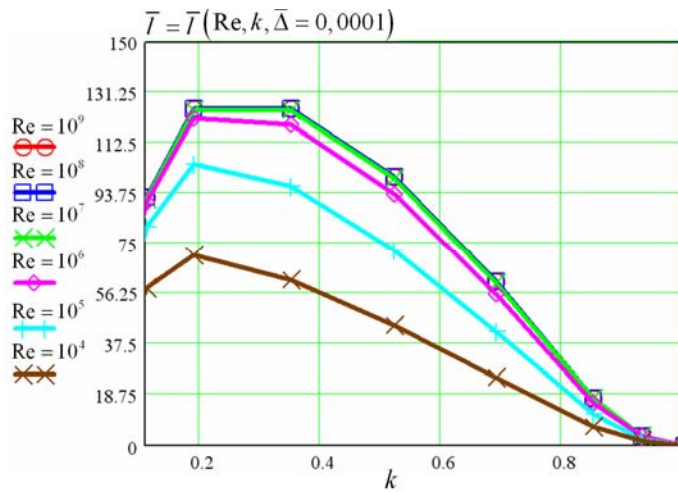


Рис. 2.29. Зависимость $\bar{T} = \bar{T}(k)$ при некоторых значениях числа Re для $\bar{\Delta} = 0,0001$

Представленные графики (см. рис. 2.24 – 2.29) демонстрируют влияние переходного режима на коэффициент местного сопротивления, обусловленного наличием крана. В частности, возрастание функции $\bar{T}(Re)$ в диапазоне $10^4 < Re < 10^5$ объясняется тем, что модель крана, построенная с применением участка трубы переменного диаметра, позволяет учитывать переходной и ламинарный режимы течения жидкости, в отличие от зависимости $\zeta(k)$ (см. табл. 2.5), построенной для описания квадратичного режима течения.

Увеличение длины модельного крана при уменьшении значения $\bar{\Delta}$ можно объяснить тем, что для обеспечения некоторого заданного трения с использованием более гладких стенок труб требуется участок трубы большей длины.

Таким образом, показано, что модель крана, построенная на основе анализа параметров транспортирования жидкости через эквивалентный участок круглой трубы переменного диаметра поперечного сечения, дает возможность моделировать рассматриваемый процесс. Она имеет физическое обоснование и позволяет учитывать, наряду с квадратичными режимами течения жидкости (газа) через кран, переходные и ламинарные режимы. Перейдем к описанию численной реализации данной модели.

Если скорость течения продукта¹ в кране мала (т.е. меньше местной скорости звука), параметры режима течения анализируются с применением модели сочленения, записанной для узлов $(iL - 1, iL)$ и $(iR, iR + 1)$ (см. рис. 2.19). Модель течения через сочленение не учитывает изменение площади проходного сечения трубопровода во времени. Однако здесь (в силу значительной длительности операции закрытия или открытия крана) такое упрощение приемлемо.

Если в процессе моделирования на какой-либо итерации модуль скорости газа в кране превысил значение местной скорости звука, происходит переход к расчету параметров течения по так называемой сверхкритической модели. Эта модель работает следующим образом. Допустим (для определенности, не нарушая общности рассуждений), что скорость положительна. В узле iR скорость течения газа задается равной местной скорости звука. Затем определяется массовый расход газа через кран по формуле:

¹ Ниже речь в этом Разделе в основном пойдет о течениях сжимаемых жидкостей (газов).

$$Q = \rho_{iR} \cdot w_{iR} \cdot f_{iR}. \quad (2.441)$$

В узлах $(iL-1)$, iL и $(iR+1)$ скорости определяются из условия сохранения массового расхода Q .

В узле $(iL-1)$ плотность газа вычисляется по разностной схеме «на узлах» $(iL-2)$, $(iL-1)$ и фиктивном узле справа от узла $(iL-1)$, в котором (фиктивном узле) все параметры (в том числе и координаты) совпадают с соответствующими параметрами узла $(iL-1)$ ¹. Аналогично рассчитывается плотность в узле $(iR+1)$, где фиктивный узел располагается слева от узла $(iR+1)$. Плотность в узлах крана находится по формулам:

$$\rho_{iL} = \rho_{iL-1}, \quad \rho_{iR} = \rho_{iR+1}. \quad (2.442)$$

Аналогично плотности определяются концентрации компонент газовой смеси. Давление во всех используемых узлах вычисляется по термическому УРС.

Для расчета параметров неизоэнтальпического режима течения рассмотрим уравнение энергии для газового потока в трубе (см. (2.54r)). Учитывая большую скорость течения газа, малую протяженность крана, значительную длительность закрытия/открытия крана и отсутствие источников тепла внутри крана, пренебрежем слагаемыми с производными по времени, массовой силой, а также последними четырьмя слагаемыми уравнения (2.54r). Тогда получим следующую модификацию указанного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \cdot f \cdot w \cdot \left(\varepsilon + \frac{w^2}{2} \right) \right] = - \frac{\partial}{\partial x} (p \cdot f \cdot w). \quad (2.443)$$

Проинтегрируем уравнение (2.443) на отрезке $[x_{iL-1}, x_{iR+1}]$:

$$\left[f \cdot w \cdot \left(\rho \cdot \varepsilon + \rho \cdot \frac{w^2}{2} + p \right) \right]_{iR+1} - \left[f \cdot w \cdot \left(\rho \cdot \varepsilon + \rho \cdot \frac{w^2}{2} + p \right) \right]_{iL-1} = 0. \quad (2.444)$$

Отсюда:

$$\varepsilon_{iR+1} = \frac{1}{\rho_{iR+1}} \cdot \left\{ \left[f \cdot w \cdot \left(\rho \cdot \varepsilon + \rho \cdot \frac{w^2}{2} + p \right) \right]_{iL-1} \cdot \frac{1}{(f \cdot w)_{iR+1}} - \left(\frac{\rho \cdot w^2}{2} + p \right)_{iR+1} \right\}. \quad (2.445)$$

Опишем принцип расчета недостающих параметров неизоэнтальпического течения газа через кран в сверхкритическом режиме для выбранного направления течения «слева – направо». Значение удельной внутренней энергии в узле $(iL-1)$ вычисляется по используемой схеме в пространственной ячейке разностной сетки, определяемой узлами $(iL-2)$, $(iL-1)$ и фиктивным узлом, расположенным справа от узла $(iL-1)$. В фиктивном узле все параметры (в том числе и координаты) совпадают с соответствующими параметрами узла $(iL-1)$. Значение удельной внутренней энергии в узле $(iR+1)$ вычисляется по (2.445). В узлах крана аналогичные параметры находятся по формулам:

$$\varepsilon_{iL} = \varepsilon_{iL-1}, \quad \varepsilon_{iR} = \varepsilon_{iR+1}. \quad (2.446)$$

¹ Способ применения «трехузловых» и «двухузловых» разностных ячеек при моделировании ГУ в области крана был подробно описан выше.

Температура в рассматриваемых узлах вычисляется по калорическому УРС ($T = T(\varepsilon, p)$).

К недостаткам описанной модели (при использовании модели сочленения (2.225)) можно отнести следующее. Одним из предположений разностной модели сочленения (2.225) является равенство термодинамических параметров внутри сочленения. Применительно к рассматриваемой модели крана это означает равенство термодинамических параметров в каждой паре узлов ($iL - 1, iL$) и ($iR, iR + 1$). С другой стороны, в данной модели предполагается мгновенное изменение скорости (кинетической энергии) при течении газа через сочленения. Для сохранения полной энергии здесь должны изменяться удельная внутренняя энергия и температура (уменьшаться внутри крана), что рассмотренная модель крана не описывает. Однако интегрально на отрезке $[iL - 1, iR + 1]$ уравнение энергии выполняется, поэтому влияние крана на прилегающие к нему трубопроводы описывается достаточно корректно.

Таким образом, рассмотренные модели крана позволяют рассчитывать параметры сложных быстроменяющихся процессов транспортирования продуктов по трубопроводным системам в номинальных, переходных и аварийных режимах. Они дают возможность подробно исследовать влияние операций «закрытия/открытия кранов» на течения в прилегающих к кранам трубопроводах, а также оценивать параметры течения продуктов внутри крана.

2.5.5. Численный анализ работы крановых площадок ЛЧМГ, оборудованных межниточными перемычками

Для работы ГДС в режиме реального времени требуется:

- высокая скорость проведения расчетов без снижения адекватности и точности моделирования;
- возможность моделирования любой конфигурации трубопроводов МГ, получаемой из исходной при помощи операций с кранами.

Одной из проблем, препятствующих выполнению этих требований, является моделирование крановых узлов ЛЧМГ, оборудованных межниточными перемычками.

Для обеспечения секционирования ЛЧМГ при проведении регламентных и ремонтных работ МГ оборудуются линейными кранами, как правило, шаровой конструкции, расположенными на крановых площадках. Крановые площадки располагаются с интервалом в 20÷30 км по трассе МГ. Некоторые из крановых площадок оборудуются межниточными перемычками для обеспечения перепуска транспортируемого газа между нитками. Принципиальные схемы выполнения межниточных перемычек могут быть различными. Длина межниточных перемычек обычно составляет 18÷60 м и редко превышает 100 м. Диаметр труб для межниточных перемычек выбирается в соответствии с сортаментом (на 1÷2 пункта меньше, чем диаметр труб МГ). Например, для МГ Ду1400 межниточные перемычки выполняются из труб Ду1200, что обеспечивает незначительное гидравлическое сопротивление перетеканию транспортируемого газа по перемычкам.

Линейные размеры кранового узла с межниточными перемычками существенно меньше общей длины участка ЛЧМГ, составляющей 100÷150 км. С точки зрения влияния на газодинамические параметры транспорта природного газа по ЛЧМГ, крановую площадку с открытыми межниточными перемычками можно условно представить как некоторый малый объем, в котором происходит выравнивание давления и перераспределение расхода транспортируемого природного газа. Подобная ситуация хорошо описывается моделью сочленения трубопроводов, предложенной С.Н. Пряловым (см.

выше). Пример применения этой модели для простейшей гипотетической схемы крановой площадки с межниточными перемычками представлен на рис. 2.30. и рис. 2.31.

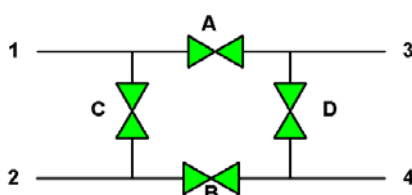


Рис. 2.30. Схема гипотетической крановой площадки

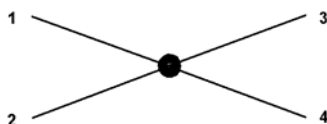


Рис. 2.31. Модель гипотетической крановой площадки

Описанный способ моделирования крановой площадки с межниточными перемычками позволяет использовать расчетную сетку с большим шагом по пространству. Однако такая модель крановой площадки не описывает всех возможных вариантов перераспределения потоков транспортируемого газа по трубопроводам при различных положениях кранов. Например, если краны **С** и **D** закрыты, то пары труб 1, 3 и 2, 4 становятся независимыми, и модель, представленная на рис. 2.31, уже не отражает распределения потоков газа по трубопроводам в данной ситуации. Это является существенным недостатком, не позволяющим решать реальные производственные задачи.

Существует другой способ моделирования рассматриваемой крановой площадки. При этом каждая реальная труба с краном моделируется такой же трубой соответствующей длины. Схема соединения труб в модели полностью соответствует реальной схеме соединения трубопроводов на крановой площадке (рис. 2.32).

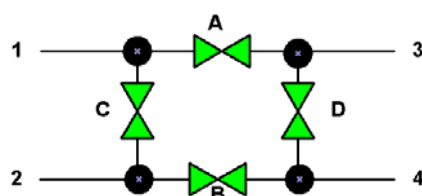


Рис. 2.32. Подробная модель гипотетической крановой площадки

Здесь число сочленений возрастает до четырех, шаг пространственной сетки уменьшается до $20 \div 50$ м, шаг по времени уменьшается до $0,02 \div 0,10$ с. Все это приводит к увеличению затрат вычислительных ресурсов более чем в 10000 раз. Естественно, ни о каких расчетах газотранспортной сети в режиме реального времени, даже с использованием современных компьютеров, не может быть и речи.

Применение данного способа оправдано при моделировании отдельной ЛЧМГ, когда необходимо с высокой точностью определить изменение во времени распределения газодинамических параметров по длине трубопроводов. В ГДС, разрабатываемых на базе

программно-математического комплекса «CorNet» и Компьютерного Аналитического Инструментария «Alfargus», подробное моделирование межниточных перемычек применяется при расследовании аварий, анализе переходных процессов в трубопроводах и подобных им задачах.

Перед изложением метода моделирования крановой площадки¹, оборудованной межниточными перемычками, оценим влияние скорости перекрытия кранов на распределение газодинамических параметров в транспортируемом газе по длине трубопроводов ЛЧМГ с течением времени. В 2001 году А.Л. Бойченко была проведена серия численных экспериментов на моделях реальных ЛЧМГ. В экспериментах варьировалось время полного перекрытия кранов. Целесообразно привести типичные результаты одного из этих расчетов. Топология участка ЛЧМГ, для которой проводились расчеты, представлена на рис. 2.33. Начальное распределение газодинамических параметров соответствовало стационарному течению между компрессорными станциями КС03 и КС04. В эксперименте проводилось перекрытие крана 12\2-1, расположенного на КП12 (на рис. 2.33 выделен овалом).

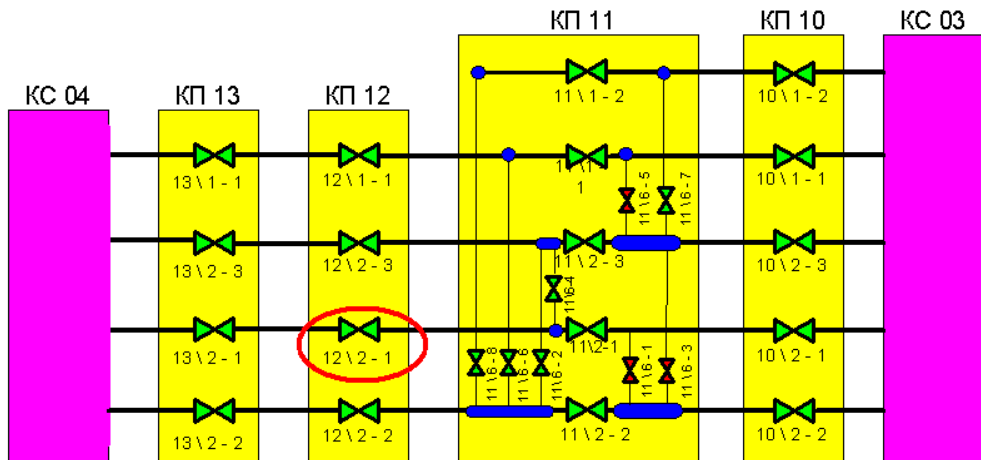


Рис. 2.33. Схема ЛЧМГ (течение газа справа налево)

Для времени закрытия крана 2 мин (что соответствует реальным параметрам линейных кранов) команда на закрытие подавалась через 10 с после начала расчета. Для мгновенного перекрытия крана – через 70 с после начала расчета. Сравнение результатов проводилось по значению давления на крановых площадках КП10, КП11, КП13 и входе компрессорной станции КС04. Результаты сравнения давлений для линии №1 (на которой расположен кран 12\2-1) в местах расположения остальных крановых площадок представлены на рис. 2.34, для линии №2 (нижняя нитка на рис. 2.33) – на рис. 2.35.

Как видно из приведенных графиков, максимальная разность давлений, рассчитанных для соседних крановых площадок для времени перекрытия крана 0 с и 120 с , составляет порядка $0,6 \text{ атм}$, что не превышает погрешности датчиков, применяемых в современных SCADA-системах.

Кроме того, максимальные отличия при использовании модели с мгновенным перекрытием зафиксированы только на ближайших крановых площадках (расположенных на расстоянии $20 \div 25 \text{ км}$) в течение $3 \div 4 \text{ мин}$ после закрытия крана. С другой стороны, при

¹ Данный метод был разработан А.Л. Бойченко, С.Н. Пряловым и В.Е. Селезневим [6].

работе ГДС моделируется процесс транспортирования газа через газотранспортное предприятие, состоящее из нескольких ЛЧМГ (суммарной длиной 400 км и более). Продолжительность процессов при этом составляет от нескольких часов до нескольких суток. Следовательно, при моделировании газотранспортного предприятия от входной до выходной границы целиком, погрешностью, вносимой использованием модели крана с мгновенным перекрытием, можно пренебречь.

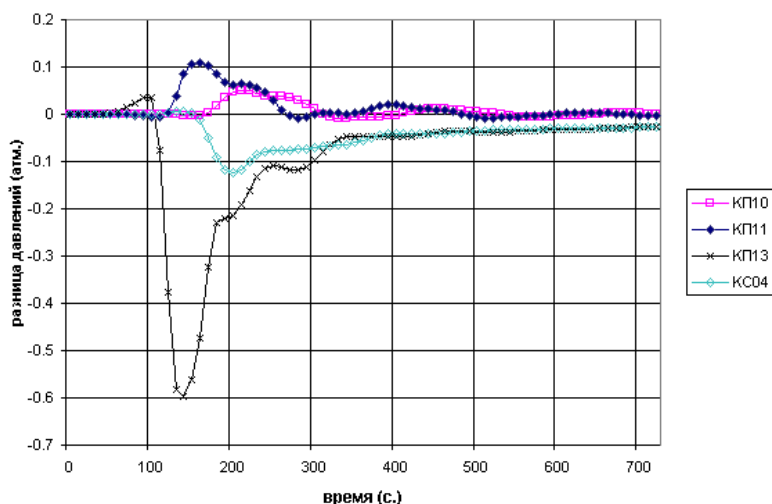


Рис. 2.34. Невязка по давлению для различных крановых площадок на линии №1

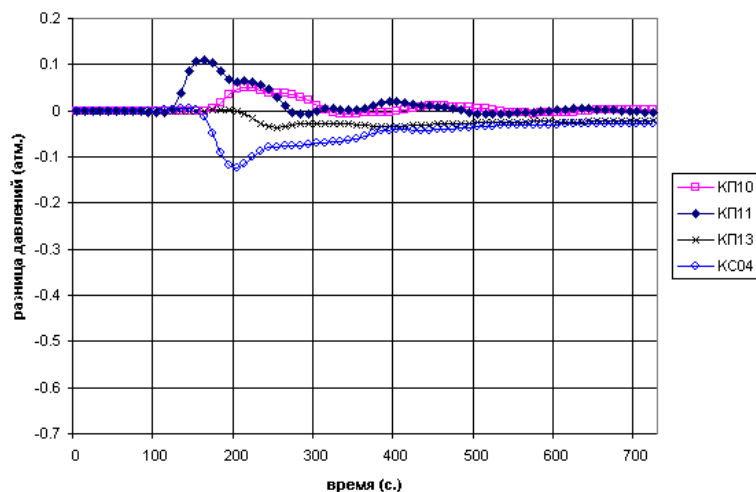


Рис. 2.35. Невязка по давлению для различных крановых площадок на линии №2

Таким образом, при расследовании аварий, анализе переходных процессов в трубопроводах и подобных им задачах необходимо применять модели кранов с учетом времени их полного перекрытия. При работе ГДС в режиме реального времени и расчетах сети газотранспортного предприятия целиком можно использовать модели кранов с мгновенным перекрытием.

Введем в рассмотрение краны, которые условно назовем «модельными». Модельные краны, в отличие от кранов, имеющих конечное время перекрытия (см. выше), имеют только два состояния (положения): «ОТКРЫТ» и «ЗАКРЫТ». Данные краны переходят из одного состояния в другое мгновенно. При закрытии модельного крана в ближайших к месту расположения узлов пространственной расчетной сетки трубопровода ставится ГУ полного перекрытия (отсутствие скорости потока). Отметим, что модельные краны могут располагаться и на концах трубопровода. В этом случае ГУ полного перекрытия ставится на соответствующий граничный узел пространственной расчетной сетки трубопровода.

Для повышения скорости вычислений при одновременном сохранении точности расчета ЛЧМГ с использованием ГДС при оперативном обнаружении разрыва был разработан метод моделирования крановых площадок, оборудованных межниточными переключками. Он подразумевает использование (в зависимости от требований к точности результатов):

- подробных моделей межниточных переключек (при рассмотрении небольших участков трубопроводной системы газотранспортного предприятия);
- композиции узлов сочленения трубопроводов для моделирования крановых площадок ЛЧМГ (при рассмотрении трубопроводной системы газотранспортного предприятия);

Композиция узлов сочленения трубопроводов представляет собой набор совокупностей трубопроводов, газодинамически связанных между собой (газодинамически связанными считаются трубопроводы, между которыми может происходить переток газа в пределах моделируемой крановой площадки). В каждый момент времени композиция узлов сочленения трубопроводов должна отражать состояние кранов на межниточных переключках.

В качестве базовой модели узла сочленения трубопроводов используется предложенная выше модель С.Н. Прялова. Рассмотрим построение композиции узлов сочленения трубопроводов для моделирования крановых площадок на примере простейшей гипотетической крановой площадки, схема которой приведена на рис. 2.30.

На первом этапе строится список всех трубопроводов данной крановой площадки, которые могут быть газодинамически связаны между собой. Для рассматриваемого примера визуально данный список можно представить в виде модели, изображенной на рис. 2.31. На втором этапе на концах трубопроводов из построенного списка размещаются модельные краны (рис. 2.36).

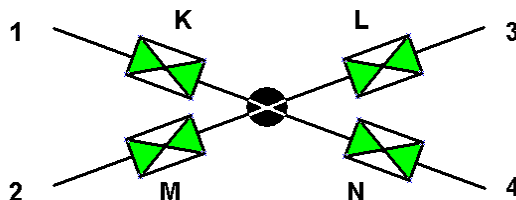


Рис. 2.36. Расположение модельных кранов в модели гипотетической крановой площадки

На третьем этапе для каждого из модельных кранов составляется список реальных кранов, которые его «образуют». В список включаются реальные краны, перекрытие которых отсекает соответствующую трубу от крановой площадки. Например, модельный кран **К** образуют реальные краны **А** и **С** (см. рис. 2.30). Это можно формально записать следующим образом:

$$K = A + C, \quad (2.447)$$

где «+» означает операцию образования модельного крана. Аналогично образуются остальные краны:

$$L = A + D \text{ для трубы 3;} \quad (2.448)$$

$$M = C + B \text{ для трубы 2;} \quad (2.449)$$

$$N = B + D \text{ для трубы 4.} \quad (2.450)$$

Списки (2.447 – 2.450), с учетом состояния реальных кранов, применяются для построения искомой композиции сочленений.

При этом для определения состояния модельного крана, например, крана **K** (см. рис. 2.36), используется информация о состоянии реальных кранов, его образующих. В рассматриваемом случае – информация о состоянии реальных кранов **A** и **C** (см рис. 2.30). Так, модельный кран **K** закрыт, если одновременно закрыты краны **A** и **C** (логическое произведение). Если открыт хотя бы один из кранов **A** или **C**, модельный кран **K** считается открытым, и соответствующая труба участвует в построении композиции сочленений, т.е. газодинамически связана с другими трубами. Газодинамическая связь рассматриваемой трубы реализуется с теми трубами, у которых в состав модельных кранов входят те же реальные краны в открытом состоянии, что и у рассматриваемой трубы. Например, труба №1 будет газодинамически связана с трубой №3, если открыт кран **A**, входящий в состав модельных кранов **K** (2.447) и **L** (2.448).

На четвертом этапе происходит построение композиции сочленений, каждое из которых состоит из газодинамически связанных труб. Данная композиция, включающая все трубы крановой площадки, позволяет моделировать транспортирование газа через эту крановую площадку.

Для построения композиции узлов сочленения трубопроводов А.Л. Бойченко предложен алгоритм. Рассмотрим предложенный алгоритм на примере моделирования различных вариантов состояния реальных кранов на рассматриваемой гипотетической крановой площадке.

Вариант 1.

Для состояния кранов, приведенного на рис. 2.30 (все краны открыты), алгоритм построения модели крановой площадки выглядит следующим образом [6]:

- 1) строится сочленение трубопроводов №1;
- 2) произвольно выбирается труба, например труба №1, и заносится в список труб, участвующих в сочленении №1;
- 3) расположенный на трубе №1 модельный кран **K** состоит из кранов **A** и **C** (2.447);
- 4) кран **A** открыт и входит в состав модельного крана **L** на трубе №3 (2.448), труба №3 включается в сочленение №1;
- 5) в модельный кран **L** на трубе №3 входит кран **D** (2.448);
- 6) кран **D** открыт и входит в состав модельного крана **N** на трубе №4 (2.450), труба №4 включается в сочленение №1;
- 7) в модельный кран **N** на трубе №4 входит кран **B** (2.450);
- 8) кран **B** открыт и входит в состав модельного крана **M** на трубе №2 (2.449), труба №2 включается в сочленение №1;
- 9) в модельный кран **M** на трубе №2 входит кран **C** (2.449);

- 10) кран **С** открыт и входит в состав модельного крана **К** на трубе №1 (2.447), труба №1 уже входит в сочленение №1, для модельного крана **М** рассмотрены все реальные краны, входящие в его состав; возвращаемся по цепочке анализируемых модельных кранов назад;
- 11) для модельного крана **Н** рассмотрены все реальные краны, входящие в его состав; возвращаемся по цепочке рассматривавшихся модельных кранов назад;
- 12) для модельного крана **Л** рассмотрены все реальные краны, входящие в его состав; возвращаемся по цепочке исследуемых модельных кранов назад;
- 13) для модельного крана **К** рассмотрены все реальные краны, входящие в его состав; сочленение трубопроводов №1 построено;
- 14) все трубы на крановой площадке задействованы – больше сочленений построить нельзя.

Модель крановой площадки построена. Она представляет собой композицию из одного сочленения, включающего трубы №1, №2, №3 и №4 (см. рис. 2.31).

Вариант 2.

Краны **С** и **Д** закрыты (рис. 2.37).

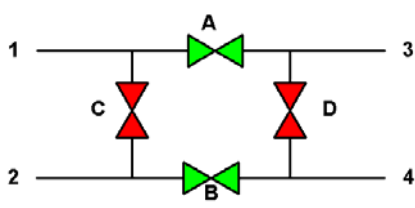


Рис. 2.37. На гипотетической крановой площадке краны **С** и **Д** – закрыты

Построение композиции сочленений трубопроводов в этом случае выглядит следующим образом [6]:

- 1) строится сочленение трубопроводов №1;
- 2) произвольно выбирается труба, например труба №1, и заносится в список труб, участвующих в сочленении №1;
- 3) расположенный на трубе №1 модельный кран **К** состоит из кранов **А** и **С** (2.447);
- 4) кран **А** открыт и входит в состав модельного крана **Л** на трубе №3 (2.448), труба №3 включается в сочленение №1;
- 5) в модельный кран **Л** на трубе №3 входит кран **Д** (2.448);
- 6) кран **Д** закрыт, для модельного крана **Л** проанализированы все реальные краны, входящие в его состав; возвращаемся по цепочке рассматривавшихся модельных кранов назад;
- 7) кран **С** закрыт, для модельного крана **К** рассмотрены все реальные краны, входящие в его состав, сочленение трубопроводов №1 построено;
- 8) строится сочленение трубопроводов №2;
- 9) из труб, которые не рассматривались при построении сочленения №1, произвольно

выбирается труба, например труба №2, и заносится в список труб, участвующих в сочленении №2;

- 10) расположенный на трубе №2 модельный кран **М** состоит из кранов **В** и **С** (2.449);
- 11) кран **В** открыт и входит в состав модельного крана **Н** на трубе №4 (2.450), труба №4 включается в сочленение №2;
- 12) в модельный кран **Н** на трубе №3 входит кран **Д** (2.448);
- 13) кран **Д** закрыт, для модельного крана **Н** проанализированы все реальные краны, входящие в его состав; возвращаемся по цепочке рассматривавшихся модельных кранов назад;
- 14) кран **С** закрыт, для модельного крана **М** рассмотрены все реальные краны, входящие в его состав, сочленение трубопроводов №2 построено;
- 15) все трубы на крановой площадке задействованы – больше сочленений построить нельзя.

Модель крановой площадки построена. Она представляет собой композицию из двух сочленений:

- сочленения №1, включающего трубы №1 и №3;
- сочленения №2, включающего трубы №2 и №4;

Построенная модель показана на рис. 2.38.

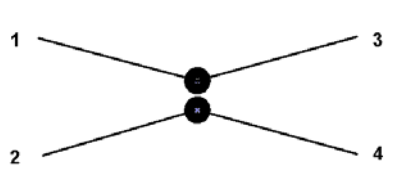


Рис. 2.38. Модель крановой площадки при перекрытых кранах **С** и **Д**

Вариант 3.

Закрыты краны **С** и **В** (рис. 2.39). При построении композиции сочленений трубопроводов в этом случае трубы №1, №3 и №4, аналогично первому рассмотренному варианту, образуют сочленение №1. Труба №2 в сочленение не входит, поскольку закрыты краны **С** и **В** (модельный кран **М** закрыт, см. (2.449)). На конце трубы №2 ставится ГУ полного перекрытия. Полученная модель крановой площадки представлена на рис. 2.40.

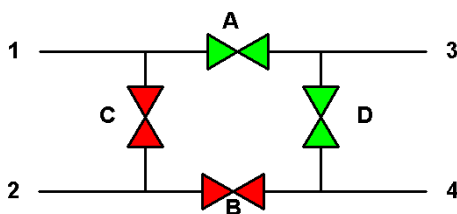


Рис. 2.39. На гипотетической крановой площадке перекрыты краны **С** и **В**

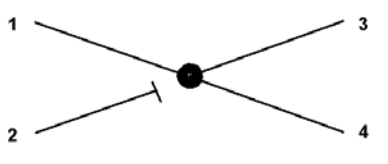


Рис. 2.40. Модель крановой площадки при закрытых кранах С и В

При расчете параметров нестационарных процессов предложенный метод применяется следующим образом [6]: перед началом расчета в ГДС для каждой крановой площадки, оборудованной межниточными переключками, строится композиция сочленений трубопроводов, основанная на начальном положении кранов на крановой площадке. Если при проведении расчета состояние какого-либо из кранов изменяется, композиция сочленений трубопроводов соответствующей крановой площадки перестраивается.

Представленный выше метод позволил моделировать динамические процессы в трубопроводной системе газотранспортных предприятий в режиме реального времени, в том числе и при операциях с кранами. Этот метод может быть расширен на сложные крановые площадки, для которых характерна так называемая «вложенность подсистем кранов».

2.5.6. Численный анализ истечения газа из трубопровода высокого давления в атмосферу

Для моделирования процессов истечения газа из трубопровода высокого давления в атмосферу (например, при ее разрыве) С.Н. Пряловым совместно с В.Е. Селезневым была предложена следующая сеточная модель [2, 6]. Предположим, что узлу L расчетной сетки соответствует место разрыва трубопровода (рис. 2.41). Направление течения газа при разрыве – от узла M к узлу L .

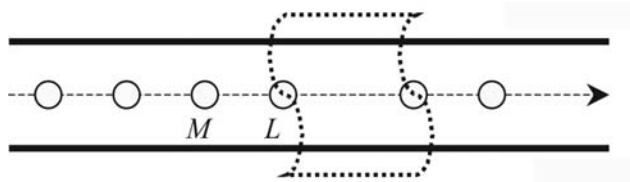


Рис. 2.41. Схематичное представление разрыва трубопровода

Процесс истечения из разорвавшейся трубы можно условно разделить на три режима [106]: сверхкритический, трансзвуковой (см. ниже) и докритический.

Как было отмечено выше, в случае, когда давление во внешней (по отношению к трубопроводу) среде меньше некоторого критического значения, на уровне среза выходного отверстия устанавливается скорость, равная местной скорости звука, а давление – равное критическому значению и независящее от давления внешней среды. При этом на выходе при истечении образуется система скачков уплотнения [107]. Здесь скачком уплотнения будем называть неподвижную ударную волну [108]. Если неподвижная ударная волна перпендикулярна к направлению потока, то говорят о прямом скачке уплотнения. Если же она наклонена к направлению движения газа в трубе, то говорят о косом скачке уплотнения [108].

Опишем модель для расчета параметров сверхкритического режима истечения. В узле L скорость определяется из соотношения [85, 106]:

$$w_L^{j+1} = \text{sign} \cdot c_L^{j+1}, \quad (2.451)$$

где c – местная скорость звука; $\text{sign} = \pm 1$ в зависимости от направления течения газа. Остальные параметры истечения определяются из разностных уравнений и уравнений состояния по принципам моделирования ГУ «скорость, температура».

При расчете параметров докритического режима истечения в качестве граничного условия задается $p_{\text{атм}}$ (атмосферное давление) и T_{oc} (температура атмосферного воздуха).

Параметр T_{oc} используется в случае, если возникают обратные процессы – течение окружающего атмосферного воздуха в трубу (например, при локализации места разрыва, когда на последней стадии возникают колебательные процессы).

Переход от расчета параметров по сверхкритической модели к расчету по докритической модели происходит на любой итерации при выполнении условия [106]:

$$p_{\text{атм}} > p_M \cdot \left[\frac{2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad (2.452a)$$

где γ – показатель адиабаты. Обратный переход совершается при [106]

$$|w_L| > c_L. \quad (2.452б)$$

При этом формула (2.452a) рассматривается как критерий оценки существования скачка уплотнения на срезе разрыва (оценка сверху).

На практике возможны ситуации, когда некоторое множество расчетных параметров истечения удовлетворяет разностным моделям сверхкритического и докритического режимов истечения одновременно. Назовем такой режим транзвуковым. В алгоритме наличие такого режима определяется, если переход от одной модели к другой произошел несколько раз. В этом случае параметры истечения рассчитываются по сверхкритической модели истечения.

По предложению С.Н. Прялова, в современных ГДС при моделировании аварийных ситуаций и численном анализе работы кранов используется оценка местной скорости звука по формуле, описывающей течения реального газа (см. в данном Разделе ниже). При численном моделировании истечения газа из трубопроводов С.Н. Пряловым также было предложено осуществлять переход от расчета параметров по сверхкритической модели к расчету по докритической модели при выполнении условия

$$p_L < p_{\text{атм}}, \quad (2.452в)$$

вместо условия (2.452a). Теоретически такой переход способствует сокращению времени расчета.

Для оценки скорости звука можно использовать известное соотношение для идеального газа

$$c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_S} = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T}, \quad (2.453)$$

где p – давление; ρ – плотность; S – энтропия; γ – показатель адиабаты; R – газовая постоянная; T – температура. Однако для получения высокоточных численных оценок параметров транспорта газов по трубопроводным сетям целесообразно в ГДС использовать соотношения, соответствующие реальному транспортируемому газу. В этом случае для реального газа требуется получить формулу, позволяющую рассчитать частную производную $(\partial p / \partial \rho)_S$.

Используя определение полного дифференциала сложной функции, запишем:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot d\rho + \frac{\partial p}{\partial T} \cdot dT, \quad (2.454a)$$

отсюда

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_s. \quad (2.454b)$$

Далее, согласно первому и второму началам термодинамики, для изэнтропического процесса можно записать

$$TdS = d\varepsilon + pdV = dh - Vdp = 0, \quad (2.455)$$

откуда

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_s = V \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s, \quad (2.456)$$

где ε — удельная внутренняя энергия; h — энтальпия; $V = 1/\rho$ — удельный объем. С другой стороны

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_s = \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho}\right)_s + c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_s, \quad (2.457)$$

где $c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$ — теплоемкость при постоянном давлении. Подставляя (2.456) в (2.457), получаем:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \cdot \left(\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_T - V\right) + c_p \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_s = 0. \quad (2.458)$$

Уравнения (2.454b) и (2.458) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ и $\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_s$. Разрешая ее относительно $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$, получаем:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{c_p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T}{c_p + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \cdot \left(\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_T - V\right)}. \quad (2.459)$$

Учитывая (2.31), окончательно:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{c_p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T}{c_p - T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_\rho} = \frac{c_p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T}{c_p + \frac{T}{\rho^2} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_\rho}, \quad (2.460)$$

$$c = \sqrt{\frac{c_p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T}{c_p + \frac{T}{\rho^2} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_\rho}}. \quad (2.461)$$

Формула (2.461) применительно к идеальному газу примет вид (2.453), что нетрудно проверить прямой подстановкой соответствующих уравнения состояния и термодинамических соотношений идеального газа $p = \rho \cdot R \cdot T$, $c_v = c_p - R$, $\gamma = c_p / c_v$, где c_v – теплоемкость при постоянном объеме.

В монографии [6] было проведено сравнение результатов расчетов скорости звука в метане по формуле идеального газа (2.453) и формуле реального газа (2.461). На рис. 2.42 представлены результаты данного сравнения. Здесь изображена зависимость $\Delta c = \Delta c(p, T)$, построенная по формуле:

$$\Delta c = \frac{c_{real} - c_{ideal}}{c_{real}} \cdot 100\%, \quad (2.462)$$

где c_{ideal} – значение скорости звука, найденное по формуле (2.453); c_{real} – значение скорости звука, найденное по формуле (2.461).

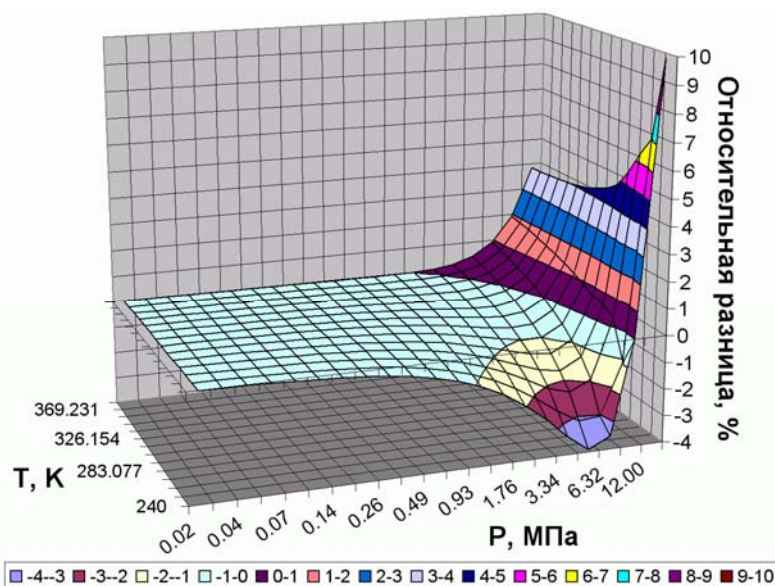


Рис. 2.42. Отличие результатов расчета скорости звука по формуле идеального и реального газов

Как видно из рис. 2.42, в рабочем диапазоне давления и температуры (применительно к режимам транспортирования природного газа по магистральным трубопроводам) $p \in [0,1 \text{ МПа} \div 10 \text{ МПа}]$, $T \in [-30^\circ\text{C} (243 \text{ К}) \div 90^\circ\text{C} (363 \text{ К})]$ относительная погрешность вычисления скорости звука по формуле идеального газа не превышает 4%. При этом максимальная погрешность наблюдается в малой зоне $p \in [1 \text{ МПа} \div 10 \text{ МПа}]$, $T \in [-27^\circ\text{C} (246 \text{ К}) \div 0^\circ\text{C} (273 \text{ К})]$. В остальной области рабочего диапазона погрешность вычисления лежит в пределах 1%. Отметим также, что значения скорости звука, полученные по формуле идеального газа для рабочего диапазона давления и температуры, оказались больше значений, полученных по формуле реального газа.

Учитывая то, что основной диапазон режимов транспортирования природного газа лежит вне малого диапазона с повышенной погрешностью (включая аварийные режимы

истечения газа в случае разрыва трубопровода, где на срезе трубопровода формируется давление порядка $0,3 \text{ МПа}$), формулу идеального газа (2.453) для расчета скорости звука можно считать приемлемой. Однако *если возникает необходимость расчета скорости звука вне рассмотренного выше рабочего диапазона (например, для высоких давлений), то погрешность формулы идеального газа резко возрастает и для получения высокоточных оценок требуется переходить к формуле для скорости звука реального газа (2.461).*

2.6. Моделирование транспортирования газов через компрессорный цех и компрессорную станцию

Изложение материала данного и последующих Разделов настоящей Главы будем проводить на примере газотранспортных предприятий.

2.6.1. Математические модели сегментов компрессорных станций (цехов)

Моделирование транспортирования природного газа по трубопроводам технологической обвязки КС производится с использованием математических моделей, описанных в Разделах 2.3 – 2.5.

Процесс транспортирования природного газа через пылеуловители КС моделируется с применением предоставляемых в технической документации характеристик ПУ. В случае отсутствия такой документации оценочное моделирование транспортирования газа через ПУ можно свести к численному анализу модели изотермического течения газа через круглую трубу с изменяющимся во времени повышенным гидравлическим сопротивлением, рассчитываемым по эмпирическим зависимостям¹.

Как правило, в аппаратах воздушного охлаждения для транспортирования природного газа применяются трубы незначительной длины. Поэтому при математическом описании работы АВО в монографии [109] предлагается при проведении оценок считать, что процесс транспорта природного газа через АВО является квазистационарным и изобарическим. Это позволяет использовать широко известную формулу В.Г. Шухова (см., например, [109]):

$$T_k = T_{OC} + (T_H - T_{OC}) \cdot \exp \left[- \frac{k \cdot F_{op}}{J \cdot c_p} \right], \quad (2.463)$$

где T_H, T_k – температуры транспортируемого газа соответственно на входе и выходе АВО; T_{OC} – температура окружающего воздуха; k – коэффициент теплопередачи, характеризующий интенсивность передачи теплоты от транспортируемого газа в окружающую среду через разделяющую их стенку трубы и ее изоляционное покрытие (данный коэффициент относится к полной поверхности оребрения F_{op}); c_p – осредненная теплоемкость транспортируемого газа при постоянном давлении; J – массовый расход транспортируемого газа через АВО.

Как известно [110], формулу для коэффициента теплопередачи биметаллической трубы АВО, отнесенного к полной площади поверхности оребрения, можно записать так:

¹ Данные зависимости устанавливаются для конкретной ГТС и конкретных свойств транспортируемого газа.

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\varphi \cdot d_0}{d_1} + \frac{\varphi \cdot d_0}{2 \cdot \lambda_{cm}} \cdot \ln \frac{d_n}{d_1} + R_k \cdot \frac{\varphi \cdot d_0}{d_k} + \frac{\varphi \cdot d_0}{2 \cdot \lambda_o} \cdot \ln \frac{d_0}{d_n} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1}, \quad (2.464)$$

где α_1 – коэффициент теплоотдачи от транспортируемого газа к стенке трубы; φ – коэффициент оребрения трубы (отношение площади оребренной поверхности труб к площади наружной поверхности труб, несущих оребрение); d_0 – наружный диаметр несущей оребрение оболочки; d_1 – внутренний диаметр несущей трубы; d_n, d_k – наружный диаметр несущей трубы и внутренний диаметр оболочки соответственно (как правило, $d_n = d_k$); λ_{cm} – коэффициент теплопроводности материала стенки несущей трубы; λ_o – коэффициент теплопроводности материала, из которого сделана ребристая оболочка; R_k – термическое контактное сопротивление; α_2 – приведенный коэффициент теплоотдачи от оребрения к воздуху, отнесенный к полной поверхности оребрения. Зависимости для коэффициентов теплоотдачи α_1 и α_2 определяются характером течения охлаждаемого природного газа и воздуха, а также параметрами теплообменного аппарата. Для расчетов рекомендуется воспользоваться зависимостями, представленными в работе [110].

Полная площадь оребренной поверхности теплообмена определяется по формуле:

$$F_{op} = \pi \cdot \sum_{i=1}^m \left[d_{0i} \cdot l + n \cdot \delta_{pi} \cdot (d_{pi} - d_{0i}) + n \cdot \left(\frac{d_{pi}^2 - d_{0i}^2}{2} \right) \right], \quad (2.465)$$

где m – число труб в АВО; i – номер трубы; n – число ребер на трубе; l – длина труб в АВО; d_{pi} – диаметр ребер i -ой трубы; δ_{pi} – толщина ребер i -ой трубы; d_{0i} – наружный диаметр несущей оребрение оболочки i -ой трубы. В случае проведения уточненных расчетов АВО рекомендуется использовать методики работы [110]. Расширенный спектр моделей АВО и ПУ представлен в работах [8, 110].

Для моделирования транспортирования природного газа через центробежные нагнетатели газоперекачивающих агрегатов применяется упрощенная модель, базирующаяся на сочетании аналитических зависимостей для политропных газодинамических процессов и эмпирических характеристик, получаемых для каждого ЦН в процессе его натурных испытаний.

Как известно, главной задачей ЦН в ГПА является повышение давления транспортируемого газа от начального давления P_1 на входе ЦН до конечного давления P_2 на выходе из него. Для ЦН, используемых на МГ, степень сжатия изменяется в диапазоне: $\varepsilon = P_2 / P_1 \approx 1,1 \div 1,7$ [111]. Различие в конструкции отдельных деталей ЦН объясняется в большинстве случаев условиями эксплуатации и требованиями механической прочности. Любой ЦН состоит из двух основных деталей [112, 113]: рабочего колеса, приводящего своими лопатками газ в движение, и корпуса, направляющего газ к колесу и отводящего его от колеса к потребителю. Перед отводом газа из корпуса скорость его уменьшается благодаря диффузорному действию корпуса и частично преобразуется в давление. Хотя корпус ЦН непосредственно не создает давления, но его формы конструируются в соответствии с типом колеса.

Задачей математического моделирования устойчивой работы ЦН является определение физических параметров газа на выходе ЦН по известным значениям параметров потока газа на входе ЦН. Для построения упрощенной математической модели ЦН использовались материалы работ [112–114]. Эта модель ЦН в настоящей монографии

условно называется моделью А.И. Степанова. Простота модели обеспечивает легкость построения расчетных алгоритмов, которые реализуются в виде модулей компьютерных программ.

При ее построении в качестве исходных данных принимались:

- 1) параметры состояния газа на входе ЦН (P_1, T_1), плотность газа при нормальных условиях $\rho_{нор}$;
- 2) справочная информация по данному ЦН (номинальные параметры: n_n, N_m (при номинальной нагрузке) (см., например, альбом [111]), где n_n — относительная частота вращения вала ЦН при номинальной нагрузке; N_m — мощность, затрачиваемая на механические потери в ЦН);
- 3) приведенные условия: $P_{1пр}, T_{1пр}, Z_{пр}, R_{пр}$ (этот набор условий (давление на входе ЦН, температура на входе ЦН, коэффициент сжимаемости в термическом УРС квазисовершенного газа (природного газа) ($P = Z \cdot \rho \cdot R \cdot T$), газовая постоянная) задается фирмой-изготовителем ЦН (см., например, альбом [111]));
- 4) графики рабочих характеристик ЦН для приведенных условий (например, из альбома [111]).

При моделировании условно считалось, что значения коэффициента сжимаемости Z на входе (Z_1) и выходе (Z_2) ЦН примерно равны, т.е. $Z_1 / Z_2 \approx 1$.

Теперь сформулируем постановку задачи, учитывающую возможные вариации набора исходных данных, и приведем алгоритм ее решения [1].

Постановка задачи

Дано: температура T_1 и давление P_1 природного газа на входе ЦН; плотность природного газа при нормальных условиях $\rho_{нор}$; рабочая частота вращения вала ЦН n , а также:

- либо объемная производительность Q_1 (объемный расход природного газа) на входе ЦН;
- либо коммерческая производительность Q_k (коммерческий расход природного газа через ЦН);
- либо давление P_2 на выходе ЦН.

Требуется определить: температуру T_2 , давление P_2 (если оно неизвестно) и приведенный расход природного газа на выходе ЦН.

Алгоритм решения

Шаг 1. Определение значения газовой постоянной R [78].

Шаг 2. Определение коэффициента сжимаемости газа Z_1 в термическом УРС квазисовершенного газа на входе ЦН [78].

Шаг 3. Определение приведенной относительной частоты вращения n_0 по формуле [112]:

$$n_0 = \frac{n}{n_n} \cdot A, \quad \text{где} \quad A = \sqrt{\frac{Z_{np} \cdot R_{np} \cdot T_{np}}{Z_1 \cdot R \cdot T_1}}. \quad (2.466)$$

Шаг 4. Определение приведенного расхода Q_{np} , политропического коэффициента полезного действия η_p и степени сжатия $\varepsilon = P_2 / P_1$ по методике, подробно изложенной в работах [112] с использованием рабочих характеристик ЦН (например, из альбома [111]).

Шаг 5. Давление P_2 на выходе ЦН (если оно не задано) определяется по формуле: $P_2 = \varepsilon \cdot P_1$.

Шаг 6. Считая процесс сжатия газа в ЦН политропным и учитывая допущение $Z_1/Z_2 \approx 1$, температура T_2 на выходе ЦН находится по формуле [112]:

$$T_2 = T_1 \cdot \varepsilon^{(\gamma-1)/(\gamma \cdot \eta_p)}, \quad (2.467)$$

где η_p находится с использованием графика зависимости его от расхода Q_1 на входе ЦН¹.

Дополнительно можно определить мощность $M_{прив}$, передаваемую на вал ЦН от привода через муфту [111, 112]:

$$M_{прив} = \left(\frac{M_i}{\rho} \right)_{np} \cdot \frac{P_1}{Z_1 \cdot T_1 \cdot R} \cdot \left(\frac{n}{n_n} \right)^3 + M'_m, \quad (2.468)$$

где M'_m берется из справочных данных; $(M_i/\rho)_{np}$ определяется по известным характеристикам ЦН.

2.6.2. Математическое моделирование установившихся режимов транспортирования природного газа через компрессорный цех и компрессорную станцию

В этом Разделе представлен метод моделирования, разработанный В.Е. Селезневым и В.В. Киселевым [2, 6, 115]. Он основан на математической формализации описания установившихся режимов транспортирования природного газа через КЦ (КС) при требовании соблюдения ограничений, обеспечивающих промышленную безопасность КЦ (КС), в виде системы нелинейных алгебраических равенств и неравенств (СНАРН) (или системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) при простых ограничениях на варьируемые переменные). При математической формализации учитываются особенности технологической схемы КС и режимов ее эксплуатации, включая возможность возникновения помпажа в системе «группа ЦН – прилегающие ТГ» (см. Раздел 4.7). Управляющие параметры безопасных технологических режимов транспортирования газа (например, частоты вращения валов ЦН) автоматически получаются при численном решении задачи поиска внутренней точки множества, описываемого построенной СНАРН (или СНАУ). Если такое решение найти не удастся, то делается заключение о возникновении аварийной ситуации. При этом результаты решения позво-

¹ В данном случае указанный график является справочной информацией (см., например, [111]).

ляют указать на технологические, эксплуатационные и конструктивные ограничения, выполнение которых нарушается, и оценить степень их нарушения.

Рассмотрим процесс моделирования КЦ (КС) более подробно. Изложение технологии построения и численного анализа математических моделей транспортирования природного газа через КЦ (КС) в установившемся режиме будем проводить на примере гипотетического КЦ (рис. 2.43). Он содержит три ГПА, которые объединены в КЦ по параллельной схеме. На схеме ТГ условно показаны в виде тонких линий, выходной коллектор КЦ – в виде прямоугольника, ЦН – в виде равнобедренных трапеций. Направление течения газа на схеме указано стрелками.

В качестве исходных данных для моделирования транспорта природного газа через гипотетический КЦ (см. рис. 2.43) используются:

- коэффициенты потерь давления в подводящих ТГ $(\xi_{i1} = \lambda_{i1}/D_{i1} + (\xi_{доп})_{i1})^1$ и в отводящих ТГ $(\xi_{i2} = \lambda_{i2}/D_{i2} + (\xi_{доп})_{i2})$, где $i = \overline{1, N}$;

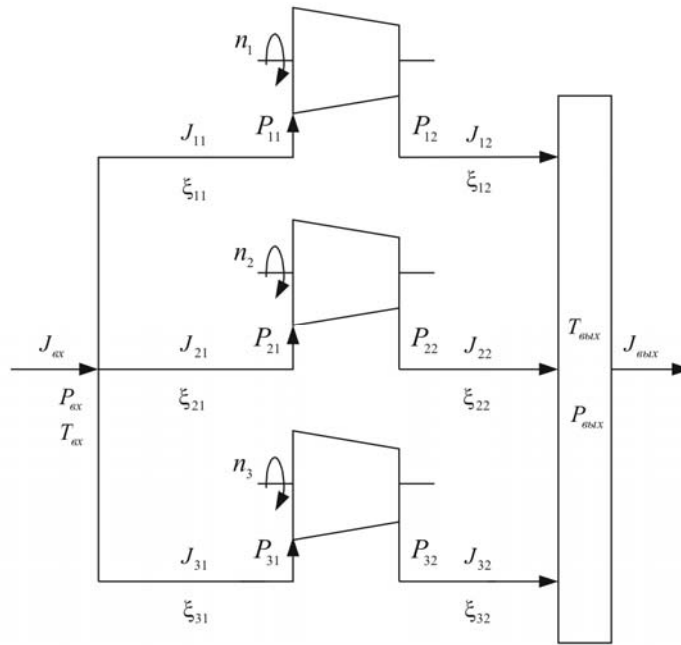


Рис. 2.43. Схема гипотетического КЦ

- λ_{i1} – коэффициент гидравлического сопротивления трения в формуле Дарси – Вейсбаха для ТГ, подводящего газ от точки разветвления к i -му ЦН (см. Приложение 2);
- D_{i1} – диаметр ТГ, подводящего газ от точки разветвления к i -му ЦН;
- $(\xi_{доп})_{i1}$ – коэффициент дополнительных потерь давления газа для ТГ, подводящего газ от точки разветвления к i -му ЦН;
- λ_{i2} – коэффициент гидравлического сопротивления трения для ТГ, отводящего газ от

¹ Здесь следует обратить внимание на то, что данные коэффициенты потерь давления не являются коэффициентами местных сопротивлений трения в классическом понимании [66].

i -го ЦН до выходного коллектора КЦ (КС) (см. Приложение 2);

- D_{i2} – диаметр ТГ, отводящего газ от i -го ЦН до выходного коллектора КЦ (КС);
- $(\xi_{доп})_{i2}$ – коэффициент дополнительных потерь давления газа для ТГ, отводящего газ от i -го ЦН до выходного коллектора КЦ (КС);
- l_{i1} – длина ТГ, подводящего газ от точки разветвления к i -му ЦН;
- l_{i2} – длина ТГ, отводящего газ от i -го ЦН;
- справочные характеристики всех ЦН, необходимые для применения модели ЦН¹;
- массовый расход $J_{вх}$ на входе КЦ (КС);
- температура $T_{вх}$ и давление $P_{вх}$ природного газа на входе КЦ (КС).

При моделировании установившихся режимов транспорта природного газа через КЦ (КС) должны соблюдаться следующие ограничения для каждого ЦН:

- на положения рабочих точек на характеристиках ЦН, связанные с требованиями беспомпажной работы ГПА;
- на предельную объемную производительность ЦН;
- на частоту вращения вала ЦН ($n_{\min} \leq n \leq n_{\max}$);
- на максимальную мощность газотурбинной установки ГПА;
- на максимальное выходное давление ЦН, определяемое прочностью ТГ и трубопроводов ЛЧМГ;
- на максимальную температуру на выходе ЦН, определяемую изоляционным покрытием ТГ;
- на нижнее значение давления на выходе каждого ЦН, связанное с требованиями поддержания давления в местах крупных отводов ТГ и ЛЧМГ;
- на условия, связанные с устойчивой работой газотурбинной установки ГПА;
- на условия согласования схемы соединения ЦН с пропускной способностью ТГ, и т.д.

При построении математической модели гипотетического КЦ в его состав могут быть включены АВО и ПУ. Включение указанных математических моделей в гипотетическую модель КЦ не влияет на изложение методов моделирования и оптимизации (см. ниже) работы группы ГПА (КЦ или КС), но делает его более громоздким. Поэтому при изложении материала данного Раздела АВО и ПУ в гипотетический КЦ не включаются. Общность изложения при этом не нарушается.

Для упрощения последующего представления материала участок трубопроводной системы, включающий подводящий (входной) ТГ, ЦН и отводящий (выходной) ТГ далее будет условно называться «ветвью». Отметим, что существование противотоков природного газа в трубопроводной системе КС, работающей в установившемся режиме, не допускается. Это соответствует технологии транспортирования природного газа через КЦ и КС.

При математическом моделировании стационарных режимов транспортирования природного газа через группу ГПА (КЦ или КС) могут использоваться два набора независимых переменных: давления P_{i1} на входах ЦН или массовые расходы J_{i1}

¹ Характеристики желательно иметь фактические, т.е. найденные экспериментально. В противном случае оценочные характеристики могут быть получены из паспортных данных на ЦН с поправкой на износ ЦН.

природного газа в подводящих ТГ.

Если применяется первый набор независимых переменных, то массовые расходы J_{i1} природного газа в уравнениях будут зависимыми переменными (см. (2.38)):

$$J_{i1}(P_{i1}) = Sr_{i1} \cdot \sqrt{\frac{P_{ex}^2 - P_{i1}^2}{P_{ex}}} \cdot \rho_{ex}, \quad (2.469)$$

где $Sr_{ij} = \pi \cdot D_{ij}^2 / (4 \cdot \sqrt{l_{ij} \cdot \xi_{ij}})$, $j = 1, 2$; плотность газа ρ_{ex} на входе КЦ определяется по применяемому упрощенному УРС для природного газа; i – номер, обозначающий принадлежность данного параметра ветви с i -ым ЦН.

Если используется второй набор независимых переменных, то давления P_{i1} на входах ЦН в уравнениях будут зависимыми переменными (см. (2.469)):

$$P_{i1}(J_{i1}) = \sqrt{P_{ex}^2 - \frac{1}{Sr_{i1}^2} \cdot \frac{J_{i1}^2 \cdot P_{ex}}{\rho_{ex}}}. \quad (2.470)$$

Разделение потоков природного газа на входе группы ГПА, имеющей общий входной коллектор, при моделировании рассматривается как изотермический процесс. Течение по ТГ до и после ЦН также считается изотермическим. При разделении потоков природного газа перед группой ГПА (КЦ или КС) обязательно, в соответствии с законом сохранения масс, должен выполняться баланс массовых расходов газа. При этом местными сопротивлениями в зоне разветвления условно пренебрегают (тем самым исключая случай дросселирования). Распределение давлений в зоне разветвления приближается к статическому (давление после зоны разветвления будет равно давлению до зоны разветвления P_{ex}).

Из предположения изотермичности процесса разделения потоков следует, что температура природного газа до и после зоны разделения будет постоянной и равной величине T_{ex} . Тогда условия сохранения массовых расходов до и после разделения N потоков во входном коллекторе группы ГПА (КЦ или КС) (первый закон Кирхгофа при условии отсутствия противотоков) имеют вид:

$$J_{ex} - \sum_{i=1}^N J_{i1} = 0; \quad P_{ex} > P_{i1} \quad \forall i = \overline{1, N} \quad \text{или} \quad J_{i1} > 0 \quad \forall i = \overline{1, N}. \quad (2.471)$$

Неравенства в (2.471) являются эквивалентными. При расчетах применяется одно из них, в зависимости от используемого набора независимых переменных. Они введены для исключения возникновения противотока газа в трубопроводной системе КЦ и случая, соответствующего отключению ГПА. Положительным считается массовый расход газа при течении газа от точки разветвления во входном коллекторе к ЦН.

При стационарных режимах транспортирования природного газа через КЦ, в соответствии с законом сохранения масс, массовые расходы природного газа через подводящий ТГ, ЦН, отводящий ТГ равны между собой. Тогда, учитывая, что процесс течения газа в подводящем ТГ считается изотермическим, с помощью математической модели А.И. Степанова для ЦН можно установить функциональные однозначные зависимости:

$$P_{i2} = P_{i2} \left(n_i, T_{ex}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right), \quad i = \overline{1, N}; \quad (2.472a)$$

$$T_{i2} = T_{i2} \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right), \quad i = \overline{1, N}; \quad (2.472\text{б})$$

$$M_i = M_i \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right), \quad i = \overline{1, N}; \quad (2.472\text{в})$$

$$\rho_{i2} = \rho_{i2}(P_{i2}) = \rho_{i2} \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right), \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.472\text{г})$$

где P_{i2} – давление природного газа на выходе i -го ЦН; n_i – частота вращения вала i -го ЦН; ρ_{i1} – плотность природного газа на входе i -го ЦН (определяется по используемому УРС); T_{i2} – температура природного газа на выходе i -го ЦН; M_i – мощность, подводимая на вал i -го ЦН от газотурбинной установки через муфту; ρ_{i2} – плотность природного газа на выходе i -го ЦН¹.

Учитывая, что температуры природного газа за ЦН могут быть различными, а процесс транспортирования по ТГ считается изотермическим, порции газа в выходной коллектор доставляются с разными температурами. Результаты изучения технологии транспортирования природного газа через КЦ позволяют при моделировании рассматривать процесс смешения потоков газа в выходном коллекторе КЦ как адиабатический процесс (рис. 2.44).

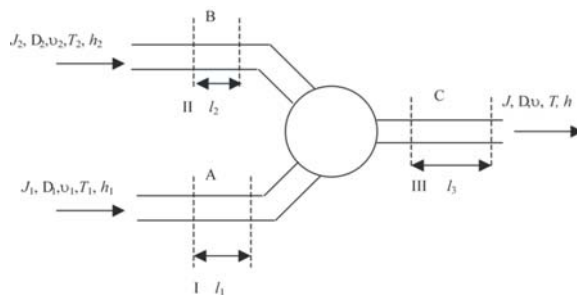


Рис. 2.44. Схема узла смешения потоков газа

Распределение давлений в зоне слияния потоков газа приближается к статическому². С учетом принятых выше упрощений и допущений, условия сохранения массового расхода газа в ветви можно записать так:

$$J_{i1} - Sr_{i2} \cdot \sqrt{\frac{P_{i2}^2 \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right) - P_{\text{вых}}^2}{P_{i2} \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right)}} \cdot \rho_{i2} \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right) = 0, \quad (2.473)$$

$$P_{i2} \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right) \geq P_{\text{вых}}, \quad i = \overline{1, N}.$$

¹ Плотность газа в данном случае определяется по УРС после применения модели ЦН А.И. Степанова.

² Давление природного газа после зоны слияния будет равно давлению до нее.

При этом температура в выходном коллекторе КЦ определяется по формуле:

$$T_{\text{вых}} = \frac{\sum_{i=1}^N (J_{i1} \cdot T_{i2})}{\sum_{i=1}^N J_{i1}}. \quad (2.474)$$

Также отметим, что напор H_i природного газа в i -ой ветви трубопроводной системы группы ГПА (КЦ или КС) можно оценить по значениям давлений во входном и выходном коллекторах КЦ, т.е. [112]:

$$H_i = \frac{P_{\text{вых}} - P_{\text{вх}}}{0,5 \cdot g \cdot (\rho_{\text{вых}} + \rho_{\text{вх}})}.$$

Из этого следует, что напор во всех параллельных ветвях трубопроводной системы рассматриваемой группы ГПА (КЦ или КС) одинаков (см. рис. 2.43).

Как отмечалось выше, для определения параметров установившихся режимов транспорта природного газа через группу ГПА (КЦ или КС) необходимо проанализировать математическую модель КЦ (КС), представляющую собой СНАРН или СНАУ при простых ограничениях на варьируемые переменные. Данная СНАРН (СНАУ) включает в себя условия (2.471), эксплуатационные, технологические и конструктивные ограничения, формализованные в виде нелинейных алгебраических равенств или неравенств, и одну из групп нелинейных алгебраических уравнений, представляющих собой либо условия сохранения массового расхода через подводящий и отводящий ТГ в одной ветви, либо условия равенства напоров природного газа в параллельных ветвях.

Математическая модель КЦ (КС), базирующаяся на условиях сохранения массового расхода в ветви была разработана В.Е. Селезневым [1]. В этом случае, с учетом принятых упрощений и допущений, при численном моделировании условие равенства массового расхода до и после i -го ЦН можно записать в следующем виде (см. (2.469), (2.470) и (2.473)):

$$J_{i1} - Sr_{i2} \cdot \sqrt{\frac{P_{i2}^2 \left(n_i, T_{\text{вх}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right) - P_{\text{вых}}^2}{P_{i2}^2 \left(n_i, T_{\text{вх}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right)}} \cdot \rho_{i2} \left(n_i, T_{\text{вх}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right) + G(P_{i1}, P_{\text{вых}}) = 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.475a)$$

где

$$P_{\text{вых}}^2 = P_{N2}^2 \left(n_N, T_{\text{вх}}, P_{N1}, \frac{J_{N1}}{\rho_{N1}(P_{N1})} \right) - \frac{1}{Sr_{N2}^2} \cdot \frac{J_{N1}^2 \cdot P_{N2} \left(n_N, T_{\text{вх}}, P_{N1}, \frac{J_{N1}}{\rho_{N1}(P_{N1})} \right)}{\rho_{N2} \left(n_N, T_{\text{вх}}, P_{N1}, \frac{J_{N1}}{\rho_{N1}(P_{N1})} \right)}; \quad (2.475*6)$$

$$G(P_{i1}, P_{\text{вых}}) = \begin{cases} 0, & \text{если } P_{\text{вых}} \leq P_{i2}(P_{i1}); \\ (P_{\text{вых}} - P_{i2}(P_{i1})) \cdot \frac{1}{\delta_{\text{заданное}}}, & \text{если } P_{\text{вых}} > P_{i2}(P_{i1}), \end{cases} \quad (2.475в)$$

где $0 < \delta_{\text{заданное}} < 10^{-1}$ – заданная малая константа; индекс «N1» обозначает параметр на

входе ЦН с номером N ; индекс « $N2$ » обозначает параметр на выходе ЦН с номером N .

Функция штрафа (2.475в) вводится в уравнения (2.475а) для обеспечения отсутствия противотоков в отводящих ТГ моделируемой группы ГПА (КЦ или КС). Модуль в подкоренном выражении уравнения (2.475а), при вычислении разности квадратов давлений, обусловлен только требованиями последующего численного анализа математической модели¹.

Как отмечалось выше, уравнения (2.475а–в) должны быть дополнены условием сохранения массового расхода при разделении потоков природного газа во входном коллекторе. В данном случае его можно представить так (см. (2.471)):

$$J_{N1} = J_{ex} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i1}. \quad (2.476)$$

Отметим, что, зная значение J_{N1} , по формуле (2.470) можно найти величину P_{N1} :

$$P_{N1} = \sqrt{P_{ex}^2 - \frac{1}{Sr_{N1}^2} \cdot \frac{J_{N1}^2 \cdot P_{ex}}{\rho_{ex}}}. \quad (2.477)$$

Подставляя (2.476) и (2.477) в (2.475*б), имеем:

$$P_{вых}^2 = P_{N2}^2 - \frac{1}{Sr_{N2}^2} \cdot \frac{\left(J_{ex} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i1} \right)^2 \cdot P_{N2}}{\rho_{N2} \left[n_N, T_{ex}, P_{N1}, \frac{\left(J_{ex} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i1} \right)}{\rho_{N1} [P_{N1}(P_{i1})]} \right]}, \quad (2.475б)$$

$$\text{где } P_{N1} = \sqrt{P_{ex}^2 - \frac{1}{Sr_{N1}^2} \cdot \frac{\left(J_{ex} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i1} \right)^2 \cdot P_{ex}}{\rho_{ex}}},$$

$$P_{N2} = P_{N2} \left[n_N, T_{ex}, P_{N1}, \frac{\left(J_{ex} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i1} \right)}{\rho_{N1} [P_{N1}(P_{i1})]} \right].$$

Итак, мы имеем СНАУ (2.475а–в), состоящую из $(N-1)$ уравнений. В качестве неизвестных независимых переменных в данном случае могут выступать либо величины давления P_{i1} на входах перед нагнетателями, $i = \overline{1, N-1}$, либо массовые расходы J_{i1} природного газа в подводящих ТГ, $i = \overline{1, N-1}$.

С учетом ограничений-неравенств (2.471), обеспечивающих отсутствие противотоков в подводящих ТГ, СНАУ (2.475а–в) необходимо дополнить простыми ограничениями на искомые переменные:

¹ Это обеспечивает исключение операции извлечения корня из отрицательного числа при численном анализе математической модели.

$$P_{i,\min} < P_{i1} < P_{i,\max}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.475г)$$

или

$$J_{i,\min} < J_{i1} < J_{i,\max}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (2.475д)$$

Ограничения на независимые переменные (2.475г) и (2.475д) связаны между собой формулами (2.469) и (2.470). Минимальное значение расхода соответствует максимальному значению давления, и, наоборот, максимальное значение расхода соответствует минимальному значению давления. Данные простые ограничения на переменные учитывают технологию транспортирования природного газа через группу ГПА (КЦ или КС), техническое состояние ГПА и конструктивные особенности моделируемой трубопроводной системы. Однако величины $J_{i,\min}$ и $J_{i,\max}$ должны не только учитывать технические, технологические и эксплуатационные характеристики моделируемой трубопроводной системы, но и обеспечивать выполнение условия сохранения массовых расходов природного газа до и после условной точки разделения газовых потоков во входном коллекторе группы ГПА (КЦ или КС):

$$J_{N,\min} + \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\max} < J_{\text{ex}} < J_{N,\max} + \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\min}$$

или

$$\begin{aligned} J_{N,\min}(\text{тех, эксп, констр}) &< J_{N,\min} < J_{\text{ex}} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\max}, \\ J_{i,\max} &< J_{i,\max}(\text{тех, эксп, констр}), \quad i = \overline{1, N-1}; \\ J_{\text{ex}} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\min} &< J_{N,\max} < J_{N,\max}(\text{тех, эксп, констр}), \\ J_{i,\min}(\text{тех, эксп, констр}) &< J_{i,\min}, \quad i = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (2.475е)$$

где $J_{i,\min}(\text{тех, эксп, констр})$ и $J_{i,\max}(\text{тех, эксп, констр})$, $i = \overline{1, N}$, – предельные для каждого ЦН расходы, обусловленные его конструкцией, условиями его эксплуатации, технологией транспортирования природного газа, мощностью привода ГПА и т.д. Выполнение данного условия обеспечит физический и практический смысл формуле (2.476) с точки зрения наложенных ограничений и принятых выше допущений. Подкоренное выражение в (2.477) и выражение (2.475б), в этом случае, всегда будут положительными. Так как в ограничения (2.475г) и (2.475д) не входят условия на давление перед ЦН или массовый расход природного газа для ветви с номером N , то значения $P_{i,\min}$ и $P_{i,\max}$ (или значения $J_{i,\min}$ и $J_{i,\max}$) должны быть выбраны из условия выполнения аналогичных ограничений в ветви с номером N .

В системе неравенств (2.475е) содержатся два ограничения:

$$J_{N,\min} < J_{\text{ex}} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\max}, \quad (2.478)$$

$$J_{N,\max} > J_{\text{ex}} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\min}. \quad (2.479)$$

Умножив неравенство (2.479) на «-1» и сложив результат с (2.478), получим:

$$\sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\max} - J_{N,\max} < \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\min} - J_{N,\min} \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\max} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\min} < J_{N,\max} - J_{N,\min}. \quad (2.480)$$

Рассмотрим случай, когда производительности всех ГПА равны некоторому значению $J_{\text{точ}}$. Пусть ограничения для $(N-1)$ ветви рассчитываются следующим образом:

$$J_{i,\min} = (1-x) \cdot J_{\text{точ}}; \quad J_{i,\max} = (1+x) \cdot J_{\text{точ}},$$

где $0 < x < 1$ – некоторый коэффициент, учитывающий отклонение от значения $J_{\text{точ}}$. Разность вышеприведенных формул можно записать в виде:

$$J_{i,\max} - J_{i,\min} = 2 \cdot x \cdot J_{\text{точ}}; \quad (2.481)$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\max} = (N-1) \cdot (1+x) \cdot J_{\text{точ}}; \quad \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\min} = (N-1) \cdot (1-x) \cdot J_{\text{точ}}.$$

Из неравенства (2.480) с учетом (2.481) имеем:

$$2 \cdot (N-1) \cdot J_{\text{точ}} \cdot x < J_{N,\max} - J_{N,\min}. \quad (2.482)$$

Сравнивая выражения (2.481) и (2.482), получим, что для выполнения ограничений на независимые переменные в ветви N необходимо задавать более узкие границы допустимых значений в $(N-1)$ ветвях. Для рассмотренного выше случая ширина допустимого интервала для значений в $(N-1)$ ветвях меньше в $(N-1)$ раз.

На основании вышесказанного для выбора ограничений на значения $J_{i,\min}$ и $J_{i,\max}$ рекомендуется следующая методика.

1. По имеющимся справочным данным для всех ГПА, принадлежащих моделируемой группе, находятся $J_{i,\min(\text{тех,экс,констр})}$ и $J_{i,\max(\text{тех,экс,констр})}$, $i = \overline{1, N}$.
2. Выбирается ГПА с наибольшей областью допустимых значений $[J_{i,\min(\text{тех,экс,констр})}; J_{i,\max(\text{тех,экс,констр})}]$. При последующем моделировании считается, что данный ГПА входит в состав ветви трубопроводной системы с номером N .
3. Для выбранного ГПА с номером N определяются значения $J_{N,\min} > J_{N,\min(\text{тех,экс,констр})}$ и $J_{N,\max} < J_{N,\max(\text{тех,экс,констр})}$. Если $J_{N,\max(\text{тех,экс,констр})} - J_{\text{точ}} > J_{\text{точ}} - J_{N,\min(\text{тех,экс,констр})}$, то полагается:

$$J_{N,\min} = J_{N,\min(\text{тех,экс,констр})} \cdot 1,01; \quad J_{N,\max} = 2 \cdot J_{\text{точ}} - J_{N,\min},$$

иначе

$$J_{N,\max} = J_{N,\max(\text{тех,экс,констр})} \cdot 0,99; \quad J_{N,\min} = 2 \cdot J_{\text{точ}} - J_{N,\max}.$$

Затем рассчитывается стартовое значение $J_{\text{точ}}^{\text{старт}}$. Так как технология транспортирования природного газа через группу ГПА (КЦ или КС) не допускает значительной разницы производительностей ГПА, то значение $J_{\text{точ}}^{\text{старт}}$ приближенно рассчитывается по формуле: $J_{\text{точ}}^{\text{старт}} = J_{\text{вх}} / N$. Значения $J_{i,\min}$ и $J_{i,\max}$ определяются из условия выполнения неравенств:

$$J_{i,\max} < \frac{J_{N,\max} - J_{N,\min}}{2 \cdot (N-1)} + J_{\text{моч}}^{\text{старт}}, \quad J_{i,\min} > J_{\text{моч}}^{\text{старт}} - \frac{J_{N,\max} - J_{N,\min}}{2 \cdot (N-1)}.$$

4. При необходимости по заданным ограничениям на расходы пересчитываются ограничения на давления по формуле (2.470).

С вычислительной точки зрения, СНАУ (2.475) является достаточно сложной. Её можно существенно упростить, если перейти от рассмотрения в (2.475а) разности массовых расходов природного газа по подводящим и отводящим ТГ к рассмотрению разности их квадратов:

$$J_{i1}^2 - S r_{i2}^2 \cdot \frac{P_{i2}^2 \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right) - P_{\text{вых}}^2}{P_{i2}^2 \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right)} \cdot \rho_{i2} \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right) = 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.483\text{а})$$

$$P_{i,\min} < P_{i1} < P_{i,\max}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.483\text{б})$$

или

$$J_{i,\min} < J_{i1} < J_{i,\max}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.483\text{в})$$

$$J_{N,\min}(\text{тех, эксп, констр}) < J_{N,\min} < J_{\text{ex}} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\max}, \quad J_{i,\max} < J_{i,\max}(\text{тех, эксп, констр}), \quad i = \overline{1, N-1}; \quad (2.483\text{г})$$

$$J_{\text{ex}} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,\min} < J_{N,\max} < J_{N,\max}(\text{тех, эксп, констр}), \quad J_{i,\min}(\text{тех, эксп, констр}) < J_{i,\min}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

где

$$P_{\text{вых}}^2 = P_{N2}^2 - \frac{1}{S r_{N2}^2} \cdot \frac{\left(J_{\text{ex}} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i1} \right)^2 \cdot P_{N2}}{\rho_{N2} \left(n_N, T_{\text{ex}}, P_{N1}, \frac{\left(J_{\text{ex}} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i1} \right)}{\rho_{N1}(P_{N1})} \right)}, \quad (2.483\text{д})$$

$$P_{N1} = \sqrt{P_{\text{ex}}^2 - \frac{1}{S r_{N1}^2} \cdot \frac{\left(J_{\text{ex}} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i1} \right)^2 \cdot P_{\text{ex}}}{\rho_{\text{ex}}}}, \quad P_{N2} = P_{N2} \left(n_N, T_{\text{ex}}, P_{N1}, \frac{\left(J_{\text{ex}} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i1} \right)}{\rho_{N1}(P_{N1})} \right).$$

Массовые расходы природного газа по каждой ветви трубопроводной системы на практике имеют, по сравнению с рабочими давлениями природного газа в магистральных газопроводах, небольшие значения. Таким образом, использование в модели квадратов значений массовых расходов вполне оправдано.

Выполнение равенств (2.483а) обеспечивает:

- сохранение массового расхода в каждой ветви трубопроводной системы и выполнение первого закона Кирхгофа при разделении потоков во входном коллекторе;

- отсутствие противотоков в отводящих ТГ моделируемой группы ГПА (КЦ или КС).

Если данное условие нарушается, то

$$P_{i2}^2 \left(n_i, T_{ex}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right) < P_{вых}^2$$

и

$$-S_{i2}^2 \cdot \frac{P_{i2}^2 \left(n_i, T_{ex}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right) - P_{вых}^2}{P_{i2} \left(n_i, T_{ex}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right)} \cdot \rho_{i2} \left(n_i, T_{ex}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right) > 0.$$

Квадрат массового расхода во входном коллекторе есть положительная величина, существенно отличная от нуля. Таким образом, при наличии противотоков в отводящих ТГ в (2.483а) будут складываться две положительные величины, существенно отличные от нуля, и равенство (2.483а) будет гарантированно нарушено. Простые ограничения на неизвестные независимые переменные (2.483б) или (2.483в) будут обеспечивать отсутствие противотоков в подводящих ТГ каждой ветви трубопроводной системы КЦ, соблюдение конструктивных, технологических и эксплуатационных ограничений на ТГ и ЦН. Таким образом, в результате решения СНАУ (2.483) мы получим результат, полностью удовлетворяющий поставленным в данном Разделе целям. При добавлении новых формализованных ограничений (например, на количество вредных выбросов при работе газотурбинной установки ГПА) СНАУ (2.483) может превратиться в СНАРН.

Теперь рассмотрим модель КЦ (КС), разработанную В.В. Киселевым и включающую в себя условия равенства напоров природного газа в параллельных ветвях [2]. В этом случае процесс транспорта природного газа через группу ГПА (КЦ) можно представить следующим образом (рис. 2.45).

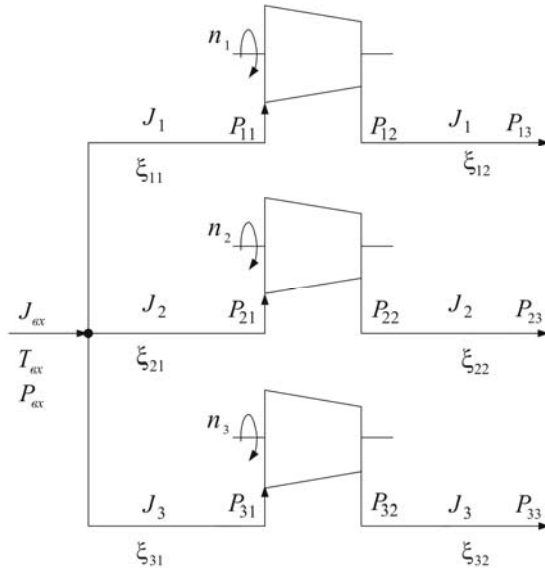


Рис. 2.45. Схема транспортировки природного газа через КЦ

На входе в группу ЦН природный газ имеет давление $P_{вх}$. После изотермического

течения газа через ТГ давление природного газа перед ЦН понижается до величин P_{i1} . Далее природный газ подвергается политропному сжатию в ЦН и его давление повышается. На выходах из ЦН природный газ имеет различные давления P_{i2} , поскольку разные ЦН имеют различные степени сжатия, зависящие от типа ЦН, его технического состояния и частоты вращения его вала. После ЦН природный газ транспортируется в изотермическом режиме по ТГ, отводящим газ от ЦН. Его давление понижается до величин давления P_{i3} в конце ветви, т.е. на входе в выходной коллектор КЦ.

Особо отметим, что значению давления $P_{\text{вых}}$ в выходном коллекторе КЦ будет равно значение любой из функций P_{i3} , рассчитанной через параметры, характеризующие движение природного газа по i -ой ветви. Таким образом, давление P_{i3} – это давление в ТГ в конце i -ой ветви (на входе в выходной коллектор КЦ) (см. (2.470) и (2.473)).

Из равенства напоров в параллельных ветвях следует, что давления природного газа P_{i3} должны быть одинаковы, т.е. [2]

$$P_{i3} \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right) - P_{(i+1)3} \left(n_{i+1}, T_{\text{ex}}, P_{(i+1)1}, \frac{J_{(i+1)1}}{\rho_{(i+1)1}(P_{(i+1)1})} \right) = 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2.484a)$$

где

$$P_{i3} = \sqrt{P_{i2}^2 \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right) - \frac{1}{Sr_{i2}^2} \cdot \frac{J_{i1}^2 \cdot P_{i2} \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right)}{\rho_{i2} \left(n_i, T_{\text{ex}}, P_{i1}, \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1})} \right)}}. \quad (2.484б)$$

Подкоренное выражение в (2.484б) для гидравлически согласованных систем, которыми являются группы ГПА (КЦ или КС), будет всегда больше нуля в соответствии с формулой Дарси – Вейсбаха.

Итак, мы имеем СНАУ (2.484), состоящую из $(N-1)$ уравнений с N независимыми неизвестными переменными. Для сокращения числа неизвестных переменных в СНАУ (2.484) необходимо рассмотреть условие сохранения массового расхода при разделении потоков природного газа во входном коллекторе (2.473). Выразив массовый расход природного газа в ветви с номером N через массовые расходы газа в других ветвях и известный суммарный расход газа J_{ex} через группу ГПА (КЦ или КС), можно сократить число неизвестных независимых переменных до $(N-1)$. При этом расход через ЦН с номером N вычисляется по формуле:

$$J_N = J_{\text{ex}} - \sum_{i=1}^{N-1} J_{i1}. \quad (2.484в)$$

С учетом вышесказанного, выполнение равенств (2.484а) обеспечивает сохранение равенства напоров в параллельных ветвях моделируемой трубопроводной системы и выполнение первого закона Кирхгофа при разделении потоков во входном коллекторе.

СНАУ (2.484) должна быть дополнена простыми ограничениями на независимые переменные (2.483б–г). Равенства (2.484) при соблюдении этих простых ограничений на переменные автоматически обеспечивают отсутствие противотоков в отводящих ТГ моделируемой группы ГПА (КЦ или КС).

Простые ограничения на неизвестные независимые переменные (2.475г–е) будут обеспечивать отсутствие противотоков в подводящих ТГ каждой ветви трубопроводной

обязки группы ЦН (КЦ или КС), соблюдение конструктивных, технологических и эксплуатационных ограничений на ТГ и ЦН. Данные простые ограничения не противоречат условию сохранения массовых расходов до и после точки условного разделения газовых потоков во входном коллекторе группы ГПА (КЦ или КС).

В нашем случае непосредственное решение СНАУ (2.483) и (2.484) может быть заменено на численное решение эквивалентной оптимизационной задачи. Температура в выходном коллекторе КЦ определяется после решения СНАУ (2.483) с помощью уравнения (2.474). Здесь следует особо подчеркнуть, что, *с точки зрения физики, использование одной или другой группы уравнений эквивалентно, но имеются различия в численной реализации методов их решения*. Результаты расчетов с использованием математических моделей на базе условия сохранения массового расхода через подводящий и отводящий ТГ в одной ветви и математических моделей на базе условия равенства напоров природного газа в параллельных ветвях совпадают [2].

В случае соединения ГПА с помощью ТГ в КЦ или КС по параллельно–последовательной схеме для каждого ЦН также применяется модель А.И. Степанова. Для последовательного соединения ГПА выходные параметры течения газа предшествующего ЦН являются входными параметрами для последующего ЦН. При этом значения оборотов валов и характеристики присоединенных последовательно ЦН добавляются в исходные данные.

Суммарный расход топливного газа в газотурбинной установке ГПА (или электроэнергии в электрическом силовом приводе ГПА) определяется как сумма расходов энергоносителей на каждом ГПА. При этом массовый расход топливного газа (или электроэнергии) является однозначной функцией от мощности, подводимой от силового привода на вал ЦН. Мощность, подводимая на вал i -го ЦН от привода через муфту, определяется по формуле (2.472в). В случае последовательного соединения ГПА мощность, подводимая на валы ЦН в ветви, определяется как сумма мощностей, подводимых на валы всех последовательно соединенных ЦН:

$$S = \sum_{i=1}^p M_i \left(n_i(J_{i1}), T_{i1}, P_{i1}(J_{i1}), \frac{J_{i1}}{\rho_{i1}(P_{i1}(J_{i1}))} \right), \quad (2.485)$$

где p – число последовательно соединенных ЦН в ветви, T_{i1} – температура природного газа на входе в ЦН (для первого ЦН в группе $T_{i1} = T_{ex}$).

Дополнительная информация о моделировании КС, КЦ или групп ГПА представлена в монографиях [1, 2, 6].

2.6.3. Математическое моделирование неустановившихся режимов транспортирования природного газа через компрессорный цех и компрессорную станцию

При моделировании неустановившихся режимов транспорта природного газа через КС можно использовать два основных метода: широко известный метод последовательной смены стационарных состояний КС и метод анализа динамических режимов КС.

2.6.3.1. Метод последовательной смены стационарных состояний КС

Одним из очевидных подходов к оценке параметров неустановившегося режима транспортирования природного газа через КС является широко известный метод последовательной смены стационарных состояний [109].

При его применении весь исследуемый временной интервал разбивается на множест-

во малых шагов по времени (в общем случае неравномерных) [1]. Режим транспортирования природного газа на каждом временном шаге условно считается установившимся. Таким образом, на каждом шаге метода последовательной смены стационарных состояний решаются СНАУ (2.469) и (2.470) (или СНАУ (2.483) и (2.484)) или соответствующие СНАРН. По результатам их решения на каждом временном шаге определяются параметры природного газа на выходе из КС. Законы изменения массового расхода $J_{\text{вх}}$, температуры $T_{\text{вх}}$ и давления $P_{\text{вх}}$ природного газа на входе КЦ (КС) во времени и законы изменения управляющих переменных во времени считаются известными. Более детально метод последовательной смены стационарных состояний изложен в работах [1, 2].

2.6.3.2. Метод анализа динамических режимов КС

Данный метод был впервые предложен и научно обоснован С.Н. Пряловым [2]. При этом для анализа течения природного газа в ТГ используются не упрощенные изотермические аналитические модели (2.469) и (2.470) (или (2.483) и (2.484)), а конечно-разностные неадиабатические модели разветвленных трубопроводов (2.231).

Под группой ГПА в данном случае подразумевается несколько ГПА, соединенных между собой ТГ по параллельной схеме (см. рис. 2.43).

Рассмотрим сначала моделирование установившегося режима транспортирования природного газа через гипотетический КЦ с использованием конечно-разностной модели стационарного течения сжимаемого газа по ТГ (см. выше). Выделим для примера отдельную (вторую) ветвь КЦ: от точки А до точки В (рис. 2.46).

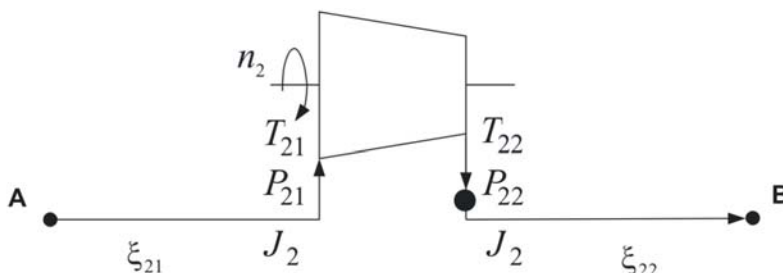


Рис. 2.46. Схема ветви между точками А и В

В качестве исходных данных используются: заданные массовый расход J_2 через ветвь, давление P_A и температура T_A на входе ветви, а также значение частоты вращения вала ЦН. Сегментами рассматриваемой модели КЦ являются: подводящий ТГ, ЦН, отводящий ТГ. Для определения параметров установившегося течения можно использовать алгоритм последовательного расчета каждого из сегментов рассматриваемой модели отдельной ветви КЦ (см. рис. 2.46):

1. При заданном массовом расходе J_2 , температуре T_A и давлении P_A на входе в подводящий ТГ по конечно-разностной модели стационарного течения сжимаемого газа находится распределение параметров установившегося течения в подводящем ТГ. Пусть найденные значения давления и температуры на выходе подводящего ТГ соответственно равны P_{21} и T_{21} .
2. При заданных массовом расходе J_2 , частоте вращения вала ЦН и полученных значениях давления P_{21} и температуры T_{21} на входе в ЦН по модели А.И. Степанова

находятся значения давления P_{22} и температуры T_{22} на выходе ЦН.

3. При заданном массовом расходе J_2 и полученных давлении P_{22} и температуре T_{22} на входе в отводящий ТГ по конечно-разностной модели стационарного течения сжимаемого газа находится распределение параметров установившегося течения в отводящем ТГ.

Поскольку в описанном алгоритме последовательного расчета каждого из сегментов ветви КЦ (см. рис. 2.46) режим работы ЦН не влияет на газодинамические параметры подводящего ТГ, назовем его – *алгоритмом с пассивной моделью ЦН*¹ [2].

Применение алгоритма с пассивной моделью ЦН для определения параметров динамических режимов транспорта газа через реальные КЦ (КС) имеет существенные ограничения по точности моделирования. Данный алгоритм дает удовлетворительные (с практической точки зрения) результаты только при моделировании квазистационарных режимов транспортирования газа. Если рассматриваются быстроизменяющиеся течения газа через КЦ (КС), переходные или аварийные режимы транспорта газа, то его применение может приводить к получению неверных оценок параметров течения. Это объясняется тем, что на практике изменение режима работы ЦН влияет на режим транспортирования газа в подводящих ТГ.

Для преодоления указанного недостатка был разработан так называемый *метод моделирования динамических режимов транспорта газа через КЦ (КС) с активными моделями ЦН* (или сокращенно *метод моделирования динамических режимов КС*²) [2, 6]. Он позволяет моделировать влияние режима работы ЦН не только на отводящие ТГ, но и на подводящие. Здесь следует заметить, что данный метод развивает идеи, предложенные С.Н. Пряловым для высокоточного моделирования сочленений N трубопроводов (см. выше).

При подробном рассмотрении данного метода сначала остановимся на способе задания ГУ. При решении уравнений неразрывности (2.231а) (случай однокомпонентного газа) и движения (2.231в) корректным является задание по одному динамическому граничному условию (в нашем случае в качестве таких условий можно использовать значения плотности, давления, скорости, массового расхода природного газа) на каждой границе ТГ. Данный способ можно применять к системам «ТГ – группа ГПА» (КЦ или КС), соединенных в единую сеть³.

Если вместе с уравнениями неразрывности и движения решается уравнение энергии (2.231г), то корректным является задание температуры в качестве граничных условий на входных границах ТГ (под входными (выходными) границами в данной монографии понимаются такие границы, через которые газ втекает в ТГ (вытекает из него)).

Если рассматривается течение с учетом процессов теплопроводности газа по длине газопровода, то требуется задание дополнительных граничных условий. Применительно к моделированию транспортирования газа по трубопроводу в данном случае предлагается следующий подход. Если процессы теплопроводности на выходных границах ТГ сравнимы по своему влиянию на режимы течения газа с процессами конвекции

¹ В данном алгоритме условно принимается, что все возмущения газодинамических параметров транспортирования газа распространяются только по направлению газового потока.

² В этом алгоритме все возмущения газодинамических параметров транспортирования газа распространяются как по направлению газового потока, так и против потока.

³ Обобщение способов задания граничных условий на системы ТГ и групп ГПА, соединенных в единую сеть, будет справедливо и далее. При этом под границами трубопроводов здесь подразумеваются границы, являющиеся внешними для всей системы.

($k \cdot \partial T / \partial x \sim \rho \cdot w \cdot \varepsilon$), то предлагается в качестве условий на данных границах задавать значения температуры. Если процессы конвекции преобладают над процессами теплопроводности ($\rho \cdot w \cdot \varepsilon \gg k \cdot \partial T / \partial x$), то на выходных границах ТГ предлагается задавать ГУ второго рода: $\partial T / \partial x = 0$.

Суть метода моделирования динамических режимов транспортирования газа через КЦ (КС) с активными моделями ЦН рассмотрим на примере моделирования течения газа через одну (вторую) ветвь КЦ (см. рис. 2.45 и 2.46): от точки А до точки В. Будем считать, что в точках входа и выхода ветви граничные условия заданы по принципам, описанным выше. Это могут быть, например: давление P_A и температура T_A на входе ветви и давление P_B на выходе ветви (данные значения, вообще говоря, являются функциями времени).

Значение массового расхода газа через ЦН $J_2^{IH} = J_2^{IH}(t)$ в данном случае является решением нелинейного алгебраического уравнения (нижние индексы у давлений соответствуют рис. 2.43 и рис. 2.46):

$$\Psi_2(J) = 0, \quad (2.486a)$$

где

$$\Psi_2(J) = P_{22}^{TT}(J) - P_{22}^{IH}(J), \quad (2.486b)$$

$P_{22}^{TT}(J) = P_{22}^{TT}(J, T_{22}^{IH}(J))$ – давление газа на входе отводящего ТГ, получающееся из расчета параметров течения по данному трубопроводу с заданием в качестве граничных условий на входе значения массового расхода газа J и температуры T_{22}^{IH} ; T_{22}^{IH} – температура газа на выходе ЦН, рассчитанная по модели ЦН (см. выше); $P_{21}^{TT}(J)$ и $T_{21}^{TT}(J)$ – давление и температура газа на выходе подводящего ТГ, получающиеся из расчета параметров течения по данному трубопроводу с заданием в качестве граничных условий на выходе значения массового расхода J ; $P_{22}^{IH}(J) = \varepsilon_2(P_{21}^{TT}(J), T_{21}^{TT}(J), J) \cdot P_{21}^{TT}(J)$ – давление газа на выходе ЦН, рассчитанное по модели А.И. Степанова; $\varepsilon_2(P_{21}^{TT}(J), T_{21}^{TT}(J), J)$ – степень сжатия газа, создаваемая ЦН. Функции, входящие в данное уравнение, определяются численно. Также необходимо заметить, что распределения газодинамических параметров по обоим ТГ получаются автоматически при решении уравнения (2.486) с учетом нестационарных неизотермических моделей течений газа в трубопроводах, описанных выше.

Обобщим представленный выше метод для моделирования группы ГПА (КЦ). При рассмотрении КЦ (см. рис. 2.43) в этом случае расчетная модель состоит из входных ТГ, группы ЦН и выходных ТГ. Входной ТГ включает в себя трубопроводы от точки входа в КЦ до точек входа в каждый ЦН. Выходной ТГ включает в себя трубопроводы от точек выхода каждого ЦН до точки выхода КЦ. Эти входной и выходной ТГ являются в данном случае многониточными разветвленными трубопроводами и моделируются при помощи модели неустановившегося неизотермического течения сжимаемого газа по многониточному трубопроводу.

Будем считать, что в точках входа и выхода КЦ заданы граничные условия по принципам, описанным выше. Значения массового расхода газа через каждый ЦН $J_i^{IH} = \overline{J_i^{IH}}(t)$ (где $i = \overline{1, N}$, N – количество ЦН в группе) в данном случае являются решением СНАУ (нижние индексы у давлений газа соответствуют индексам на рис. 2.43):

$$\Psi_i(J_i) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.487a)$$

где

$$\Psi_i(J_i) = P_{i2}^{TG}(J_i) - P_{i2}^{CH}(J_i). \quad (2.487b)$$

Функции, входящие в данные уравнения, определяются численно в результате применения ГДС на каждом шаге итеративного решения системы (2.487). Поэтому искомые распределения газодинамических параметров по подводящим и отводящим ТГ, а также параметры работы ГПА, получаются в процессе решения системы уравнений (2.487) автоматически (см. выше). Численное решение (2.487) проводится известными квазиньютоновскими методами. В первую очередь здесь можно рекомендовать модифицированный метод Бroyдена [116] как одно из наиболее удачных обобщений классического метода секущих на случай численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Данный метод может иметь q -сверхлинейную скорость локальной сходимости с r -порядком, равным $2^{1/2N}$ [116].

2.6.4. К вопросу о моделировании компрессорных станций сложной структуры

Для сокращения времени решения производственных задач по анализу и управлению режимами работы КС сложной структуры математические модели, описанные в Разделах 2.6.1 – 2.6.3, претерпевают различные перекомпоновки. **Под сложной структурой КС здесь понимается сложная топологическая схема соединения ТГ и наличие на КС нескольких КЦ с разнотипными ГПА.** В настоящее время это направление моделирования газотранспортных сетей переживает достаточно бурное развитие. Здесь следует особо отметить разработки В.В. Киселева [6]. Им на основе вышеизложенной теоретической базы впервые была создана унифицированная математическая модель КС, в которой автоматически происходит группировка ГПА для нескольких КЦ, имеющих общие входной и выходной коллекторы (рис. 2.47). Для этой модели на рис. 2.47 под условным обозначением ГПА следует понимать группы ГПА, имеющих одинаковый тип, одинаковые параметры ТГ и одинаковые частоты вращения валов ЦН (в рамках задаваемой точности).

Унифицированная модель транспортирования природного газа через КС сложной структуры предназначена для проведения расчетов в режиме реального времени и позволяет анализировать выполнение технологических, эксплуатационных, конструктивных, экологических и иных ограничений для предотвращения возникновения или раннего обнаружения нештатных и аварийных ситуаций на промышленных объектах газовой промышленности.

С математической точки зрения, унифицированная модель КС сложной структуры (как и полные модели КС (см. Разделы 2.6.1 – 2.6.3)) **представляет собой систему СНАРН (или СНАУ с простыми ограничениями на управляемые переменные).** В СНАРН нелинейные алгебраические уравнения описывают условия равенства напоров природного газа в ветвях КС и закон сохранения массового расхода в узлах слияния или разделения потоков природного газа (коллекторы КС, узлы сочленения ТГ). Нелинейные алгебраические неравенства и простые ограничения на управляемые переменные представляют собой формализованные записи технологических, эксплуатационных, экологических, конструктивных и иных ограничений, строгое выполнение которых обеспечивает промышленную безопасность энергетических объектов.

Управляющие параметры безопасных технологических режимов транспортирования газа автоматически получаются в результате численного решения задачи поиска внутренней точки множества, описываемого СНАРН (СНАУ). В качестве независимых искоемых переменных используются доли массового расхода природного газа, транспортируемого через отдельные ветви КС, степени сжатия, создаваемые КЦ, и степени сжатия, создаваемые ГПА, работающими в качестве первой ступени сжатия транспортируемого газа в КЦ. Такой набор переменных позволил В.В. Киселеву уменьшить размерность задачи и сузить область поиска решения путем более точного задания ограничений на переменные. Это дало возможность существенно сократить время проведения расчетов (в сотни раз по сравнению с традиционными подходами к моделированию КС) при сохранении точности расчетных оценок.

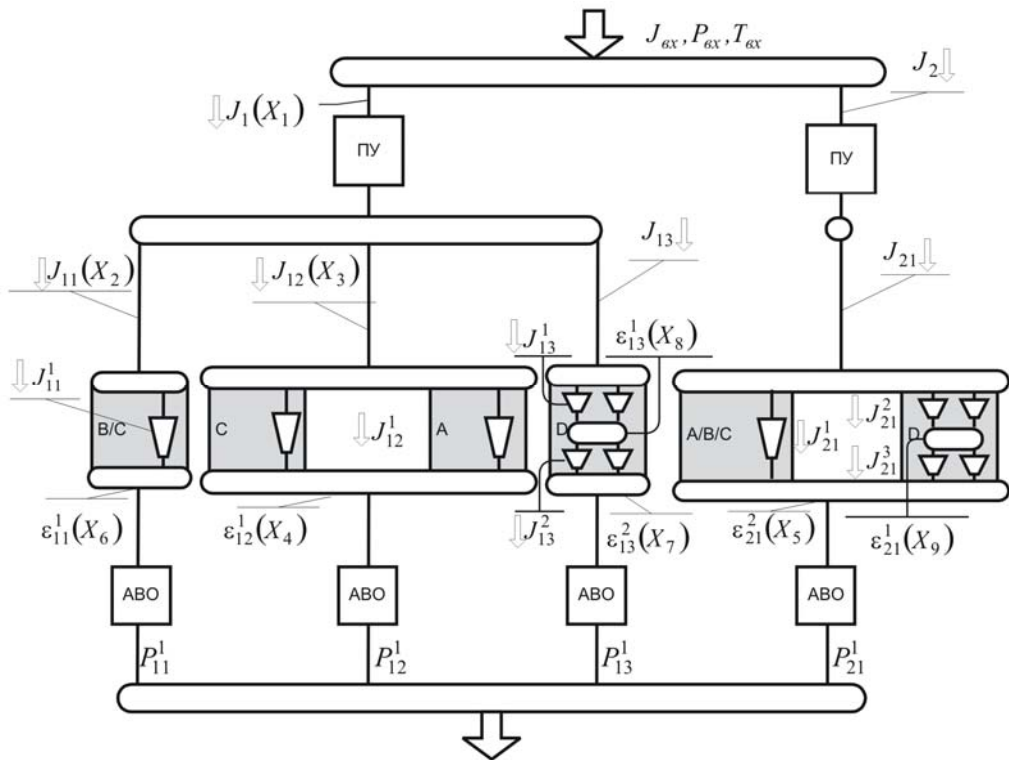


Рис. 2.47. Схема задания искоемых независимых переменных для оперативного технологического анализа транспорта газа через КС

На рис. 2.47 показан пример задания искоемых независимых переменных для наиболее общей расчетной схемы КС (переменные обозначены символом X с соответствующим порядковым номером). Для представленной на рис. 2.47 схемы математическую модель КС сложной структуры можно записать в виде:

$$\begin{cases}
P_{11}^1(J_{ex}, P_{ex}, T_{ex}, J_1(X_1), J_{11}(X_2), \varepsilon_{11}^1(X_6)) - P_{12}^1(J_{ex}, P_{ex}, T_{ex}, J_1(X_1), J_{12}(X_3), \varepsilon_{12}^1(X_4)) = 0; \\
P_{12}^1(J_{ex}, P_{ex}, T_{ex}, J_1(X_1), J_{12}(X_3), \varepsilon_{12}^1(X_4)) - P_{13}^1(J_{ex}, P_{ex}, T_{ex}, J_1(X_1), J_{13}, \varepsilon_{13}^1(X_8), \varepsilon_{13}^2(X_7)) = 0; \\
P_{13}^1(J_{ex}, P_{ex}, T_{ex}, J_1(X_1), J_{13}, \varepsilon_{13}^1(X_8), \varepsilon_{13}^2(X_7)) - P_{21}^1(J_{ex}, P_{ex}, T_{ex}, J_2, J_{21}, \varepsilon_{21}^1(X_9), \varepsilon_{21}^2(X_5)) = 0; \\
J_{11}(X_2) - J_{11}^1(\varepsilon_{11}^1(X_6)) = 0; \\
J_{12}(X_3) - J_{12}^1(\varepsilon_{12}^1(X_4)) = 0; \\
J_{13} - J_{13}^1(\varepsilon_{13}^1(X_8)) = 0; \\
J_{13}^1(\varepsilon_{13}^1(X_8)) - J_{13}^2(\varepsilon_{13}^1(X_8), \varepsilon_{13}^2(X_7)) = 0; \\
J_{21} - J_{21}^1(\varepsilon_{21}^2(X_5)) - J_{21}^2(\varepsilon_{21}^1(X_9)) = 0; \\
J_{21}^2(\varepsilon_{21}^1(X_9)) - J_{21}^3(\varepsilon_{21}^1(X_9), \varepsilon_{21}^2(X_5)) = 0; \\
0 < X_i < 1, \quad i = \overline{1, 3}; \\
\varepsilon_{\max}^1 < X_j < \varepsilon_{\max}^{nex}, \quad j = \overline{4, 7}; \\
\varepsilon_{\min}^1 < X_k < \varepsilon_{\max}^1, \quad k = \overline{8, 9},
\end{cases}
\quad (2.488)$$

где $P_{11}^1, P_{12}^1, P_{13}^1, P_{21}^1$ – давления на выходах каждой из ветвей КС, J_{ex}, P_{ex}, T_{ex} – расход, давление и температура природного газа на входе в КС, J_1, J_2 – массовые расходы природного газа через «ветви I», $J_{11}, J_{12}, J_{13}, J_{21}$ – массовые расходы природного газа через «ветви II», $\varepsilon_{11}^1, \varepsilon_{12}^1, \varepsilon_{13}^2, \varepsilon_{21}^2$ – степени сжатия для КЦ, $\varepsilon_{13}^1, \varepsilon_{21}^1$ – степени сжатия для групп ГПА первых ступеней КЦ, $\varepsilon_{\min}^1$ – минимальная степень сжатия для групп ГПА первой ступени, $\varepsilon_{\max}^{nex}$ – максимальная степень сжатия для КЦ, $\varepsilon_{\max}^1$ – максимальная степень сжатия для групп ГПА первой ступени.

Следует отметить, что использование унифицированной математической модели КС сложной структуры позволяет создать универсальный программный модуль для ГДС трубопроводных сетей газотранспортных предприятий. Это существенно сокращает время построения новых ГДС для промышленных энергетических объектов различного назначения.

Верификация разработанных в Разделе 2.6 математических моделей транспортирования газа через КС и численных методов их анализа проводилась на многочисленных производственных задачах. Постановка задач и результаты их решения содержатся в монографиях [1, 2, 5 – 7].

2.7. Моделирование транспортирования продуктов через предприятие трубопроводного транспорта

Изложение материала данного Раздела проводится на примере трубопроводной системы газотранспортного предприятия. Построение компьютерного газодинамического симулятора газотранспортного предприятия происходит в результате объединения моделей КС с помощью моделей линейных частей магистральных газопроводов в единую модель трубопроводной сети газотранспортного предприятия. При построении модель

дополняется моделями кранов (крановых площадок), редукторов (см. ниже) и узлов отбора природного газа на нужды потребителей. Компьютерный газодинамический симулятор ГТС может быть расширен за счет включения в него моделей подземных хранилищ газа и т.п.

2.7.1. Моделирование установившихся режимов транспортирования продуктов

Для численного анализа параметров установившихся режимов транспортирования природного газа через газотранспортное предприятие могут использоваться два подхода. Первый подход предполагает применение алгоритма анализа с пассивными моделями КС (см. Раздел 2.6.3.2). Второй базируется на использовании в режиме установления моделей нестационарных течений природного газа через трубопроводную сеть.

Анализ параметров стационарных течений методом установления (с использованием моделей нестационарных течений) является хорошо известной процедурой математического моделирования, описанной в многочисленных источниках (см., например, [69, 77, 96]). Поэтому в этом Разделе основное внимание уделяется методу с пассивными моделями КС. Данный метод позволяет достаточно быстро решать задачу численного анализа установившихся режимов работы трубопроводной сети с удовлетворительной (с практической точки зрения) точностью.

Метод анализа параметров установившихся режимов транспорта природного газа через газотранспортное предприятие с пассивными моделями КС является прямым обобщением метода анализа параметров транспорта газа через КС с пассивными моделями ЦН (см. Раздел 2.6.3.2). Данный метод был разработан В.Е. Селезневым и С.Н. Пряловым [2]. В качестве исходных данных здесь используются: заданные на входе газотранспортного предприятия массовый расход $J_{вх}$, давление $P_{вх}$ и температура $T_{вх}$, а также значение частоты вращения всех валов ЦН. Дополнительно задаются значения отборов природного газа на нужды потребителей.

Для определения параметров установившихся течений можно использовать следующий обобщенный алгоритм последовательного расчета каждого из сегментов рассматриваемой модели:

1. В качестве номера подводящей ЛЧМГ задается 1, в качестве номера принимающей КС задается 1.
2. При заданном массовом расходе $J_{вх}$, температуре $T_{вх}$ и давлении $P_{вх}$ на входе в подводящую ЛЧМГ газотранспортного предприятия по конечно-разностной модели стационарного течения сжимаемого газа находится распределение параметров установившегося течения для подводящей ЛЧМГ. Пусть найденные значения давления и температуры на выходе подводящей ЛЧМГ соответственно равны P_{12} и T_{12} .
3. При заданных массовом расходе $J_{вх}$, частотах вращения валов ЦН на принимающей КС и полученных значениях давления P_{12} и температуры T_{12} на входе в принимающую КС по моделям установившегося режима транспорта газа через КС (см. Раздел 2.6) находится значения давления P_{22} и температуры T_{22} на выходе принимающей КС.
4. Номера подводящей ЛЧМГ и принимающей КС увеличиваются на единицу. Осуще-

ствляется присвоение значений ($T_{вх} = T_{22}$, $P_{вх} = P_{22}$). Если порядковые номера ЛЧМГ и КС превышают число КС в газотранспортном предприятии, то производится переход к шагу 5. В противном случае переходим к шагу 2.

5. При заданном массовом расходе $J_{вх}$, температуре $T_{вх}$ и давлении $P_{вх}$ на входе в замыкающую ЛЧМГ газотранспортного предприятия по конечно-разностной модели стационарного течения сжимаемого газа находится распределение параметров установившегося течения для замыкающей ЛЧМГ. Найденные значения давления P_{12} и температуры T_{12} на выходе замыкающей ЛЧМГ соответствуют значениям на выходной границе газотранспортного предприятия.
6. Распределение параметров установившегося течения через газотранспортное предприятие найдено. Расчет завершен.

2.7.2. Моделирование неустановившихся режимов транспортирования продуктов

Для численного анализа неустановившихся режимов транспортирования природного газа по сложным **магистральным** трубопроводным системам С.Н. Пряловым при участии В.Е. Селезнева был разработан и внедрен в производственную практику метод моделирования динамических режимов транспортирования природного газа через газотранспортное предприятие [2, 117].

Данный метод, по своей сути, является прямым обобщением метода моделирования динамических режимов транспортирования газа через КС с активными моделями ЦН (см. Раздел 2.6.3.2) *на всю трубопроводную сеть газотранспортного предприятия.* При этом в уравнениях (2.486) и (2.487) вместо массовых расходов газа через ЦН будут фигурировать массовые расходы через КС. Как и в случае моделирования течения газа через КС, при решении задачи нахождения параметров неустановившегося течения газа через всю трубопроводную сеть газотранспортного предприятия распределения параметров по всем ЛЧМГ получаются автоматически при решении модифицированных уравнений (2.486) и (2.487).

2.7.3. Численная оценка параметров работы автоматических регуляторов давления в газопроводных сетях

В трубопроводных сетях ГТС применяются автоматические регуляторы давления. Они, как правило, размещаются на ГРС для редуцирования давления транспортируемого газа (газовой смеси). Редуцирование давления газа на ГРС может производиться в одну или несколько ступеней АРД, поддерживающими в определенных пределах выходное давление вне зависимости от расхода газа, определяемого газопотреблением. При этом перепад давления газа на дросселирующих органах АРД не должен превышать 2,5 МПа. Большой перепад давления на дросселирующем органе АРД вызывает повышенную вибрацию и шум, а также возможное обмерзание АРД и снижение надежности редуцирования. АРД работают в условиях непрерывных изменений характера газопотребления. Это, прежде всего, связано с суточной неравномерностью газопотребления, определяемой рядом факторов: климатическими условиями, режимом работы промышленных предприятий, изменяющимся режимом бытового газопотребления. Неисправности АРД вызывают отклонения от установленного рабочего давления и требуемого температурного режима.

Для описания работы АРД (с точки зрения моделирования течения газа) рассмотрим

полную интегральную систему уравнений газовой динамики (2.1, 2.2, 2.50а, 2.50б). На рис. 2.48 представлена типовая схема газового потока в АРД.

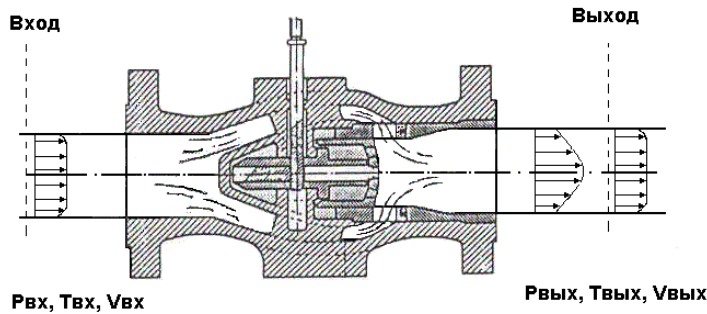


Рис. 2.48. Типовая схема газового потока в автоматическом регуляторе давления

При построении модели течения газа через АРД воспользуемся следующими допущениями и упрощениями:

1. Линейные размеры АРД пренебрежимо малы по сравнению с размерами трубопроводной сети.
2. Работа АРД подчиняется закону:

$$p_{\text{вых}}(p_{\text{вых}}^{\text{зад}}, p_{\text{вх}}) = \begin{cases} p_{\text{вых}}^{\text{зад}}, & \text{если } p_{\text{вых}}^{\text{зад}} < p_{\text{вх}}; \\ p_{\text{вх}}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.489)$$

где $p_{\text{вых}}^{\text{зад}}$ — заданное давление на выходе АРД; $p_{\text{вх}}$ — реальное давление на входе в АРД; $p_{\text{вых}}$ — реальное давление на выходе регулятора.

3. Внутренние источники тепла в АРД отсутствуют.
4. Течение на входе и выходе АРД близко к параллельно-струйному так, что допускается осреднение параметров по поперечному сечению трубы.

Первое предположение позволяет в (2.1, 2.2, 2.50а, 2.50б) «отбросить» все объемные интегралы. Зависимость (2.489) фактически заменяет уравнение движения (2.2). Прокомментировать это можно следующим образом: АРД автоматически создает такое сопротивление течению, чтобы при существующем расходе обеспечить заданный перепад давления. Четвертое предположение дает возможность рассматривать параметры потока на входе и выходе как осредненные по поперечному сечению.

Для реальных режимов работы АРД тепловым потоком по длине трубопроводов, вызванным теплопроводностью газа, можно пренебречь. Для доказательства этого утверждения достаточно сравнить порядок соответствующих конвективного и теплопроводного потоков. Аналогично этому, будем пренебрегать диффузионными потоками компонент по сравнению с конвективными потоками компонент.

Согласно принятым допущениям, систему (2.1, 2.2, 2.50а, 2.50б) можно переписать в следующем виде:

$$\iint_S \bar{\rho} \cdot v_n dS = 0; \quad (2.490a)$$

$$\iint_S \hat{\rho} \cdot v_n \cdot \hat{Y}_m dS = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad \hat{Y}_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} \hat{Y}_m; \quad (2.490б)$$

$$p_{вых} (p_{вых}^{зад}, p_{вх}) = \begin{cases} p_{вых}^{зад}, & \text{если } p_{вых}^{зад} < p_{вх}, \\ p_{вх}, & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (2.490в)$$

$$\iint_S \hat{\rho} \cdot \left(\hat{\varepsilon} + \frac{v^2}{2} \right) \cdot v_n dS = - \iint_S \hat{p} \cdot v_n dS + \iint_S \vec{\tau}_n \cdot \vec{v} dS - \iint_S \vec{W} \cdot \vec{n} dS; \quad (2.490г)$$

$$T_1 = T_2 = \dots = T_{N_S}; \quad (2.490д)$$

$$p = p(\{S_{смеси}\}); \quad (2.490е)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\{S_{смеси}\}), \quad (2.490ж)$$

где величины без «крышки» соответствуют параметрам, осредненным по поперечному сечению трубы, а с «крышкой» – параметрам «в точке».

Рассмотрим уравнения (2.490а) и (2.490б) для внутреннего объема АРД (см. рис. 2.48), ограниченного поперечными сечениями (вход, выход) и боковыми стенками АРД. Учитывая отсутствие течения через боковые стенки АРД, (2.490а) и (2.490б) можно переписать в виде:

$$\iint_{f_{вых}} \hat{\rho} \cdot v_n df - \iint_{f_{вх}} \hat{\rho} \cdot v_n df = 0; \quad (2.491а)$$

$$\iint_{f_{вых}} \hat{\rho} \cdot v_n \cdot \hat{Y}_m df - \iint_{f_{вх}} \hat{\rho} \cdot v_n \cdot \hat{Y}_m df = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad \hat{Y}_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} \hat{Y}_m, \quad (2.491б)$$

или

$$\rho_{вых} \cdot w_{вых} \cdot f_{вых} - \rho_{вх} \cdot w_{вх} \cdot f_{вх} = 0; \quad (2.492а)$$

$$\rho_{вых} \cdot w_{вых} \cdot f_{вых} \cdot (Y_m)_{вых} - \rho_{вх} \cdot w_{вх} \cdot f_{вх} \cdot (Y_m)_{вх} = 0, \quad m = \overline{1, N_S}, \quad (2.492б)$$

где $f_{вх}$ и $f_{вых}$ соответствуют поперечному сечению трубы на входе и выходе АРД; ρ , w , Y_m – осредненные по поперечному сечению трубы значения $\hat{\rho}$, v_x и $\hat{Y}_m$. С учетом (2.492а), соотношение для (2.492б) можно переписать в виде:

$$(Y_m)_{вых} - (Y_m)_{вх} = 0, \quad m = \overline{1, N_S}. \quad (2.492в)$$

Аналогично, уравнение (2.490г) примет следующий вид:

$$\left(\rho_{вых} \cdot \left(\varepsilon_{вых} + \frac{w_{вых}^2}{2} \right) + p_{вых} - (\tilde{\tau}_{xx})_{вых} \right) \cdot w_{вых} \cdot f_{вых} + \Phi = \left(\rho_{вх} \cdot \left(\varepsilon_{вх} + \frac{w_{вх}^2}{2} \right) + p_{вх} - (\tilde{\tau}_{xx})_{вх} \right) \cdot w_{вх} \cdot f_{вх}, \quad (2.493)$$

где ε , p – осредненные по поперечному сечению трубы значения $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{p}$; $\tilde{\tau}_{xx}$ – осредненное по поперечному сечению трубы значение τ_{xx} ; Φ – функция теплообмена газа со стенками регулятора давления. По аналогии с представленными в Разделе 2.3.1 рассуждениями можно показать, что величина $\tilde{\tau}_{xx}$ для рассмотренных поперечных сечений

труб пренебрежимо мала. Величина Φ определяется из численного решения задачи теплообмена между потоком газа и окружающей средой. Таким образом, окончательно система уравнений для моделирования течения газа через АРД будет выглядеть следующим образом:

$$\rho_{\text{вых}} \cdot w_{\text{вых}} \cdot f_{\text{вых}} - \rho_{\text{вх}} \cdot w_{\text{вх}} \cdot f_{\text{вх}} = 0; \quad (2.494a)$$

$$(Y_m)_{\text{вых}} - (Y_m)_{\text{вх}} = 0, \quad m = \overline{1, N_s}; \quad (2.494б)$$

$$p_{\text{вых}}(p_{\text{вых}}^{\text{зад}}, p_{\text{вх}}) = \begin{cases} p_{\text{вых}}^{\text{зад}}, & \text{если } p_{\text{вых}}^{\text{зад}} < p_{\text{вх}}; \\ p_{\text{вх}}, & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (2.494в)$$

$$\varepsilon_{\text{вых}} + \frac{p_{\text{вых}}}{\rho_{\text{вых}}} + \frac{w_{\text{вых}}^2}{2} + \frac{\Phi}{\rho_{\text{вых}} \cdot w_{\text{вых}} \cdot f_{\text{вых}}} = \varepsilon_{\text{вх}} + \frac{p_{\text{вх}}}{\rho_{\text{вх}}} + \frac{w_{\text{вх}}^2}{2}; \quad (2.494г)$$

$$T_1 = T_2 = \dots = T_{N_s}; \quad (2.494д)$$

$$p = p(\{S_{\text{смеси}}\}); \quad (2.494е)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\{S_{\text{смеси}}\}), \quad (2.494ж)$$

где T – осредненное по поперечному сечению трубы значение температуры.

Описанная в данном Разделе модель АРД была разработана В.В. Мотлоховым при участии С.Н. Прялова и А.Л. Бойченко [6]. В совокупности с рассмотренными в предшествующих Разделах моделями транспортирования газовой смеси по трубопроводной системе, модель (2.494) позволяет исследовать нестационарные неизотермические турбулентные течения вязкой химически инертной сжимаемой теплопроводной многокомпонентной газовой смеси по разветвленной трубопроводной системе, включающей регуляторы давления. При этом следует подчеркнуть, что важную роль в обеспечении высокой точности и адекватности расчетов оказывают используемые УРС [6]. Хорошую точность, с точки зрения практического применения, показало применение термического УРС Редлиха – Квонга (см. Раздел 2.3.1).

2.7.4. Автоматическая настройка высокоточных компьютерных симуляторов на реальные параметры конкретной трубопроводной системы

При применении ГДС возникает проблема правильного подбора обобщенных полуэмпирических параметров, таких как эффективные (эквивалентные) шероховатости стенок труб на участках ЛЧМГ, эквивалентные местные гидравлические сопротивления в магистральных газопроводах и т.д. Как правило, подбор данных параметров осуществляется вручную. Изначально их значения определяют по справочной литературе на основании имеющихся материалов трубных книг, проектной и строительной документации. Затем подобранные значения корректируются по результатам консультаций со специалистами, эксплуатирующими трубопроводную сеть конкретного газотранспортного предприятия, и по результатам сравнения полученных с использованием ГДС расчетных оценок параметров транспорта газа (давления, температуры, массового расхода) с соответствующими натурными измерениями, выполненными с помощью SCADA-системы.

Здесь следует отметить, что операция подбора для ГДС обобщенных полуэмпирических параметров осуществляется достаточно редко (как правило, не чаще одного раза в два ÷ три года, при условии отсутствия реконструкции газотранспортной сети). Как показала практика эксплуатации ГДС, особое значение качество подбора параметров приобретает при компьютерном анализе и оптимизации неустановившихся режимов транспорта газа в газотранспортном предприятии. При работе ГДС обобщенные полуэмпирические параметры не изменяются.

С целью повышения качества и эффективности процедуры подбора полуэмпирических параметров в ГДС В.Е. Селезнев и А.Л. Бойченко были разработаны несколько математических методов ее автоматизации и обоснования корректности получаемых решений [4, 6]. Эти методы базируются на постановке и решении специальных задач математической оптимизации. Не теряя общности рассуждений, изложение одного из данных методов будем проводить на примере подбора значений эффективных (эквивалентных) шероховатостей стенок труб на участках линейных частей магистральных газопроводов для всей трубопроводной сети газотранспортного предприятия. Здесь следует отметить, что подбираемые полуэмпирические параметры не должны зависеть от параметров газового потока в трубе. Это требование обеспечивает независимость управляемых переменных во вспомогательных оптимизационных задачах (см. ниже).

Для возможности применения метода необходимо наличие на газотранспортном предприятии архивного банка:

- параметров работы газоперекачивающего оборудования;
- данных о положении кранов на линейных частях магистральных газопроводов и КС;
- информации об отборах газа потребителями (также на собственные нужды);
- результатов натурных измерений основных параметров транспорта газа по сети предприятия.

Этот архивный банк, как правило, формируется с помощью SCADA-системы и хранится в виде компьютерной базы данных за достаточно длительный период (от месяца до нескольких лет).

При применении метода автоматической настройки ГДС трубопроводы газотранспортного предприятия условно разбиваются на n отдельных участков (рекомендуемая протяженность от нескольких сотен метров до сотни километров). Для каждого участка по справочной литературе с использованием информации, содержащейся в трубных книгах, проектной и строительной документации, определяются стартовые значения обобщенной шероховатости стенки трубы участка линейных частей магистральных газопроводов.

В исследуемом периоде времени выделяются k интервалов, в течение которых транспортирование газа осуществлялось в различных неустановившихся режимах, характерных для данного предприятия. При выделении временных интервалов обязательно соблюдается правило, по которому началу каждого выделенного интервала времени должен предшествовать период (пусть очень непродолжительный), соответствующий квазистационарному режиму транспортирования газа на предприятии. Нарушение данного правила приведет к отказу в работе ГДС, т.к. в соответствии с законами математической физики для решения нестационарных задач необходимо задавать не только граничные, но и начальные условия. В нашем случае корректное задание начальных условий возможно только в виде результатов предварительного решения стационарной задачи.

Все выделяемые интервалы времени целесообразно выбирать одинаковой продолжительности. Выполнение данного требования позволяет распараллелить процесс решения задачи настройки ГДС в случае применения многопроцессорной компьютерной техни-

ки. Рекомендуемая продолжительность интервала может изменяться от нескольких десятков минут до нескольких часов.

Для повышения качества настройки ГДС рекомендуется равномерно распределять выделенные интервалы по всему исследуемому периоду времени. Данные интервалы также не должны соседствовать друг с другом. Как правило, в архивных банках данных содержится информация, обработанная с помощью процедур математической фильтрации. Если это не было сделано, то вся информация архивного банка данных, соответствующая выбранным интервалам времени и полученная с помощью SCADA-системы, должна быть подвергнута процедуре математической фильтрации.

При завершении подготовки исходной информации, необходимой для автоматической настройки ГДС, выделенные временные интервалы условно разделяются на l временных срезов, расположенных друг от друга на одинаковом временном шаге.

Рассматриваемый здесь метод настройки ГДС предполагает проведение математического моделирования нестационарного режима течения газа для каждого из выбранных временных интервалов с заданными значениями шероховатости участков труб. При моделировании ГУ задаются на границах трубопроводной сети газотранспортного предприятия (включая отборы газа потребителями) в виде различных сочетаний давлений, температур и массовых расходов транспортируемого газа.

По результатам моделирования производится вычисление функций квадрата невязок между расчетными и измеренными основными параметрами транспорта газа (как правило, в качестве таких параметров рассматриваются давление транспортируемого газа по всей длине линейных частей магистральных газопроводов ($Y_i = P_i$) и массовый расход ($Y_i = J_i$) на выходах трубопроводной сети предприятия):

$$f_i(\vec{X}) = \left[Y_i^{\text{расчетное}}(\vec{X}) - Y_i^{\text{измеренное}}(\vec{X}) \right]^2, \quad i = \overline{1, m}, \quad m = s \times k \times l, \quad (2.495)$$

где $\vec{X} \in \Omega \subset R^n$ – вектор независимых управляемых переменных в n -мерном евклидовом пространстве R^n (в качестве управляемых переменных здесь выступают обобщенные шероховатости участков трубопроводов, на которые условно разделена вся линейная часть магистральных газопроводов предприятия), Ω – непустое выпуклое множество в n -мерном евклидовом пространстве R^n (в данном случае оно описывается системой простых ограничений на управляемые переменные); s – количество датчиков параметров транспорта газа (датчиков давлений и датчиков расходов), установленных на всей ЛЧМГ газотранспортного предприятия.

Временные интервалы и срезы, в соответствии с применяемым методом настройки ГДС, фиксируются и не изменяются от расчета к расчету, поэтому функции (2.495) не зависят от времени. При определении значений функций (2.495), в случае анализа режима транспорта газа методом смены квазистационарных состояний, необходимо принять: $l = 1$. Функции $f_i: R^n \rightarrow R$, $i = \overline{1, m}$, являются непрерывно дифференцируемыми. Здесь следует также отметить, что в описанной выше постановке задачи функции $f_i: R^n \rightarrow R$, $i = \overline{1, m}$, предполагаются выпуклыми.

Задача автоматической настройки ГДС сводится к минимизации варьированием управляемых переменных наибольших отклонений расчетных оценок параметров транспорта газа от их фактически измеренных величин, прошедших процедуры аппаратной и математической фильтрации. Таким образом, производственная задача автоматической настройки ГДС формализуется в виде постановки и решении классической дискретной минимаксной задачи [33, 34]:

$$\max_{i=1,m} f_i(\vec{X}) \rightarrow \min, \quad \vec{X} \in \Omega \subset R^n. \quad (2.496)$$

В качестве стартовых величин обобщенных шероховатостей выступают их справочные значения (см. выше). Расчет может быть завершён до нахождения решения (2.496) в случае выполнения условия:

$$\max_{i=1,m} f_i(\vec{X}) < C_{\text{заданное}}, \quad (2.497)$$

где $C_{\text{заданное}} > 0$ – заданная константа, связанная с точностью измерений датчиками параметров транспорта газа (ее значение может изменяться для каждой группы датчиков: датчиков давлений и датчиков расхода). Остальные критерии останова решения задачи (2.496) совпадают с критериями останова классических задач оптимизации.

Для решения поставленной задачи оптимизации (2.496) используется метод модифицированных функций Лагранжа, адаптированный для решения дискретной минимаксной задачи с простыми ограничениями [118]. В этом случае решение задачи (2.496) сводится к решению следующей эквивалентной задачи общего нелинейного программирования путем введения дополнительной переменной x_{n+1} :

$$\left. \begin{array}{l} x_{n+1} \rightarrow \min \\ \text{при условиях} \quad f_i(\vec{X}) - x_{n+1} \leq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \vec{X} \in \Omega \subset R^{n+1}. \end{array} \right\} \quad (2.498)$$

Для решения задачи (2.498) используются методы условной нелинейной оптимизации, реализованные в библиотеке оптимизации «Techno&Optim» [1].

2.8. Математические методы снижения затрат на транспортирование продуктов по трубопроводным сетям с помощью высокоточных компьютерных симуляторов

Изложение материала данного Раздела проводится на примере трубопроводной системы газотранспортного предприятия. С целью избежать загромождения материала Раздела излишними техническими деталями, в то же время не теряя общности рассуждений, здесь будут рассматриваться ГТС, имеющие только последовательное расположение компрессорных станций (рис. 2.49).

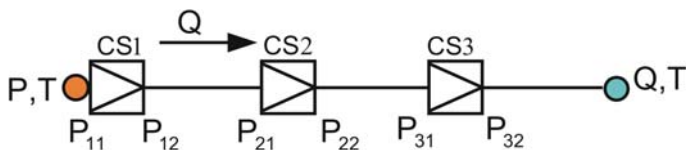


Рис. 2.49. Схема газотранспортной сети с последовательным расположением КС

Основным управляемым оборудованием на КС являются ГПА. Регулирование степени сжатия каждого центробежного нагнетателя производится как изменением угла атаки направляющего устройства (лопаточной решетки) на входе ЦН, так и варьированием частоты вращения вала ЦН. С целью выполнения контрактных обязательств газотранспортное предприятие должно обеспечивать требуемое давление P_{contract} и/или расход

Q_{contract} природного газа (или законы их изменений во времени: $P_{\text{contract}}(t)$ и $Q_{\text{contract}}(t)$) на выходной границе ГТС, не подвергая при этом оборудование всех КС в сети, а также все ЛЧМГ, критическим эксплуатационным нагрузкам. Для обеспечения прибыли и своего экономического развития каждое газотранспортное предприятие стремится сократить энергетические (и, соответственно, финансовые) затраты на транспортирование природного газа по ГТС, соблюдая при этом технологические, конструктивные, эксплуатационные, экологические и иные ограничения на режимы работы оборудования ГТС, а также указанные выше контрактные обязательства газотранспортного предприятия.

Перечисленные производственные задачи могут быть формализованы в виде математических задач оптимального управления. Для построения целевых функций и функций, входящих в формализованные ограничения на режимы работы оборудования ГТС, необходимо проводить адекватное моделирование физических процессов транспортирования природного газа по ГТС газотранспортного предприятия. Эта задача может быть решена с использованием ГДС (см. выше).

2.8.1. Критерий оптимизации неустановившихся режимов транспортирования природного газа через ГТС

Обобщенную формулировку так называемого *энергетического критерия снижения затрат на безаварийное транспортирование природного газа в газотранспортном предприятии*, удобную для дальнейшей математической формализации, можно записать в следующем виде.

Для решения поставленных производственных задач необходимо получить расчетные оценки управляющих воздействий на оборудование ГТС, соответствующие минимуму стоимости интегральных энергетических затрат на неустановившийся режим транспортирования газа через ГТС в заданном временном интервале при условиях одновременного обеспечения заданных значений параметров транспортируемого газа в контрольных точках ГТС и выполнения заданных ограничений по безопасному и экологичному функционированию ГТС.

Здесь следует подчеркнуть, что рассматриваемый энергетический критерий снижения затрат на транспортирование природного газа в газотранспортном предприятии является частным критерием, т.к. в нем не учитываются затраты на износ оборудования при частой смене режимов его работы и остановках, затраты на работу специалистов, связанную с переключениями режимов, и т.д.

В представленном критерии расчетные оценки функции стоимости интегральных энергетических затрат определяются с использованием ГДС. Для этой цели в ГДС реализуются функциональные зависимости расходов энергоносителей в силовых приводах от значений потребляемой мощности на валах ЦН для всех газоперекачивающих агрегатов в ГТС. Следует отметить, что построение распределений расходов энергоносителей в силовых приводах ГПА во времени в ГДС относится к процедурам определения основных параметров работы оборудования ГТС и является одной из его штатных функций (см. Раздел 2.2). При известных объемах расходов энергоносителей и ценах на данные энергоносители проведение расчета их суммарной стоимости для газотранспортного предприятия не представляет сложности.

Требование обеспечения заданных значений параметров транспортируемого газа в контрольных точках ГТС в критерии соответствует требованию выполнения контрактных обязательств газотранспортных предприятий. Требования выполнения заданных

ограничений по безопасному и экологичному функционированию ГТС сводятся к удовлетворению технологических, эксплуатационных, экологических, конструктивных и иных ограничений на работу оборудования ГТС. Математически данные ограничения формализуются в виде набора простых ограничений на искомые значения управляющих воздействий на оборудование ГТС и системы нелинейных нестрогих двусторонних (и/или односторонних) алгебраических неравенств [6]. Значения функций в этих неравенствах (параметров работы оборудования ГТС и газодинамических параметров течения газа по сети) вычисляются с помощью ГДС.

При математической реализации критерия на практике, как правило, ищется локальный минимум функции интегральных затрат при заданных ограничениях. Это, прежде всего, связано со сложностью (и, как правило, полимодальностью) целевой функции, сложностью функций в ограничениях и с погрешностями в исходных данных, поступающими от SCADA-системы к ГДС. Из-за существующего лимита времени получения результатов прогнозов при решении производственных задач поиск локального минимума целевой функции может принудительно прерываться. В данном случае за расчетную оценку интегральной стоимости затрат принимается ее уменьшенное (по сравнению со стартовым) значение, а соответствующие координаты (оценки управляющих воздействий на оборудование ГТС) объявляются найденным решением.

2.8.2. Постановка задачи оптимизации неустановившихся режимов транспортирования природного газа через ГТС

Алгоритм оптимизации неустановившихся режимов функционирования ГТС по рассмотренному выше критерию предполагает предварительное проведение с использованием ГДС прогнозного расчета физических параметров транспортирования газа через ГТС для заданного временного интервала по заданным законам изменения во времени параметров работы оборудования ГТС и параметров течения газа на границах ГТС. На каждом временном шаге данного расчета определяется значение функции энергетических (или финансовых) затрат на транспортирование газа через ГТС, непосредственно связанной с параметрами работы ее оборудования и параметрами течения газа. Таким образом, в процессе прогнозного расчета автоматически формируется зависимость изменения затрат во времени для так называемого неоптимизированного прогноза.

Построение оптимального прогноза на заданный временной период в общем случае сводится к определению временных законов управляющих воздействий на оборудование ГТС, снижающих затраты на транспортирование природного газа. К искомым управляющим воздействиям, прежде всего, необходимо отнести регулирование для всей ГТС частот вращения валов ЦН и углов лопаточных решеток на входах ЦН, оснащенных такими направляющими устройствами. При этом регулирование частот вращения валов всех ЦН может приводить к останову или запуску отдельных модельных ГПА сети. Список включенных в работу ГПА, дополненный информацией о состоянии кранов технологической обвязки КС (и кранов на крановых площадках ЛЧМГ), называют конфигурацией КС (или ГТС в целом) [6, 119].

Как отмечалось выше, значения энергетических (или финансовых) затрат в заданный момент времени t зависят от состояния $\bar{\mathbf{u}}(t)$ всего газоперекачивающего оборудования в ГТС. Эти затраты будут описываться в виде нелинейной алгебраической функции затрат $Z(t, \bar{\mathbf{u}}(t))$. Очевидно, что суммарные затраты за прогнозируемый интервал

времени $[0, T]$ будут представлять собой интеграл $\int_0^T Z(t, \bar{\mathbf{u}}(t)) dt$. С математической

точки зрения, минимизация затрат на транспортирование природного газа через ГТС в прогнозируемый период сводится к минимизации площади двумерной фигуры Φ , показанной на графике (рис. 2.50).

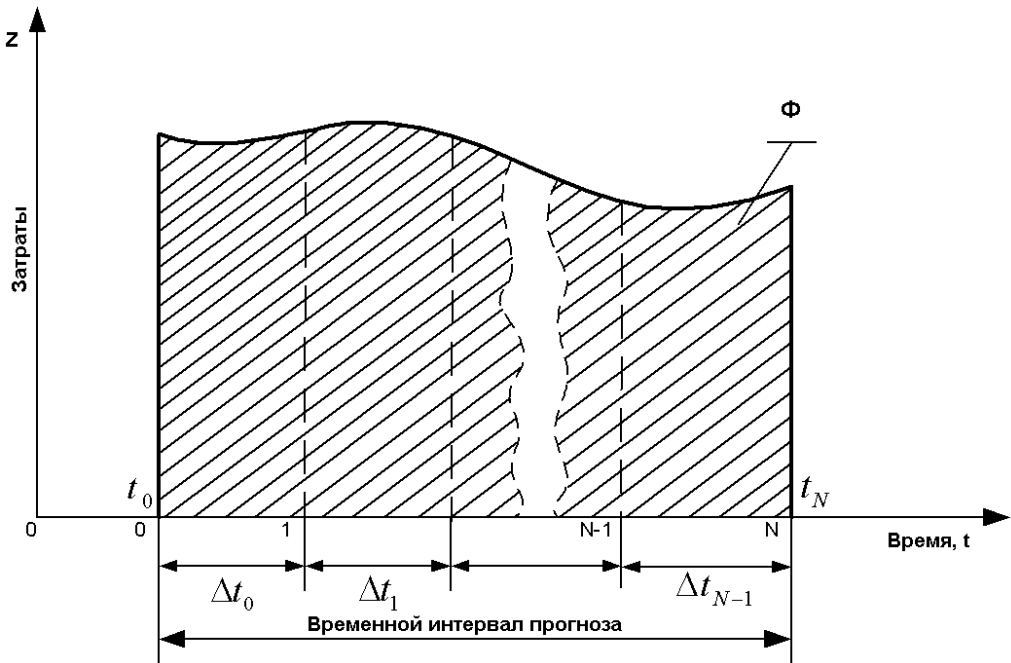


Рис. 2.50. Изменение функции затрат на транспортирование газа при прогнозе для заданного временного интервала

Математически это можно записать так:

$$J(\bar{\mathbf{u}}) = \int_0^T Z(t, \bar{\mathbf{u}}(t)) dt \rightarrow \min, \quad t \in [0, T], \quad \bar{\mathbf{u}}(t) \in U(t) \subset R^m, \quad (2.499a)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}(t, \bar{\mathbf{u}}(t)) \in \Omega = \left\{ \bar{\mathbf{W}} \in R^k : \left(w_{\min}^{\text{specified}}(t) \right)_j \leq w_j(t, \bar{\mathbf{u}}(t)) \leq \left(w_{\max}^{\text{specified}}(t) \right)_j, \quad j = \overline{1, l}; \right. \\ \left. w_j(t, \bar{\mathbf{u}}(t)) \leq \left(w_{\max}^{\text{specified}}(t) \right)_j, \quad j = \overline{l+1, k} \right\}, \end{aligned} \quad (2.499b)$$

где $U(t)$ – заданное множество, которое определяет тип ограничений, связанный с ограниченностью ресурсов управления (простые ограничения на величины управляющих воздействий); m – количество используемых при оптимизации управляющих воздействий; $\bar{\mathbf{W}}(t, \bar{\mathbf{u}}(t)) = (w_1(t, \bar{\mathbf{u}}(t)), \dots, w_k(t, \bar{\mathbf{u}}(t)))^T$ – заданная алгебраическая вектор-функция ограничений; k – общее количество используемых при оптимизации ограничений в виде двусторонних и односторонних нестрогих алгебраических неравенств;

$\vec{w}_{\min}^{\text{specified}}(t) \in R^l$ и $\vec{w}_{\max}^{\text{specified}}(t) \in R^k$ – заданные векторы минимально и максимально допустимых значений для реализации ограничений; l – количество используемых при оптимизации ограничений в виде двусторонних нестрогих алгебраических неравенств; R^m – евклидово m -мерное векторное пространство; R^k – евклидово k -мерное векторное пространство; R^l – евклидово l -мерное векторное пространство.

Первые l строк вектор-функции $\vec{W}(t, \vec{u}(t))$ описывают технологические, конструктивные, эксплуатационные, экологические и иные ограничения на режимы работы оборудования ГТС. Остальные строки вектор-функции ограничений обеспечивают стабилизацию программного состояния и режимов работы ГТС. Под стабилизацией заданного программного состояния и режимов работы ГТС здесь подразумевается удержание истинных траекторий изменения тех или иных параметров оборудования ГТС и параметров транспортирования газа в некоторых окрестностях желаемых для них траекторий. Примерами подобных параметров ГТС могут служить значения давления газа на границах ГТС, жестко контролируемые в соответствии с требованием соблюдения контрактных обязательств газотранспортного предприятия. Таким образом, в задаче (2.499) присутствуют дополнительные условия $w_j(t, \vec{u}(t)) \leq (w_{\max}^{\text{specified}}(t))_j$, $j = \overline{l+1, k}$,

которые будут ограничивать отклонения расчетных траекторий изменения оговоренных параметров от их программных траекторий. При этом алгебраические функции в этих ограничениях, как правило, являются модулями невязок между расчетными и программными траекториями.

Технология транспортирования природного газа по ГТС предполагает для оборудования ГТС (например, отдельных ГПА или их групп) ступенчатое изменение управляющих воздействий во времени. Поэтому при подготовке оптимального прогноза затрат нужно построить на отрезке прогноза $[0, T]$ сетку $(t_0, t_1, \dots, t_N)$ так, чтобы внутри интервала времени (t_i, t_{i+1}) , $i = \overline{0, N-1}$, управление оборудованием ГТС было постоянным, то есть: $\vec{u}(t) = \vec{u}^i = \text{const}$, $t \in (t_i, t_{i+1})$, $\vec{u}^i \in U(t)$. Для упрощения описания задачи (но не теряя общности рассуждений) здесь условно принимается, что шаг $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, $i = \overline{0, \dots, N-1}$, является постоянной величиной в течение всего промежутка времени прогноза.

Учитывая вышесказанное, функция состояния оборудования в ГТС будет иметь вид (рис. 2.51):

$$u_j(t) = \begin{cases} \frac{t-t_0}{\delta} \cdot (u_j^0 - u_j(0)) + u_j(0), & t \in [0, \delta); \\ u_j^i, & t \in [t_i + \delta, t_{i+1} - \delta); \\ \frac{t - (t_{i+1} - \delta)}{2 \cdot \delta} \cdot (u_j^{i+1} - u_j^i) + u_j^i, & t \in [t_{i+1} - \delta, t_{i+1} + \delta), \end{cases} \quad (2.499\text{в})$$

где $i = \overline{0, \dots, N-1}$; $j = \overline{1, \dots, m}$; $u_j(0)$ – известное значение исходного управляющего воздействия в начальный момент времени, $u_j^N = u_j^{N-1}$; величина отступа δ выбирается эмпирически. При решении производственных задач для газотранспортных предприятий функция состояния оборудования ГТС часто представляет собой функцию изменения частот вращения валов всех ЦН и углов лопаточных решеток на входах ЦН.

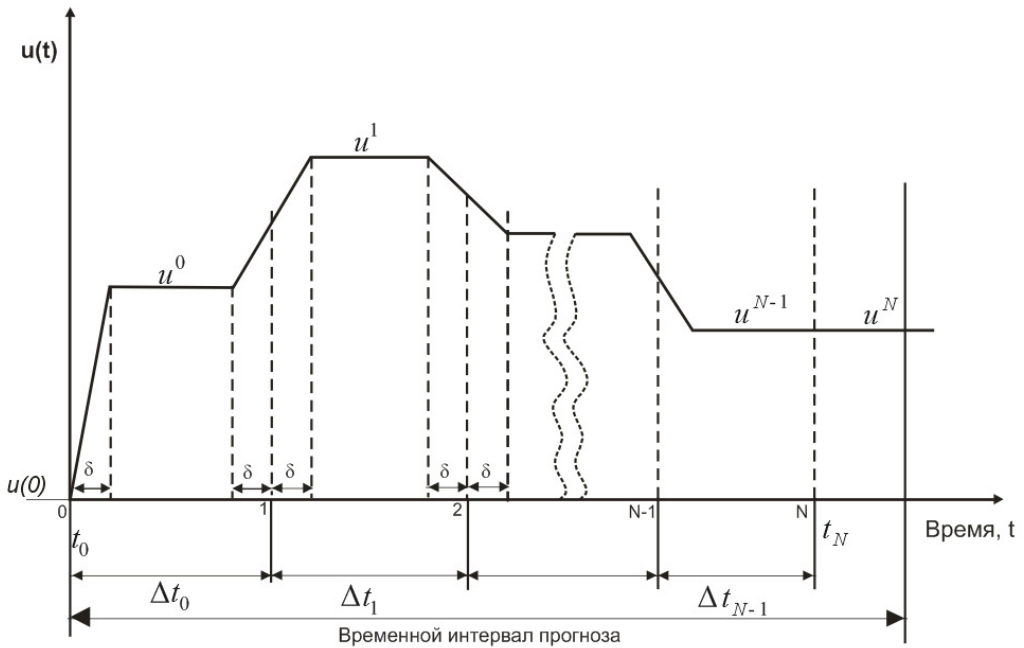


Рис. 2.51. Представление функции изменения управляющих воздействий на оборудование ГТС

2.8.3. Алгоритм оптимизации неустановившихся режимов транспортирования природного газа через ГТС

Значение интеграла стоимости (2.499а) в построенной оптимизационной модели (2.499) вычислить аналитически затруднительно, поэтому данный интеграл вычисляется численно. Широко известный метод трапеций для этого случая является вполне приемлемым, т.е. (рис. 2.52):

$$\begin{aligned}
 J(\bar{\mathbf{u}}) &= \int_0^T Z(t, \bar{\mathbf{u}}(t)) dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Z_i(\bar{\mathbf{u}}(t_i)) + Z_{i+1}(\bar{\mathbf{u}}(t_{i+1}))}{2} \cdot \Delta t = \\
 &= 0,5 \cdot \Delta t \cdot Z_0[\bar{\mathbf{u}}(t_0)] + \Delta t \cdot \sum_{i=1}^{N-1} Z_i[\bar{\mathbf{u}}(t_0 + i \cdot \Delta t)] + 0,5 \cdot \Delta t \cdot Z_N[\bar{\mathbf{u}}(t_N)].
 \end{aligned} \quad (2.500)$$

Таким образом, для некоторого набора дискретных управлений $(\bar{\mathbf{u}}^0, \bar{\mathbf{u}}^1, \dots, \bar{\mathbf{u}}^{N-1})^T$ можно вычислить по формуле (2.500) значение функционала качества $J(\bar{\mathbf{u}}^0, \bar{\mathbf{u}}^1, \dots, \bar{\mathbf{u}}^{N-1})$.

С учетом вышесказанного, задачу отыскания оптимального управления (2.499) можно заменить на эквивалентную задачу нелинейного программирования относительно независимых векторов $(\bar{\mathbf{u}}^0, \bar{\mathbf{u}}^1, \dots, \bar{\mathbf{u}}^{N-1})^T$:

$$\tilde{J}(\bar{\mathbf{u}}^0, \bar{\mathbf{u}}^1, \dots, \bar{\mathbf{u}}^{N-1}) = 0,5 \cdot Z_0[\bar{\mathbf{u}}^0] + \sum_{i=1}^{N-1} Z_i[\bar{\mathbf{u}}^i] + 0,5 \cdot Z_N[\bar{\mathbf{u}}^{N-1}] \rightarrow \min, \quad (2.501a^*)$$

при условиях (с учетом (2.499в)):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^i &\in U = \\ &= \left\{ \bar{\mathbf{u}} \in R^m : \max \left[u^{i-1} - \eta_{constr}, u_{\min}^{specified} \right]_j \leq u_j^i \leq \min \left[u^{i-1} + \eta_{constr}, u_{\max}^{specified} \right]_j, \quad j = \overline{1, m} \right\}, \quad (2.501a) \\ i &= \overline{1, N-1}; \\ \bar{\mathbf{W}}_i(\bar{\mathbf{u}}^0, \bar{\mathbf{u}}^1, \dots, \bar{\mathbf{u}}^{N-1}) &\in \Omega = \left\{ \bar{\mathbf{W}}_i \in R^k : \left(w_{\min}^{specified} \right)_j \leq w_j^i(\bar{\mathbf{u}}^0, \bar{\mathbf{u}}^1, \dots, \bar{\mathbf{u}}^{N-1}) \leq \left(w_{\max}^{specified} \right)_j, \right. \\ &\quad \left. j = \overline{1, l}; w_j^i(\bar{\mathbf{u}}^0, \bar{\mathbf{u}}^1, \dots, \bar{\mathbf{u}}^{N-1}) \leq \left(w_{\max}^{specified} \right)_j, \quad j = \overline{l+1, k} \right\}, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (2.501b)$$

где $\bar{\mathbf{u}}_{\min}^{specified} \in R^m$ и $\bar{\mathbf{u}}_{\max}^{specified} \in R^m$ – заданные векторы минимально и максимально допустимых значений параметров управляющих воздействий (как правило, данные векторы не зависят от времени); $\bar{\eta}_{constr} \in R^m$ – заданное ограничение на максимальный шаг однократного изменения во времени j -ого управляющего воздействия. Множество ограничений в (2.501b) обусловлено требованием плавного изменения параметров работы оборудования ГТС при переходе от одного временного слоя к другому. Здесь следует напомнить, что вычисление затрат $Z_i(\bar{\mathbf{u}}^i)$ на транспортирование газа по ГТС обеспечивается применением ГДС.

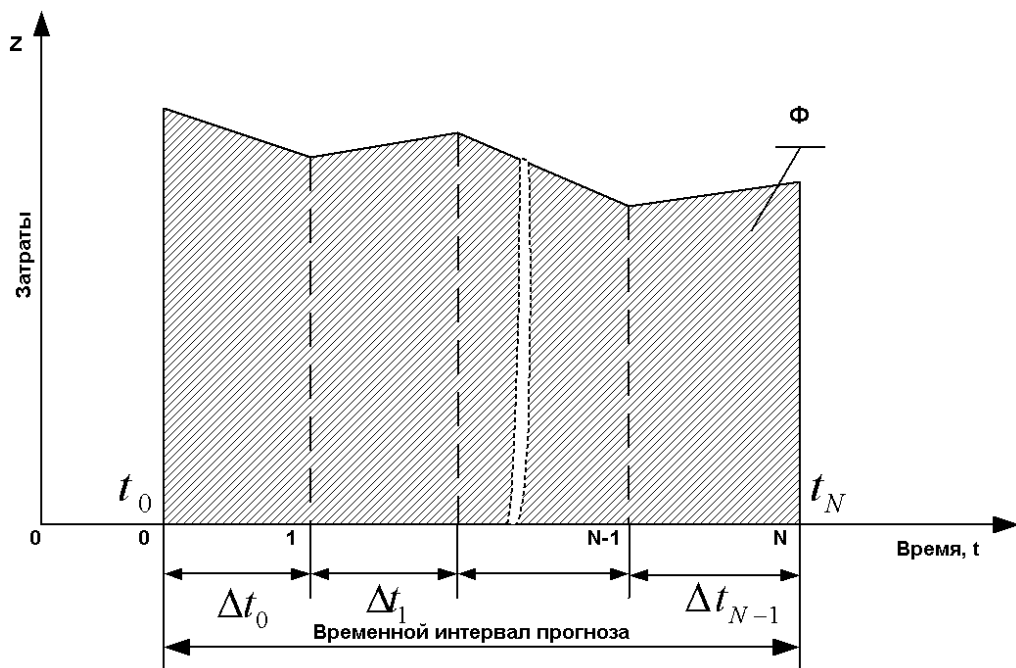


Рис. 2.52. Линейная аппроксимация функции затрат на транспортирование газа при прогнозе для заданного временного интервала¹

Так как при решении производственных задач построения оптимальных прогнозов важно знать не столько значение минимума функционала качества, сколько оптималь-

¹ Здесь следует отметить, что число и размеры шагов по времени на рис. 2.50, 2.51 и 2.52 в общем случае могут не совпадать.

ную траекторию управления, то здесь целесообразно постановку задачи (2.501а*) преобразовать к виду:

$$\bar{J}(\bar{\mathbf{u}}^1, \dots, \bar{\mathbf{u}}^{N-1}) = \sum_{i=1}^N Z_i(\bar{\mathbf{u}}^i) \rightarrow \min, \quad \text{где } \bar{\mathbf{u}}^N = \bar{\mathbf{u}}^{N-1}. \quad (2.501a)$$

Для решения задачи общего нелинейного программирования (2.501) используется метод модифицированных функций Лагранжа [118]. В соответствии с данным методом модифицированная целевая функция решаемой оптимизационной задачи представляет собой сумму исходной целевой функции (2.501а) и взвешенных специальным образом (с помощью множителей Лагранжа и штрафов) формализованных ограничений (2.501в). Эквивалентная задача поиска минимума построенной модифицированной целевой функции при простых ограничениях на переменные (2.501б) осуществляется с использованием модифицированных алгоритмов с переменной метрикой [32] или модифицированных алгоритмов сопряженных градиентов [120], устойчивых относительно накопления погрешностей арифметических операций.

Если в качестве дополнительного управляющего воздействия рассматривать выбор конфигурации ГТС, то потребуются введение дополнительных ограничений оптимизационной задачи, отражающих технологические запреты на частые смены конфигураций ГТС при транспортировании газа. Выбор конфигурации ГТС не вызывает принципиальных изменений в подходе или алгоритме оптимизации неустановившихся режимов транспортирования газа через ГТС.

Рассмотренный выше подход к построению оптимальных прогнозов параметров транспортирования газа по ГТС легко распространяется на КС или группу ГПА.

Если диапазоны изменения управляющих воздействий на оборудование ГТС на одном временном шаге были бы достаточно широкими для автоматического выполнения условий (2.501б) и можно было бы пренебречь зависимостью функций затрат $Z_i(\bar{\mathbf{u}}^i)$ от предыстории изменения газодинамического режима, то решение задачи (2.501) при прогнозах можно было бы заменить на эквивалентное последовательное (начиная со стартового момента времени) решение серии простых задач для каждого временного слоя прогнозного расчета:

$$\bar{J}(\bar{\mathbf{u}}) = Z(\bar{\mathbf{u}}) \rightarrow \min, \quad (2.502a)$$

при условиях:

$$\bar{\mathbf{u}} \in U = \left\{ \bar{\mathbf{u}} \in R^m : \left[u_{\min}^{\text{specified}} \right]_j \leq u_j \leq \left[u_{\max}^{\text{specified}} \right]_j, \quad j = \overline{1, m} \right\}; \quad (2.502б)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{u}}) \in \Omega = \left\{ \bar{\mathbf{W}} \in R^k : \left(w_{\min}^{\text{specified}} \right)_j \leq w_j(\bar{\mathbf{u}}) \leq \left(w_{\max}^{\text{specified}} \right)_j, \quad j = \overline{1, l}; \right. \\ \left. w_j(\bar{\mathbf{u}}) \leq \left(w_{\max}^{\text{specified}} \right)_j, \quad j = \overline{l+1, k} \right\}, \end{aligned} \quad (2.502в)$$

где $\bar{\mathbf{u}} \in R^m$ - управление оборудованием ГТС в рассматриваемый момент времени.

Такой прием позволил бы существенно сократить время счета. Однако здесь следует предостеречь читателя от поспешности, т.к. из-за существенной зависимости функций затрат от предыстории изменения газодинамического режима функционирования ГТС и априорной неопределенности понятия «широты диапазона изменения управляющих воздействий на оборудование ГТС на одном временном шаге» на практике крайне трудно гарантировать фактическую эквивалентность последовательного решения серии задач (2.502) решению задачи (2.501). В то же время постановка задачи (2.502) широко

используется для снижения затрат на установившиеся режимы транспортирования газа по ГТС.

Рассмотренный выше метод оптимизации неустановившихся режимов транспортирования природного газа через ГТС был разработан В.Е. Селезневым [2, 64, 120]. Свое дальнейшее развитие он получил в работах его учеников – А.С. Комиссарова и В.В. Киселева [6, 26, 30, 121].

2.8.4. Об оптимизации установившихся режимов транспортирования природного газа через ГТС

Для решения поставленной задачи (2.502) используется гибридный метод снижения затрат на установившиеся режимы транспортирования природного газа по ГТС. Критерий оптимизации установившихся режимов функционирования ГТС записывается следующим образом.

Как результат решения производственной задачи необходимо получить расчетные оценки управляющих воздействий на оборудование ГТС, соответствующие минимуму стоимости интегральных энергетических затрат на установившийся режим транспортирования газа через ГТС при условиях одновременного обеспечения заданных значений параметров транспортируемого газа в контрольных точках ГТС и выполнения заданных ограничений по безопасному и экологичному функционированию ГТС.

Гибридный метод решения поставленной оптимизационной задачи был впервые предложен В.Е. Селезневом [2, 59, 115]. Свое последующее развитие он получил в работах В.В. Киселева [1, 2, 5, 6]. Он предполагает последовательное выполнение трех основных шагов. На первом шаге методом динамического программирования (ДП) по модифицированной схеме Н.Н. Моисеева [32] (модификация В.В. Киселева [1, 5]) оперативно находятся варианты возможных конфигураций ГТС, соответствующих минимальным значениям оценок энергозатрат (или финансовых затрат) на транспортирование газа по ГТС. На втором шаге методом общего нелинейного программирования (НП) с высокой точностью минимизируются энергозатраты (или финансовые затраты) на транспортирование газа для каждого из полученных вариантов конфигурации ГТС. В качестве метода общего нелинейного программирования здесь используются метод модифицированных функций Лагранжа [118] или метод линеаризации Б.Н. Пшеничного [122]. На шаге 3 гибридного метода снижения затрат на установившиеся режимы транспортирования природного газа по ГТС в качестве общего решения принимается вариант конфигурации ГТС, имеющий минимальное значение энергозатрат (или финансовых затрат) на транспортирование природного газа при заданных граничных условиях.

Рассмотренный выше подход к построению оптимальных прогнозов параметров установившегося транспортирования газа по ГТС легко распространяется на КС или группу ГПА. Для иллюстрации рассмотрим более подробно модификацию гибридного метода, предложенную В.В. Киселевым для оптимизации функционирования индивидуальной КС [6]:

- 1) на **первом шаге** проводится построение ГДС для моделирования работы индивидуальной КС в установившемся режиме и выполняется численный анализ параметров транспортирования газа через КС с целью определения стартового состояния (по отношению к последующему решению задачи оптимизации);
- 2) на **втором шаге** осуществляется математическая формализация критерия оптимизации затрат и формализация ограничений (см. Раздел 2.8.1), обеспечивающих безопасность транспортирования газа через индивидуальную КС в установившемся режиме;

- 3) на **третьем шаге** методом последовательного исключения недопустимых (с точки зрения безопасности функционирования КС) вариантов, используя результаты выполнения шагов 1 и 2, находятся возможные конфигурации КС (т.е. схем включения/выключения ГПА для индивидуальной КС);
- 4) на **четвертом шаге** методами НП, используя результаты шагов 1, 2 и 3, определяются минимальные значения затрат на транспортирование газа через КС для каждой из полученных на шаге 3 конфигураций КС;
- 5) на **пятом шаге** проводится проверка устойчивости рабочих точек на характеристиках ЦН, соответствующих минимальным затратам на транспортирование газа через индивидуальную КС (см. шаг 4) с применением алгоритмов исследования помпажных явлений в системах «группа ЦН – прилегающие ТГ» (см. Раздел 4.7);
- 6) на **шестом шаге** производится выбор (в качестве общего решения оптимизационной задачи) варианта конфигурации КС и соответствующих значений частот вращения валов ЦН и углов лопаточных решеток на входах ЦН в КС (см. шаги 3 и 4), дающих минимум затрат на транспортирование природного газа через индивидуальную КС в установившемся режиме при заданных ГУ, ограничениях и обоснованной устойчивости полученных рабочих точек (см. шаг 5).

Рассмотрим содержание некоторых шагов данного алгоритма более детально.

Выбор конфигурации КС. Под термином «конфигурация КС» (или «конфигурация КЦ», или «конфигурация группы ГПА») в данном случае подразумевается информация о состоянии (т.е., «включен/выключен») всех ГПА в КС (или в КЦ, или в заданной группе ГПА). При этом условно считается, что изменение конфигурации КС производится за счет включения или выключения ГПА. Изменение конфигурации КС за счет перекрытия кранов на ТГ выполняется по аналогии. Здесь следует также отметить, что при использовании ГДС допускается отключение всех ГПА в ветви (это соответствует временному прекращению функционирования данной ветви).

В общем случае для выбора конфигурации газотранспортной сети, удовлетворяющей требованиям по обеспечению заданных массового расхода природного газа и перепада давлений транспортируемого газа между входом и выходом сети, применяется метод ДП по модифицированной схеме Н.Н. Моисеева [32] (модификация В.В. Киселева [1, 5]). При его применении предварительно составляется набор всех практически реализуемых конфигураций КС (набор схем совместной работы ГПА на индивидуальной КС) для различных установившихся режимов¹ транспортирования природного газа. Здесь следует отметить, что составление набора проводится один раз для всего спектра установившихся режимов. При составлении набора используются: нормативная документация, регламентирующая режимы совместного использования ГПА разных типов; опыт работы диспетчеров; рабочие характеристики ЦН, эксплуатирующихся на КС и т.д.

Алгоритм предполагает следующую последовательность действий [1, 5, 6]:

- 1) задаются параметры конкретного установившегося режима транспортирования природного газа через рассматриваемую КС;
- 2) определяется список ГПА, которые могут быть задействованы при транспортировании газа в заданном режиме, и для них устанавливаются допустимые диапазоны изменения массовых расходов газа через ЦН и степени сжатия газа в ЦН;
- 3) из существующего набора всех возможных конфигураций КС составляется список конфигураций, которые включают в себя только работоспособные в заданном

¹ Указанные режимы различаются по газодинамическим параметрам потоков природного газа внутри ГТС.

режиме ГПА;

- 4) производится выбор конфигураций КС из списка, сформированного на шаге 3, для которых выполняются условия совместности диапазонов степеней сжатия и массовых расходов через ЦН; в случае, если допустимые диапазоны изменения степени сжатия или массового расхода для рассматриваемой конфигурации КС не пересекаются, то такая конфигурация исключается из дальнейшего анализа.

Необходимость введения дополнительных ограничений на выбор работающих ГПА при заданном режиме транспортирования газа возникает в связи с тем, что, с экономической точки зрения, часто невыгодно существенно изменять стартовую конфигурацию ГПА. Это объясняется тем, что на запуск ГПА тратится значительное количество энергоносителя. Кроме того, пуск является неблагоприятным режимом при эксплуатации ГПА:

- возникают максимальные термические напряжения в конструкции ГПА;
- происходит полусухое трение в подшипниках (температура масла в момент запуска недостаточна для обеспечения эффективного скольжения);
- пусковое устройство работает с высокими механическими напряжениями в конструкции;
- рабочие точки на характеристиках ГПА при пуске могут находиться в опасной близости к линиям помпажа на данных характеристиках;
- вибрация в конструкции ГПА при пуске, как правило, повышается (как по причине изогнутости вала ЦН во время старта, так и из-за срывных явлений на лопатках ЦН при переходных режимах (см. Раздел 4.7)).

В заключение следует отметить, что описанные здесь подходы и математические методы снижения затрат на транспортирование продуктов по трубопроводным сетям с помощью высокоточных компьютерных симуляторов были реализованы в подсистеме «Alfargus/OptimFlow» на базе КАИ «Alfargus» (см. Раздел 1.6).

ГЛАВА 3

Численный анализ прочности трубопроводных систем

3.1. Постановка задачи

Рассматриваемые в этой Главе методы и технологии численного анализа прочности трубопроводных систем были разработаны в полном соответствии с расширенной концепцией моделирования трубопроводных сетей и систем каналов с открытым руслом, предложенной в Разделе 1.7.

При постановке задачи анализа прочности трубопроводов будем считать, что нам известны геометрическая конфигурация и характеристики физико-механических свойств материалов конструкции трубопроводной системы, находящейся в эксплуатации, а также параметры обобщенных силовых факторов, действующих на данную конструкцию. Под обобщенными силовыми факторами здесь подразумеваются все воздействия, приводящие к возникновению в трубопроводах статического НДС, например, давление транспортируемой среды, температурный перепад, вынужденное смещение от проектного положения и т.п.

Основными источниками информации для сбора исходных данных служат проектная, строительная и эксплуатационная документация, результаты проведенных паспортизации, технической диагностики, инженерных изысканий, а также, в случае необходимости, специально выполненные дополнительные исследования.

На основании исходной информации необходимо выполнить анализ сложного НДС как всей трубопроводной системы в целом, так и отдельных ее элементов, оценить реальную прочность наиболее нагруженных участков и определить соответствие расчетных запасов прочности этих участков требуемым нормативам.

В общей постановке [123], задача определения НДС пространственной конструкции при действии статических нагрузок является краевой задачей МДТТ. В предположении бесконечно малых деформаций, данная задача сводится к решению при заданных ГУ системы, состоящей из дифференциальных уравнений равновесия (уравнений Навье), геометрических соотношений (уравнений Коши, устанавливающих связь между перемещениями и деформациями, и уравнений совместности деформаций Сен-Венана), физических уравнений, определяющих связь между напряжениями и деформациями. Математическая форма записи этих уравнений зависит от выбора координатной системы в трехмерном пространстве. Для упрощения выкладок, но не нарушая общности рассуждений, выберем прямоугольную декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) ¹. В этом случае рассматриваемая система уравнений имеет следующий вид [123]:

– уравнения равновесия Навье

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0; \quad (3.1)$$

– уравнения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (3.2)$$

¹ Для удобства записи некоторых выражений далее будут использоваться также обозначения декартовых координат в виде (x, y, z) .

– уравнения совместности деформаций Сен-Венана

$$\varepsilon_{ki,jl} + \varepsilon_{lj,ik} - \varepsilon_{li,jk} - \varepsilon_{ij,il} = 0, \quad (3.3)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций; u_i – компоненты вектора перемещений; F_i – компоненты вектора объемных сил; $\partial/\partial x_j$ – оператор дифференцирования; $i, j, k, l = 1, 2, 3$. В выражении (3.1) и далее по тексту настоящей Главы по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Для замыкания системы (3.1 – 3.3) необходимо добавить физические уравнения, которые строятся на основании экспериментального исследования макроскопических физико-механических свойств материалов. Одной из наиболее простых является математическая модель, построенная в предположении линейно-упругого поведения материала при нагружении. В линейно-упругой модели напряжения и деформации взаимнооднозначно линейно связаны друг с другом, а соответствующее уравнение этой связи (закон Гука) в общем виде можно записать так [123]:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3.4a)$$

где E_{ijkl} – тензор упругости. Для изотропного материала из 81 компоненты тензора упругости независимыми являются только две [84].

Опытные данные показывают [124], что трубные стали обладают свойством изотропии своих физико-механических свойств в достаточно хорошем приближении. Кроме того, при малых деформациях они, как и большинство конструкционных материалов, следуют закону Гука. Поэтому, в случае физического обоснования малости ожидаемых деформаций, либо в других строго обоснованных случаях, при анализе НДС **магистральной** трубопроводной системы можно использовать линейно-упругую модель материала труб, не снижая точности результатов и существенно уменьшая трудоемкость и время проведения расчетов. В качестве независимых параметров упругих свойств материала удобно использовать стандартные технические характеристики: модуль Юнга E ; коэффициент Пуассона ν (либо модуль сдвига G). Эти характеристики связаны между собой соотношением [123]:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}. \quad (3.5)$$

Для учета тепловых деформаций, возникающих вследствие изменения температуры стенки трубопроводов в процессе эксплуатации, вместо выражения (3.4a) необходимо использовать уравнение Дюамеля – Неймана, полученное из опытного факта аддитивности упругих и температурных деформаций [123]:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} \cdot \Delta T), \quad (3.4б)$$

где α_{kl} – тензор коэффициентов температурного расширения; ΔT – изменение температуры.

Для изотропного материала тензор коэффициентов температурного расширения является шаровым, то есть $\alpha_{kl} \neq 0$, только при $k = l$, и $\alpha_{kk} = \alpha$, ($k = 1, 2, 3$). Если изменение температуры стенок труб не превышает 150°C , то параметр α можно считать не зависящим от температуры T коэффициентом линейного температурного расширения материала. При превышении температурного перепада стенок трубопровода значения 150°C для получения корректных результатов при моделировании необходимо учитывать зависимость всех характеристик физико-механических свойств и показателей прочности материала труб от температуры.

Используя выбранные материальные параметры, соотношение (3.46) для изотропно-го материала можно записать в виде [292]:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[\varepsilon_{ij} + \left(\frac{3 \cdot \nu}{1-2 \cdot \nu} \cdot \varepsilon_0 - \frac{1+\nu}{1-2 \cdot \nu} \cdot \alpha \cdot \Delta T \right) \cdot \delta_{ij} \right], \quad (3.4в)$$

где $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})/3$ – средняя деформация ($3 \cdot \varepsilon_0$ – объемная деформация); δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Как отмечалось выше, изотропия физико-механических свойств материала трубопроводов является хотя и достаточно хорошим, но все же приближением. В действительности, вследствие технологии производства, каждый прокатанный стальной лист (штрипс), а, следовательно, и изготовленная из него труба (см. Приложение 1), обладает некоторой анизотропией (а точнее – ортотропией) механических свойств [125, 126]. Поэтому при наличии достоверных исходных данных¹ для получения высокоточных результатов численного моделирования следует учитывать ортотропию физико-механических свойств материала труб (штрипса).

В общем случае тензор упругости ортотропного материала содержит 9 независимых компонент [84]. Поэтому для записи явного вида выражения (3.46) необходимо иметь 12 независимых материальных параметров. В качестве таких параметров наиболее удобно опять выбрать стандартные технические характеристики: $E_x; E_y; E_z; \nu_{xy}; \nu_{yz}; \nu_{xz}; G_{xy}; G_{yz}; G_{xz}; \alpha_x; \alpha_y; \alpha_z$. В ортотропном материале $\nu_{ij} \neq \nu_{ji}$ при $i \neq j$. Однако, из условия симметричности тензора E_{ijkl} [84] следует, что коэффициенты Пуассона $\nu_{yx}, \nu_{zy}, \nu_{zx}$ не являются независимыми параметрами и связаны с другими характеристиками следующим образом:

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y}; \quad \frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z}; \quad \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{\nu_{zx}}{E_z}. \quad (3.6)$$

Выразив с учетом (3.6) компоненты тензора упругости E_{ijkl} в (3.46) через указанные выше независимые характеристики и выписав компоненты тензора напряжений через компоненты тензора деформаций, для упругого ортотропного материала в условиях термо-механического нагружения имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_x}{\Psi} \cdot \left(1 - \frac{E_z}{E_y} \cdot \nu_{yz}^2 \right) \cdot (\varepsilon_x - \alpha_x \cdot \Delta T) + \frac{E_y}{\Psi} \cdot \left(\nu_{xy} + \frac{E_z}{E_y} \cdot \nu_{yz} \cdot \nu_{xz} \right) \cdot (\varepsilon_y - \alpha_y \cdot \Delta T) + \\ &+ \frac{E_z}{\Psi} \cdot (\nu_{xz} + \nu_{xy} \cdot \nu_{yz}) \cdot (\varepsilon_z - \alpha_z \cdot \Delta T); \\ \sigma_y &= \frac{E_y}{\Psi} \cdot \left(\nu_{xz} + \frac{E_z}{E_y} \cdot \nu_{yz} \cdot \nu_{xz} \right) \cdot (\varepsilon_x - \alpha_x \cdot \Delta T) + \frac{E_y}{\Psi} \cdot \left(1 - \frac{E_z}{E_x} \cdot \nu_{xz}^2 \right) \cdot (\varepsilon_y - \alpha_y \cdot \Delta T) + \\ &+ \frac{E_z}{\Psi} \cdot \left(\nu_{yz} + \frac{E_y}{E_x} \cdot \nu_{xy} \cdot \nu_{xz} \right) \cdot (\varepsilon_z - \alpha_z \cdot \Delta T); \end{aligned}$$

¹ К таким данным, прежде всего, относятся дополнительные материальные параметры. Конкретные значения таких параметров могут быть определены на стандартном экспериментальном оборудовании, как правило, имеющемся в исследовательских лабораториях трубных заводов и компаний трубопроводного транспорта.

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \frac{E_z}{\Psi} \cdot (v_{xz} + v_{xy} \cdot v_{yz}) \cdot (\varepsilon_x - \alpha_x \cdot \Delta T) + \frac{E_z}{\Psi} \cdot \left(v_{yz} + \frac{E_y}{E_x} \cdot v_{xy} \cdot v_{xz} \right) \cdot (\varepsilon_y - \alpha_y \cdot \Delta T) + \\ & + \frac{E_z}{\Psi} \cdot \left(1 - \frac{E_y}{E_x} \cdot v_{xy}^2 \right) \cdot (\varepsilon_z - \alpha_z \cdot \Delta T); \\ \sigma_{xy} = & G_{xy} \cdot \varepsilon_{xy}; \quad \sigma_{yz} = G_{yz} \cdot \varepsilon_{yz}; \quad \sigma_{xz} = G_{xz} \cdot \varepsilon_{xz}, \end{aligned} \quad (3.4r)$$

$$\text{где } \Psi = 1 - \frac{E_y}{E_x} \cdot v_{xy}^2 - \frac{E_z}{E_y} \cdot v_{yz}^2 - \frac{E_z}{E_x} \cdot v_{xz}^2 - 2 \cdot \frac{E_z}{E_x} \cdot v_{xy} \cdot v_{yz} \cdot v_{xz}.$$

В используемом для производства труб листовом штрипсе коэффициенты линейного расширения во всех направлениях одинаковы ($\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \alpha$), а различие других физико-механических свойств, как правило, ярко выражено лишь для одного направления измерения листа [125]. В связи с этими обстоятельствами число подлежащих экспериментальному определению материальных параметров может быть сокращено. Предположим, например, что различия физико-механических свойств наблюдаются только между направлением (любым) «в плоскости листа» и направлением «по толщине листа». Тогда, в декартовой системе координат, оси Ox , Oz которой лежат в плоскости листа, а ось Oy направлена по толщине листа, можно положить: $E_x = E_z$; $v_{xy} = v_{yz}$; $G_{xy} = G_{yz}$. Поэтому число входящих в тензор упругости независимых материальных параметров снижается до пяти, например: E_x ; E_y ; v_{xy} ; v_{xz} ; G_{xy} . Заметим, что в данном случае модуль сдвига G_{xz} уже не является независимой характеристикой материала, а вычисляется по выражению (3.5), где $E = E_x$; $v = v_{xz}$. Таким образом, в рассмотренном примере для записи явного вида выражения (3.4б) требуется всего 6 независимых материальных параметров.

Линейно-упругое поведение материала трубопроводов наблюдается лишь при малых (обратимых) деформациях. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к тому, что в металле труб появляются необратимые пластические деформации, развитие которых и приводит к разрушению трубопроводной конструкции.

Для адекватной оценки прочности магистральных трубопроводов, при анализе предельных состояний, необходимо надлежащим образом учитывать нелинейные пластические свойства трубных сталей. Кроме того, даже в случае, когда деформации трубопроводной конструкции малы и не выходят за пределы упругой области, реальную расчетную картину НДС подземных участков трубопроводов можно получить лишь с учетом нелинейного сопротивления окружающего их грунта.

Все эти явления можно с приемлемой точностью моделировать, используя математические модели, описывающие поведение упруго-пластических сред. В общем случае уравнение поверхности нагружения для упруго-пластических материалов имеет вид [84]:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, T, \chi_i) = 0, \quad (3.4d)$$

где ε_{ij}^p – компоненты тензора пластических деформаций; T – температура; χ_i – параметры материала, определяющие закон его упрочнения. Конкретные модели упруго-пластических сред, применяемые для анализа прочности трубопроводов, будут рассмотрены ниже.

Кроме физической нелинейности свойств материалов при анализе предельных состояний трубопроводов необходимо также учитывать геометрическую нелинейность

конечных деформаций. Для этого линейные соотношения Коши (3.2), полученные в предположении бесконечно малых деформаций, заменяются нелинейными уравнениями Грина, учитывающими в выражениях для компонент тензора деформаций слагаемые второго порядка [123]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \cdot u_{k,j}). \quad (3.7)$$

Соответственно, в декартовой системе координат изменяется вид выражений (3.1), (3.3).

Уравнения (3.1 – 3.4) составляют замкнутую систему, полностью определяющую статическое НДС трехмерной конструкции. Данная система может быть решена, если заданы граничные условия на поверхности:

$$u_i = u_i^*, \quad x \in S_1; \quad (3.8)$$

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = t_i, \quad x \in S_2, \quad (3.9)$$

где t_i – компоненты вектора поверхностных сил; n_i – компоненты вектора нормали к граничной поверхности; $S_1 \cup S_2 = S$ – граничная поверхность; x – точка в трехмерном пространстве.

Решение системы (3.1 – 3.4) можно вести разными путями, в зависимости от того, что, прежде всего, необходимо определить. В нашем случае наиболее удобным способом является прямой метод перемещений [123].

В методе перемещений за основные неизвестные принимаются перемещения точек конструкции, которые представляются как функции пространственных координат в выбранной координатной системе трех- или двухмерного (в зависимости от постановки задачи) евклидова пространства. Тогда, используя геометрические соотношения (3.2) и физические уравнения (3.4), можно выразить напряжения через перемещения и подставить полученные выражения в уравнения равновесия (3.1). Заметим, что при применении метода перемещений уравнения совместности деформаций (3.3) выполняются автоматически и при решении задач не используются. Результирующие системы дифференциальных уравнений в частных производных являются системами эллиптического типа [89]. Например, в случае применения модели линейно-упругого изотропного материала и в предположении бесконечно малости деформаций, метод перемещений приводит к известным уравнениям Ламе [123]:

$$3 \cdot (\lambda + \mu) \cdot \varepsilon_{0,i} + \mu \cdot \Delta u_i + F_i = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (3.10)$$

где λ, μ – параметры Ламе, которые выражаются через технические характеристики упругих свойств материала ($\lambda = 2 \cdot \nu \cdot G / (1 - 2 \cdot \nu)$, $\mu = G$); Δ – оператор Лапласа [89]. Соответственно, интегрирование системы (3.10) с учетом граничных условий (3.8) и (3.9) позволит определить все характеристики линейно-упругого НДС трехмерной конструкции.

3.2. Метод решения уравнений равновесия трубопроводных систем

Конструкции сетей промышленных трубопроводов представляют собой топологически сложные пространственные системы с множеством разветвлений, пересечений, тройников, отводов и т.д., находящихся в условиях действия широкого спектра нагру-

зок (избыточное давление, неоднородное поле температур, реакции опор и т.д.). На современном уровне развития математического аппарата получение аналитических решений даже наиболее простых задач равновесия (например, (3.10)) для пространственных областей сложной формы невозможно. Поэтому единственным средством анализа трехмерного нелинейного НДС трубопроводов является использование численных методов для решения системы уравнений (3.1 – 3.4).

Одним из самых распространенных в настоящее время методов численного решения задач механики сплошных сред является МКЭ [48, 127 – 129]. МКЭ – это вариант прямых вариационных методов, широко применяемый для решения, в первую очередь, задач МДТТ. Основными преимуществами использования МКЭ при численном анализе равновесия пространственных конструкций являются теоретически доказанная сходимость данного метода для эллиптических задач и возможность использования нерегулярных расчетных сеток, позволяющая моделировать тела сложной геометрической формы с требуемой точностью. Кроме того, для неоднородных конструкций, состоящих из конструктивных элементов с существенно различающимися механическими свойствами материалов, как правило, можно непосредственно применять лишь МКЭ. Относительный недостаток МКЭ – это необходимость использования больших (например, по сравнению с МКР и МКО) вычислительных ресурсов для достижения требуемой точности приближенного решения. Однако быстрое наращивание мощности современной вычислительной техники, развитие многопроцессорных систем и алгоритмов параллельного счета, в том числе и в области персональных компьютеров, делает этот недостаток несущественным по сравнению с отмеченными преимуществами МКЭ. Так, уже на протяжении нескольких десятилетий, все ведущие разработчики универсальных коммерческих программ в области прочностного нелинейного анализа трехмерных конструкций («ANSYS» [130], «LS-DYNA» [131], «MSC.NASTRAN» [132], «ABAQUS» [133], «MSC.MARC» [134], «ALGOR», «COSMOSM» и др.) используют численные алгоритмы на основе МКЭ.

Рассмотрим общую схему решения МКЭ задач анализа НДС пространственных конструкций (в частности, конструкций магистральных трубопроводов).

Существует несколько подходов к построению конечно-элементного аналога (КЭ-аналога) исходной непрерывной краевой задачи МДТТ: прямой метод жесткости (физический метод строительной механики), вариационный (энергетический) метод и метод взвешенных невязок, который, в зависимости от выбора весовых функций, приводит к методу коллокаций или к методу Галеркина [48].

Воспользуемся вариационным методом. Данный метод широко применяется при получении конечно-элементных соотношений для решения широкого класса задач механики сплошных сред. Причем чаще всего этот метод используется при решении задач МДТТ, так как он базируется на теоретически доказанном и наиболее естественном для этих задач принципе виртуальной работы, лежащем в основе классических вариационных принципов стационарности потенциальной и дополнительной энергии.

Применяя слабую формулу¹ вариационного принципа (вариационный принцип Лагранжа [123]) к линейной краевой задаче МДТТ (3.1), (3.2), (3.8), (3.9) можно записать:

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + F_i) \cdot \delta u_i dv - \int_{S_2} (\sigma_{ij} \cdot n_j - t_i) \cdot \delta u_i ds = 0, \quad (3.11)$$

где δu_i – распределение виртуальных перемещений в рассматриваемой области объема V , удовлетворяющее ГУ (3.8). Используя теорему Гаусса – Остроградского, приведем выражение (3.11) к форме:

¹ Здесь предполагается, что заранее выполнены условия (3.2) и кинематическое граничное условие (3.8).

$$\int_V \sigma_{ij} \cdot \delta u_{i,j} dv - \int_V F_i \cdot \delta u_i dv - \int_{S_2} t_i \cdot \delta u_i ds = 0. \quad (3.12)$$

Соотношение (3.12) является математической формулировкой принципа виртуальной работы.

Процедура численного решения (3.12) методом конечных элементов сводится к аппроксимации зависимых переменных функциями вида:

$$u_i(x) = \sum_{j=1}^k N_j(\xi, \eta, \varsigma) \cdot u_i^j, \quad (3.13)$$

где N_j – интерполяционные функции¹ параметрических координат (ξ, η, ς) ; k – число узловых точек, определяющих КЭ; u_i^j – перемещение j -ой узловой точки в i -ом направлении системы координат. Подставляя выражения (3.13) в (3.12), проводя преобразования и сокращая члены, получим конечно-элементную формулировку исходной задачи, которая в матричной форме имеет вид:

$$\sum_{m=1}^n \left([K_e] \{u_m\} - \{F_e^{th}\} - \{F_e^{pr}\} - \{F_e^{nd}\} - \{F_e^b\} \right)_m = 0, \quad (3.14)$$

где n – количество КЭ, дискретизирующих расчетную область; $[K_e] = \int_{V_m} [B]^T [D] [B] dv$

– матрица жесткости КЭ; $\{F_e^{th}\} = \int_{V_m} [B]^T [D] \{\varepsilon^{th}\} dv$ – вектор температурной нагрузки

КЭ; $\{\varepsilon^{th}\}$ – температурная деформация; $\{F_e^{pr}\} = \int_{S_p} [N_n]^T \{P\} ds$ – вектор давления (рас-

пределенных по границе сил) КЭ; $\{F_e^{nd}\}$ – вектор узловых (сосредоточенных) сил КЭ;

$\{F_e^b\} = \int_{V_m} [N]^T \{F\} dv$ – вектор объемных сил КЭ; $\{u_m\}$ – вектор узловых смещений КЭ;

$[D]$ – матрица упругости; $[B]$ – матрица связи деформаций с узловыми смещениями, построенная на базе функций формы КЭ; $[N]$ – матрица функций формы; $[N_n]$ – матрица функций формы для смещений по нормали к поверхности S_p , $[]^T$ – транспонированная матрица.

Задавая явный вид функций формы КЭ, можно построить все матрицы, входящие в (3.14). Полученная в результате система линейных алгебраических уравнений относительно конечного числа неизвестных узловых смещений решается с помощью прямых или итерационных методов. Распределения перемещений, деформаций и напряжений внутри каждого КЭ определяются через узловые смещения по формулам:

$$\{u\} = [N] \{u_m\}; \quad \{\varepsilon\} = [B] \{u_m\}; \quad \{\sigma\} = [D] \{\varepsilon^{el}\}, \quad (3.15)$$

где $\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{th}\}$ – упругая деформация. В выражениях (3.15) компоненты тензоров напряжений и деформаций выписаны в вектор-столбец.

Теперь рассмотрим постановку задачи анализа статического НДС трехмерных конструкций в случае геометрически нелинейных деформаций (3.7). Для этого

¹ Функции $N_j(\xi, \eta, \varsigma)$ часто называют «функциями формы».

предположим, что на трехмерное тело объема V , ограниченного поверхностью S , действуют объемные $\mathbf{F}$ и поверхностные $\mathbf{t}$ силы. Рассматривая условия отсутствия деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \cdot u_{k,j}) = 0 \quad (3.16)$$

в качестве уравнений связи, составим уравнения равновесия при таких условиях как уравнения Лагранжа первого рода с множителями Лагранжа $(-\sigma_{ij})$ [123]:

$$\int_V F_i \cdot \delta u_i dv + \int_S t_i \cdot \delta u_i ds - \frac{1}{2} \cdot \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \cdot u_{k,j}) = 0. \quad (3.17)$$

Преобразуя выражение (3.17) с учетом симметричности тензора σ_{ij} , имеем:

$$\int_V \sigma_{ij} \cdot (\delta_{ki} + u_{k,i}) \cdot \delta u_{k,j} dv - \int_V F_i \cdot \delta u_i dv - \int_S t_i \cdot \delta u_i ds = 0. \quad (3.18)$$

Соотношение (3.18) представляет собой математическую формулировку принципа виртуальной работы в случае конечных (геометрически нелинейных) деформаций. Решение (3.18) методом конечных элементов выполняется аналогично рассмотренному выше случаю бесконечно малых деформаций.

Кроме того, выполняя интегрирование первого интеграла в (3.18) по частям, применяя формулу Гаусса – Остроградского и приравнявая к нулю выражения, стоящие под знаками объемного и поверхностного интегралов, можно получить уравнения равновесия

$$[\sigma_{ij} \cdot (\delta_{ki} + u_{k,i})]_{,j} = F_k, \quad (3.19)$$

и условия на граничной поверхности S

$$[\sigma_{ij} \cdot (\delta_{ki} + u_{k,i})] \cdot n_j = t_k. \quad (3.20)$$

Для того чтобы составить уравнения (3.19) и (3.20), необходимо заранее знать компоненты вектора перемещений u_k или же располагать уравнениями связи этих компонент с деформациями, исключив из них антисимметричную часть (тензор вращений), поскольку в данном случае [123]:

$$u_{k,i} = \varepsilon_{ki} + \omega_{ki}, \quad (3.21)$$

где ε_{ki} – симметричный тензор деформаций (3.7); ω_{ki} – антисимметричный тензор вращений, $\omega_{ki} = 1/2 \cdot (u_{k,i} - u_{i,k})$. Таким образом, соответствующая задача МДТТ становится нелинейной, и ее решение, даже в простейших случаях, возможно только численными методами. В частности, МКЭ достаточно широко и успешно применяется для решения таких задач [48, 127 – 129].

Следует отметить, что в зависимости от постановки решаемых МКЭ задач существует большое количество типов КЭ, также как и для каждого типа существует несколько способов построения явных выражений для функций форм. Для численного анализа НДС трубопроводных конструкций наиболее подходят КЭ с интерполяционными функциями в форме полиномов Лагранжа и Эрмита [48, 89]. Используя их, можно получить явные выражения функций формы практически для всех степеней свободы КЭ балочно-

го, оболочечного и объемного типов, необходимых для моделирования трубопроводных конструкций.

3.3. Математические модели для анализа упруго-пластического поведения трубопроводных конструкций

Оценка несущей способности конструкций трубопроводов проводится на основании анализа их упруго-пластического поведения при эксплуатационных и аварийных нагрузках. При решении данной задачи можно использовать различные (иногда альтернативные) гипотезы теории пластичности, строя соответствующие математические модели нелинейного поведения материала трубопроводов за пределами упругого деформирования. В данном случае наиболее подходящей является теория пластического течения [123].

Основные гипотезы теории течения нашли достаточно убедительное экспериментальное подтверждение практически для всех металлических материалов, особенно для пластичных сталей, которые применяются для изготовления труб. Эта теория позволяет получить достаточно точные результаты в случае многофакторного непропорционального нагружения трехмерных конструкций. Вторым немаловажным преимуществом теории течения служит то, что требуемые для ее реализации характеристики упруго-пластических свойств материалов, в частности марок трубных сталей, являются нормативными и содержатся в справочной литературе. Уточнение этих характеристик для конкретного материала реального трубопровода проводится по результатам стандартных испытаний образцов на одноосное растяжение и существенно повышает точность результатов моделирования. Кроме того, весьма важным в данном случае фактором является то, что с помощью теории пластического течения можно построить достаточно простые и, вместе с тем, эффективные математические модели нелинейного поведения окружающего подземные участки трубопроводов грунта.

3.3.1. Упруго-пластическое поведение трубных сталей

Оценка прочности конструкционных материалов и изделий из них – одна из глобальных задач МДТТ. Ввиду многообразия и сложности механизмов, участвующих в процессе разрушения, решение данной задачи связано с большими и пока еще не преодолимыми трудностями [135]. Поэтому в инженерной практике пользуются упрощенными подходами, в частности, критериальными теориями прочности, основанными на трактовке разрушения как порогового явления.

Чтобы оценить уровень нагрузок, воздействие которых приведет к пластическому деформированию и разрушению трубопроводной конструкции, необходимо выбрать соответствующие критерии пластичности и прочности. В настоящее время одним из наиболее распространенных в практических расчетах классических критериев является гипотеза об энергии формоизменения Губера – Мизеса [136]. Соответствующая расчетная формула для определения эквивалентных¹ напряжений имеет вид:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (3.22)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений.

¹ В критерии Губера – Мизеса в качестве эквивалентного напряжения используется интенсивность напряжений.

Согласно критерию Губера – Мизеса, при сложном НДС достижение интенсивностью напряжений предела текучести ($\sigma_i = \sigma_T$) приводит к переходу материала в пластическое состояние, а предела прочности ($\sigma_i = \sigma_s$) – к разрушению конструкции. Поверхность нагружения (3.4д) в данном случае в пространстве главных напряжений представляет собой круговой цилиндр, ось которого равнонаклонена к главным осям, а начальный радиус равен $\sqrt{2} \cdot \sigma_T / \sqrt{3}$.

На протяжении последних десятков лет критерий Губера – Мизеса получил удовлетворительное экспериментальное подтверждение (и как критерий пластичности, и как критерий прочности) для многих конструкционных материалов, в том числе и в опытах на осевое растяжение с внутренним давлением стальных цилиндрических образцов.

Таким образом, данная модель пластичности может быть успешно использована в качестве критерия предельных состояний и разрушения трубопроводных конструкций.

3.3.2. Моделирование взаимодействия трубопровода и прилегающего грунта

Подземная схема прокладки **магистральных** трубопроводных систем широко распространена как в Российской Федерации, так и в других странах мира. Например, подземные участки составляют свыше 90% всех эксплуатирующихся российских магистральных трубопроводов [137, 138].

Одним из главных условий объективного расчетного анализа НДС и оценки прочности эксплуатирующейся подземной трубопроводной конструкции является корректное отражение при моделировании взаимодействия подземных участков трубопроводов с окружающим их грунтом. Причем, при проведении оценки состояния любой реальной трубопроводной системы наибольшее внимание в расчетном анализе прочности следует уделять именно подземным участкам¹, даже если эти участки составляют лишь небольшую долю всей трубопроводной конструкции.

При оценке прочности подземных трубопроводов, в зависимости от постановки решаемой задачи и принятых допущений, целесообразно использовать математические модели нелинейного поведения грунтов различного уровня сложности. В вычислительной технологии анализа прочности подземных участков магистральных трубопроводов В.В. Алешин предложил последовательно применять два способа численного моделирования нелинейного взаимодействия трубы с окружающим грунтом [1, 3, 6, 139]. Первый способ заключается в использовании инженерных (полуэмпирических) моделей сопротивления грунта продольным и поперечным смещениям трубопровода [137, 138, 140 – 144]. Второй способ основан на моделировании окружающего трубопровод грунта как трехмерной сплошной упруго-пластической среды.

Рассмотрим основные подходы к моделированию нелинейного сопротивления грунтов перемещениям подземных трубопроводов.

3.3.2.1. Инженерные модели взаимодействия подземного трубопровода с окружающим грунтом

В Российской Федерации [137, 138, 143, 144] и в других странах [140 – 142] инженерные методы построения расчетных моделей грунта, взаимодействующего с подземным трубопроводом, базируются на полуэмпирических зависимостях сопротивления грунта продольным и поперечным перемещениям трубы. Эти зависимости

¹ Доступ средств технической диагностики к подземным участкам затруднен, а визуальное определение зарождающихся, развивающихся и уже реально опасных аномалий и дефектов невозможно.

устанавливаются на основании результатов лабораторных и полномасштабных экспериментальных исследований по смещению труб в грунте.

Результаты проведенных исследований показали [138], что для получения удовлетворительных оценок при практических расчетах нелинейную зависимость силы сопротивления грунта можно линеаризовать с помощью билинейной диаграммы упруго-идеальнопластического материала Прандтля для всех направлений (продольно, поперечно в вертикальной и горизонтальной плоскостях) смещения трубопровода в грунте. Схема аппроксимации билинейной диаграммой нелинейной зависимости силы сопротивления грунта продольным¹ перемещениям трубопровода приведена на рис. 3.1. Обобщающие полумпирические модели для расчета сил сопротивления грунта смещениям трубопровода, используемые в Российской Федерации, подробно описаны в работах [1, 137, 138, 143, 144]. Рекомендации по их практическому применению при численном анализе НДС подземных участков магистральных трубопроводов представлены в работах [1, 3, 6]. Поэтому далее приведем лишь основные расчетные соотношения и некоторые замечания.

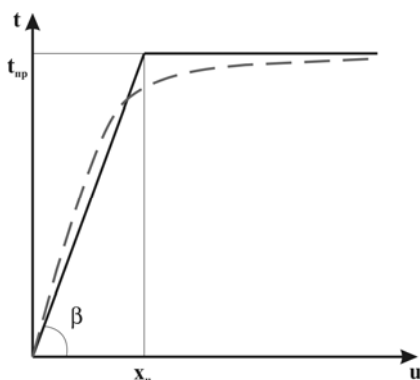


Рис. 3.1. Схема аппроксимации билинейной диаграммой нелинейной зависимости «сопротивление грунта – продольное перемещение трубопровода», здесь $\operatorname{tg} \beta = \pi \cdot D \cdot c_{x0}$

С целью сравнения инженерных моделей взаимодействия трубы с грунтом, используемых в нашей стране и за рубежом, рассмотрим также соответствующие соотношения из Руководства Американского общества инженеров гражданского строительства (ASCE) [140], представленные в [133, 142]. При сравнении следует учитывать, что и в отечественных, и в зарубежных моделях зависимости силы сопротивления грунта от смещений трубопровода (для каждого направления) представляются в виде идеализированных билинейных диаграмм Прандтля, которые полностью определяются двумя параметрами.

В российской научно-технической литературе в качестве таких параметров, как правило, используются [138]: обобщенные коэффициенты касательного и нормального сопротивлений (c_{x0} , c_{y0} соответственно), представляющие собой тангенсы углов наклона линейно возрастающего участка соответствующих диаграмм Прандтля для среднего касательного напряжения на поверхности трубы (угол β на рис. 3.1) и средней удельной (на единицу эффективной ширины трубы, равной ее диаметру) силы нормального сопротивления; предельное сопротивление сдвигу t_{np} и предельное нормальное, в соот-

¹ Для перемещений трубопровода в поперечных направлениях используется аналогичная схема аппроксимации.

ветствующем направлении, сопротивление q_{np} , представляющие собой ординаты постоянного участка соответствующих диаграмм Прандтля (см. рис. 3.1), построенные для удельных (на единицу длины трубопровода) значений силы сопротивления грунта. В иностранных нормах [140, 141] используются: максимальные значения смещений трубопровода, при которых наблюдается линейно-упругое сопротивление грунта в соответствующем направлении x_u, y_u, z_u (абсциссы точек сопряжения линейно возрастающего и постоянного участков на соответствующих диаграммах Прандтля (см. рис. 3.1)); предельные сопротивления грунта осевому и поперечным в горизонтальном и вертикальном направлениях смещениям трубы t_u, p_u, q_u (полные аналоги t_{np}, q_{np}). Перечисленные выше параметры связаны между собой следующим образом:

$$\begin{aligned} t_{np} &= t_u; & q_{np}^{\text{горизонтально}} &= p_u; & q_{np}^{\text{вертикально}} &= q_u; \\ c_{x0} &= \frac{t_u}{\pi \cdot D \cdot x_u}; & c_{y0}^{\text{горизонтально}} &= \frac{p_u}{D \cdot y_u}; & c_{y0}^{\text{вертикально}} &= \frac{q_u}{D \cdot z_u}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где D – наружный диаметр трубопровода.

Рассмотрим расчетные соотношения, используемые для вычисления параметров сопротивления грунта во всех случаях направления смещения трубы.

Продольное смещение трубопровода в грунте. В российской специализированной научно-технической литературе [137, 138] значение предельного сопротивления грунта сдвигу предлагается вычислять по следующему выражению:

$$t_{np} = q_{mp} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{cp} + 2 \cdot \gamma_{cp} \cdot c_h \cdot \pi \cdot D^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_{cp} + 0,6 \cdot \pi \cdot D \cdot c_{cp}, \quad (3.24a)$$

где q_{mp} – вес трубопровода с продуктом; φ_{cp} – угол внутреннего трения грунта; γ_{cp} – объемный вес грунта; c_h – безразмерный эмпирический коэффициент, зависящий от отношения h/D ; h – высота засыпки трубопровода (расстояние от дневной поверхности грунта до верхней образующей трубы); c_{cp} – удельное сцепление грунта.

Анализ формулы (3.24a) и особенности ее практического применения, в частности, при численном моделировании подземных трубопроводов, можно найти в [1]. Дополнительно заметим, что, несмотря на широкое использование выражения (3.24a) в практических расчетах, его не следует сегодня рассматривать как окончательно установленную зависимость, дающую наиболее адекватные результаты. Теоретические (например, публикации [1, 3, 5]) и экспериментальные работы по исследованию смещений трубопроводов большого диаметра в грунте, а также обработка результатов ранее выполненных экспериментов (например, публикация [144]), продолжаются в российских научно-исследовательских организациях до настоящего времени.

Значения второго параметра (коэффициента обобщенного касательного сопротивления c_{x0}) в [138] рекомендуется определять по результатам аппроксимации экспериментальных диаграмм сопротивления грунта продольным перемещениям трубы диаграммой Прандтля (см. рис. 3.1), либо воспользоваться уже имеющимися экспериментальными данными, например, представленными в работах [137, 138] для широкой номенклатуры типов и структурного состава реальных грунтов.

В Руководстве ASCE [140] значения предельного сопротивления грунта осевому смещению трубы определяются следующим образом¹:

¹ Для наглядности в Разделе 3.3.2.1 одни и те же параметры, встречающиеся в российских и зарубежных источниках, обозначаются одинаковыми символами.

– для песчаных грунтов

$$t_u = \frac{\pi}{2} \cdot D \cdot \tilde{\gamma} \cdot H \cdot (1 + k_0) \cdot \operatorname{tg}(k \cdot \varphi_{cp}); \quad (3.24б)$$

– для глинистых грунтов

$$t_u = \pi \cdot D \cdot \alpha \cdot S_u, \quad (3.24в)$$

где $\tilde{\gamma}$ – эффективный удельный вес грунта; H – глубина заложения трубопровода в грунте (по осевой линии); k_0 – эмпирический параметр, значения которого для нормально уплотненных несвязанных грунтов рекомендуется брать в пределах от 0,35 до 0,47; k – эмпирический понижающий коэффициент, значения которого для гладких стальных трубопроводов или трубопроводов с относительно гладкой поверхностью изоляции (что соответствует магистральным трубопроводам) рекомендуется брать в пределах от 0,5 до 0,7; S_u – предел прочности грунта на сдвиг; α – эмпирический коэффициент адгезии грунта, зависящий от S_u и определяемый по графикам, приведенным в [140].

Для второго параметра x_u во всех источниках [133, 140, 142] приводятся только пределы изменения его значений: $2,54 \div 5,08 \text{ мм}$ для песчаных грунтов; $5,08 \div 10,16 \text{ мм}$ для глинистых грунтов.

Здесь следует отметить, что полуэмпирические формулы для инженерных моделей взаимодействия трубопровода с грунтом, зафиксированные в Руководстве ASCE [140] в 1984 году, также не рассматриваются зарубежными специалистами как окончательные, и исследования в этой области продолжаются. Так, например, в работе [142] рекомендуется брать $k_0 = 1,0$, как наиболее адекватную оценку для большинства случаев подземных магистральных трубопроводов, объясняя это неизбежным дополнительным уплотнением грунта вокруг трубопровода при полной засыпке траншеи. В работе [133] авторы, указывая на непосредственную связь между S_u и удельным сцеплением неосвоенного грунта c_{cp} , предлагают значение коэффициента α определять из соотношения $c_{cp} = \alpha \cdot S_u$, не пользуясь приближенными графиками [140].

Замечая, что коэффициент k , по сути, отражает отношение значений угла трения грунтового массива на поверхности трубы и угла внутреннего трения грунта, можно также предложить вместо множителя $\operatorname{tg}(k \cdot \varphi_{cp})$ в (3.24б) использовать экспериментально полученные значения коэффициентов трения трубопровода о грунты различных типов, приведенные в работе [137].

Поперечное, вертикально вверх, смещение трубопровода в грунте. В большинстве российских источников приводятся следующие расчетные формулы для параметров диаграммы Прандтля [138]:

$$c_{y0} = \frac{0,12 \cdot E_{cp} \cdot \eta_{cp}}{(1 - \nu_{cp}^2) \cdot \sqrt{l_0 \cdot D}} \left(1 - e^{-\frac{2 \cdot H}{D}} \right); \quad (3.25а)$$

$$q_{np} = \gamma_{cp} \cdot D \cdot (H - 0,39 \cdot D) + \gamma_{cp} \cdot H^2 \cdot \operatorname{tg}(0,7 \cdot \varphi_{cp}) + \frac{0,7 \cdot c_{cp} \cdot H}{\cos(0,7 \cdot \varphi_{cp})}, \quad (3.26а)$$

где E_{cp} – модуль деформации грунта ненарушенной структуры, $[МПа/см]$; η_{cp} – коэффициент снижения модуля деформации грунта засыпки по сравнению с грунтом

ненарушенной структуры; ν_{cp} – коэффициент Пуассона грунта; l_0 – единичная длина трубопровода ($l_0 = 100 \text{ см}$); D , H – то же, что в (3.23), (3.24б), [см].

Следует обратить внимание на то, что входящие в формулу (3.25а) параметры имеют внесистемные размерности. Поэтому, в данном случае при проведении расчетов необходимо преобразовывать значение обобщенного коэффициента нормального сопротивления грунта c_{y0} с учетом выбранной системы единиц. Также отметим, что работы по проверке адекватности и необходимым уточнениям формул (3.25а), (3.26а) сейчас продолжаются. Например, в [144] приводится полученное по результатам экспериментов выражение для определения предельного нормального сопротивления несвязанного ($c_{cp} = 0$) грунта при смещениях трубопровода вертикально вверх:

$$q_{np} = \gamma_{cp} \cdot D^2 \cdot \left[H/D + (H/D)^2 \cdot (tg \varphi_{cp} + 5 \cdot e^{-1,7 \cdot H/D}) - \pi/8 \right].$$

В Руководстве ASCE [140] даются следующие зависимости:

– для песчаных грунтов

$$q_u = \tilde{\gamma} \cdot H \cdot N_{qv} \cdot D, \quad (3.26б)$$

$$z_u = (0,01 \div 0,015) \cdot H; \quad (3.25б)$$

– для глинистых грунтов

$$q_u = S_u \cdot N_{cv} \cdot D, \quad (3.26в)$$

$$z_u = (0,1 \div 0,2) \cdot H, \quad (3.25в)$$

где N_{qv} , N_{cv} – эмпирические параметры несущей способности, соответственно, песчаных и глинистых грунтов, зависящие от отношения H/D и определяемые по графикам, приведенным в [140].

Поперечное, вертикально вниз, смещение трубопровода в грунте. Базируясь на данных экспериментальных исследований и используя гипотезу Винклера – Циммермана о пропорциональности реактивного давления прогибу балки (с эффективной шириной D) на упругом основании, в российских методиках [138] рекомендуется принимать линейную зависимость между сопротивлением грунта и перемещениями трубопровода вертикально вниз до исчерпания несущей способности грунта и постоянное значение силы сопротивления после потери грунтом несущей способности:

$$\begin{aligned} q &= c_{y0} \cdot D \cdot u_y, & u_y &\leq R_{cp} / c_{y0}; \\ q &= R_{cp} \cdot D, & u_y &> R_{cp} / c_{y0}, \end{aligned} \quad (3.27а)$$

где q – сопротивление грунта; u_y – поперечное перемещение трубы вертикально вниз; R_{cp} – условная несущая способность грунта.

Обобщенный коэффициент нормального сопротивления грунта в этом случае рассчитывается как:

$$c_{y0} = \frac{0,12 \cdot E_{cp}}{(1 - \nu_{cp}^2) \cdot \sqrt{l_0 \cdot D}}. \quad (3.28а)$$

Размерности параметров в (3.28а) те же, что и в (3.25а).

В Руководстве ASCE [140] приведены следующие зависимости:

– для песчаных грунтов

$$q_u = \tilde{\gamma} \cdot H \cdot N_q \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{cp} \cdot D^2 \cdot N_\gamma, \quad (3.276)$$

$$z_u = (0,10 \div 0,15) \cdot H; \quad (3.286)$$

– для глинистых грунтов

$$q_u = S_u \cdot N_c \cdot D, \quad (3.27в)$$

$$z_u = (0,10 \div 0,15) \cdot H, \quad (3.28в)$$

где N_q , N_γ и N_c – эмпирические параметры несущей способности песчаных и глинистых грунтов соответственно, получаемые в испытаниях на действие давления на полосовое грунтовое основание или определяемые по графикам, приведенным в [140].

Поперечное горизонтальное смещение трубопровода в грунте. В российских методиках [138] рекомендуются следующие выражения:

$$c_{y0} = \frac{0,12 \cdot E_{cp} \cdot \eta_{zop}}{(1 - \nu_{cp}^2) \cdot \sqrt{l_0} \cdot D} \left(1 - e^{-\frac{2 \cdot H}{D}} \right), \quad (3.29a)$$

где η_{zop} – безразмерный эмпирический коэффициент, зависящий от отношения a/H , a – расстояние от боковой образующей трубы до стенки траншеи. Размерности параметров в (3.29a) те же, что и в (3.25a).

Когда предельная удерживающая способность грунта больше его условной несущей способности, предельное сопротивление вычисляется по формуле:

$$q_{np.zop} = \gamma_{cp} \cdot H \cdot D \cdot k_p, \quad (3.30a)$$

где $k_p = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi_{cp}}{2} \right) + \frac{2 \cdot c_{cp}}{\gamma_{cp} \cdot H} \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_{cp}}{2} \right)$ – коэффициент пассивного бокового давления. Под условной несущей способностью грунта R_{cp} понимается критическое значение среднего давления, которое приведено в нормах на проектирование оснований и фундаментов. Если $q_{np.zop} < R_{cp}/D$, то считается, что предельное сопротивление равно R_{cp}/D .

Здесь также отметим, что работы по экспериментальной верификации и уточнению моделей продолжаются. Так, в [144] на основании обработки экспериментальных данных предложена следующая модификация формулы (3.30a):

$$q_{np.zop} = \frac{\gamma_{cp} \cdot (H + D)^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi_{cp}}{2} \right) + 2 \cdot c_{cp} \cdot D \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_{cp}}{2} \right).$$

В Руководстве ASCE [140] используются следующие зависимости:

– для песчаных грунтов

$$y_u = C_h \cdot (H + D/2), \quad (3.296)$$

$$p_u = \tilde{\gamma} \cdot H \cdot N_{qh} \cdot D; \quad (3.306)$$

– для глинистых грунтов

$$y_u = (0,03 \div 0,05) \cdot (H + D/2), \quad (3.29в)$$

$$p_u = S_u \cdot N_{ch} \cdot D, \quad (3.30в)$$

где N_{qh} , N_{ch} – эмпирические параметры несущей способности песчаных и глинистых грунтов соответственно, зависящие от отношения H/D и определяемые по графикам, приведенным в [140]; значения эмпирического параметра S_h для песчаных грунтов рекомендуется брать в пределах: от 0,07 до 0,10 для неплотных грунтов; от 0,03 до 0,05 для грунтов средней плотности; от 0,02 до 0,03 для плотных грунтов.

В завершение обзора инженерных моделей взаимодействия подземных трубопроводов с окружающим грунтом рассмотрим представленные в монографии [142] результаты сравнения расчетных характеристик, полученных с использованием Руководства ASCE [140] и нормативного документа Японской Газовой Ассоциации [141]. Сравнение проведено по характеристикам эквивалентной жесткости реального грунта для наиболее важного практического случая – смещения трубы в осевом направлении, рассчитанным с использованием двух параметров x_u , t_u (см. выше). Расчеты выполнены для нескольких трубопроводов среднего диаметра (от 150 мм до 610 мм). Представленные в [142] результаты свидетельствуют, что различие полученных по методикам [140] и [141] расчетных характеристик возрастает с ростом диаметра труб, но остается незначительным (от 2% для $D = 150$ мм до 13% для $D = 610$ мм). Следовательно, можно заключить, что основные подходы и полуэмпирические модели, реализованные в методике [141], во многом соответствуют представленным в Руководстве [140].

Качественный анализ приведенных выше соотношений свидетельствует, во-первых, о более широкой теоретической проработке российских методик. Отметим, например, хотя бы тот факт, что формула (3.24а) учитывает влияние веса трубопровода с продуктом на величину предельного сопротивления грунта сдвигу, что не отражено в выражениях (3.24б–в). При стандартной высоте засыпки (~ 1 м) вес магистрального трубопровода большого диаметра с продуктом и вес грунта над ним – соизмеримые величины. Поэтому для получения достоверных результатов учитывать отрицательную плавучесть трубопровода необходимо.

Во-вторых, следует отметить и более глубокую математическую обработку экспериментальных данных при подготовке российских методик, в результате которой количество используемых эмпирических констант сведено к минимуму. Так, в [137, 138] однозначные значения практически всех параметров, за исключением c_{x0} , рассчитываются по универсальным выражениям, включающим характеристики физико-механических свойств конкретного грунта (любого типа). Руководство ASCE [140], напротив, перегружено эмпирическими параметрами, многие из которых к тому же даются в виде диапазона допускаемых значений, что крайне затрудняет выбор соответствующей величины для конкретного грунта.

К достоинствам методик [140, 141] можно отнести, все же то, что при их использовании количество вычислений минимально. Многие параметры и значения просто снимаются с графиков. В связи с этим, необходимо, вероятно, осторожно относиться и к возможностям «универсальных» расчетных формул из отечественных источников, прежде всего основной российской методики [138], давать результаты одинаковой точности для широкой номенклатуры типов и структурного состава грунтов.

Например, авторы [138] явно указывают, что в отличие от инженерных моделей сопротивления грунтов продольным смещениям труб, которые предназначены для проектировочных расчетов линейных частей магистральных трубопроводов на всем протяжении, целью разработки моделей сопротивления грунта поперечным смещениям

являлась оценка НДС только отдельных участков. Так, модель сопротивления грунта смещениям трубы в вертикальной плоскости разработана для расчета на продольную устойчивость имеющих большую изначальную кривизну, либо проложенных в грунтах со слабой удерживающей способностью участков трубопроводов¹. Модель сопротивления грунта смещениям трубы в горизонтальной плоскости предназначена для определения НДС локальных участков подземных трубопроводов, имеющих углы поворота в горизонтальной плоскости. Возможно, поэтому как теоретическому, так и экспериментальному обоснованию инженерных моделей поперечных смещений трубопровода в грунте авторы [138] уделяют меньшее внимание.

Известно множество примеров, когда количественные характеристики сложного феноменологического процесса², подверженного воздействию многих факторов, не удается с достаточной точностью аппроксимировать одной «универсальной» математической формулой. В этом случае использование табличных функций остается практически единственным способом получения приемлемых результатов.

Несомненно, что продолжение работ по верификации и уточнению инженерных моделей взаимодействия подземных трубопроводов с грунтом приведет в результате к получению наиболее адекватных и надежных зависимостей, предназначенных для практического использования при анализе прочности подземных участков **магистральных** трубопроводных систем. В связи с этим нельзя не отметить большие потенциальные возможности и высокую эффективность применения методов вычислительной механики для анализа сложного нелинейного НДС окружающего трубопровод грунта. Технология постановки и проведения вычислительных экспериментов для определения параметров инженерных моделей взаимодействия подземных трубопроводов с грунтом и полученные при этом результаты представлены в Приложении 3, а также в работах [1, 3 – 5].

Необходимо еще раз подчеркнуть, что ввиду сложности физической сущности нелинейной деформации грунта при перемещениях подземного трубопровода, особенно при смещении в поперечном горизонтальном направлении, все полуэмпирические формулы и российских, и зарубежных методик являются достаточно приближенными. Заметим также, что эти формулы получены и экспериментально проверены для горизонтальных неразветвленных подземных участков трубопроводов большой протяженности. Непосредственное использование только этих зависимостей при моделировании НДС разветвленных пространственных трубопроводных систем (например, подземных коллекторов компрессорных станций, подземных частей трубопроводных обвязок газораспределительных станций и др.) не позволит получить каких-либо приемлемых результатов для анализа их прочности.

Поэтому на практике инженерные модели сопротивления грунта перемещениям трубопровода следует использовать только для предварительных оценок общей силовой картины всей конструкции трубопроводной системы в целом. Они также применимы при проекторочных расчетах трубопроводных конструкций на прочность и при проведении оперативных оценок поведения конструкций эксплуатирующихся магистральных трубопроводов в экстремальных случаях (существенно слабые грунты, аварийные ситуации и т.п.).

Для решения задачи адекватного анализа прочности любого подземного участка трубопроводной сети В.В. Алешиным в конце прошлого века были разработаны и реализованы для практического применения более сложные математические модели взаимодействия трубопроводов с грунтом, позволяющие получить результаты требуемой точности [1, 3 – 5, 145]. Перед тем как перейти к изложению этих моделей,

¹ Для решения данной задачи более уместны жестко-пластические модели грунтов, которые и применяются в [138] при рассмотрении конкретных примеров.

² Смещение трубопроводов в грунте, безусловно, является таким процессом.

целесообразно рассмотреть основные методы математического моделирования, применяемые в механике грунтов.

3.3.2.2. Трехмерная упруго-пластическая модель грунта

При всем многообразии состава и структурного строения грунты, с точки зрения механики сплошной среды, представляют собой сыпучие слабосвязанные среды, макроскопическое поведение которых при действии механических нагрузок с достаточной для практических приложений точностью может быть описано в рамках теории МДТТ. Основными отличительными особенностями НДС данных сред являются: ярко выраженная нелинейность при достаточно низких (по сравнению с большинством других твердых материалов) значениях напряжений и существенно различная способность сопротивляться сжимающим и растягивающим нагрузкам.

Существует несколько математических моделей, описывающих поведение грунтов при различных характеристиках (скорость деформации, диапазон изменения нагрузки и т.д.) нагружающих воздействий. Причем, корректность результатов теоретического решения реальных задач механики грунтов во многом зависит именно от выбора такой математической модели, которая более всего соответствует рассматриваемому характеру нагрузок.

Для адекватного моделирования взаимодействия подземных участков трубопроводов с окружающим грунтом в процессе эксплуатации, прежде всего, необходимо, чтобы выбранная математическая модель корректно описывала трехмерное НДС грунта при умеренных статических нагрузках.

Из экспериментальных исследований известно [137, 138, 140 – 144, 146 – 148], что все типы грунтов¹ на начальном этапе статического нагружения, когда деформации достаточно малы, проявляют упругие свойства – развивающиеся в грунте деформации почти линейно зависят от прикладываемой нагрузки. Этот этап соответствует фазе консолидации и уплотнения грунта. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к тому, что линейная связь между величиной нагрузки и деформациями грунта нарушается, и на определенном этапе нагружения деформации грунта практически перестают зависеть от прикладываемой нагрузки. Деформация грунта происходит без какого-либо заметного увеличения нагрузок. Это второй этап деформирования – фаза так называемого предельного равновесия грунта.

Следует отметить, что при дальнейшем увеличении деформаций в натурных экспериментах с грунтами наблюдается и третья фаза, когда величина нагрузки, требуемая для приращения деформаций, существенно снижается. Но эта фаза соответствует нарушению сплошности² грунтового массива и, исходя из условий поставленной задачи, здесь рассматриваться не будет.

Все указанные выше феноменологические закономерности поведения реальных грунтов (на двух первых фазах деформирования), подтвержденные многочисленными экспериментами с разными типами грунтов при различных видах нагружения [144, 146 – 149], позволяющие с достаточной для практических приложений точностью использовать в качестве физического уравнения состояния грунта модель упруго-идеальнопластического материала. В этом случае грунт заменяется идеальным материалом, который ведет себя упруго вплоть до некоторого предельного напряженного состояния, при котором начинается пластическое течение. В качестве условия перехода

¹ Имеются в виду те типы грунтов, которые встречаются в районах подземной прокладки сухопутных магистральных трубопроводов.

² Термин «нарушение сплошности» здесь означает появление макроскопических разрывов в изначально сплошной среде.

в пластическое состояние в механике грунтов используется огибающая кругов Мора [148]:

$$|\tau_n| = \Phi(\sigma_n), \quad (3.31)$$

где τ_n и σ_n – касательная и нормальная (сжимающая) компоненты напряжения на элементарной площадке с нормалью $\vec{n}$; $\Phi(\sigma_n)$ – неубывающая функция.

В общем случае функция $\Phi(\sigma_n)$ является нелинейной, но для несвязанных грунтов, а на ограниченных участках и для связанных грунтов, она может быть представлена в виде линейного уравнения Кулона [148, 150]:

$$|\tau_n| = c + \operatorname{tg} \varphi \cdot \sigma_n, \quad (3.32)$$

где c – удельное сцепление; φ – угол внутреннего трения грунта.

Входящие в (3.32) параметры c и φ являются характеристиками физико-механических свойств грунта и определяются экспериментально. Из физических соображений следует, что значения этих параметров неотрицательны.

Как показали результаты многочисленных испытаний [148], часть огибающей кривой предельных напряжений (огибающей кругов Мора) можно с полным к тому основанием принимать прямолинейной при изменениях сжимающих нормальных напряжений в пределах $\sigma_n < \sigma_\phi \approx 0,5 \div 0,7 \text{ МПа}$. Данные значения с большим запасом (в несколько раз) перекрывают диапазон изменения максимальных сжимающих напряжений, возникающих в окружающем подземные участки трубопроводов грунте при эксплуатации **магистральных** трубопроводных систем.

По принятой в механике грунтов традиции, сжимающие напряжения считаются положительными (см. (3.32)). Переходя к более удобной в общем случае трактовке сжимающих напряжений как отрицательных и обобщая критерий Кулона (3.32) для случая трехмерного НДС, получаем следующее условие текучести [1]:

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &= (2 \cdot c \cdot \operatorname{ctg} \varphi - \sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin \varphi; \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &= (2 \cdot c \cdot \operatorname{ctg} \varphi - \sigma_2 - \sigma_3) \cdot \sin \varphi; \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &= (2 \cdot c \cdot \operatorname{ctg} \varphi - \sigma_3 - \sigma_1) \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Уравнения (3.33) образуют в пространстве главных напряжений поверхность текучести в виде шестигранной пирамиды (часто называемой пирамидой Мора-Кулона), ось которой равнонаклонена к осям главных напряжений и, следовательно, совпадает с гидростатической осью $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (см. Приложение 4). Очевидно, что для координат вершины такой пирамиды должны выполняться условия $\sigma_i = \sigma_j$. Тогда из (3.33) следует, что координаты вершины пирамиды равны:

$$\sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma_3^* = c \cdot \operatorname{ctg} \varphi. \quad (3.34)$$

Так как параметры c и φ неотрицательны, то из (3.34) следует, что в случае связанной среды ($c \neq 0$, $\varphi \neq 0$) вершина пирамиды Мора – Кулона находится в октанте растяжения (рис. 3.2).

В случае идеально сыпучей среды ($c = 0$, $\varphi \neq 0$) вершина пирамиды совпадает с точкой отсчета координатных осей пространства главных напряжений. Кроме того,

используя выражения (3.33) и (3.34), можно показать, что для идеально связанных сред ($c \neq 0$, $\varphi = 0$) поверхность текучести Мора – Кулона вырождается в правильную шестигранную призму (также равнонаклоненную к главным осям), которая при соответствующем выборе материального параметра c (а именно, $c = \sigma_T/2$) является геометрической интерпретацией классического критерия Треска [136].

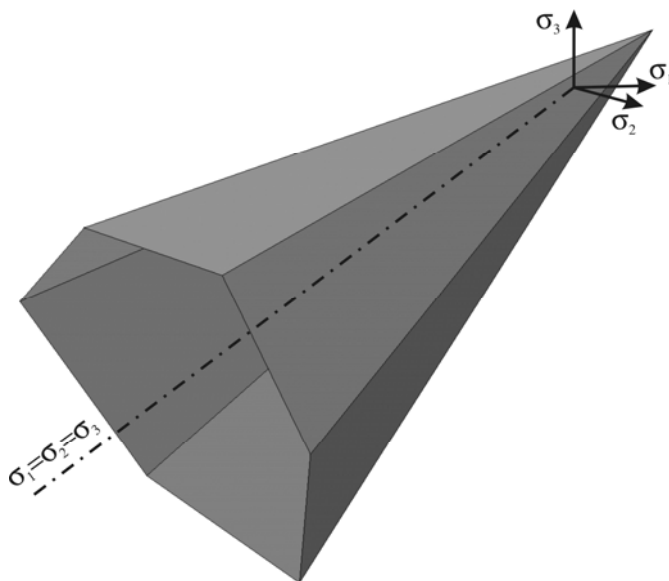


Рис. 3.2. Поверхность текучести Мора – Кулона

Представленная на рис. 3.2 поверхность текучести Мора – Кулона наглядно отражает физическую сущность трехмерного НДС реальных грунтов при действии механических нагрузок. Так, увеличение гидростатического давления ведет к увеличению предела текучести грунта (расширение пирамиды в октанте сжатия), а, следовательно, и величины предельного напряжения сдвига. Объемное сжатие (нагружение вдоль направления $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) не приводит к появлению пластического течения грунта при достаточно высоких значениях нагрузки¹. В то же время, сопротивление связанных грунтов (глины, суглинки, супеси и т.п.) любой растягивающей нагрузке весьма незначительно и определяется лишь величиной когезионного сцепления частиц грунта (вершина конуса в положительном октанте пространства главных напряжений). Сыпучие грунты (пески, галечники и т.п.) практически не обладают способностью сопротивляться растягивающим нагрузкам. В этом случае, как уже отмечалось ранее, вершина пирамиды находится в точке отсчета главных осей тензора напряжений.

Все эти особенности неоднократно подтверждены при проведении натурных экспериментов с различными типами реальных грунтов [144, 146 – 149].

Помимо экспериментальной обоснованности, упруго-пластическая модель грунта с

¹ Имеются в виду только нагрузки от воздействия подземных трубопроводов в номинальных условиях эксплуатации. Уровень данных нагрузок недостаточен для заметного проявления свойства уплотнения грунта (появления пластических деформаций грунта при сжимающих нагрузках вследствие деформаций его частиц). По этой же причине здесь не рассматриваются замкнутые поверхности текучести, учитывающие уплотнение грунта при сжатии.

условием текучести (3.33) имеет еще одно, очень важное для практического применения, преимущество. Для использования этой модели при решении прикладных задач механики грунтов требуется знать значения следующих характеристик физико-механических свойств грунта: модуля деформации (E), коэффициента Пуассона (ν), объемной плотности (ρ), угла внутреннего трения (φ) и удельного сцепления (c).

Все эти характеристики, за исключением коэффициента Пуассона, являются нормативными¹ и подлежат обязательному измерению в процессе инженерных изысканий как при строительстве новых, так и при обследовании состояния действующих подземных участков трубопроводных систем. Информация по значениям коэффициента Пуассона для грунтов различных типов и структур имеется в справочной литературе.

Наряду с очевидными достоинствами, данная модель обладает и определенными недостатками, которые в случае применения численного моделирования становятся весьма существенными. Во-первых, на каждом этапе численного итерационного процесса, чтобы определить, выполняется ли в какой-нибудь точке условие предельного равновесия, требуется шестикратная проверка по уравнениям (3.33). Во-вторых, поверхность текучести Мора – Кулона является кусочно-линейной и содержит бесконечное множество нерегулярных точек, что вызывает дополнительные трудности формализации [123, 151] и численной реализации [48, 127, 128] алгоритмов теории пластического течения.

Эффективные алгоритмы численного решения упруго-пластических задач МДТТ с негладкими поверхностями текучести находятся пока в стадии разработки и верификации [48, 127 – 129]. Поэтому, при практическом численном анализе трехмерных задач механики грунтов, общепринятым подходом остается аппроксимация кусочно-линейной поверхности Мора – Кулона гладкой поверхностью текучести вида [48, 123, 128]:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0, \quad (3.35)$$

где $I_1 = \sigma_{ii}$ – первый инвариант тензора напряжений; $J_2 = s_{ij}s_{ij}/2$ – второй инвариант девиатора тензора напряжений; $J_3 = s_{ij}s_{jk}s_{ki}/3$ – третий инвариант девиатора тензора напряжений; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}I_1/3$ – компоненты девиатора тензора напряжений.

Впервые уравнение гладкой поверхности текучести для анализа сложного нелинейного НДС грунтов было предложено² Д. Друккером и В. Прагером в виде [150]:

$$\alpha \cdot I_1 + \sqrt{J_2} = k, \quad (3.36)$$

где α и k – некоторые положительные константы для каждой точки материала.

В пространстве главных напряжений критерий Друккера – Прагера (3.36) представляет собой поверхность прямого кругового конуса, ось симметрии которого, также как и у пирамиды Мора – Кулона, совпадает с гидростатической осью, вершина находится в

точке с координатами $\left\{ \frac{k}{3 \cdot \alpha}; \frac{k}{3 \cdot \alpha}; \frac{k}{3 \cdot \alpha} \right\}$, а тангенс половины угла раскрытия равен

$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{6} \cdot \alpha$ (см. Приложение 4).

Таким образом, поверхность текучести Мора – Кулона может быть аппроксимирована

¹ Методы их определения изложены в перечне стандартов, приведенном в СНиП II-9-78 «Инженерные изыскания для строительства».

² Условие текучести в виде (3.36) было известно, как частный случай универсальной гипотезы В. Бужинского [292], и до появления работы [150]. Авторы [150] только предложили использовать условие (3.36) в качестве критерия текучести при анализе сложного упруго-пластического НДС грунтов.

на конической поверхностью Друккера – Прагера, если вершины этих двух поверхностей находятся в одной точке пространства главных напряжений. В общем случае вариантов таких аппроксимаций может быть бесконечное множество, в зависимости от выбора соотношений, связывающих характеристики физико-механических свойств грунта φ, c с определяющими параметрами критерия Друккера – Прагера α, k . Различные варианты таких аппроксимаций широко используются сегодня для решения практических задач в механике грунтов. Все эти варианты заключены между двумя предельными случаями: коническая поверхность вписана в пирамиду; коническая поверхность описана вокруг пирамиды (см. Приложение 4).

Следует заметить, что сами авторы уравнения (3.36) не рассматривали свой критерий как аппроксимацию критерия (3.33). Однако, представленные в работе [150] соотношения связи между параметрами α, k и φ, c соответствуют варианту вписанного в пирамиду конуса. Причем, вывод этих соотношений дан в [150] для случая плоского деформированного состояния. В связи с данным обстоятельством (или по другим причинам) и в российской, и в зарубежной научно-технической литературе, а также в теоретических руководствах коммерческих МКЭ-программ (см., например [130, 133]), нередко встречаются неточности и ошибки при описании моделей упруго-пластических сред с критерием текучести Друккера – Прагера.

Учитывая отмеченное выше обстоятельство, в Приложении 4 для общего случая трехмерного НДС приводится подробное доказательство¹ того, что при аппроксимации пирамиды Мора – Кулона вписанным конусом Друккера – Прагера связь параметров двух этих поверхностей определяется соотношениями:

$$\alpha = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}; \quad k = \frac{\sqrt{3} \cdot c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}, \quad (3.37)$$

а при аппроксимации описанным вокруг пирамиды конусом – соотношениями:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \sin \varphi}{\sqrt{3} \cdot (3 - \sin \varphi)}; \quad k = \frac{6 \cdot c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3} \cdot (3 - \sin \varphi)}. \quad (3.38)$$

Отметим, что в вычислительной механике грунтов наиболее широкое распространение получила модель материала Друккера – Прагера с параметрами (3.38).

В то же время, анализ опубликованных результатов экспериментов с реальными грунтами² показал, что использование при моделировании сложного НДС грунтов поверхностей текучести с параметрами, определяемыми выражениями (3.37), (3.38), дает удовлетворительные результаты лишь в очень узких пределах изменения параметров, определяющих вид предельного НДС грунта. Поэтому для более адекватного численного моделирования НДС подземных участков магистральных трубопроводов была рассмотрена задача модификации классического критерия Друккера – Прагера путем построения оптимальной поверхности текучести [1], которая позволяет в общем случае получить лучшее совпадение с данными экспериментов.

В конце прошлого века В.В. Алешиним был предложен следующий **критерий выбора оптимальных определяющих параметров поверхности текучести** Друккера – Прагера [1, 145]:

величина расхождения объемов, ограниченных в пространстве главными напряжениями поверхностями текучести Друккера – Прагера и Мора – Кулона, должна быть минимальной.

¹ В таком виде доказательство было получено В.В. Алешиним.

² Некоторые из этих результатов представлены в Приложении 4.

Аналитическое решение сформулированной минимизационной задачи (см. Приложение 4) привело к выводу связующих соотношений параметров оптимальной поверхности текучести Друккера – Прагера с характеристиками физико-механических свойств грунта в наиболее удобном для практического применения виде:

$$\alpha_{omn} = \begin{cases} \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}, & 0 < \varphi \leq 27,65^\circ; \\ \frac{\sin \varphi}{3}, & \varphi \geq 27,65^\circ; \end{cases} \quad (3.39)$$

$$k_{omn} = \begin{cases} \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}, & 0 < \varphi \leq 27,65^\circ; \\ c \cdot \cos \varphi, & \varphi \geq 27,65^\circ. \end{cases} \quad (3.40)$$

В работах [1, 3, 5] показано, что использование упруго-пластической модели материала с поверхностью текучести Друккера – Прагера, определяющие параметры которой задаются в соответствии с (3.39), (3.40), позволяет точно отразить все качественные особенности сложного НДС грунта, окружающего подземные участки трубопроводов. Реализация такой модели в вычислительной технологии анализа прочности **магистральных** трубопроводных систем дает возможность построить высокоэффективные алгоритмы численного моделирования при минимальных в общем случае погрешностях результатов.

Следует отметить, что с момента выхода основополагающей работы Д. Друккера и В. Прагера [150] в 1952 году¹ и до настоящего времени специалисты в области механики сплошных сред и вычислительной механики работают над проблемами построения и численной реализации математических моделей для корректного описания нелинейного поведения грунтов в условиях сложного НДС. Активизация исследований в этой области наблюдалась в последние два десятилетия. Несмотря на достигнутые в этом направлении успехи, совершенствование физически нелинейных моделей для адекватного описания поведения реальных грунтов, а также других пористых или сыпучих материалов, остается одной из наиболее актуальных задач МДТТ [48].

Учитывая важность проблемы точного моделирования нелинейного сопротивления грунта при численном анализе НДС подземных участков трубопроводов, рассмотрим наиболее подходящие в данном случае математические модели, представленные в научно-технической литературе. Не выходя за рамки поставленной выше достаточно узкой задачи практического моделирования поведения упруго-идеальнопластического материала с пределом текучести, зависящим от давления, при умеренных статических нагрузках, ограничимся только предложенными вариантами аппроксимации пирамиды Мора – Кулона гладкими поверхностями текучести. Из этих вариантов выберем те, для практической реализации которых достаточно стандартных характеристик физико-механических свойств грунта.

Известными, но редко используемыми в практических расчетах, вариантами критерия (3.36) являются следующие две конические поверхности. Критерий (3.36) с определяющими параметрами [128]

$$\alpha = \frac{2 \cdot \sin \varphi}{\sqrt{3} \cdot (3 + \sin \varphi)}, \quad k = \frac{6 \cdot c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3} \cdot (3 + \sin \varphi)} \quad (3.41)$$

¹ В переводе на русский язык она была опубликована значительно позднее – в сборнике [147].

в пространстве главных напряжений представляет собой коническую поверхность, касающуюся трех ребер пирамиды Мора – Кулона, минимально отстоящих от гидростатической оси (в отличие от описанного конуса с параметрами (3.38), касающегося максимально отстоящих от гидростатической оси ребер пирамиды (см. рис. П4.4)). Второй вариант критерия (3.36) – это предложенная в работе [146] аппроксимация поверхности (3.33) конической поверхностью Друккера – Прагера, построенной исходя из предположения равенства углов раскрытия пирамиды и аппроксимирующего конуса (краткий анализ данного варианта приведен в Приложении 4).

Далее перейдем к обзору гладких аппроксимаций критерия (3.33), имеющих более сложную, чем поверхность прямого кругового конуса, форму. Такие аппроксимации можно построить, предполагая, что уравнение поверхности текучести зависит также от третьего инварианта девиатора тензора напряжений и имеет общий вид (3.35) (выше были представлены только выражения вида $f(I_1, J_2) = 0$). Для удобства описания уравнения этих поверхностей обычно записываются с использованием следующих инвариантных параметров сложного НДС [152]:

$$p = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot s_{ij} s_{ij}}; \quad r = \left(\frac{9}{2} \cdot s_{ij} s_{jk} s_{ki} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.42)$$

которые выражаются через введенный ранее набор инвариантов (3.35):

$$p = -\frac{I_1}{3}; \quad q = \sqrt{3 \cdot J_2}; \quad r = 3 \cdot \left(\frac{J_3}{2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.43)$$

Как видно из выражений (3.42), p – это гидростатическое давление; q – интенсивность напряжений. Физический смысл параметра r будет определен ниже.

Во многих источниках (например, [48, 128, 133, 152]) приводится (в разных формах записи) уравнение одной и той же прямой конической поверхности текучести (часто называемой обобщенным или расширенным критерием Друккера – Прагера), которая имеет некруговую форму сечения в девиаторной плоскости. С использованием инвариантных параметров (3.42) уравнение этой поверхности записывается как:

$$t - p \cdot \operatorname{tg} \beta' - d = 0, \quad (3.44)$$

где $t = \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left[1 + \frac{1}{K} - \left(1 - \frac{1}{K} \right) \cdot \left(\frac{r}{q} \right)^3 \right]$; β' , d – материальные параметры, определяемые

характеристиками физико-механических свойств грунта; K – коэффициент «отклонения от круговой формы» сечения поверхности девиаторной плоскостью.

Для определения связи между материальными параметрами критерия (3.44) и характеристиками физико-механических свойств грунта следует заметить, что параметр β' (иногда называемый углом трения Друккера – Прагера) является углом наклона образа прямой меридиональной (см. Приложение 4) образующей поверхности (3.44), построенного в плоской системе параметрических координат « $p-t$ ». Параметр d (иногда называемый удельным сцеплением Друккера – Прагера) представляет собой ординату точки пересечения образа этой образующей с осью t . Тогда, пользуясь выведенными в Приложении 4 при анализе поверхностей текучести Мора – Кулона и Друккера – Прагера соотношениями и учитывая выражения, приведенные выше, можно определить:

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{6 \cdot \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}; \quad d = \frac{6 \cdot c \cdot \cos \varphi}{3 - \sin \varphi}. \quad (3.45)$$

Полученные соотношения позволяют установить физический смысл входящего в (3.44) коэффициента K . Подставляя выражения (3.45) в (3.44) и учитывая соотношения (3.38), (3.43), можно убедиться, что при $K = 1$ критерий (3.44) вырождается в критерий (3.36) с параметрами, определяемыми соотношениями (3.38). То есть в пространстве главных напряжений ему соответствует поверхность текучести в виде прямого кругового конуса Друккера – Прагера, описанного вокруг пирамиды Мора – Кулона. При $0 < K < 1$, данный коэффициент равен отношению пределов прочности грунта на растяжение и сжатие [1], получаемых в лабораторных опытах на трехосное сжатие цилиндрических образцов грунта в стабилометрах [148].

Следует также заметить, что критерий (3.44) может быть реализован для практического применения и без привязки к критерию (3.33). Проведение серии стандартных опытов с образцами грунта в стабилометрах и соответствующая обработка результатов позволяет сразу определить материальные параметры β' , d в (3.44). Однако, такие эксперименты придется проводить для каждого конкретного грунта.

Широкое практическое применение критерия (3.44) возможно только при определении его параметров через нормативные характеристики физико-механических свойств грунта по формулам (3.45). В этом случае коэффициент K может быть задан единственным образом – как отношение пределов прочности на одноосное растяжение и одноосное сжатие грунта, получаемых из критерия Мора – Кулона (3.33):

$$K = \frac{3 - \sin \varphi}{3 + \sin \varphi}. \quad (3.46)$$

На рис. 3.3 представлено сечение девиаторной плоскостью рассмотренных выше поверхностей текучести. Как видно из рис. 3.3, поверхность (3.44) с параметрами, определяемыми по формулам (3.45) и (3.46), является достаточно близкой гладкой аппроксимацией кусочно-линейной поверхности текучести (3.33). На рис. 3.4 приведен вид поверхности текучести (3.44) в пространстве главных напряжений, построенной для грунта с характеристиками физико-механических свойств $\varphi = 20^\circ$, $c = 15 \text{ кПа}$.

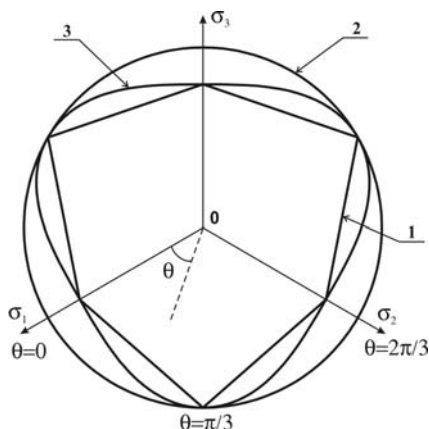


Рис. 3.3. Сечение девиаторной плоскостью поверхностей текучести: 1 – Мора – Кулона (3.33); 2 – Друккера – Прагера (3.36), (3.38); 3 – обобщенного критерия Друккера – Прагера (3.44 – 3.46).

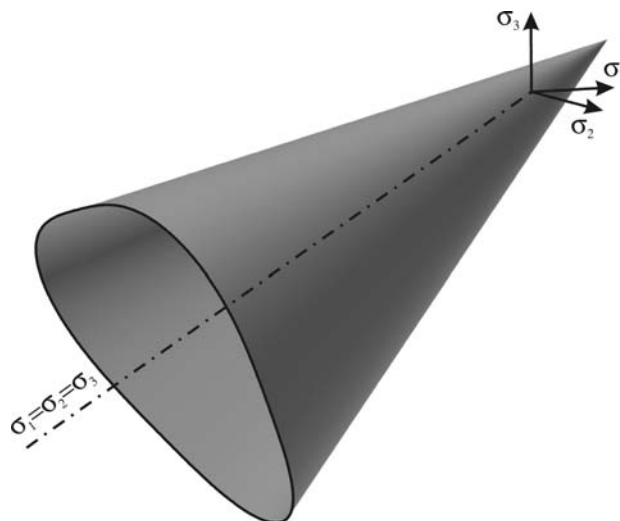


Рис. 3.4. Вид поверхности текучести обобщенного критерия Друккера – Прагера (3.44)

Следует заметить, что ввиду сложности определяющих соотношений критерия (3.44) и критериев, рассматриваемых далее, при их теоретическом анализе и практической реализации возникают некоторые трудности с построением и исследованием соответствующих поверхностей текучести. Существенно снизить эти трудности можно, вводя в определяющие уравнения дополнительный параметр – полярный угол в девиаторной плоскости θ (см. рис. 3.3), называемый в разных источниках [48, 123, 127, 128, 133, 152] по-разному: угол вида напряженного состояния, угол подобия девиатора тензора напряжений, девиаторный угол, угол Лоде и т.п. Причем, под всеми перечисленными понятиями различные авторы подразумевают, вообще говоря, два разных угла (отсчитываемых от двух разных направлений в девиаторной плоскости).

В большинстве российских и некоторых зарубежных [133, 152] источников направление линии отсчета этого угла совпадает с представленным на рис. 3.3 направлением – вдоль проекции любой из трех координатных осей (обычно выбирается ось первого главного напряжения) пространства главных напряжений на девиаторную плоскость. В этом случае связь параметра θ с введенными ранее инвариантными параметрами можно представить в виде [152, 291]:

$$\cos(3 \cdot \theta) = \left(\frac{r}{q} \right)^3, \quad (3.47)$$

или

$$\cos(3 \cdot \theta) = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot J_3}{2 \cdot J_2^{3/2}}. \quad (3.48)$$

В большинстве зарубежных источников выражение для этого параметра дается в виде:

$$\sin(3 \cdot \theta') = \frac{-3 \cdot \sqrt{3} \cdot J_3}{2 \cdot J_2^{3/2}}. \quad (3.49)$$

Используя равенство $\arccos x = \pi/2 + \arcsin(-x)$, можно установить, что $\theta = \theta' + \pi/6$, а линия отсчета полярного угла θ' направлена вдоль биссектрисы угла между направ-

лениями проекций на девиаторную плоскость двух координатных осей пространства главных напряжений.

Далее для определения полярного девиаторного угла будем использовать только выражения (3.47) и (3.48), так как они более удобны.

Итак, с помощью введенного параметра можно достаточно легко записать уравнение линии сечения девиаторной плоскостью поверхности текучести (3.44) для любого выбранного значения гидростатического давления p^* в виде:

$$R(\theta) = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot (p^* \cdot \operatorname{tg} \beta' + d)}{\sqrt{3} \cdot \left[1 + \frac{1}{K} - \left(1 - \frac{1}{K} \right) \cdot \cos(3 \cdot \theta) \right]}, \quad (3.50)$$

где $R(\theta)$ – радиус точки искомой кривой в девиаторной плоскости в полярной системе координат, представленной на рис. 3.3. Причем функция $R(\theta)$ принадлежит к классу $C^{(1)}$ во всей области определения аргумента: $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Критерий Мора – Кулона (3.33) также можно записать в более удобном для практической реализации виде:

$$R_{mc}(\theta) \cdot q - p \cdot \operatorname{tg} \varphi - c = 0, \quad (3.33^*)$$

где $R_{mc}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \cos \varphi} \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{tg} \varphi$, а все обозначения соответствуют введенным ранее.

Как известно, из постулируемого в теории пластического течения принципа максимума следует, что поверхность текучести должна быть невыгнутой [123]. Исследуем форму поверхности текучести, задаваемой в пространстве главных напряжений уравнением (3.44), для значений $0 < K < 1$. Данная поверхность имеет одну нерегулярную точку (центр конуса). Остальные точки поверхности во всех случаях, кроме одного (см. ниже), являются неомбилическими¹. В неомбилических точках поверхность (3.44) имеет нулевую гауссову кривизну [89], так как в каждой из этих точек кривизна одного из двух ее главных нормальных сечений (прямой меридиональной образующей²) $k_2 = 0$.

Таким образом, форма (вогнутая или выпуклая) исследуемой поверхности текучести во всех регулярных точках полностью определяется значением кривизны второго главного нормального сечения k_1 . Так как абсолютные значения функции кривизны кривой в евклидовом пространстве не зависят от выбора системы криволинейных координат [89], то воспользуемся уравнением (3.50). Это уравнение описывает в представленной на рис. 3.3 полярной системе координат наклонное (октаэдрическое) сечение поверхности (3.44). Значение кривизны кривой (3.50) k_o в каждой регулярной точке поверхности (3.44) можно вычислить по формуле [89]:

¹ Заданная в трехмерном евклидовом пространстве поверхность в каждой неомбилической точке имеет два главных нормальных сечения (плоские кривые), которым соответствуют две главные кривизны – наибольшая k_1 и наименьшая k_2 (по абсолютному значению) [89].

² Уравнения семейства таких прямых в системе параметрических координат « $p - q$ » можно получить, полагая $(r/q)^3 = \text{const}$ в (3.44).

$$k_o = \left[\rho^2 + 2 \cdot (d\rho/d\theta)^2 - \rho \cdot d^2\rho/d\theta^2 \right] / \left[\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2 \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (3.51)$$

где ρ, θ – полярный радиус и полярный угол соответственно.

Подставляя в (3.51) выражение $\rho = R(\theta)$ из (3.50), выполняя дифференцирование и несложные преобразования, имеем:

$$k_o = \frac{v^2 + 9 \cdot v \cdot (1 - 1/K) \cdot \cos(3 \cdot \theta)}{\frac{v^4}{u^2} \cdot \left[\frac{u^2}{v^2} + \left(\frac{-3 \cdot u \cdot (1 - 1/K) \cdot \sin(3 \cdot \theta)}{v^2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.52)$$

где $u = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (p^* \cdot \operatorname{tg} \beta' + d) / \sqrt{3}$; $v = 1 + 1/K - (1 - 1/K) \cdot \cos(3 \cdot \theta)$.

Согласно [89], форма плоской кривой в положительном направлении оси Oy правой декартовой системы координат определяется знаком ее кривизны:

$$k = \frac{d\vartheta}{ds}, \quad (3.53)$$

где ϑ, s – соответственно угол поворота касательной и длина дуги кривой. При отрицательных значениях k кривая является выпуклой, при $k \leq 0$ кривая невогнута.

В правых полярной и декартовой системах координат направления отсчета угла поворота касательной совпадают, а направления измерения дуги кривой противоположны. Поэтому кривая (3.50) является невогнутой при условии $k_o \geq 0$, где k_o для каждой регулярной точки поверхности (3.44) в области изменения аргумента¹ $0 \leq \theta \leq \pi/3$ рассчитывается по формуле (3.52). Наклонное сечение (3.50) в каждой регулярной точке поверхности (3.44) имеет общую касательную со вторым главным нормальным сечением указанной поверхности. Угол наклона октаэдрической плоскости к плоскости второго главного нормального сечения поверхности (3.44) равен $\beta'' = \arctg \left[(2 \cdot \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \beta') / (3 \cdot v) \right]$, обозначения соответствуют (3.52).

Как видно из (3.52), знак k_o определяется знаком выражения, стоящего в числителе. Применив теорему Менье [89] и выполнив некоторые дополнительные преобразования² числителя формулы (3.52), для кривизны главного нормального сечения поверхности (3.44) k_1 можно установить справедливость следующего выражения:

$$\operatorname{sign}[k_1] = \operatorname{sign}[k_o] = \operatorname{sign}[8 \cdot \cos(3 \cdot \theta) \cdot (1 - 1/K) + 1/K + 1]. \quad (3.54)$$

Исследование уравнения (3.52) показывает, что на отрезке $[0; \pi/3]$ минимальное неотрицательное значение кривизны кривой (3.50) k_o с учетом всех установленных выше ограничений достигается в точке $\theta = 0$ (см. рис. 3.3). Тогда из (3.54) следует, что условием неотрицательности всех значений k_1 для $0 \leq \theta \leq \pi/3$ будет:

¹ Поверхность текучести (3.44) имеет шесть меридиональных плоскостей симметрии (см. рис. 3.3), поэтому условие невогнутости достаточно определить только для одной шестой ее части.

² При этом следует учесть, что при $(0 < K < 1; 0 \leq \theta \leq \pi/3)$ значение параметра v в (3.52) всегда положительное.

$$K \geq \frac{7}{9}. \quad (3.55)$$

Таким образом, поверхность текучести, построенная с использованием уравнения (3.44), невогнута только при выполнении неравенства (3.55)¹. Заметим также, что при строгом неравенстве $K > 7/9$ данная поверхность текучести выпукла во всех своих регулярных точках, а при равенстве $K = 7/9$ она выпукла во всех регулярных точках, кроме точек, лежащих на **трех** меридиональных образующих, соответствующих значениям девиаторного угла **$\theta = 0; 2\pi/3; 4\pi/3$** . В этих точках все нормальные сечения поверхности имеют нулевую кривизну, а сами точки формально становятся омбилическими [89].

Ограничение (3.55) является достаточно существенным недостатком критерия (3.44). Из (3.46) и (3.55) следует, что данный критерий применим только для анализа упруго-пластического НДС грунтов, угол внутреннего трения которых $\varphi \leq \arcsin(3/8) \approx 22^\circ$. Некоторые реальные грунты в зонах прокладки подземных участков трубопроводных систем имеют угол внутреннего трения больше чем 22° [137, 138].

Другим относительным недостатком критерия (3.44), как и всех рассмотренных выше критериев, является наличие нерегулярной точки – вершины конуса. Для устранения этого недостатка уравнение (3.44) модифицируется, чтобы получить гиперболический или экспоненциальный закон изменения меридиональной образующей поверхности текучести [48, 133]. Так как при использовании экспоненциальной зависимости получающимися в итоге уравнениями нельзя аппроксимировать поверхность (3.33), то здесь такой вариант не рассматривается. Критерий пластичности грунта с поверхностью текучести, имеющей в пространстве главных напряжений гиперболическую линию в меридиональном сечении и круговую линию в девиаторном сечении, может быть представлен в следующем виде [48, 133]:

$$\sqrt{l^2 + q^2} - p \cdot \operatorname{tg} \beta' - d = 0, \quad (3.56)$$

где $l = d - p_t \cdot \operatorname{tg} \beta'$; p_t – заданная величина предела прочности грунта на гидростатическое растяжение.

На рис. 3.5 приведено изображение меридионального сечения гиперболической поверхности текучести в плоской системе параметрических координат « $p - q$ », поясняющее параметры в уравнении (3.56). Как видно из рисунка, поверхность текучести, соответствующая критерию (3.56), не имеет нерегулярных точек. Кроме того, меняя значение параметра p_t , можно получить любое желаемое приближение гиперболической поверхности текучести к конической поверхности Друккера – Прагера, образ меридионального сечения которой показан на рис. 3.5 наклонной пунктирной линией. При $p_t = d / \operatorname{tg} \beta'$ гиперболическая поверхность (3.56) вырождается в поверхность прямого кругового конуса Друккера – Прагера (3.36).

На рис. 3.6 представлен вид гиперболической поверхности текучести (3.56) в пространстве главных напряжений, построенной для грунта с характеристиками физико-механических свойств $\varphi = 20^\circ$, $c = 15 \text{ кПа}$ и параметром $p_t = 30 \text{ кПа}$. Для наглядности на этом же рисунке изображена часть поверхности текучести Друккера – Прагера (3.36), построенная для грунта с аналогичными характеристиками физико-механических

¹ Во многих источниках и теоретических руководствах универсальных МКЭ-программ для нижней границы параметра K приводятся только приближенные значения. Например, в [133] условие (3.55) дается как $K \geq 0,778$.

свойств. Следует добавить, что гиперболическая поверхность текучести, задаваемая уравнением (3.56), остается выпуклой только при условии круговой линии в девиаторном сечении (рис. 3.6).

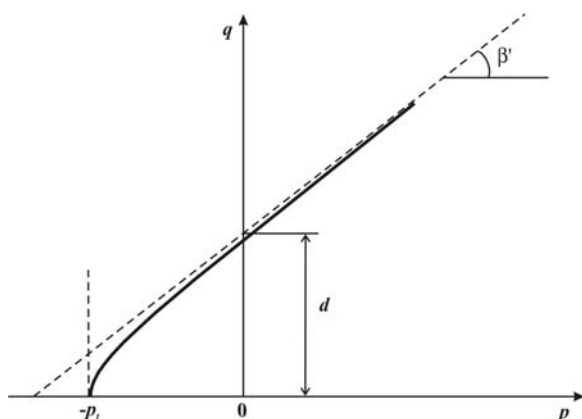


Рис. 3.5. Изображение гиперболической поверхности текучести обобщенного критерия Друккера – Прагера (3.56) в плоской системе параметрических координат « $p - q$ »

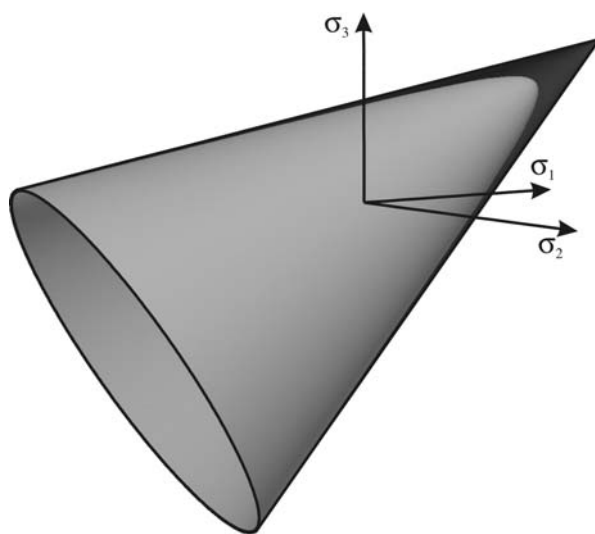


Рис. 3.6. Поверхности текучести обобщенного гиперболического (3.56) и классического (3.36) критериев Друккера – Прагера

Как видно из предыдущих замечаний, каждый из рассмотренных выше критериев текучести имеет свои преимущества и недостатки. Поэтому, начиная с середины 90-х годов XX века, во многих работах был предложен критерий¹, сочетающий все преимущества рассмотренных выше критериев и исключающий недостатки каждого из них. Например, один из вариантов данного критерия приведен в [154]. Дополнительным пре-

¹ Предложенные в разных работах выражения отличаются друг от друга, но, по сути, все они являются лишь совершенствуемыми вариантами одного и того же критерия. Одну из версий истории разработки данного критерия можно найти в [131].

имуществом критерия Менетрэ – Вильяма¹ [154] является то, что входящие в него материальные параметры являются нормативными характеристиками физико-механических свойств грунта φ , c . Используя инвариантные параметры сложного НДС (3.42) и выражение (3.47) для полярного девиаторного угла θ , уравнение поверхности текучести Менетрэ – Вильяма для грунтов можно записать в виде:

$$\sqrt{(\varepsilon \cdot c \cdot \operatorname{tg} \varphi)^2 + (R_{mw}(\theta) \cdot q)^2} - p \cdot \operatorname{tg} \varphi - c = 0, \quad (3.57)$$

где $R_{mw}(\theta) = \frac{4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos^2 \theta + (2 \cdot e - 1)^2}{2 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos \theta + (2 \cdot e - 1) \cdot \sqrt{4 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos^2 \theta + 5 \cdot e^2 - 4 \cdot e}} \cdot R_{mc} \left(\frac{\pi}{3} \right)$; ε – ме-

ридиональный эксцентриситет, определяющий скорость приближения гиперболической линии меридионального сечения поверхности текучести к прямой асимптоте; e – девиаторный эксцентриситет, определяющий степень отклонения от круговой формы девиаторного сечения поверхности текучести; $R_{mc}(\theta)$ – то же, что и в (3.33*), поэтому

$$R_{mc} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{3 - \sin \varphi}{6 \cdot \cos \varphi}.$$

При построении поверхности текучести (3.57) или при практической реализации критерия Менетрэ – Вильяма следует иметь в виду, что, в отличие от обобщенного критерия Друккера – Прагера (см. (3.50)), функция $R_{mw}(\theta)$ является разрывной в области определения аргумента $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Поэтому по уравнению (3.57) можно построить только одну шестую часть² поверхности текучести Менетрэ – Вильяма для $0 \leq \theta \leq \pi/3$. Учитывая симметрию, остальные части поверхности нетрудно восстановить геометрическими преобразованиями исходного выражения, заключающимися в поворотах вокруг гидростатической оси и отражениях относительно соответствующих меридиональных плоскостей в пространстве главных напряжений.

Поверхность текучести Менетрэ – Вильяма (3.57) является гладкой аппроксимацией (не имеющей нерегулярных точек) поверхности текучести Мора – Кулона (3.33), (3.33*) при задании параметра e в виде (см. (3.46)):

$$e = \frac{3 - \sin \varphi}{3 + \sin \varphi}. \quad (3.58)$$

Исследуя уравнение (3.57), можно показать, что задаваемая этим уравнением в трехмерном евклидовом пространстве (пространстве главных напряжений) поверхность невогнута при изменении параметра e в пределах $1/2 \leq e \leq 1$, и, следовательно (см. (3.58)), при изменении значения угла внутреннего трения $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$, что перекрывает диапазон изменения значений данной характеристики у всех реальных грунтов [137, 138].

Меридиональное сечение поверхности (3.57) представляет собой гиперболическую линию, вид которой аналогичен линии, представленной на рис. 3.5. Меняя в (3.57) параметр ε , можно получить любое желаемое приближение гиперболической образующей поверхности текучести Менетрэ – Вильяма к соответствующему ребру пирамиды Мора

¹ В целях корректности будем называть рассматриваемый здесь критерий именами авторов работы, в которой он предложен в излагаемом далее виде.

² На отрезке $[0; \pi/3]$ функция $R_{mw}(\theta)$ принадлежит к классу $C^{(1)}$.

– Кулона в шести меридиональных плоскостях пространства главных напряжений $\theta = 0; \pi/3; 2\pi/3$, и т.д., (см. рис. 3.3). В случае $\varepsilon = 0$ меридиональные образующие поверхности (3.57) вырождаются в прямые линии, причем в шести указанных выше меридиональных плоскостях пространства главных напряжений образующие поверхности текучести Менетрэ – Вильяма совпадают с ребрами пирамиды Мора – Кулона.

На рис. 3.7 представлен вид поверхности текучести Менетрэ – Вильяма в пространстве главных напряжений, построенной для грунта с характеристиками физико-механических свойств $\varphi = 40^\circ$, $c = 45 \text{ кПа}$ и параметрами: $\varepsilon = 0,3$; e – рассчитано по формуле (3.58). Геометрическое изображение в девиаторной плоскости пространства главных напряжений двух основных критериев с некруговой линией девиаторного сечения поверхностей текучести (3.44) и (3.57) для одного и того же грунта приведены на рис. 3.8. Там же для сравнения показана линия девиаторного сечения кусочно-линейной поверхности текучести Мора – Кулона. Как видно на рис. 3.8, степень аппроксимации пирамиды Мора – Кулона у обоих критериев примерно одинаковая. Можно все же отметить, что наряду с другими преимуществами, критерий Менетрэ – Вильяма¹ является еще и самой близкой (из известных на сегодняшний день) гладкой аппроксимацией кусочно-линейной поверхности текучести Мора – Кулона, дающей наиболее точные результаты при анализе сложного нелинейного НДС грунтов.

3.4. Технология численного анализа напряженно-деформированного состояния и оценки прочности трубопроводных систем

Технология численного анализа НДС и оценки прочности трубопроводных систем была разработана В.В. Алешиным в конце прошлого века [22, 23] на базе применения описанных выше математических моделей и численных методов. Разрабатываемая технология предназначалась, прежде всего, для непосредственного использования специалистами производственных и научно-исследовательских организаций, связанных с эксплуатацией и техническим контролем состояния и безопасности магистральных трубопроводных систем. Поэтому на всех стадиях разработки и практической реализации технологии особое внимание уделялось автоматизации процедур подготовки исходных данных, построения и анализа КЭ-моделей, а также представления и интерпретации результатов численного моделирования сложного нелинейного НДС участков трубопроводных конструкций.

Одним из главных направлений практического применения разработанных моделей и методов численного моделирования является анализ прочности участков магистральных трубопроводов. Для анализа таких участков были созданы вычислительная технология «PipEst» [1, 3, 4, 6] и одна из версий подсистемы «Alfargus/StructuralAnalysis» на базе КАИ «Alfargus» (см. Раздел 1.6). Практическая реализация моделей и алгоритмов, а также автоматизация процедур, технологии численного анализа трубопроводов в подсистеме «Alfargus/StructuralAnalysis» выполнены В.В. Кобяковым и К.И. Дикаревым. Далее рассматриваются основные положения, алгоритмы, процедуры и возможности «PipEst» и «Alfargus/StructuralAnalysis» в области прочностного анализа магистральных трубопроводов.

¹ Опять же в целях корректности необходимо уточнить, что это относится ко всем вариантам данного критерия, девиаторное сечение поверхности текучести которых описывается функцией $R_{mw}(\theta)$ из (3.57). Вид функции $R_{mw}(\theta)$ был предложен М. Клисинским в 1985 году (см. [131]).

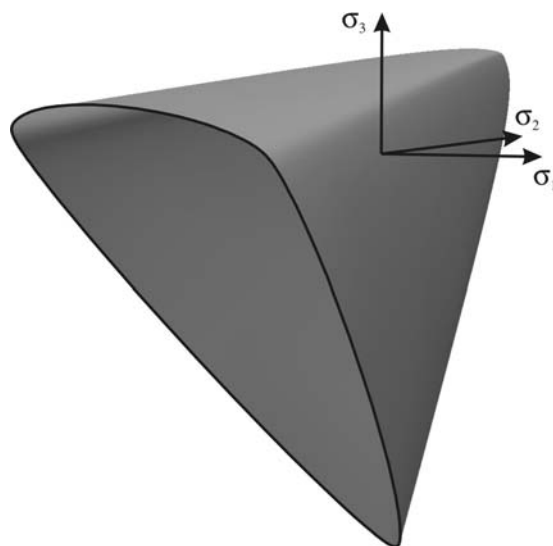


Рис. 3.7. Поверхность текучести Менетрэ – Вильяма

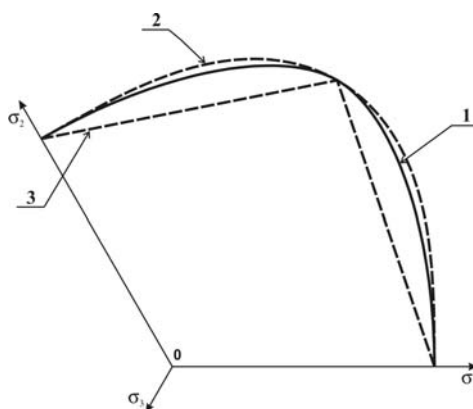


Рис. 3.8. Сечение девиаторной плоскостью поверхностей текучести: 1 – Менетрэ – Вильяма (3.57),(3.58); 2 – обобщенного критерия Друккера – Прагера (3.44 – 3.46); 3 – Мора – Кулона (3.33)

3.4.1. Выбор средств моделирования НДС трубопроводов

Выше было показано, что наиболее эффективным методом численного анализа сложного нелинейного НДС трубопроводных систем является МКЭ. Коммерческие универсальные компьютерные программы, реализующие МКЭ для прочностного анализа конструкций (ведущие из них указаны в Разделе 3.2) представлены на рынке с 70-х годов прошлого века. При разработке вычислительной технологии «PipEst» и подсистемы «Alfargus/StructuralAnalysis» в качестве средств моделирования НДС трубопроводных конструкций использовались, в основном, комплексы «ANSYS» [130] и «LS-DYNA» [131]. Например, для удобства практического использования интерфейс пользователя вычислительной технологии «PipEst», начиная с 2002 года, «встраивался» в командное меню графической оболочки программы «ANSYS» (рис. 3.9) [3, 6].

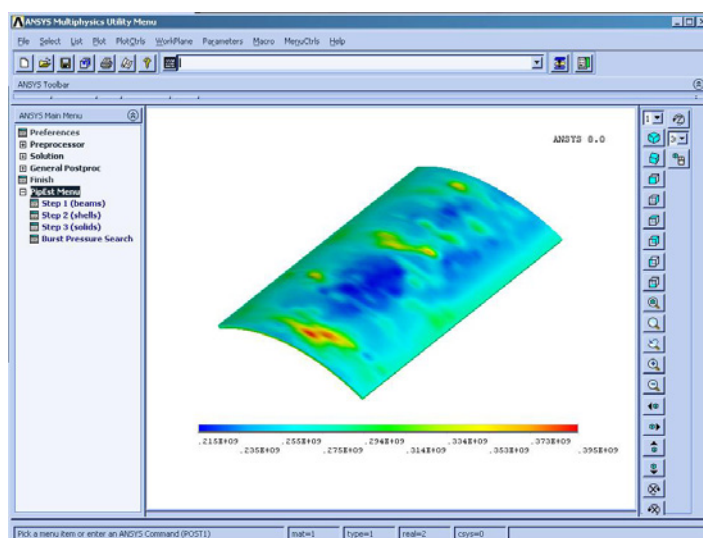


Рис. 3.9. Интерфейс пользователя вычислительной технологии «PipEst» в среде программы «ANSYS»

Необходимо добавить, что представленная ниже технология может быть применена для практических расчетов с использованием в качестве средства моделирования НДС трубопроводов любой другой универсальной МКЭ-программы, обладающей требуемым набором функциональных возможностей, либо открытой архитектурой для дополнения необходимых модулей. В частности, все указанные в Разделе 3.2 коммерческие программные продукты обладают данными возможностями и могут быть успешно использованы в качестве «решателей». Примеры результатов численного анализа НДС подземных участков магистральных трубопроводов в программе «ABAQUS»¹, а также сравнение возможностей программ «ANSYS» и «ABAQUS» в области моделирования трубопроводных систем, можно найти в [5, 6].

3.4.2. Моделирование НДС трубопроводных систем

Согласно разработанным алгоритмам [1, 3, 6], задача анализа НДС сложной трубопроводной системы решается поэтапно, с соответствующим применением более сложных математических моделей на последующем этапе и учетом результатов расчетов, полученных на предыдущих этапах. Далее, возможности технологии будут рассмотрены на примере анализа подземных участков линейных частей магистральных трубопроводов и технологических трубопроводов обвязок КС.

В процессе эксплуатации подземный участок магистрального трубопровода находится в условиях многофакторного нагружения и влияния окружающей среды. Все виды нагрузок, действующих на трубопровод, можно условно разделить на две группы:

- нормативные нагрузки, которые действуют всегда и должны учитываться при проектировании трубопроводной системы;
- ненормативные нагрузки, которые могут появиться вследствие нарушения норм при строительстве и эксплуатации трубопроводной системы, а также воздействия на нее окружающей среды.

¹ Реализация алгоритмов вычислительной технологии «PipEst» в среде программы «ABAQUS» выполнена В.В. Кобяковым.

Основными нормативными нагрузками, действующими на трубопровод подземной прокладки, являются:

- внутреннее избыточное давление транспортируемого продукта;
- температурный перепад – разность между температурой воздуха при прокладке трубопровода и температурой при его эксплуатации;
- вес трубопровода, транспортируемого продукта и грунта засыпки;
- нелинейное сопротивление окружающего грунта смещению трубопровода;
- другие нагрузки, определяемые конструкцией и условиями эксплуатации конкретной трубопроводной системы.

Наиболее распространенные ненормативные нагрузки на подземный участок трубопровода – это неконтролируемые подвижки грунтов¹ (карстовые провалы, бугры пучения, оползни и т.п.) и механическое воздействие землеройной техники, как на сам трубопровод, так и на окружающий его грунтовой массив. Кроме того, в качестве опасной ненормативной нагрузки может выступать кратковременное превышение внутренним избыточным давлением на каком-либо участке трубопровода допускаемого нормативного уровня при регулировании гидравлических режимов.

Отметим, что все рассмотренные выше основные виды нормативных и ненормативных нагрузок носят статический (или квазистатический, например, в случае ползучести грунтов) характер. Многие промышленные трубопроводные системы² испытывают при эксплуатации также действие переменных (периодических) термосиловых нагрузок. Как правило, периоды колебаний этих нагрузок существенно превышают период собственных колебаний трубопроводной конструкции³. В таких случаях, для получения используемых при расчетах циклической прочности характеристик НДС (амплитуды и средние значения напряжений и деформаций, коэффициенты асимметрии, изменение удельной энергии деформации и т.д.), достаточно иметь результаты МКЭ-анализа трубопроводных конструкций в статической постановке.

Широко распространенным видом нестационарного силового воздействия на промышленные трубопроводные системы являются изменения (пульсации) внутреннего избыточного давления при переходных гидравлических режимах. Однако, в большинстве случаев динамический характер данных нагрузок также следует учитывать лишь на очень коротких участках трубопроводных систем, примыкающих к компрессорно-нагнетательному оборудованию (вместе с высокочастотными вибрационными нагрузками). Например, результаты численного моделирования нестационарных гидравлических режимов транспортирования природного газа по системам разветвленных трубопроводов с использованием высокоточных газодинамических симуляторов (см. Главу 2), свидетельствуют, что возникающую при этом дополнительную нагрузку от волн давления можно рассматривать как квазистатическую на всех участках ЛЧМГ.

Помимо механических нагрузок, широко распространенным и опасным фактором, понижающим запасы прочности трубопроводной конструкции, является коррозионное воздействие окружающей среды (в данном случае грунта и грунтовых вод) на трубопровод в местах нарушения изоляционного покрытия, вызывающее появление на внешних поверхностях стенок трубопровода локальных коррозионных дефектов. Менее распро-

¹ Сейсмические нагрузки здесь не рассматриваются.

² Например, трубопроводы ТС, «горячих» коллекторов АЭС и др.

³ Исключение составляют высокочастотные колебания участков трубопроводных систем сопрягаемых с нагнетательно-компрессорным оборудованием. В этом случае при анализе НДС следует учитывать также динамические характеристики трубопроводной конструкции. В общей постановке методы численного анализа трубопроводных систем при динамических нагрузках представлены в Главе 4.

страненным (но не менее опасным) фактором является абразивное действие находящихся в потоке транспортируемой среды твердых частиц на внутреннюю поверхность стенок труб, длительное воздействие которого приводит к появлению протяженных эрозийных дефектов (снижение толщины стенки) в местах изгибов трубопроводов. Перечень вредных воздействий на участки магистральных трубопроводов, способных привести к снижению их несущей способности, представлен в [1, 3].

Приступая к анализу прочности участка магистрального трубопровода подземной прокладки, исследователь должен провести подготовительные работы, включающие в себя сбор, анализ и систематизацию исходных данных, необходимых для численного моделирования. Подробное описание подготовительной работы можно найти в работе [3]. Здесь приведем только последовательный перечень основных действий.

В процессе подготовительной работы необходимо выполнить следующую последовательность действий.

- 1.) Получить подробное представление о геометрическом местоположении оси трубопровода в пространстве.
- 2.) Определить линию поверхности грунта (или глубину прокладки трубопровода).
- 3.) Определить тип, характеристики физико-механических свойств и зоны залегания грунтов в области рассматриваемого участка трубопровода.
- 4.) Осуществить привязку отдельных труб к линии оси трубопровода.

После завершения подготовительной работы выполняется поэтапное численное моделирование НДС трубопроводной конструкции. Рассмотрим основные этапы этого процесса.

3.4.2.1. Балочные модели трубопроводов

На первом этапе задача анализа НДС трубопроводной конструкции решается в балочном приближении. Вся рассматриваемая трехмерная трубопроводная конструкция моделируется КЭ в виде прямолинейных и криволинейных (для моделирования отводов) балок кольцевого поперечного сечения в соответствии с алгоритмами, подробно описанными в работах [1, 3].

При подготовке расчетных моделей и численном анализе трубопроводной конструкции на данном этапе учитываются все нагрузки, существенно влияющие на общее НДС трубопровода, – избыточное внутреннее давление, температурный перепад, напряжения упруго изогнутых труб, нелинейное взаимодействие грунта и подземных участков трубопроводов, вес трубопроводов, запорно-регулирующей арматуры и транспортируемой среды, а также другие нагрузки, определяемые условиями конкретной системы (например, нагрузки от наземных источников, смещение оси трубопровода от проектного положения, контакты с опорами и т.д.).

Моделирование сопротивления грунта деформации подземных участков трубопроводов осуществляется с помощью задания нелинейных связей (нелинейных пружин) по трем поступательным степеням свободы (вдоль оси трубы, поперечно в горизонтальной и вертикальной плоскостях) в узловых точках КЭ-модели. Параметры этих связей вычисляются для каждого элемента в соответствии с определяющими зависимостями инженерных моделей взаимодействия «трубопровод – грунт» (см. Раздел 3.3.2.1).

Граничные условия задаются в виде заделки соответствующих степеней свободы в узлах расчетной схемы, исходя из реальных условий крепления участков трубопроводов. Например, фланцевое или сварное присоединение трубопровода к массивным агрегатам и аппаратам моделируется заделкой всех степеней свободы (жесткое защем-

ление), лобовые опоры – нулевыми смещениями в соответствующих направлениях, и т.п.

При анализе НДС подземного участка, являющегося частью протяженного трубопровода (например, магистрального), для получения корректных результатов и исключения влияния ГУ необходимо моделировать также примыкающие к нему смежные участки трубопровода. На концах данных участков задаются ГУ, исходя из объективного условия «заземления» в грунте отдаленных от рассматриваемого сегмента участков трубопроводов [138]. Причем, длина смежных участков, которые необходимо также моделировать, существенным образом зависит как от геометрических параметров и условий нагружения трубопровода, так и от характеристик физико-механических свойств окружающего грунта. Таким образом, точная информация о характеристиках физико-механических свойств грунтов в районе прокладки исследуемых подземных участков трубопроводов необходима не только для адекватного моделирования сопротивления грунта смещениям трубопровода, но и для корректного формирования и построения самих балочных КЭ-моделей данных участков. Иллюстрирующие примеры представлены в Приложении 5. Рекомендации по выбору длины смежных участков протяженного трубопровода, в зависимости от параметров рассматриваемой задачи приведены в работах [1, 3].

При анализе НДС эксплуатирующихся **магистральных** трубопроводных систем уже на первом этапе используется имеющаяся информация по данным технической диагностики трубопроводов. Например, дополнительные нагрузки на конструкцию, возникающие вследствие смещения оси трубопроводов от проектного положения, задаются в виде соответствующих смещений узлов КЭ-модели, просадки фундаментов и опор моделируются введением контактных элементов с начальным зазором и т.д.

На рис. 3.10 представлен пример балочной КЭ-модели конструкции нагнетательной магистрали КС. КЭ, моделирующие окружающий подземные участки трубопроводов грунт, на рис. 3.10 условно не показаны.

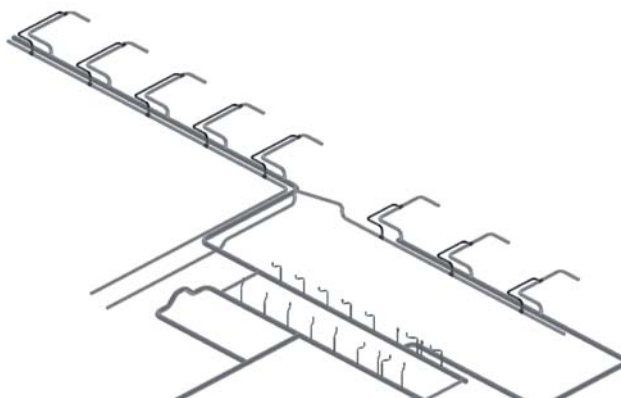


Рис. 3.10. Балочная КЭ-модель трубопроводной системы КС (фрагмент)

Расчеты, проводимые на первом этапе по балочным моделям, являются оценочными и служат для определения общей картины НДС трубопроводных конструкций, выявления наиболее нагруженных участков и определения силовых (силы и моменты) и кинематических (смещения и углы поворота) характеристик, действующих на границах выявленных участков. Поэтому эти расчеты, в основном, проводятся в предположении линейно-упругого поведения материала труб. Пластические деформации трубопровода при расчетах по балочным моделям также могут учитываться, например, при расчетах

продольной устойчивости трубопроводной конструкции или оперативном анализе аварийных ситуаций.

В результате расчетов на первом этапе получают картины распределения характеристик общего НДС – перемещений, углов поворота, напряжений, деформаций, сил и моментов (в рамках балочного приближения) во всей конструкции рассматриваемой трубопроводной системы. На рис. 3.11 приведен пример результатов моделирования НДС трубопроводной конструкции на первом этапе.

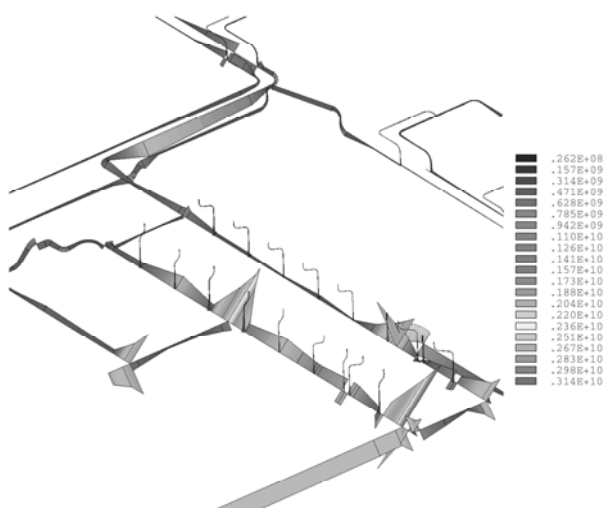


Рис. 3.11. Эпюра сил $[H]$, возникающих в трубопроводах при действии рабочих нагрузок (фрагмент)

Уточненный анализ сложного НДС трубопроводной конструкции выполняется на следующих этапах моделирования с использованием более сложных оболочечных и объемных КЭ-моделей. Задание граничных условий для оболочечных и объемных моделей участков МТ производится по результатам, полученным для балочных моделей. Наиболее удобным способом в данном случае является задание в качестве граничных условий кинематических характеристик НДС. Из всех кинематических параметров на границах рассматриваемого участка подземного трубопровода на его НДС наиболее существенное влияние оказывают осевые смещения трубопровода.

Из теории известно [127, 128], что для некоторых классов задач¹, используя МКЭ, можно получить точные решения в узловых точках. В нашем случае применение вариационного метода (см. Раздел 3.2) построения балочной КЭ-модели позволяет распределенные по длине трубопровода осевые нагрузки привести к энергетически эквивалентным узловым (сосредоточенным) силам. Тогда, точные значения осевых узловых смещений трубопровода получаются независимо от количества КЭ, дискретизирующих участок. Таким образом, моделирование надлежащим образом распределенной нагрузки сопротивления грунта нелинейными пружинами (в узлах), как описано выше, не приводит к потере точности решения для осевых смещений узлов балочной КЭ-модели подземного участка трубопровода (см. Приложение 6).

¹ В частности, для анализа «одномерного» НДС балочных конструкций с использованием стержневых (балочных) КЭ, когда все действующие нагрузки можно привести к энергетически эквивалентным узловым силам.

Пример результатов моделирования общего НДС подземного участка трубопровода на первом этапе вычислительной технологии (с использованием балочных КЭ-моделей) представлен на рис. 3.12. Получаемые на первом этапе результаты дают возможность выявить наиболее нагруженные участки трубопровода, установить их границы, выделить граничные узлы участков, в которых необходимо определить расчетные значения перемещений и углов поворота, используемые для моделирования на последующих этапах прочностного анализа.

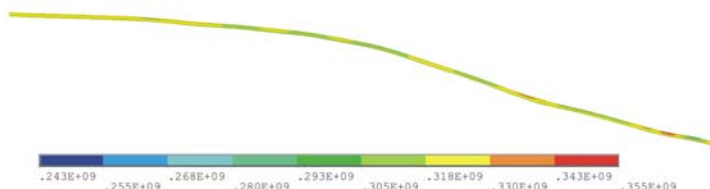


Рис. 3.12. Распределение интенсивности напряжений [Па] на участке магистрального трубопровода (балочная КЭ-модель)

Все алгоритмы и процедуры автоматизированного анализа НДС трубопроводных систем с использованием балочных КЭ-моделей детально представлены в работах [1, 3, 4]. В [1, 3–5] приведены также примеры программ автоматизации такого анализа в среде комплекса «ANSYS». Особенности работы пользователя – специалиста производства предприятия – с автоматизированными процедурами анализа прочности участков МТ, реализованными в подсистеме «Alfargus/StructuralAnalysis», изложены в [6, 7].

3.4.2.2. Оболочечные модели трубопроводов

На втором этапе расчеты НДС наиболее нагруженных участков проводятся с использованием оболочечных КЭ-моделей трубопроводов. Все трубопроводы, входящие в анализируемый на этом этапе участок, рассматриваются как трехмерные тонкостенные оболочки и аппроксимируются оболочечными КЭ.

Окружающий подземные участки трубопроводов грунт рассматривается здесь как трехмерная упруго-пластическая сплошная среда и моделируется с помощью объемных КЭ. Упруго-пластическое поведение грунта моделируется с использованием математических моделей, изложенных в Разделе 3.3.2.2. При наличии информации о расположении слоев грунта различных типов в зоне прокладки трубопровода КЭ-модель окружающего грунта строится в соответствии со схемой их расположения. Пример такой модели показан на рис. 3.13.

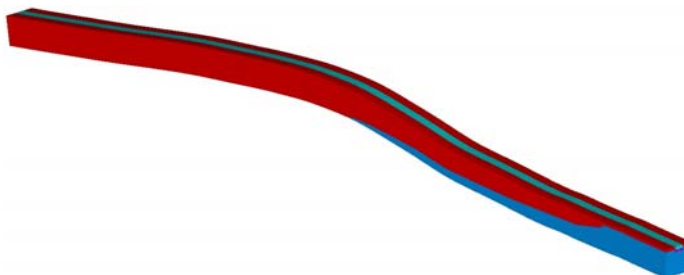


Рис. 3.13. Расчетная модель участка подземного трубопровода с неоднородным грунтом под трубопроводом (фрагмент)

ГУ для оболочечных КЭ-моделей трубопроводов задаются по результатам анализа балочных КЭ-моделей с помощью специально разработанных алгоритмов и автоматизированных процедур (см. [1, 3]).

Анализ НДС и оценка прочности трубопроводов на втором этапе могут проводиться с учетом данных технической диагностики по имеющимся на участках протяженным дефектам – сплошная равномерная коррозия, эрозионные утонения стенок, любые отклонения геометрической формы труб от цилиндрической, большие вмятины и т.п.

Все алгоритмы и процедуры (а также примеры программ автоматизации) численного анализа НДС трубопроводных систем на втором этапе подробно изложены в работах [1, 3–5]. Особенности работы пользователя с автоматизированными процедурами данного этапа рассмотрены в работах [6, 7].

В результате расчетов на втором этапе моделирования пользователь получает трехмерную картину распределения НДС трубопроводной конструкции (тензоры напряжений и деформаций определяются для внутренней, серединной и наружной поверхностей оболочек) с учетом всех действующих на нее эксплуатационных нагрузок. Пример результатов моделирования НДС участка подземного МТ в оболочечном приближении представлен на рис. 3.14.

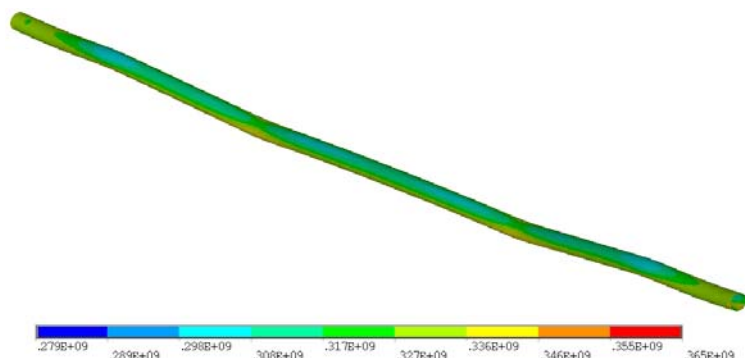


Рис. 3.14. Распределение интенсивности напряжений [Па] на участке магистрального трубопровода (оболочечная КЭ-модель)

В завершение данного Раздела, необходимо рассмотреть один вопрос, касающийся практического применения трехмерных упруго-пластических моделей грунтов для моделирования взаимодействия трубопровода с грунтом. Как показано еще в работе [150], использование при моделировании упруго-пластического поведения грунта теории пластического течения с ассоциированным законом [123] и критериями пластичности, зависящими от гидростатического давления¹, приводит к увеличению объема при пластических деформациях. Это свойство в механике сплошных сред называется **дилатансия** [150].

В то же время, многие исследователи [48, 133, 146] указывают на то, что поведение реальных грунтов при пластических деформациях не подчиняется ассоциированному закону течения. Это означает, что вектор приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений не направлен по нормали к поверхности текучести. Угол отклонения вектора приращения пластической деформации от девиаторной плоскости называется **углом дилатансии** и является независимой характеристикой механических свойств материала, в частности грунта. Например, при использовании критерия текучести в форме (3.36) ассоциированный закон течения выполняется только

¹ Все критерии пластичности, рассмотренные в Разделе 3.4.2.2, зависят от гидростатического давления.

при одинаковых значениях угла внутреннего трения и угла дилатансии грунта.

Так как угол дилатансии не относится к нормативным характеристикам физико-механических свойств грунтов, то, естественно, возникает вопрос о степени влияния дилатансии грунта на сопротивление смещению подземного трубопровода. В работе [48] приведены результаты вычислительных экспериментов¹ по исследованию двух модельных задач механики грунтов – плоской задачи анализа предельного равновесия грунтового откоса и осесимметричной задачи о сжатии грунта шероховатыми плитами. Обе задачи рассмотрены в двух предельных случаях при ассоциированном и недилатантном законах течения грунта. Анализ результатов вычислительных экспериментов позволил авторам [48] сделать вывод об умеренном влиянии значения угла дилатансии на расчетную величину предельной нагрузки, при существенных отличиях в кинематической картине пластического течения грунта.

С целью оценки влияния значения ненормативной характеристики – угла дилатансии на сопротивление грунтов смещениям подземных трубопроводов были проведены соответствующие вычислительные эксперименты на модельных задачах. На рис. 3.15 приведены результаты решения одной из задач по осевому смещению подземного трубопровода в случаях ассоциированного и недилатантного законов течения грунта² с высоким значением угла внутреннего трения ($\varphi = 30^\circ$). Как видно из рис. 3.15, кинематические картины поведения грунта существенно различаются. На рис. 3.16 приведены графики зависимости среднего касательного напряжения на поверхности трубы (определяющего силу сопротивления грунта) для двух рассмотренных случаев. Анализ зависимостей на рис. 3.16 показывает, что предельная сила сопротивления грунта для дилатирующего и недилатирующего грунтов различается примерно в 1,4 раза.

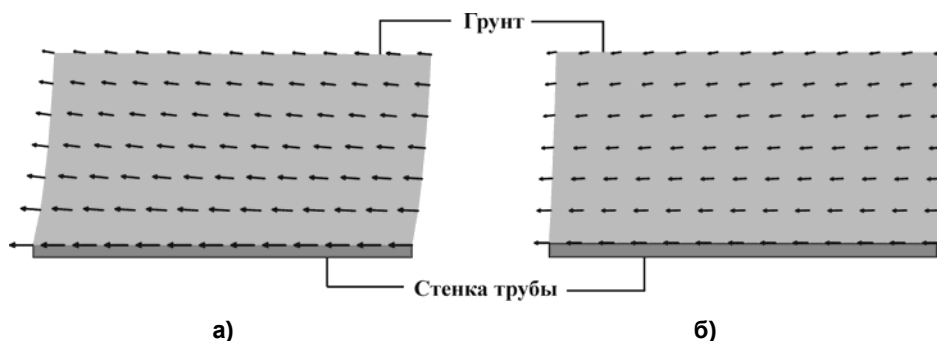


Рис. 3.15. Векторное поле перемещений в грунте при осевом смещении подземного трубопровода (продольное сечение) для упруго-пластических моделей грунта с ассоциированным (а) и недилатантным (б) законами течения

Таким образом, проведенные вычислительные эксперименты показали, что угол дилатансии грунтов с высоким значением угла внутреннего трения может оказывать заметное влияние на силу сопротивления смещениям подземного трубопровода. Поэтому для наиболее точных результатов численного анализа НДС участков трубопроводов, проложенных в таких грунтах, необходимы дополнительные инженерные изыскания и лабораторные эксперименты по определению значений угла дилатансии.

¹ Приведенные в [48] результаты вычислительных экспериментов заимствованы из работ других авторов.

² При проведении вычислительных экспериментов менялось только значение угла дилатансии грунта. Остальные характеристики физико-механических свойств грунта, геометрические параметры трубопровода, размеры расчетной области, топология КЭ-сетки, и ГУ не изменялись.

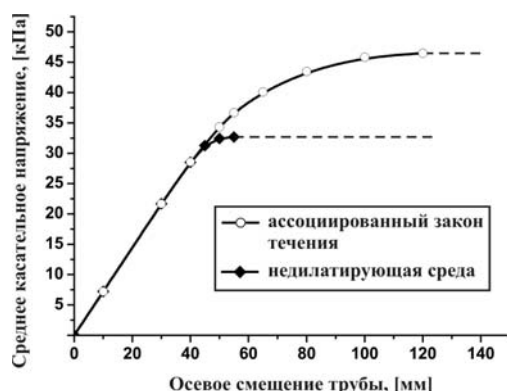


Рис. 3.16. Зависимость силы сопротивления грунта от осевого смещения трубы

3.4.2.3. Объемные модели трубопроводов

Применение оболочечных моделей позволяет с достаточной точностью определять реальную картину НДС трубопроводной конструкции на прямых и изогнутых участках, удаленных от мест резкого изменения в пространстве направлений градиентов напряжений и деформаций. Вследствие допущений и предположений, заложенных в основах теории оболочек, оболочечные модели не позволяют получить каких-либо приемлемых по точности результатов в областях приложения краевых условий (например, в местах жесткого крепления трубопроводов), резкого изменения геометрической формы конструкции (например, в области тройниковых соединений или локальных дефектов стенок трубы) и других участков, где возникающее при нагрузках НДС носит существенно объемный характер.

С другой стороны, как правило, именно эти участки трубопроводных конструкций являются наиболее нагруженными и служат источниками зарождения и развития начальных разрывов сплошности материала, ведущих к глобальному разрушению конструкции. В силу этого степень точности отражения при моделировании реальной объемной картины НДС данных участков определяет точность анализа прочности всей трубопроводной конструкции в целом.

Поэтому, на третьем этапе вычислительной технологии, анализ НДС данных участков проводится с использованием объемных КЭ-моделей. При построении объемных расчетных схем геометрия рассматриваемого участка трубопровода воспроизводится с максимальной степенью достоверности. Применение объемных моделей позволяет также учитывать при анализе реальную геометрию дефектов стенок трубопроводов, выявленных в результате технической диагностики (рис. 3.17).

ГУ в виде перемещений узловых точек задаются по периметру объемной КЭ-модели. Они формируются по результатам анализа оболочечной КЭ-модели на предыдущем этапе. Также задаются и основные нагрузки, действующие на рассматриваемый участок трубопровода, – избыточное внутреннее давление и температурный перепад. Следует заметить, что сопротивление грунта деформациям подземных участков на третьем этапе не моделируется¹.

¹ Как правило, габаритные размеры участков трубопроводов, моделируемых на третьем этапе, сравнительно невелики. Поэтому, учет силы сопротивления грунта на таком локальном участке не приводит к сколько-нибудь заметному изменению результатов расчета его НДС. В то же время, существенные глобальные деформации подземного трубопровода уже отражены здесь в ГУ, заданных по результатам поэтапного анализа протяженной трубопроводной конструкции.

Все алгоритмы и процедуры, а также примеры программ автоматизации, численного анализа НДС трубопроводных систем на третьем этапе подробно изложены в работах [1, 3–5]. Особенности работы пользователя с автоматизированными процедурами данного этапа рассмотрены в работах [6, 7].

В результате численного моделирования на третьем этапе получается детальная картина сложного нелинейного НДС наиболее нагруженных участков трубопроводной системы с учетом действия всех эксплуатационных нагрузок. Пример результатов моделирования НДС участка подземного МТ с использованием объемных КЭ-моделей представлен на рис. 3.18.



Рис. 3.17. Расчетная модель участка трубопровода с коррозионными дефектами

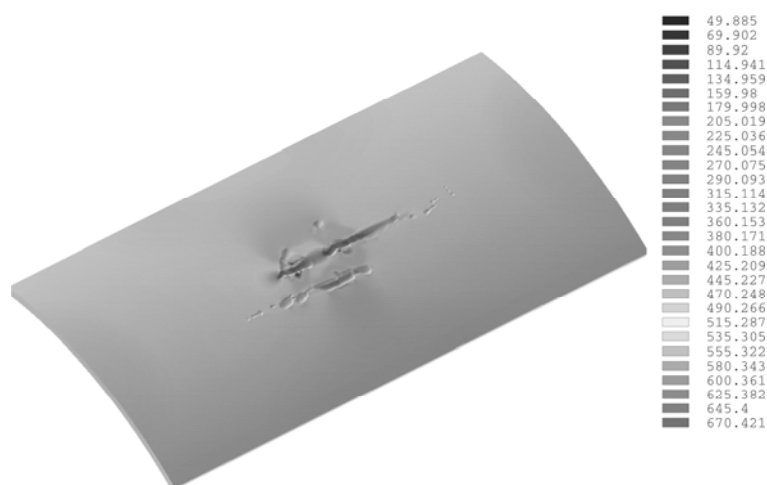


Рис. 3.18. Распределение интенсивности напряжений [МПа] на участке трубопровода с коррозионными дефектами

На данном этапе также определяются уровни нагрузок, ведущих к переходу конструкции трубопровода в предельное состояние и разрушению [1, 3, 6]. Например, в

подсистеме «Alfargus/StructuralAnalysis» реализована автоматизированная процедура расчетного определения значения разрушающего давления для дефектных участков трубопроводов [3]. Таким образом, на основании анализа полученных в результате численного моделирования характеристик сложного нелинейного НДС трубопроводной конструкции можно сделать объективное заключение о фактических запасах прочности каждого участка трубопроводной системы.

3.4.3. Анализ НДС и оценка прочности трубопроводных систем

Представленная выше процедура поэтапного численного анализа сложного нелинейного НДС трубопроводных конструкций представляет собой основной алгоритм, реализованный для практического применения в вычислительной технологии «PipEst» и подсистеме «Alfargus/StructuralAnalysis». Данная процедура может успешно применяться как для расчетного обоснования прочности (поверочных расчетов) проектируемых трубопроводных систем, так и для анализа фактического состояния действующих промышленных трубопроводов различного назначения.

Расчетным подтверждением прочности проектируемой трубопроводной системы является удовлетворение значений основных характеристик сложного НДС конструкций, получаемых на всех этапах численной верификации проектных решений (см. Раздел 1.5), требуемым нормативными документами запасам. Анализ всех предельных состояний конструкций и моделирование разрушения наиболее нагруженных их элементов здесь, как правило, не проводится.

В случае оценки состояния эксплуатирующихся трубопроводных систем сначала следует выполнить моделирование НДС конструкции в исходном состоянии. За исходное состояние принимается проектное положение трубопроводов с учетом имеющихся данных строительной документации. Это необходимо потому, что все дальнейшие изменения НДС трубопроводной конструкции под воздействием внешних факторов происходят из первоначального состояния.

На следующем шаге с помощью балочных или оболочечных моделей исследуется влияние обнаруженных при технической диагностике смещений от проектного положения трубопроводов и элементов их крепления на НДС всей конструкции в целом. Далее уточнение сложного НДС наиболее нагруженных и/или имеющих дефекты участков трубопроводов проводится с использованием оболочечных и объемных моделей. На этом же этапе осуществляется моделирование предельных состояний и разрушения наиболее нагруженных сегментов трубопроводной системы.

Проведение анализа эксплуатирующихся трубопроводных систем в такой последовательности позволяет определить реальное нелинейное НДС трубопроводов с учетом всех действующих на конструкцию силовых факторов и данных технической диагностики. Данная процедура дает возможность также определять расчетным путем величины разрушающих нагрузок, а, следовательно, фактические запасы прочности для наиболее нагруженных участков трубопроводных конструкций.

Следует отметить, что модели и функциональные возможности подсистемы «Alfargus/StructuralAnalysis» постоянно совершенствуются. Такое развитие направлено на создание наиболее полного современного инструмента для комплексного анализа широкого спектра используемых в промышленности сложных трубопроводных систем. Например, становится возможным учитывать все большее количество факторов, влияющих на эволюцию НДС трубопроводных конструкций на протяжении их жизненного цикла (см., например, Приложение 1). Многие, уже реализованные в подсистеме, модели и алгоритмы являются уникальными решениями сложных производственных задач, связанных с обеспечением безопасной эксплуатации **магистральных**

трубопроводных систем. Рассмотрим некоторые примеры таких решений в области анализа прочности ответственных участков МТ.

3.4.4. Анализ прочности криволинейных участков магистральных трубопроводов

Появление дефектов в стенках труб повышает опасность разрушения любого участка МТ. Однако, в качестве одних из наиболее потенциально опасных участков следует выделить криволинейные сегменты МТ, содержащие гнутые отводы, изготовленные из прямых труб методом холодного гнутья [44, 137] на трубогибочных станках (рис. 3.19).

Процесс холодного гнутья сопровождается появлением в стенках отводов остаточных напряжений и пластических деформаций, которые существенно влияют на НДС криволинейных участков МТ при эксплуатации. Кроме того, нарушение изоляционного покрытия труб, способствующее появлению коррозионных дефектов, чаще всего происходит именно на криволинейных участках трубопровода, как при его строительстве, так и в процессе эксплуатации. Появление коррозионных дефектов ведет к локальному перераспределению характеристик сложного нелинейного НДС холодногнутых труб. Таким образом, адекватная оценка прочности гнутых отводов МТ может быть сделана только по результатам анализа их сложного нелинейного НДС с учетом остаточных напряжений и деформаций от холодного изгиба и данных технической диагностики.

В.В. Алешиным, К.И. Дикаревым и В.В. Кобяковым была разработана автоматизированная процедура численного анализа сложного НДС холодногнутых труб МТ с дефектами стенок [4].



Рис. 3.19. Трубогибочный станок

Общий алгоритм анализа криволинейных участков трубопроводов также состоит из трех последовательных взаимосвязанных этапов моделирования с использованием балочных, оболочечных и объемных КЭ-моделей. Кроме того, для корректного учета начального НДС гнутых участков алгоритм дополняется процедурами прямого численного моделирования процесса холодного гнутья труб. Рассмотрим некоторые особенности анализа сложного нелинейного НДС холодногнутых труб МТ с коррозионными дефектами более подробно.

При выполнении второго этапа моделирования (оболочечные КЭ-модели) участок

МТ для анализа выбирается таким образом, чтобы в него входили¹ холодногнутый отвод и по два, с каждой стороны от гнутого отвода, прямых смежных сегмента трубопровода.

После окончания стандартной процедуры выполнения второго этапа моделирования проводится анализ НДС участка трубопровода, содержащего холодногнутый отвод, по следующей схеме. Сначала выполняется процедура численного моделирования процесса изготовления холодногнутого отвода на трубогибочном станке, которая состоит из двух шагов:

- 1) плоский упруго-пластический изгиб КЭ-модели прямой трубы, имитирующей гнутье прямой трубы на трубогибочном станке;
- 2) разгрузка КЭ-модели, получение остаточных деформаций и напряжений в стенках отвода, возникающих после освобождения трубы из захватов трубогибочного станка.

Примеры результатов численного моделирования холодного изгиба трубы диаметром $D = 1220 \text{ мм}$, с толщиной стенки $\delta = 13,5 \text{ мм}$, изготовленной из стали марки X70 (паспортные характеристики: предел текучести $\sigma_T = 488 \text{ МПа}$, условный предел прочности $\sigma_s = 604 \text{ МПа}$), представлены на рис. 3.20 и рис. 3.21. Как видно на рис. 3.21, поле остаточных напряжений в стенках холодногнутого отвода существенно неоднородно по окружности трубы, а максимальное значение интенсивности напряжений достигает 328 МПа .

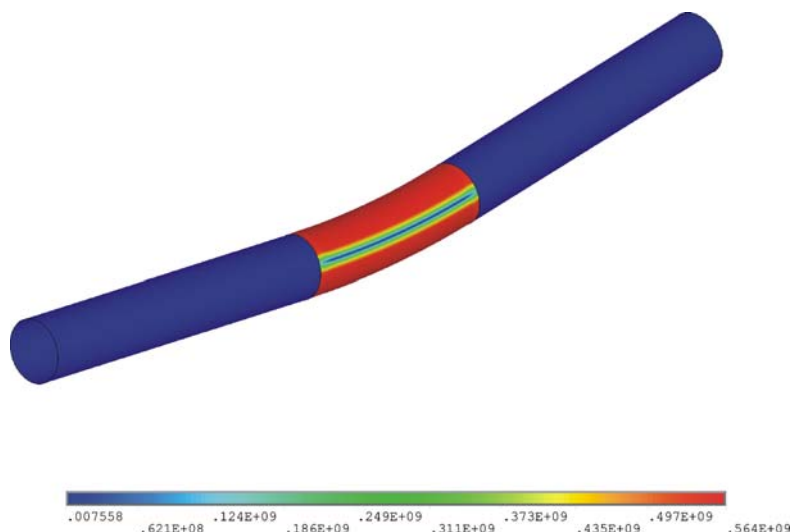


Рис. 3.20. Распределение интенсивности напряжений [Па] в стенках трубы при упруго-пластическом изгибе на трубогибочном станке

Таким образом, результаты численного моделирования свидетельствуют, что изготовленные методом холодного гнутья трубы имеют начальные напряжения, сравнимые по величине с напряжениями, возникающими на прямых участках МТ в процессе эксплуатации.

При эксплуатации МТ начальное НДС гнутого отвода изменяется вследствие действия рабочих нагрузок (внутреннее избыточное давление, температурный перепад, сопротивление грунта и др.).

¹ Как часть оболочечной КЭ-модели участка.

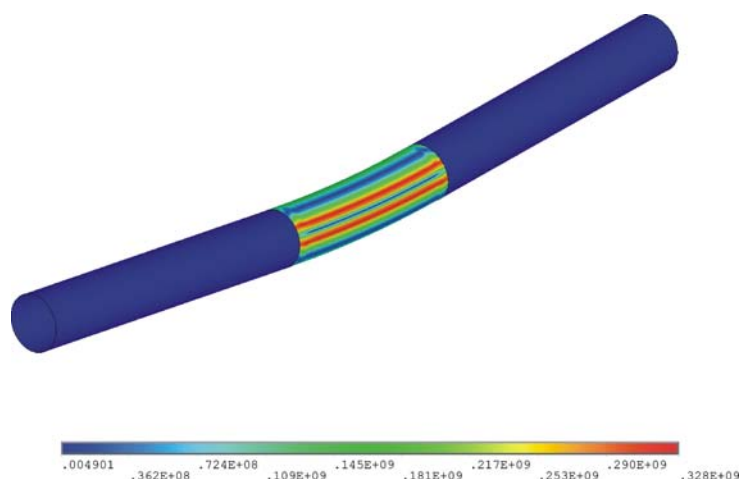


Рис. 3.21. Распределение интенсивности напряжений [Па] в стенках трубы после освобождения из трубогибочного станка

Анализ НДС оболочечной КЭ-модели участка МТ, содержащего холодногнутый отвод, проводится при действии эксплуатационных нагрузок и с учетом остаточных напряжений. На рис. 3.22 приведены результаты такого анализа.

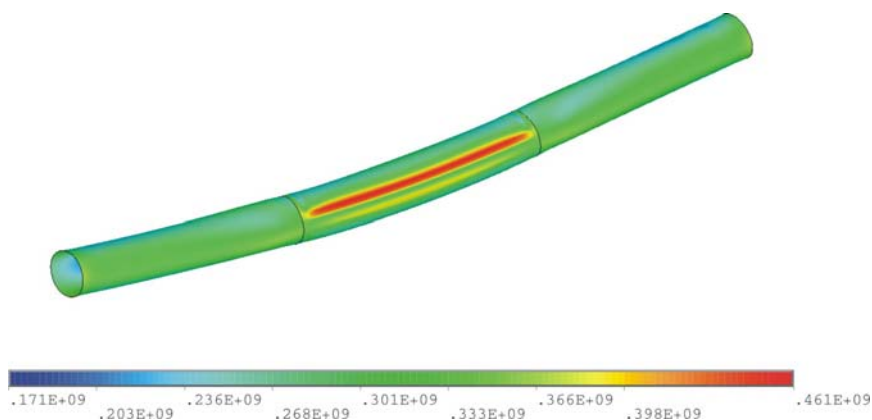


Рис. 3.22. Распределение интенсивности напряжений [Па] на участке МТ, содержащего холодногнутый отвод, при действии эксплуатационных нагрузок

Как видно из представленных на рис. 3.22 результатов численного моделирования, при действии эксплуатационных нагрузок максимальная интенсивность напряжений (461 МПа) в стенках холодногнутого отвода при отсутствии на нем дефектов существенно превышает уровень напряжений на прямых участках МТ и практически достигает значения предела текучести материала трубы (488 МПа). Поэтому образование даже незначительных (и допустимых на других участках МТ) коррозионных дефектов в стенках холодногнутого отвода может привести к его разрушению. Так как распределение напряжений в поперечном сечении криволинейного участка трубопровода неоднородно (см. рис. 3.22), то в данном случае степень опасности коррозионных дефектов во многом зависит от места их расположения по окружности поперечного сечения холодногнутой трубы.

Анализ сложного НДС участка МТ с коррозионными дефектами на третьем этапе моделирования выполняется с использованием объемных КЭ-моделей. Процедура численного анализа коррозионных сегментов, расположенных на холодногнутых отводах МТ, подробно описана в работе [4]. Здесь приведем только некоторые результаты такого анализа.

Так, разработанная процедура численного моделирования сложного НДС холодногнутых сегментов трубопроводов позволяет анализировать степень опасности коррозионных дефектов с учетом их местоположения на гнущем участке.

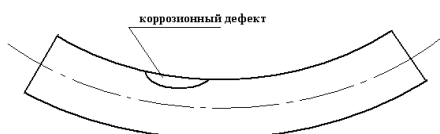


Рис. 3.23. Схема отвода с дефектом на внутренней стороне



Рис. 3.24. Схема отвода с дефектом на внешней стороне

В качестве примера рассмотрим результаты численного моделирования сложного НДС конструкции подземного участка ЛЧМГ, содержащего холодногнутый отвод с коррозионным дефектом¹, в следующих двух случаях². В первом случае дефект расположен на внутренней стороне отвода (рис. 3.23). Во втором случае точно такой же дефект расположен на внешней стороне отвода (рис. 3.24). Значения эксплуатационных нагрузок в обоих случаях одинаковые.

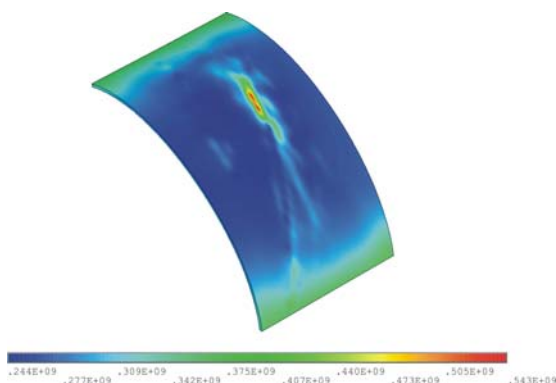


Рис. 3.25. Интенсивность напряжений [Па] на участке холодногнутого отвода с дефектом на внутренней стороне

¹ Геометрическая конфигурация дефекта построена по данным внутритрубой диагностики реального участка ЛЧМГ.

² В такой постановке данная задача была предложена и решена К.И. Дикаревым.

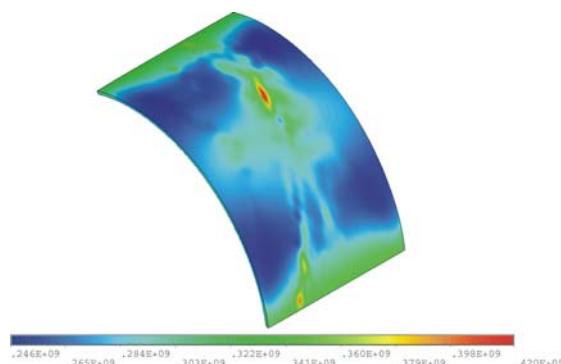


Рис. 3.26. Интенсивность напряжений [Па] на участке холодного отвода с дефектом на внешней стороне

На рис. 3.25 и 3.26 представлены распределения интенсивности напряжений, возникающих при эксплуатационных нагрузках в зоне идентичных коррозионных дефектов, расположенных соответственно на внутренней и внешней сторонах холодного отвода. Результаты численного анализа свидетельствуют, что в первом случае максимальная интенсивность напряжений (рис. 3.25) в 1,3 раза выше, чем во втором случае (рис. 3.26). Следовательно, для данного участка ЛЧМГ более опасной ситуацией является появление коррозионного дефекта на внутренней стороне холодного отвода.

Следует отметить, что проведение численного анализа НДС криволинейных участков МТ по изложенной выше технологии «вручную» требует больших затрат времени и сопряжено с возможностью внесения ошибок. Разработанный программный модуль позволяет выполнить весь процесс построения и численного анализа необходимых расчетных моделей автоматизировано. Для практического применения данный модуль включен в составе подсистемы «Alfargus/StructuralAnalysis».

3.4.5. Анализ прочности участков магистральных трубопроводов, подвергшихся экскавации

Следующим примером расширения возможностей технологии «PipEst» и подсистемы «Alfargus/StructuralAnalysis» является автоматизированная процедура анализа прочности подземных участков МТ, подвергшихся экскавации при ремонтно-восстановительных работах. Технология численного анализа таких участков разработана В.В. Алешиным [4]. Реализация данной технологии для практического применения в виде автоматизированного модуля подсистемы «Alfargus/StructuralAnalysis» выполнена В.В. Кобяковым.

Вследствие старения конструкций МТ во всем мире проводятся интенсивные работы по замене изоляции, ремонту труб и т.п., связанные с необходимостью экскавации грунта и последующей засыпки локальных подземных участков трубопроводов. До экскавации участка существенным обстоятельством является то, что трубы при строительстве укладывались на дно траншеи и при последующей засыпке и эксплуатации всегда опирались на нижележащий грунт. Также за время эксплуатации (несколько десятков лет) вынутый при рытье траншеи и засыпанный обратно грунт слежался, а характеристики его физико-механических свойств стали близки к характеристикам окружающего грунта ненарушенной структуры.

Технологический процесс экскавации связан с тем, что грунт вынимается из-под труб, и участок трубопровода во время ремонтно-восстановительных работ находится в

«висячем» положении (рис. 3.27). Дальнейшая засыпка отремонтированного участка может сопровождаться тем, что грунт засыпки недостаточно плотно облегают трубопровод, образуя пустоты в области нижней образующей трубы.



Рис. 3.27. Ремонт подземного участка МТ

При значительных объемах таких пустот и достаточной протяженности подвергшегося экскавации участка МТ дополнительная нагрузка от засыпанного грунта может вызвать недопустимое НДС труб, повысив потенциальную опасность разрушения трубопроводной конструкции¹. Часто ремонт подземного участка МТ, связанный с заменой поврежденной изоляции или наложением усиливающих муфт (см. рис. 3.27), производится без снижения рабочего давления в трубопроводе. Для обеспечения безопасности экскавация протяженного участка выполняется по следующему регламенту. Раскопы трубопроводов производятся на участках длиной несколько десятков метров, между которыми оставляются не раскопанные участки. После проведения ремонтно-восстановительных работ раскопанные участки засыпаются и раскапываются остальные участки.

Определить максимальную допустимую длину² раскапываемых участков можно по результатам численного анализа НДС трубопровода во время экскавации в соответствии с алгоритмами второго этапа (оболочечные модели труб, объемные модели грунта) вычислительной технологии, представленной в Разделе 3.4.2. Ввиду симметричности рассматриваемой в данной постановке задачи конструкции достаточно смоделировать сложное НДС одной из ее периодически повторяющихся частей. Пример расчетной модели такой части участка МТ, подвергшегося экскавации, и близлежащего грунта представлен на рис. 3.28.

Анализ результатов численного моделирования позволяет для каждого конкретного типоразмера труб и конкретных характеристик физико-механических свойств грунта определить максимальную длину «висячего» участка, когда под действием веса трубы, транспортируемого продукта и температурного перепада трубопровод претерпевает лишь незначительный изгиб (рис. 3.29), а дополнительные напряжения, возникающие в стенках труб, невелики³. Незначительность прогиба раскопанного участка позволяет также пренебречь изменением формы трубы в дальнейшем, при анализе процессов засыпки и последующей эксплуатации подземного участка МТ, подвергшегося экскавации.

¹ Дополнительно следует заметить, что отремонтированные участки подземных МТ считаются безопасными, поэтому степень контроля их технического состояния на некоторое время снижается.

² Точное значение максимальной допустимой длины раскапываемого участка подземного МТ необходимо знать в каждом случае конкретных типоразмеров труб и характеристик физико-механических свойств грунта для снижения затрат на ремонтные работы при обеспечении их безопасности.

³ То есть НДС раскопанного участка МТ соответствует нормативным требованиям.

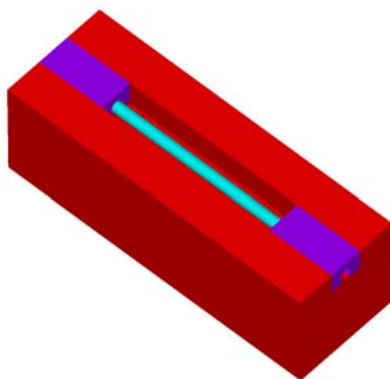


Рис. 3.28. Расчетная модель участка трубопровода, подвергнутого экскавации

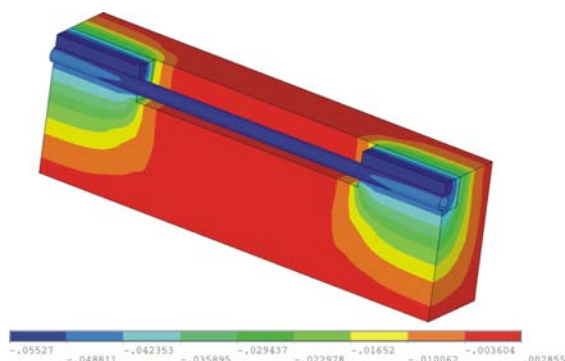


Рис. 3.29. Вертикальные смещения участка трубопровода и окружающего грунта [м] при экскавации

После проведения ремонтно-восстановительных работ траншея с трубопроводом засыпается грунтом. На основании анализа нормативно-технической документации¹ при построении расчетных моделей были приняты следующие основные предположения и допущения:

- Трубопровод засыпается тем же грунтом, которым был окружен до экскавации. Грунт засыпки представляет собой однородную² сплошную среду и имеет в момент засыпки характеристики естественных грунтов в насыпном состоянии³.
- Угол отклонения откоса траншеи от вертикали ψ зависит от типа грунта и в общем случае диапазон его изменения составляет $0^\circ \leq \psi \leq 45^\circ$. Значения высоты засыпки трубопровода h , ширины основания траншеи от боковой образующей трубы b и расстояния от нижней образующей трубы до основания траншеи a могут быть пере-

¹ Рассматривались российские и зарубежные документы, регламентирующие строительство, эксплуатацию и ремонт участков МТ.

² По макроскопическим физико-механическим свойствам.

³ То есть засыпка не производится в сильный дождь, грунт не смешивается с посторонним мусором, крупными камнями и т. д.

менными, но ограничены снизу ($h \geq 0,8 м; b \geq 1 м; a \geq 0,7 м$).

- В большинстве случаев засыпка трубопровода производится одновременно с двух берегов траншеи естественным образом, то есть без специального «проталкивания» массы грунта под трубу и уплотнения грунта¹.

Также следует учесть, что как промежуточные, так и окончательная конфигурации засыпаемого в траншею с трубой грунта зависят не только от способа засыпки, но и от характеристик его физико-механических свойств.

Математическое моделирование динамического процесса засыпки грунта траншеи является достаточно сложной задачей, корректная постановка и решение которой без существенных упрощений требует проведения отдельных исследований, связанных с построением и обоснованием соответствующих теоретических моделей. Следует также учитывать, что для реализации сложной математической модели процесса засыпки потребовалось бы большое количество ненормативных материальных параметров, подлежащих специальному экспериментальному определению. В то же время практическая ценность ее была бы невелика, особенно в качестве базовой модели процедуры автоматизированного анализа НДС участков МТ.

С другой стороны, для решения основной задачи, а именно, адекватной оценки НДС подвергнутого экскавации участка МТ, моделировать сам процесс засыпки не нужно. Важно лишь иметь правильное представление о некоторых промежуточных (квазистационарных) и, главное, окончательном (стационарном) состоянии грунта в траншее с «висячим» изначально трубопроводом. Это представление можно получить, используя стандартные модели МДГТ.

Для математической формализации поставленной задачи воспользуемся подходами, применяемыми при анализе устойчивости откосов и склонов в механике грунтов [143, 148, 149]. В Приложении 7 представлены некоторые, необходимые для дальнейшего изложения материала данного Раздела, базовые понятия и оценки механики грунтов на примере известных решений двух модельных задач о предельном равновесии откосов «идеальных» грунтов [148]. Учитывая то, что на протяженных трассах МТ встречаются типы грунтов с существенно различающимися свойствами [137, 138] – от слабосвязанных песчаных до твердых глинистых грунтов, рассмотрим сначала возможные конфигурации засыпок траншеи с трубой в предельных случаях.

Итак, в соответствии с решениями, приведенными в Приложении 7, сухой песчаный грунт, имеющий малое удельное сцепление, будет заполнять траншею, как показано² на рис. 3.30. При этом контур образующейся насыпи будет близок к прямой линии, наклоненной к горизонту под углом α , примерно равным углу естественного откоса идеально сыпучего грунта (см. (П7.2)).

В то же время, твердые, полутвердые и тугопластичные глинистые грунты, обладающие высоким удельным сцеплением [137], и близкие по свойствам к идеально связанным средам, теоретически могут иметь устойчивую форму с вертикальным откосом высотой h_{90} (см. Приложение 7) и не «засыпаться» под трубу совсем³ (рис. 3.31). Например, для широко распространенных в зонах прокладки МТ глинистых грунтов

¹ На основании этого предположения задача математического моделирования засыпки траншеи с трубой далее рассматривается в симметричной относительно вертикальной плоскости, проходящей через продольную ось трубы, постановке.

² Здесь и далее иллюстрации даются для одной второй части рассматриваемой области (в другой части картина симметричная).

³ А практически, лишь с очень незначительным осыпанием в пространство под трубой, оставляя там большие пустоты.

(глин и суглинков) среднее значение удельного сцепления составляет $c = 25 \text{ кПа}$, а средний объемный вес $\gamma = 17000 \text{ Н/м}^3$ [137, 138]. В соответствии с (П7.6), высота устойчивого вертикального откоса подобных грунтов ($h_{90} \approx 3 \text{ м}$) соизмерима со стандартными глубинами траншей, выкапываемых для прокладки подземных участков МТ [44].

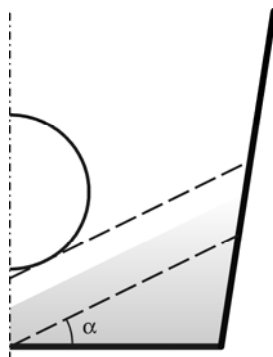


Рис. 3.30. Засыпка траншеи сыпучим (сухим песчаным) грунтом

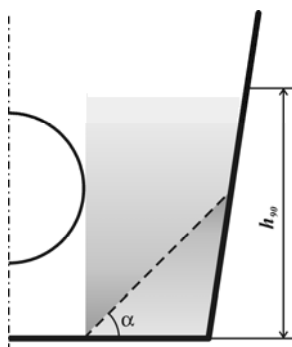


Рис. 3.31. Засыпка траншеи связанным (твердым глинистым) грунтом

Из представленных выше оценок следует, что реальная картина засыпания грунта в траншею находится между двумя предельными случаями (см. рис. 3.30, 3.31), а динамический процесс засыпки траншеи можно представить как последовательность многократных образований и осыпаний *квазистационарных грунтовых откосов*.

Сделаем еще одно предположение: в каждый момент времени процесса засыпки траншеи насыпанный массив реального грунта имеет квазистационарную форму с *равноустойчивым откосом*, изображенную на рис. 3.32. *Равноустойчивым* в механике грунтов [149] называется откос криволинейного очертания, при котором ограниченный им массив грунта находится в состоянии предельного равновесия.

Задача нахождения формы равноустойчивого откоса является одной из основных при анализе устойчивости грунтовых массивов в строительстве. Впервые данная задача была решена В.В. Соколовским [148] в результате численного интегрирования на компьютере дифференциальных уравнений предельного равновесия грунтов в 50-х годах XX века. О ценности этого, уникального для того времени, решения свидетельствует то, что до сих пор во всех учебниках и справочниках по механике грунтов, основаниям и фундаментам

(см., например, [148, 149]) приводятся графики кривых равноустойчивых откосов, полученные В.В. Соколовским.

Однако, использование графиков при разработке и автоматизации технологии численного анализа подвергшихся экскавации трубопроводов не совсем удобно, поэтому воспользуемся аппроксимирующей зависимостью, приведенной в работе [143]. Согласно [143], форма контура равноустойчивого откоса определяется как:

$$z(x) = m \cdot (1,57 - e^{-x/m}) + x \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad (3.59)$$

где $m = \frac{2 \cdot c \cdot (1 + \sin \varphi)}{\gamma \cdot (1 - \sin \varphi)}$; x – абсцисса, отсчитываемая от некоторой начальной точки на вершине откоса; $z(x)$ – кривая, ограничивающая равноустойчивый откос.

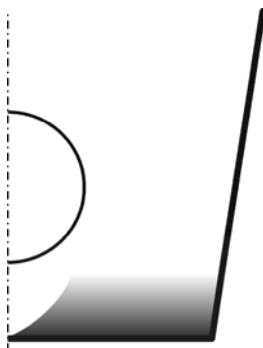


Рис. 3.32. Засыпка траншеи реальным грунтом

Как видно из уравнения (3.59), $z(0) \neq 0$. Это означает, что у равноустойчивого откоса вершина может быть произвольной формы, от вертикальной стенки до горизонтальной плоскости. Высота грунта над равноустойчивым откосом ограничена величиной внешней равномерно распределенной нагрузки, которую может нести данный откос с горизонтальной поверхностью [148]:

$$q_0 = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (3.60)$$

Таким образом, если внешней нагрузкой является вышележащий грунт, то его высота равна:

$$h_0 = q_0 / \gamma. \quad (3.61)$$

Теперь перейдем к анализу процесса засыпки грунтом траншеи с трубой. Задачу будем решать в постановке плоского деформированного состояния, предполагая, что засыпка производится на достаточно протяженном для корректности данной постановки участке трубопровода.

С учетом всех сделанных предположений процесс засыпки траншеи можно моделировать как последовательную смену квазистатических состояний массива грунта с конфигурацией, подобной изображенной на рис. 3.32. С каждым шагом высота массива засыпанного грунта увеличивается. Запирание доступа частицам грунта в пространство под трубой под действием сил инерции и вследствие нарушения устойчивости откосов наступает в момент времени, когда высота массива грунта достигает точки M на поверхности трубы (см. рис. 3.33).

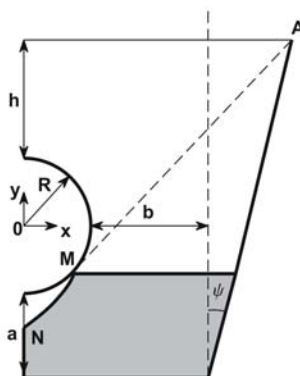


Рис. 3.33. Схема засыпки траншеи с трубой

Так как засыпка грунта осуществляется с берегов траншеи механизированным способом, то горизонтальную площадку, на которую основная масса частиц грунта падает свободно, можно ограничить касательной к поверхности трубы. Таким образом, точка M находится на касательной, проведенной с кромки берега траншеи (точка A) к поверхности трубы (см. рис. 3.33). После достижения высоты засыпанного массива уровня касания трубы (точки M) грунт заполняет «верхнюю» часть траншеи без изменения конфигурации поверхности равноустойчивого откоса MN . Это происходит до тех пор, пока высота массива засыпаемого в верхнюю часть грунта не достигнет величины h_0 (см. (3.61)), при которой среднее давление на горизонтальную плоскость, проходящую через точку M , превысит значение q_0 (см. (3.60)). В этот момент поверхность MN обрушается, часть грунта осыпается (оползает) под трубу, и устанавливается новая равноустойчивая конфигурация откоса. Как уже отмечалось ранее, конфигурация реального грунта над горизонтальной плоскостью, проходящей через точку M , может иметь произвольную форму. Обрушение «нижней» части массива засыпаемого грунта зависит только от величины действующего на эту плоскость давления.

В соответствии с изложенной выше моделью процедура построения окончательной конфигурации¹ засыпанного в траншею с трубой грунта в каждом конкретном случае сводится к расчетной оценке среднего давления верхней части грунта на плоскость, проходящую через точку M , и определению одной из следующих конфигураций:

- 1) полная засыпка траншеи, без образования полости под трубой;
- 2) неполная засыпка траншеи, исходные размеры полости (ограниченной поверхностью трубы и начальной конфигурацией откоса грунта MN , см. рис. 3.33) сохраняются;
- 3) неполная засыпка траншеи, исходные размеры полости уменьшаются (точка M сдвигается по поверхности трубы к ее нижней образующей).

Для участка, подвергнувшегося экскавации и последующей засыпке, как и для любого другого участка МТ, структура общего алгоритма численного анализа НДС и оценки прочности остается прежней. То есть анализ этих участков также проводится в три последовательных этапа. Однако, технология моделирования на этапах меняется с учетом специфических условий рассматриваемых участков.

На первом этапе моделирования (балочные КЭ-модели) для характеристик сопротив-

¹ Окончательной в данном случае считается конфигурация массива засыпаемого грунта в момент достижения его высотой уровня точки *A* (см. рис. 3.33).

ления грунта засыпки осевым и поперечным смещениям трубопровода¹ вводятся соответствующие понижающие коэффициенты. На втором этапе (оболочечные КЭ-модели) сначала определяются конфигурация засыпанного в траншею грунта и характеристики его физико-механических свойств, затем моделирование выполняется с учетом этих данных. На третьем этапе (объемные КЭ-модели) изменений технологии не требуется, моделирование проводится по алгоритмам, описанным в Разделе 3.4.2.3.

Для практической реализации технологии численного анализа НДС подвергшихся экскавации участков МТ необходимы данные по характеристикам физико-механических свойств грунтов засыпки (определяются из справочной литературы, например [137, 138], или по результатам экспериментов), геометрическим параметрам траншеи и трубопровода (известны из технической документации), форме кривой равноустойчивого откоса (рассчитывается по (3.59)). Также нужно знать начальное положение точки касания M . Выразим в общем виде координаты точки M в представленной на рис. 3.33 декартовой системе координат через введенные ранее геометрические параметры трубопровода и траншеи, показанные на рис. 3.33.

Уравнение окружности (поверхности трубы) в декартовой системе координат (см. рис. 3.33):

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad (3.62)$$

где R – радиус трубы.

Матрица квадратичной формы (3.62):

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 \end{bmatrix}.$$

Согласно [89], уравнение касательной к окружности, проходящей через точку M , можно выразить через элементы матрицы $[C]$ квадратичной формы (3.62). Учитывая, что эта касательная проходит также через точку A с известными координатами, получаем следующую систему уравнений для определения координат точки M :

$$\begin{cases} x_M \cdot x_A + y_M \cdot y_A - R^2 = 0; \\ x_M^2 + y_M^2 - R^2 = 0, \end{cases} \quad (3.63)$$

решая которую, находим:

$$x_M = \sqrt{R^2 - y_M^2}; \quad y_M = \frac{y_A \cdot R^2 \pm \sqrt{x_A^2 \cdot R^2 \cdot (x_A^2 - R^2 + y_A^2)}}{x_A^2 + y_A^2}. \quad (3.64)$$

где $x_A = R + b + (a + 2 \cdot R + h) \cdot \operatorname{tg} \psi$, $y_A = R + h$ – координаты точки A в декартовой системе координат, изображенной на рис. 3.33. Для нашего случая в числителе второго выражения (3.64) следует брать знак «минус».

Самой сложной задачей при автоматизации процедуры численного анализа НДС подвергшихся экскавации участков трубопроводов является определение в общем случае окончательной пространственной конфигурации окружающего трубу грунта после засыпки траншеи. Следует подчеркнуть, что сложность этой задачи заключается только в выборе наиболее рационального² способа реализации ее решения в автоматизированной процедуре.

¹ Данные характеристики включают: обобщенные коэффициенты касательного и нормальных сопротивлений; предельные сопротивления сдвигу и поперечным смещениям трубы (см. Раздел 3.3.2.1).

² То есть не требующего от пользователя дополнительных действий, кроме ввода исходных данных.

Так как данная задача является обратной задачей МДТТ¹ и не имеет в полной постановке аналитического решения, то она может быть решена только в результате выполнения серии вычислительных экспериментов. Следует заметить, что в каждом конкретном случае постановка такой серии вычислительных экспериментов трудностей не вызывает и может быть успешно выполнена по описанной выше технологии для любых параметров траншеи и типов реальных грунтов.

Однако, реализация процесса решения обратной задачи МДТТ в автоматизированной процедуре приведет к тому, что пользователю при производственной эксплуатации такой процедуры придется, помимо неизбежных дополнительных затрат времени, анализировать промежуточные результаты численных экспериментов и на основании результатов этого анализа задавать необходимые параметры для дальнейшего моделирования. Скорее всего, это приведет к тому, что большая часть специалистов производственных предприятий откажется от использования подобной процедуры.

Поэтому здесь представляется рациональным введение нескольких упрощений, не приводящих к существенным потерям точности, но зато позволяющим получить аналитические зависимости, реализация которых значительно сократит время автоматизированного анализа и избавит пользователя от лишних трудозатрат. Следует также заметить, что реализация версии полностью автоматизированной программной процедуры построения конфигурации засыпанного в траншею грунта по результатам вычислительных экспериментов может быть также выполнена, например, для использования заинтересованными в получении наиболее точных результатов специалистами отраслевых научно-исследовательских организаций ТЭК. Такая программная процедура будет полезна и при расследовании причин случившихся аварий, когда требуется максимальный учет всех факторов.

Итак, рассмотрим способ получения необходимых аналитических зависимостей, опираясь на основные положения разработанной выше технологии моделирования. Согласно предложенному алгоритму для определения окончательной конфигурации грунта в траншее необходимо оценить величину среднего давления верхней части (выше уровня точки M) на нижнюю часть грунта в траншее, засыпанной до уровня дневной поверхности земли (высоты точки A). Расчетная схема решаемой задачи представлена на рис. 3.34.

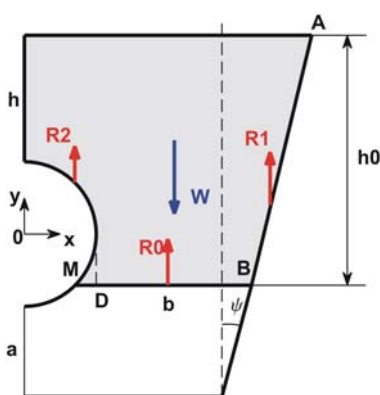


Рис. 3.34. Схема сил, действующих на верхнюю часть грунта засыпки

¹ Здесь неизвестным является не НДС пространственной области заданной геометрии при известных нагрузках, а сама геометрия этой области при условии равновесия всех действующих внешних и внутренних сил.

Искомое давление можно найти, составив уравнение равновесия объема верхней части грунта в проекции на ось Oy декартовой системы координат, изображенной на рис. 3.34:

$$R0 + R1 + R2 - W = 0, \quad (3.65)$$

где $W = \gamma \cdot V$ – вес верхней части грунта; V – объем¹ верхней части грунта; $R0$, $R1$, $R2$ – проекции на ось Oy реакций соответственно нижней части грунта, стенок траншеи и трубы.

Входящие в уравнение (3.65) проекции реакций определяются давлением грунта на соответствующие поверхности, которое в общем случае распределено неравномерно (в плоскости Oxy) на всех указанных поверхностях, и для единицы ширины каждой поверхности вычисляются как

$$R0 = \int_{x_M}^{x_B} q(x) dx, \quad R1 = \int_{y_B}^{y_A} p_1(y) \cdot \frac{\cos \xi}{\cos \psi} dy, \quad R2 = \int_0^{\zeta_M} R \cdot p_2(\zeta) \cdot \cos \xi(\zeta) d\zeta, \quad (3.66)$$

где $q(x)$, $p_1(y)$, $p_2(\zeta)$ – записанные в надлежащей форме функциональные зависимости давления на соответствующих поверхностях; ξ – угол между направлением давления и осью Oy ; ζ – угловая координата, отсчитываемая по часовой стрелке от положительного направления оси Oy .

Функции $q(x)$, $p_1(y)$, $p_2(\zeta)$ в общем случае не известны. В каждом конкретном случае² их можно получить в табличном виде, выполнив численный анализ соответствующей пространственной нелинейной задачи МДТТ. Аналитически задачу в такой постановке решить сложно.

Рассмотрим возможные упрощения исходной задачи, которые позволят вывести требуемые аналитические зависимости для $R0$, $R1$, $R2$. Начнем с реакции нижней части грунта $R0$. На рис. 3.35 представлены результаты численного анализа равновесия верхней части массива засыпки для одного из типов реальных грунтов³ в виде эпюры давления на поверхность MB (см. рис. 3.34). Как видно из этого рисунка, давление грунта на поверхность MB можно считать практически равномерным, за исключением некоторой зоны под трубой (поверхность MD (см. рис. 3.34)), где оно существенно снижается. Поэтому при анализе устойчивости откоса нижней части массива засыпки будем считать, что нарушение равновесия (образование поверхности скольжения в массиве грунта) и оползание грунта под трубу произойдет тогда, когда среднее давление q на поверхность DB превысит величину q_0 , определяемую по формуле (3.60). Следовательно,

$$R0 = q \cdot S_{DB}, \quad (3.67)$$

где S_{DB} – площадь поверхности DB единичной ширины.

Рассмотрим теперь способ определения проекции на ось Oy реакции стенки траншеи $R1$. Для этого нам необходимо, прежде всего, определить величину и направление давления грунта на наклонную стенку AB (см. рис. 3.34). Воспользуемся подходами, широко распространенными в механике грунтов [143, 148, 149].

¹ Ширина (размер в направлении оси Oz) объема равна единице.

² Когда заданы все геометрические параметры трубопровода и траншеи, а также характеристики физико-механических свойств грунта.

³ Для других типов грунтов качественные картины подобны картине, представленной на рис. 3.35.

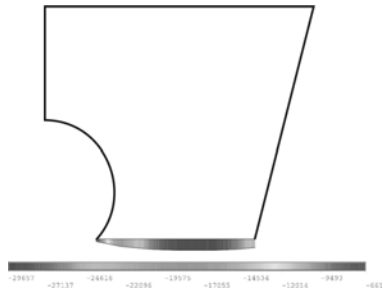


Рис. 3.35. Эпюра давления [Па] верхней части на нижнюю часть массива грунта засыпки

В механике грунтов решения внешне похожих по постановке статических задач для определения «активного» давления (когда грунт давит на стенку) и «пассивного» сопротивления давлению (когда стенка давит на грунт) приводят к разным результатам. Нас интересует только активное давление грунта засыпки на наклонную стенку траншеи. Поэтому рассмотрим общую постановку данной задачи, расчетная схема которой представлена на рис. 3.36. На этом же рисунке указаны и все необходимые для решения задачи параметры.

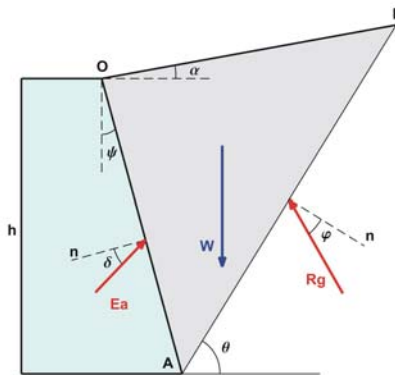


Рис. 3.36. Расчетная схема активного давления грунта на наклонную стенку

Расчет активного давления грунта на наклонную стенку ведется для случая предельного равновесия призмы обрушения AOB . Для связанных грунтов¹ вводится единственное допущение о том, что обрушение грунта происходит по плоской поверхности скольжения AB , значение угла наклона которой к горизонту θ пока не известно. На призму обрушения AOB в предельном состоянии действуют следующие результирующие силы: собственный вес грунта $\vec{W}$, реактивный отпор стенки $\vec{E}_a$ (равный по модулю и противоположно направленный интегральной силе активного давления грунта на стенку) и реактивный отпор массива грунта $\vec{R}_g$. Определив из геометрии величину $|\vec{W}|$ и построив треугольник сил, можно получить искомое выражение для $|\vec{E}_a|$, содержащее одно неизвестное θ .

¹ В случае сыпучих грунтов следующее далее утверждение допущением не является.

Из очевидного условия, что значение угла θ соответствует максимуму активного давления грунта на стенку, используя правило экстремума $dE_a/d\theta = 0$, окончательно получаем:

$$E_a = \frac{\gamma \cdot h^2}{2} \cdot k - \frac{c \cdot h}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \left(1 - \frac{k \cdot \cos \psi}{\cos(\alpha - \psi)} \right), \quad (3.68)$$

$$\text{где } k = \frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{(1 + \sqrt{z})^2 \cdot \cos^2 \psi \cdot \cos(\psi + \delta)}; \quad z = \frac{\sin(\varphi + \delta) \cdot \sin(\varphi - \alpha)}{\cos(\psi + \delta) \cdot \cos(\psi - \alpha)}.$$

Входящее в выражение (3.68) значение угла отклонения вектора $\vec{E}_a$ от нормали δ зависит от шероховатости стенки и изменяется в пределах $0 < \delta \leq \varphi$. В рассматриваемом случае стенка сама является грунтом, поэтому уместно взять $\delta = \varphi$. Остальные параметры нам известны из характеристик физико-механических свойств грунта и геометрии траншеи. Добавим, что формула (3.68) неприменима при крутых откосах ($\alpha > \varphi$) и для очень пологих стенок ($\psi > 65^\circ$) [149]. В нашем случае $\alpha = 0$ и $\psi \leq 45^\circ$.

Принимая во внимание эти замечания, формулы (3.68) можно упростить, но сначала рассмотрим еще одно необходимое упрощение, вызванное следующим обстоятельством.

Как уже отмечено выше, выражения (3.68) получены в предположении, что грунт находится в состоянии предельного равновесия. То есть, если стенку убрать, то он осыплется. Поэтому при небольшой высоте засыпки¹ трубы h (рис. 3.34), как показали предварительные расчеты, такого состояния у некоторых типов грунтов с высокой связанностью (глины, суглинки) не наступает, и формулы (3.68) применять нельзя. В этих случаях давление грунта на стенку не определено и теоретически может быть равно нулю. То есть, если стенку убрать, то грунт сохранит свою форму за счет сил удельного сцепления частиц.

С другой стороны, это является верным, если мы идеально вырежем кусок подобной формы из массива слежавшегося грунта. В процессе засыпки траншеи поведение любого грунта ближе к идеально сыпучей, чем к связанной среде. Структурные связи (коагуляционные, конденсационные, кристаллизационные и т.п.), определяющие силы удельного сцепления частиц грунта, появляются позднее в процессе консолидации грунтового массива после засыпки.

Таким образом, для реализации в автоматизированной процедуре, формулы (3.68) следует преобразовать для моделирования идеально сыпучего грунта, который оказывает давление на стенку при любой высоте засыпки трубы. Для получения требуемых формул необходимо из выражений (3.68) исключить удельное сцепление. При этом можно учесть также все указанные ранее условия. В результате имеем:

$$E_a = \frac{\gamma \cdot h^2}{2 \cdot (1 + \sqrt{z})^2} \cdot \frac{\cos^2(\varphi - \psi)}{\cos^2 \psi \cdot \cos(\psi + \varphi)}, \quad (3.69)$$

где $z = \frac{\sin(2 \cdot \varphi) \cdot \sin \varphi}{\cos(\psi + \varphi) \cdot \cos(\psi)}$. Зная направление $\vec{E}_a$, составляющее угол φ с нормалью к поверхности стенки траншеи, найдем проекцию реакции стенки траншеи на ось Oy декартовой системы координат (см. рис. 3.34):

¹ В частности, для нормативного значения $h = 1\text{ м}$ [44].

$$R1 = E_a \cdot \sin(\psi + \varphi). \quad (3.70)$$

Более сложной задачей является определение проекции равнодействующей реакции трубы $R2$ (рис. 3.34). В классической механике грунтов [146, 148, 149] и для связанных, и для сыпучих сред не существует строго обоснованных подходов к аналитическому решению задачи определения активного давления грунта на криволинейные подпорные стенки. В последние десятилетия для решения данной задачи наиболее активно используются численные методы, способные дать результаты требуемой точности. Здесь же нам необходимо пусть приближенное, но аналитическое выражение.

Следует заметить, что решать данную задачу в полной постановке, то есть определять значение и направление давления в каждой точке по окружности трубы, не требуется. Необходимо лишь определить проекцию на ось Oy (рис. 3.34) суммарной реакции стенки трубы. Поэтому исследования были начаты с самых простых выражений.

Простейшим подходом, позволяющим существенно упростить решение многих задач о смещении трубопровода в грунте и широко используемым для анализа НДС подземных трубопроводов [143], является предположение о равномерности распределения нормального давления грунта по периметру поперечного сечения трубопровода. В качестве этого равномерного давления принимается значение «среднего» давления на трубу, равное давлению грунта на горизонтальную плоскость, проходящую через центр трубопровода:

$$p = \gamma \cdot h_c. \quad (3.71)$$

В нашем случае (см. рис. 3.33) $h_c = h + R$. Проектируя давление p на ось Oy декартовой системы координат и выполняя интегрирование по «верхней» четверти окружности трубы¹ (см. рис. 3.34), получаем:

$$R2 = \gamma \cdot R \cdot (R + h). \quad (3.72)$$

Конечно, такая приближенная формула нуждалась в проверке. Поэтому для установления максимальных границ погрешности (3.72) были проведены соответствующие вычислительные эксперименты для широкого спектра типов реальных грунтов. Результаты численного анализа показали достаточно хорошее совпадение с расчетами по (3.72). Так, при нормативном значении высоты засыпки трубы $h = 1\text{ м}$ для самого «прочного» типа грунта (твердая глина) различие составляло 9,5%, для самого «слабого» (глинисто-песчаный) – 4,7%. Заметим также, что при увеличении высоты засыпки трубопровода степень неравномерности распределения давления по периметру трубы снижается, и выражение (3.72) дает еще более близкие к реальности результаты. В связи с этим при реализации автоматизированной процедуры анализа прочности подвергшихся экскавации участков МТ было решено остановиться на формуле (3.72).

Последнее, что надо определить для подстановки в уравнение (3.65), – это объем рассматриваемой верхней части грунта V и площадь поверхности S_{DB} . Они находятся через введенные параметры (см. рис. 3.33, 3.34) из элементарной геометрии и не нуждаются в пояснениях. Следует только отметить, что по рассмотренным выше обстоятельствам часть объема (криволинейная призма, ограниченная плоскостью MD и частью поверхности трубы, на рис. 3.34) при расчетах исключается. Итак, выпишем все необходимые выражения:

$$h_0 = h + R - y_M; \quad H = a + 2 \cdot R + h; \quad d = (H - h_0) \cdot \operatorname{tg} \psi;$$

¹ «Нижнюю» часть окружности трубы до точки M брать не следует, так как при одинаковом давлении она просто скомпенсирует давление такого же верхнего куска.

(3.73)

$$S_{DB} = b + d; \quad V = R \cdot (R + h) - \frac{\pi \cdot R^2}{4} + h_0 \cdot \frac{H \cdot \operatorname{tg} \psi + 2 \cdot b + R + d}{2},$$

где y_M определяется по формуле (3.64).

Далее, подставив в выражение (3.67) вместо q предельное значение давления q_0 из (3.60), превратим уравнение (3.65) в неравенство, которое будем использовать как критерий. Если при этом

$$R0 + R1 + R2 - W \geq 0, \quad (3.65^*)$$

то начальная конфигурация нижней части засыпанного в траншею массива грунта (см. рис. 3.33) не меняется и пустая область под трубой остается при полной засыпке верхней части траншеи. Если же левая часть (3.65*) меньше нуля, то устойчивость склона MN нарушается и грунт осыпается под трубу, заполняя пустую область полностью или частично. Для определения промежуточного состояния используется дополнительная итеративная процедура, построенная на базе описанных выше моделей и алгоритма.

Пример расчетной модели подвергнувшегося экскавации реального участка МТ, построенной с использованием разработанной автоматизированной процедуры, представлен на рис. 3.37.

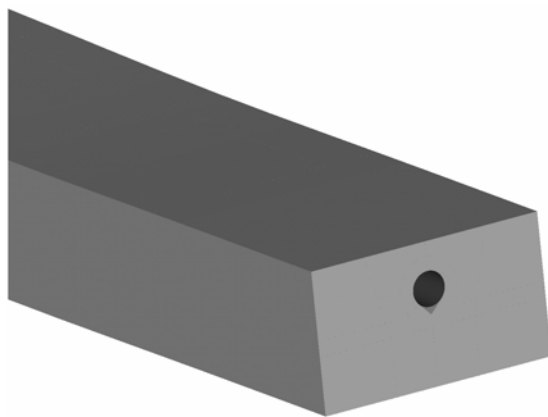


Рис. 3.37. Расчетная модель подвергнувшегося экскавации участка МТ с неполной обратной засыпкой траншеи (фрагмент)

Очевидно, что сопротивление окружающего грунта смещениям трубы при полной и неполной засыпках траншеи различаются. Это обстоятельство необходимо учитывать на первом этапе моделирования с использованием балочных моделей трубопроводов. Определение понижающих коэффициентов для характеристик инженерных моделей сопротивления грунта деформациям трубопровода в траншее с оставшимися после естественного способа засыпки грунтом полостями осуществлялось по результатам вычислительных экспериментов на модельных задачах по технологии, описанной в Приложении 3. Полученные значения понижающих коэффициентов для основных типов реальных грунтов, встречающихся в районах прокладки МТ, были внесены в базы данных подсистемы «Alfargus/StructuralAnalysis».

В завершение добавим, что все представленные выше модели и алгоритмы численного анализа НДС и оценки прочности подвергнувшихся экскавации подземных участков МТ были реализованы для практического применения в подсистеме

«Alfargus/StructuralAnalysis» и настроены на автоматизированное выполнение в среде программы «ANSYS». Для проведения анализа прочности выбранного участка пользователю «Alfargus/StructuralAnalysis» достаточно ввести в диалоговом режиме (в системе последовательно открывающихся окон меню) необходимые исходные данные по геометрическим параметрам трубопровода и траншеи, а также характеристикам физико-механических свойств материала труб и грунта. После этого весь процесс генерации КЭ-моделей, приложения нагрузок и граничных условий, численного анализа и представления результатов выполняется автоматически.

ГЛАВА 4

Математическое моделирование аварийных ситуаций в трубопроводных системах

4.1. Постановка задачи моделирования аварий в трубопроводных системах

В данной Главе излагаются практические методы построения и численного анализа математических моделей, которые адекватно описывают аварийные ситуации в трубопроводных системах (включая резервуары хранения), транспортирующих пожаровзрывоопасные и/или токсические газовые смеси или жидкости. Построение моделей аварий на трубопроводах осуществляется в соответствии с расширенной концепцией численного моделирования **магистральных** трубопроводных сетей и систем каналов с открытым руслом (см. Раздел 1.7). В аварийных ситуациях транспортируемые по трубопроводам продукты могут образовать горючие или детонирующие топливно-воздушные смеси. Набор принимаемых при этом основных допущений и упрощений можно записать так:

- инициирование образовавшихся топливно-воздушных смесей в условиях открытой местности приводит к их зажиганию и горению в режиме диффузионного факела или огненного шара¹;
- в случае раннего поджигания инициирование образовавшихся топливно-воздушных смесей в условиях помещений приводит к их зажиганию и горению в режиме диффузионного факела;
- в случае запаздывания поджигания инициирование образовавшихся топливно-воздушных смесей в условиях помещений приводит к конвективному горению и/или детонации;
- транспортируемые по трубопроводам продукты могут оказывать на человека и окружающую среду токсическое и/или удушающее воздействие.

Помимо качественных ограничений рассматриваемая задача имеет пространственно-временные ограничения:

- радиус зоны действия поражающих факторов аварии не превышает нескольких километров;
- продолжительность действия поражающих факторов аварии варьируется от нескольких минут до двух суток.

Последствия аварий длительного действия² при построении математических моделей не учитываются.

¹ При моделировании в данной Главе предполагается, что режимы конвективного горения или детонации образовавшихся топливно-воздушных смесей при авариях на объектах ТЭК в условиях открытой местности не реализуются.

² Под последствиями аварии длительного действия здесь подразумевается парниковый эффект от аварийной эмиссии парниковых газов (например, метана) или распространение продуктов аварии на большие расстояния с учетом мезомасштабного состояния атмосферы.

При моделировании рельеф местности в зоне аварии и состояние атмосферы на момент возникновения, протекания и локализации аварии считаются известными. Параметры течения продуктов в трубопроводах (включая поврежденные трубы) в предаварийный период, в процессе аварии и при ее ликвидации оцениваются в результате математического моделирования с помощью методов, описанных в Главе 2. Состояние трубопровода в предаварийный период моделируется с помощью методов и моделей, изложенных в Главе 3. Достоверность полученных оценок состояния анализируется с применением моделирования эффективности средств технической диагностики трубопроводов (см. Раздел 1.6).

Результатами математического моделирования аварийных ситуаций в данном случае являются:

- научно обоснованные прогнозы размеров и динамики изменения во времени зон поражения промышленного персонала, населения и окружающей среды от вредных факторов аварии (осколочный, токсический (или удушающий) и тепловой виды поражений);
- научно обоснованные сценарии возможных или уже случившихся аварий, необходимые для предупреждения реальной аварийной ситуации, установления и устранения ее причин, локализации и устранения ее последствий, минимизации наносимого ущерба;
- научно обоснованные прогнозы возникновения и развития пожарной опасности или опасности взрыва на объектах ТЭК, прилегающих к месту гипотетического разрушения трубопровода;
- компьютерные тренажеры для промышленного персонала, позволяющие подготовить специалистов к действиям в нештатных ситуациях, включая аварии;
- научно обоснованные рекомендации по повышению пожарной и промышленной безопасности энергетических объектов, и т.д.

4.2. Математическое моделирование осколочного поражения при авариях на газопроводах высокого давления

Источником первичных осколков могут служить: разрушившийся при аварии дефектный участок трубопровода высокого давления; фрагменты выбрасываемого из кратера грунта (для подземных газопроводов). Вторичные осколки образуются в результате разрушения и/или перемещения объектов, расположенных вблизи трубопроводов высокого давления, при воздействии на них первичных осколков или ударной волны, которая может сформироваться при аварии. Образование вторичных осколков и зоны поражения вторичными осколками здесь не исследуются.

При анализе осколочного поражения в этом Разделе рассматриваются только воздействия на человека и животных, находящихся в зоне аварии. Это объясняется сложностью выработки обобщенных критериев для анализа размеров ущерба, нанесенного различного рода сооружениям и промышленным объектам. Для получения достоверных оценок такого ущерба необходимо анализировать и/или моделировать аварийные ситуации на конкретном производственном объекте с учетом конкретного сценария аварии и конкретных критериев поражения объекта.

Оценка зон осколочного поражения первичными осколками при разрушении трубопроводов высокого давления включает в себя оценочный расчет параметров поля

осколков с учетом дальности их разлета и анализ возможного травматизма промышленного персонала и населения.

Оценочный расчет параметров поля осколков с учетом дальности их разлета может проводиться в двух вариантах. В первом варианте алгоритмы анализа параметров поля осколков были построены на **известных полуэмпирических методах и методах теоретической механики** [155, 156]. Полуэмпирический подход с точки зрения численного моделирования является простым и оперативным способом прогнозирования осколочного поражения при разрушениях газопроводов. Его основным недостатком следует считать невысокую точность получаемых оценок.

Компьютерная реализация данного подхода была осуществлена В.Е. Селезевым и А.Н. Худовым [157]. При использовании полуэмпирического подхода для определения дальности разлета первичных осколков необходимо знать связь между накопленной в трубопроводе энергией расширения газовой смеси, массой, формой и скоростью осколка.

Во время аварии при разрыве дефектного участка трубопровода высокого давления содержащаяся в нем газовая смесь совершает работу [155]:

- деформации и разрушения стенок дефектного участка трубопровода;
- сжатия и перемещения атмосферы и/или грунта (или воды), окружающих трубопровод;
- деформирования и перемещения прилегающих к месту аварии объектов;
- ускорения осколков, возникших при разрушении дефектного участка трубопровода.

Для объектов трубопроводного транспорта основная часть располагаемой энергии при разрушении трубопровода высокого давления затрачивается на развитие газодинамических процессов, сопутствующих истечению газа в окружающую среду, и относительно малая доля (менее 20%) передается первичным осколкам [155].

Согласно полуэмпирическим методам, для дефектного участка трубопровода объемом V_0 , содержащего массу газа под давлением P_0 , максимальная энергия расширения газа E , которая может гипотетически быть передана первичному осколку в виде механической работы по его выбрасыванию из трубопровода, получается при практически обратимом расширении до наружного давления P_a и объема V_a . При быстром падении давления теплообмен с окружающей средой и осколками пренебрежимо мал. Поэтому расширение можно считать адиабатическим. Как известно, обратимые адиабатические процессы в термодинамике называются изэнтропическими процессами. Таким образом, энергия E – это энергия, выделяемая в процессе изэнтропического расширения. Ее можно найти по диаграмме «энтальпия – энтропия» (диаграмма Моляе) [155].

В первом приближении, для описания поведения транспортируемой газовой смеси в процессе разрушения дефектного участка трубопровода высокого давления, используется модель идеального газа. Следует отметить, что по данным работ [155, 156] для реальных газов энергия расширения может снижаться более чем в два раза по сравнению с расчетной оценкой, полученной для идеального газа. Таким образом, наша расчетная оценка является так называемой «оценкой сверху».

Располагаемая энергия расширения идеального газа при его изэнтропическом расширении от объема V_0 до объема V_a может быть найдена по формуле [156]:

$$E_{\text{исх}} = \frac{1}{\gamma - 1} \cdot (P_0 \cdot V_0 - P_a \cdot V_a),$$

где γ – показатель изэнтропы (адиабаты) природного газа. Учитывая, что $P \cdot V^\gamma = \text{const}$ и то, что менее 20% энергии расширения газа передается первичным ос-

колкам (см. выше), зависимость можно представить в виде:

$$E = 0,20 \cdot E_{исх} = 0,20 \cdot \frac{P_0 \cdot V_0}{\gamma - 1} \cdot \left[1 - \left(\frac{P_a}{P_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right], \quad (4.1)$$

где E – энергия расширения, затрачиваемая на разгон осколков.

Природа разрушения трубопровода определяет характер разрыва его стенок и, следовательно, геометрию первичных осколков. По данным экспериментальных исследований и по результатам анализа аварий на объектах ТЭК, для трубопроводных конструкций характерно вязкое разрушение. Это объясняется высокой ударной вязкостью сталей, из которых изготавливаются трубопроводные конструкции ТЭК. Обычно при вязком разрушении образуется малое число крупных осколков [155].

Оценка размеров зоны осколочного поражения при использовании полуэмпирического подхода осуществляется по верхнему пределу, предполагающему максимально возможное выделение энергии истекающего газа. При решении задачи считается, что дефектный участок трубопровода, имеющий цилиндрическую форму, размещен на поверхности грунта и со всех сторон окружен воздухом¹.

Опираясь на результаты анализа экспериментальных данных, сделанного в работе [155], условно принимается, что при разрушении трубопровода:

- энергия расширения E (4.1) тратится на разгон осколков пропорционально их массе;
- геометрия осколка не меняется в процессе его разгона;
- силы трения при разгоне осколка не существенны;
- начальное ускорение осколка велико по сравнению с ускорением свободного падения.

Тогда, если пренебречь сопротивлением воздуха при разгоне осколка, то скорость осколка может быть оценена следующим образом:

$$\frac{M \cdot u^2}{2} = E \cdot \frac{M}{M_{общ}} \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{M_{общ}}}, \quad (4.2)$$

где M – масса осколка; $M_{общ}$ – общая масса осколков; u – скорость осколка; E – энергия расширения, затрачиваемая на разгон осколков (см. (4.1)).

Расстояние, на котором происходит разгон осколка, можно оценить, учитывая изотропический закон расширения сжатого газа. Для участка трубопровода нижняя оценка для расстояния разгона равна² [155]:

$$l = r^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{3 \cdot L}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{P_0}{P_a} \right)^{\frac{1}{3\gamma}}, \quad (4.3)$$

где r – внутренний радиус поперечного сечения трубопровода; L – длина участка трубопровода. В работе [155] оценка (4.3) конкретизируется для реальных ситуаций с учетом результатов эксперимента.

После образования осколков и их разгона в результате расширения газа, они будут лететь по воздуху вплоть до соударения с каким-либо препятствием или поверхностью.

¹ Наличие вокруг трубопровода грунта или воды существенно сокращает размеры зоны осколочного поражения.

² Отсчет начинается от оси симметрии дефектного участка трубопровода.

Траектория движения осколка в воздушной среде будет определяться его инерцией, действием силы тяжести и аэродинамической силы.

Аэродинамическая сила зависит от мгновенной скорости осколка, плотности воздуха, а также от формы осколка и его ориентации в каждый момент времени. Обычно осколки имеют довольно нерегулярную форму, поэтому во время полета они могут всячески «кувыркаться», так что точно определить аэродинамическую силу, действующую на движущийся осколок, крайне затруднительно. Поэтому, при анализе траектории летящего осколка аэродинамическую силу разлагают на две составляющие – силу лобового сопротивления и подъемную силу¹. Для плохообтекаемых вращающихся тел подъемную силу в первом приближении можно считать равной нулю, а силу лобового сопротивления – равной силе лобового сопротивления шара, диаметр которого эквивалентен размерам осколка.

С учетом вышеизложенного, дальность полета осколка и его траектория могут быть определены в результате интегрирования хорошо известной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $\theta(t)$ (рис. 4.1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \vec{W}}{dt} - \vec{G}(\vec{W}) &= \vec{0}; \\ \vec{W}(0) &= \vec{J}, \end{aligned} \right\} \quad (4.4a)$$

где

$$\vec{W}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{G}(\vec{W}) = \begin{pmatrix} u(t) \cdot \cos \theta(t) \\ u(t) \cdot \sin \theta(t) \\ -\frac{C_x \cdot \rho_a \cdot S \cdot u^2(t)}{2 \cdot M} - g \cdot \sin \theta(t) \\ -\frac{g}{u(t)} \cdot \cos \theta(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{J} = \begin{pmatrix} w \\ q \\ u_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix};$$

t – время; x , y – абсцисса и ордината осколка в плоской прямоугольной декартовой системе координат; θ – угол наклона траектории полета осколка; C_x – коэффициент лобового сопротивления осколка²; ρ_a – плотность атмосферы (воздуха); S – эффективная площадь поверхности осколка (площадь миделева сечения осколка); g – модуль ускорения свободного падения; $w = l \cdot \cos \theta_0$ (см. (4.3)); $q = l \cdot \sin \theta_0 + H$ (см. (4.3)), $H \geq 0$ – высота оси симметрии трубопровода над землей; u_0 – рекомендуемый верхний предел скорости, полученный по формуле (4.2); $\theta_0 \geq 0$ – угол наклона траектории полета осколка в начальный момент времени³. Параметры ρ_a , S при решении задачи считаются заданными константами.

Коэффициент лобового сопротивления для сферы представлен в справочной литера-

¹ Сила лобового сопротивления действует вдоль траектории полета осколка в направлении, противоположном его движению. Подъемная сила действует по нормали к траектории полета осколка в направлении, противоположном действию силы тяжести.

² В данном случае при моделировании осколок трубопровода заменяется шаром эквивалентного диаметра.

³ Данный угол равен координатному углу расположения осколка в поперечном сечении трубопровода, т.к. на этапе разгона мы условно пренебрегаем действием силы тяжести.

туре по аэрогидромеханике в виде зависимости $C_x = f(\text{Re}')$, здесь $\text{Re}' = u \cdot D / \nu$ – число Рейнольдса, D – диаметр эквивалентного шара; ν – кинематический коэффициент вязкости среды (атмосферы).

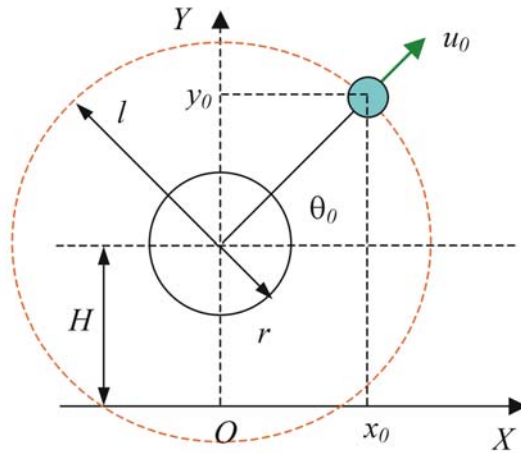


Рис. 4.1. Оценочное моделирование полета осколка

Так как мгновенная скорость осколка изменяется в каждый момент времени, то коэффициент лобового сопротивления, зависящий от числа Рейнольдса, является функцией скорости. Табличные справочные данные зависимости $C_x = f(\text{Re}')$ для сферы были аппроксимированы В.В. Кобяковым следующей функцией [158]:

$$C_x(\text{Re}') = -3,301 \cdot 10^{-7} \cdot \text{Re}' + 0,466 + 45,822 \cdot (\text{Re}')^{-1} - 28,262 \cdot (\text{Re}')^{-2} + 11,995 \cdot (\text{Re}')^{-3}$$

или, с учетом определения числа Рейнольдса,

$$C_x(u) = -3,301 \cdot 10^{-7} \cdot \left[\frac{u \cdot D}{\nu} \right] + 0,466 + 45,822 \cdot \left[\frac{u \cdot D}{\nu} \right]^{-1} - 28,262 \cdot \left[\frac{u \cdot D}{\nu} \right]^{-2} + 11,995 \cdot \left[\frac{u \cdot D}{\nu} \right]^{-3}. \quad (4.46)$$

Интегрирование системы (4.4) по маршевой переменной t при заданных начальных условиях производится до тех пор, пока выполняется неравенство $y(t) \geq y_{\text{преп}}$, где $y_{\text{преп}}$ – ордината препятствия¹.

Для решения задачи используется широко известная схема Рунге – Кутты четвертого порядка аппроксимации [98]. Вопросы устойчивости данной схемы подробно исследовались в монографии [70]. Сходимость и устойчивость схемы Рунге – Кутты четвертого порядка следует из существования и непрерывности четвертых производных по времени от искомых функций. В нашей задаче данное условие выполняется.

В настоящее время рассмотренный выше полуэмпирический подход к расчету параметров поля осколков при авариях на газопроводах имеет весьма ограниченное

¹ В качестве препятствия могут выступать рельеф местности, поверхность воды, сооружение, животное, человек и т.д.

применение, т.к. для современного развития вычислительной механики и компьютерной техники он является существенно упрощенным и позволяющим получать только грубые оценки. Второй вариант оценок параметров поля осколков предполагает использование вычислительных технологий, разработанных на базе трехмерного нелинейного динамического прочностного анализа и применения континуальных критериев разрушения.

Применять результаты нелинейного динамического прочностного анализа с использованием континуальных критериев разрушения для оценки зон осколочного поражения и моделирования образования кратера¹ при авариях на газопроводах высокого давления предложил В.Е. Селезнев в конце прошлого века. Компьютерная реализация данного предложения была осуществлена В.В. Алешиним и К.И. Дикаревым. При этом определение зон осколочного поражения проводится на базе прямого численного моделирования разрушения трубопроводной конструкции. Такой подход позволяет получать результаты требуемой точности как для прогнозирования последствий возможных аварий, так и для анализа причин и построения расчетных сценариев произошедших разрушений трубопроводов.

Математически *задача анализа параметров поля осколков* сводится к *решению дифференциальных уравнений движения деформируемого твердого тела в трехмерной нелинейной постановке при заданных краевых условиях*. В декартовых координатах ускорения точек рассматриваемой конструкции представляют собой вторые производные от перемещений по времени.

Согласно принципу Даламбера, к действующим на конструкцию массовым силам можно добавить силы инерции и получить уравнения движения в виде:

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \rho \cdot \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0}, \quad (4.5a)$$

где $\vec{\nabla}$ – оператор набла; $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор механических напряжений; ρ – плотность материала; $\mathbf{u}$ – вектор перемещений; $\vec{\mathbf{F}}$ – вектор массовых сил; две точки над вектором или скаляром – вторая производная по времени от векторной или скалярной величины. Решение системы (4.5a) должно удовлетворять граничным и начальным условиям. В общем случае могут быть заданы три типа ГУ:

– действующие поверхностные силы

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{T}}^*(t); \quad (4.5б)$$

– перемещения граничных точек

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t); \quad (4.5в)$$

– условия на контактной поверхности

$$(\boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^-) \cdot \vec{\mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad (4.5г)$$

где $\vec{\mathbf{n}}$ – вектор нормали к граничной поверхности; $\vec{\mathbf{T}}^*(t)$ – заданный закон изменения во времени поверхностных сил; $\mathbf{u}^*(t)$ – заданный закон изменения во времени перемещений граничных точек конструкции; символы «+» или «-» в уравнении (4.5г) обозначают параметры справа и слева от контактной границы. Начальные условия задаются для всех точек рассматриваемой конструкции в виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0; \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^0; \quad t = 0, \quad (4.5д)$$

¹ Моделирование образования кратера в зоне разрушения газопровода высокого давления производится только в случае подземной прокладки труб.

где одна точка над вектором или скаляром обозначает первую производную по времени от векторной или скалярной величины.

В зависимости от цели проводимых исследований решение краевой задачи (4.5) можно вести разными способами. Наиболее удобным в данном случае является прямой метод перемещений (также см. Раздел 3.1). Получаемые в итоге системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных решаются МКЭ, что позволяет сформировать детальную картину изменения во времени сложного НДС конструкции с учетом действующих динамических нагрузок, упруго-пластического поведения материалов трубопроводов и прилегающего грунта. При решении, на каждом временном шаге, для всех участков конструкции проверяются условия выполнения континуальных критериев разрушения. В случае выполнения данных критериев считается, что соответствующий элемент конструкции теряет способность нести нагрузку, и его характеристики исключаются при формировании матрицы жесткости на следующем временном шаге МКЭ.

Описанная выше процедура позволяет проводить прямое моделирование фрагментации рассматриваемой конструкции на осколки и получать как оценки исходных размеров, формы, начальных скоростей и направлений движения осколков при различных видах динамического нагружения, так и оценки геометрических параметров образующегося кратера. При прямом численном моделировании движущийся осколок описывается стандартной лагранжевой конечно-элементной сеткой (КЭ-сеткой). Конфигурация осколка и начальные условия его движения¹ задаются по результатам прямого численного моделирования разрушения трубопровода. Окружающая среда (в данном случае – воздух) моделируется неподвижной эйлеровой сеткой КЭ. Для эйлеровой КЭ-модели задается соответствующее УРС материала, краевые условия.

Это позволяет смоделировать полет осколка с учетом его сложного поступательно-вращательного движения, продолжающихся после фрагментации деформаций и распределенной силы сопротивления воздуха, интегральная величина которой зависит от поля скоростей и от ориентации осколка относительно траектории движения его центра масс. Привлекательность использования такого подхода очевидна ввиду его приближенности к действительности и потенциальной способности дать максимально точные результаты.

При разработке данной технологии анализа параметров поля осколков в качестве средства численного моделирования применялся лицензионный программно-математический комплекс «LS-DYNA» [131], обладающий необходимым набором функциональных возможностей.

При осколочном воздействии человеку или животному могут быть нанесены раны как проникающими мелкими осколками, так и крупными непроникающими. За последнее время появилось несколько экспериментальных и теоретических исследований по проблеме действия осколков на организм человека (см., например, [159]). Анализ экспериментов по определению предельной скорости осколков, при которой происходит поражение живого организма, показал, что пороговая скорость U_{50} зависит от отношения площади миделева сечения осколка к массе осколка, т.е. $U_{50} \approx S/M$. При этом, скорость U_{50} соответствует пороговой скорости осколка, при которой в 50% случаев кожный покров пробивается насквозь.

В опытах [159] исследовалось воздействие осколков кубической, цилиндрической и сферической форм массой до 0,015 кг на натуральную кожу. При этом считалось, что, если осколок пробивает кожу, то его остаточной скорости хватит для нанесения серьезных внутренних повреждений организму. Это предположение позволяет установить

¹ Под начальными условиями движения осколка понимается его исходная ориентация в пространстве и поле скоростей в соответствующих узлах КЭ-модели.

количественный предел безопасности при воздействии осколков на организм человека. Так в результате экспериментов определено [159], что при $S/M \leq 0,09 \text{ м}^2/\text{кг}$ и $M \leq 0,015 \text{ кг}$ имеем зависимость:

$$U_{50} = 1247,10 \cdot \frac{S}{M} + 22,03, \quad (4.6)$$

где $S - [\text{м}^2]$, $M - [\text{кг}]$ и $U_{50} - [\text{м/с}]$.

В работе [159] представлены дополнительные данные, свидетельствующие о том, что воздействие средних и крупных осколков, летящих со скоростями менее 10 м/с , может привести к тяжелым травмам или летальному исходу. Поэтому для оценки размеров зоны осколочного поражения при разрушении объектов трубопроводного транспорта следует рассматривать расстояния, соответствующие полному излету осколков или их врезанию в грунт и/или защитные сооружения.

По результатам моделирования параметров поля осколков можно оценить размеры зон их выпадения на местности с учетом ее рельефа. В качестве исходных данных при этом используются: параметры поля осколков (массы, размеры, форма, скорости их полета); параметры рельефа местности; наличие деревьев и других укрытий. Имея оценки воздействия осколков на людей, на топографической карте можно построить зоны возможного осколочного поражения промышленного персонала и населения.

Подробное изложение практического применения описанных в данном Разделе методов анализа осколочной опасности представлено в работах [1, 3 – 6, 157, 158]. Эти методы были реализованы в подсистеме «Alfargus/DebrisHazard» на базе КАИ «Alfargus» (см. Раздел 1.6).

4.3. Численное прогнозирование токсической опасности и пожаровзрывоопасности при авариях на трубопроводах

4.3.1. Моделирование эволюции облаков топливно-воздушной смеси

Токсическое (или удушающее) воздействие выбрасываемых при аварии газов или паров транспортируемых жидкостей (см. Раздел 4.5.2) на человека и представителей фауны, прежде всего, определяется типом транспортируемого по трубопроводам продукта и динамикой изменения его концентрации в атмосфере в зоне аварии. Это связано с тем фактом, что при анализе эксплуатации трубопроводных сетей ТЭК, процессами конденсации в выбрасываемых газах и окружающей атмосфере в первом приближении можно пренебречь¹.

В соответствии с работой [160], пожаром называется неконтролируемое горение вне специального очага, наносящее материальный ущерб, а взрывом – быстрое сгорание взрывоопасной смеси, сопровождающееся выделением энергии и образованием сжатых газов, способных производить работу. Из этих определений следует, что основой как пожара, так и взрыва является процесс горения, т.е., пожар и взрыв – близкие явления, различающиеся скоростями процесса горения [161]. Одними из основных предпосылок возникновения пожаров или взрывов в трубопроводных сетях ТЭК являются утечки (в результате отсутствия герметичности труб и технологического оборудования) или залповые выбросы (в результате разрушения участков трубопроводной системы) транспортируемого горючего продукта. Поэтому под пожаровзрывоопасностью выбро-

¹ Здесь и далее в настоящей Главе пары испарившегося жидкого топлива также будут условно рассматриваться в виде газов без учета процессов их возможной конденсации.

сов продуктов при авариях в трубопроводных сетях ТЭК здесь понимается опасность возникновения и распространения неуправляемого процесса горения по топливно-воздушной смеси, образовавшейся при нарушении технологических процессов транспортирования горючих продуктов (см. [162]).

С учетом вышесказанного, в данном Разделе основное внимание уделяется **численному моделированию механизмов выбросов транспортируемого горючего газа (паров транспортируемого углеводородного топлива) и его распространения в помещениях и на территории объектов ТЭК, сопровождающегося формированием облаков горючей (взрывоопасной) топливно-воздушной смеси.** Меры снижения пожаровзрывоопасности на объектах ТЭК в данном случае рассматриваются только для начальных стадий развития аварийных ситуаций, т.е., для этапов формирования горючих топливно-воздушных смесей. Инициирование горючих смесей с последующим развитием пожара или взрыва будет рассмотрено ниже.

Для прогнозирования опасности взрыва, токсической и пожарной опасности при авариях на трубопроводах **задачу численного моделирования истечения и распространения транспортируемых горючих газов (испарения и распространения паров транспортируемого углеводородного топлива) в помещениях и на территории объекта ТЭК** можно сформулировать в следующей постановке:

определить для заданной расчетной области пространственно-временные поля абсолютных температур и относительных массовых концентраций горючих газов (паров) в результате численного анализа полной системы газодинамических уравнений Рейнольдса, описывающих нестационарное неизотермическое турбулентное течение многокомпонентной газовой смеси в условиях открытой местности и в помещениях.

При этом краевые условия задачи должны отражать: состояние атмосферы; рельеф местности и/или геометрию помещения; геометрию и расположение источника истечения (испарения); режим функционирования источника истечения (испарения); геометрию и расположение источника возможного зажигания (например, искусственно нагреваемой поверхности или имитатора электрической искры); режим функционирования источника зажигания, и т.д.

Пространственно-временные поля абсолютных температур в расчетной области необходимы для последующего анализа возможности инициирования горючей топливно-воздушной смеси. Здесь также следует отметить, что представленная выше формулировка задачи остается неизменной при анализе токсической опасности и пожаровзрывоопасности организованных выбросов горючих газов (например, организованных выбросах природного газа на ГРС или КС) [54].

Решение задачи многоскоростной газодинамики на современном уровне развития компьютерной техники требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому практическая задача прогнозирования токсической опасности и пожаровзрывоопасности при авариях на трубопроводах может быть решена только в упрощенном диффузионном приближении.

Для оценки параметров турбулентных течений путем решения системы уравнений Рейнольдса, необходимо принять гипотезу замыкания для кажущихся турбулентных напряжений и тепловых потоков. Одной из наиболее употребляемых моделей турбулентности, замыкающих систему уравнений Рейнольдса, является $(K - \varepsilon)$ -модель турбулентности. При этом следует отметить, что данная модель плохо описывает процессы течения в непосредственной близости от обтекаемых поверхностей. Поэтому при применении $(K - \varepsilon)$ -модели для основной части расчетной области целесообразно вос-

пользоваться известными математическими моделями турбулентного пограничного слоя для анализа параметров течения вблизи непроницаемых поверхностей.

Рассмотрим вышеизложенные соображения более подробно. При математическом моделировании распространения горючих газов (паров) в окружающей среде при истечении из поврежденных трубопроводов необходимо решить набор трехмерных задач нестационарного неизотермического течения двухкомпонентной газовой смеси, где одна компонента представляет горючий газ (пар), другая – атмосферный воздух¹. В расчетах топливно-воздушная смесь рассматривается как гомогенная смесь. В первом приближении воздух, горючий газ и топливно-воздушная смесь считаются совершенными газами [163, 164].

В декартовой системе координат уравнения нестационарного неизотермического течения однокомпонентного сжимаемого вязкого совершенного газа имеют вид [63]:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0; \quad (4.7a)$$

$$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}; \quad (4.7б)$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot H)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot H \cdot \vec{V}) = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T) + \rho \cdot \vec{g} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{V}); \quad (4.7в)$$

$$p = \rho \cdot R \cdot T, \quad (4.7г)$$

где $\frac{D(\dots)}{Dt} \equiv \frac{\partial(\dots)}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(\dots)$ – субстанциональная производная от скалярной функции²; t – время; $\vec{V}$ – скорость с компонентами u_1, u_2, u_3 ; ρ – плотность смеси; $\vec{g}$ – ускорение свободного падения; p – статическое давление; $\boldsymbol{\tau}$ – тензор вязких напряжений с компонентами τ_{ij} (т.к. для всех газов, которые можно считать сплошной средой, напряжения линейно зависят от скорости деформации газа, то

$$\tau_{ij} = \mu \cdot \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right], \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (4.7д)$$

μ – динамический коэффициент вязкости, δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$), x_1, x_2, x_3 – координаты радиус-вектора точки (x_3 – координата на вертикальной оси, направленной от центра Земли)); $H = h + 0,5 \cdot \vec{V} \cdot \vec{V}$ – полная энтальпия; $h = C_p \cdot T$ – энтальпия для совершенного газа, C_p – теплоемкость при постоянном давлении; T – температура; $\partial Q / \partial t$ – заданная скорость тепловыделения внешних источников, отнесенная к единице объема (заданная объемная мощность источников тепла); λ – коэффициент теплопроводности; R – газовая постоянная.

Как известно, уравнение энергии (4.7в) можно представить в различных эквивалентных друг другу формах записи, например:

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (E_t \cdot \vec{V}) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T) + \rho \cdot \vec{g} \cdot \vec{V} - \vec{\nabla} \cdot (p \cdot \vec{V} - \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{V});$$

¹ Моделирование процессов испарения вытекшего жидкого топлива будет рассмотрено в Разделе 4.5.2.

² Запись субстанциональной производной от векторной функции означает субстанциональное дифференцирование компонент векторной функции.

или

$$\rho \cdot \frac{De}{Dt} + p \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{V}}) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T) + \Phi;$$

или

$$\rho \cdot \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T) + \Phi,$$

где $E_t = \rho \cdot \left(e + \frac{\vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\mathbf{V}}}{2} \right) = \rho \cdot \left(h + \frac{\vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{\mathbf{V}}}{2} \right) - p$ – полная энергия единицы объема; $e = C_v \cdot T$ – внутренняя энергия единицы массы; C_v – теплоемкость при постоянном объеме; Φ – диссипативная функция (тепловой эквивалент механической мощности, затрачиваемой в процессе деформации газа вследствие вязкости):

$$\Phi = \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{\mathbf{V}}) - (\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \vec{\mathbf{V}} = \tau_{ij} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mu \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right]. \quad (4.7e)$$

Здесь мы принимаем соглашение о суммировании А. Эйнштейна: повторяющиеся индексы означают суммирование, при этом знак суммы опускается, например:

$$\tau_{ij} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_i \sum_j \tau_{ij} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Зависимость коэффициентов вязкости и теплопроводности от термодинамических величин устанавливается при помощи кинетической теории. На практике для коэффициента динамической вязкости используется формула Сазерленда [165]:

$$\mu = \left(\frac{T}{273,15} \right)^{3/2} \cdot \frac{273,15 + C_s}{T + C_s} \cdot \mu_0, \quad (4.7ж)$$

где C_s – известная константа Сазерленда; μ_0 – коэффициент динамической вязкости при нормальных условиях. Для определения коэффициента теплопроводности λ по известному коэффициенту μ часто используют число Прандтля Pr [164]:

$$\lambda = \frac{C_p}{Pr} \cdot \mu. \quad (4.7з)$$

Это возможно, т.к. отношение C_p/Pr приблизительно постоянно для большинства газов [63].

В зависимости от соотношения величин действующих инерционных и вязких сил течение газа может носить ламинарный или турбулентный характер. Количественным критерием оценки характера течения является число Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho \cdot d \cdot |\vec{\mathbf{V}}|}{\mu}, \quad (4.8)$$

где d – характерный размер обтекаемой поверхности или гидравлический диаметр канала. Как известно, при превышении числом Re некоторого критического значения течение приобретает турбулентный характер.

В настоящее время основное направление развития численных методов расчета турбулентных течений состоит в осреднении уравнений газовой динамики. Эти

модификации уравнений газовой динамики также называют уравнениями Рейнольдса. В процедуре осреднения по времени осредненная по времени величина определяется в виде:

$$\bar{f} \equiv \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f dt \quad [166].$$

При осреднении по времени в уравнениях возникают новые члены, которые можно интерпретировать как градиенты «кажущихся» добавочных напряжений и тепловых потоков. Эти новые величины должны быть связаны с характеристиками осредненного течения посредством моделей турбулентности, что приводит к новым гипотезам и аппроксимациям.

Уравнения Рейнольдса формируются в два этапа. Сначала производится разложение зависимых переменных в уравнениях (4.7) на осредненные по времени величины (взвешенные или не взвешенные), полученные на соответствующем интервале времени, и пульсационные компоненты. Затем каждое уравнение системы (4.7) осредняется по времени.

Для сжимаемых газов и газовых смесей принято использовать так называемую процедуру осреднения с плотностью в качестве весовой функции [167]. При этом случайно изменяющиеся величины заменяются следующими суммами [63]:

$$\begin{aligned} u_j &= \tilde{u}_j + u''_j, \quad \text{где} \quad \tilde{u}_j = \frac{\overline{\rho \cdot u_j}}{\bar{\rho}}, \quad j = 1, 2, 3; \\ T &= \tilde{T} + T'', \quad \text{где} \quad \tilde{T} = \frac{\overline{\rho \cdot T}}{\bar{\rho}}, \quad h = \tilde{h} + h'', \quad \text{где} \quad \tilde{h} = \frac{\overline{\rho \cdot h}}{\bar{\rho}}; \\ H &= \tilde{H} + H'', \quad \text{где} \quad \tilde{H} = \frac{\overline{\rho \cdot H}}{\bar{\rho}}; \\ p &= \bar{p} + p'; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho', \end{aligned} \quad (4.9)$$

где волнистая линия над функцией – взвешенная (по плотности) осредненная по времени функция; два штриха около функции – пульсация взвешенной (по плотности) осредненной по времени функции; черта над функцией – осредненная по времени функция; штрих около функции – пульсация осредненной по времени функции. Пульсации таких величин, как вязкость, теплопроводность и удельная теплоемкость, обычно малы [63, 166], и здесь ими будем пренебрегать.

Для записи системы уравнений сохранения в форме Рейнольдса в уравнения (4.7) подставляются выражения (4.9) и проводится осреднение по времени каждого из получившихся уравнений. Здесь целесообразно представить общие соотношения, имеющие место при осреднении для любых функций $f = \bar{f} + f'$, $y = \bar{y} + y'$, $q = \bar{q} + q''$ и $b = \bar{b} + b''$ [63]:

$$\begin{aligned} \overline{y'} &\equiv 0; \quad \bar{\bar{y}} = \bar{y}; \quad \overline{\bar{f} \cdot y} = \bar{f} \cdot \bar{y}; \quad \overline{\bar{f} \cdot y'} = 0; \quad \overline{\bar{q} \cdot y} = \bar{q} \cdot \bar{y}; \quad \overline{\bar{f} + y} = \bar{f} + \bar{y}; \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}; \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}; \quad \overline{\rho \cdot q''} \equiv 0; \quad \overline{f' \cdot y'} \neq 0; \quad \overline{\rho \cdot q'' \cdot b''} \neq 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Данные соотношения можно получить, используя правила интегрирования и дифференцирования, а также определение процедуры осреднения по времени. Доказательства некоторых из этих равенств можно найти в работах [93, 168].

Осреднение уравнения (4.7а) позволяет сделать запись

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot (\tilde{u}_i + u_i''))}{\partial x_i} = 0,$$

из чего следует

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (4.11)$$

Рассмотрим уравнение (4.7б). Данное уравнение можно представить в виде:

$$\frac{\partial (\rho \cdot u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot u_i \cdot u_j)}{\partial x_j} = \rho \cdot g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}.$$

Его осреднение позволяет записать:

$$\frac{\partial (\overline{\rho \cdot \tilde{u}_i})}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{\rho \cdot u_i'')})}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{\rho \cdot (\tilde{u}_i + u_i'') \cdot (\tilde{u}_j + u_j'')})}{\partial x_j} = \overline{\rho \cdot g_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}. \quad (4.12)$$

Второе слагаемое в этом уравнении равно нулю, а третье слагаемое можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\overline{\rho \cdot (\tilde{u}_i + u_i'') \cdot (\tilde{u}_j + u_j'')})}{\partial x_j} &= \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \tilde{u}_i \cdot \tilde{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\tilde{u}_i \cdot \overline{\rho \cdot u_j''})}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{\rho \cdot u_i''} \cdot \tilde{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{\rho \cdot u_i'' \cdot u_j''})}{\partial x_j} = \\ &= \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \tilde{u}_i \cdot \tilde{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{\rho \cdot u_i'' \cdot u_j''})}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Подстановка данного выражения в (4.12) и преобразование в субстанциональную производную пары членов из получившегося уравнения позволяет сделать запись:

$$\bar{\rho} \cdot \frac{D \tilde{u}_i}{Dt} = \bar{\rho} \cdot g_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial (\overline{\rho \cdot u_i'' \cdot u_j''})}{\partial x_j}. \quad (4.13)$$

Рассмотрим (4.7в):

$$\frac{\partial (\rho \cdot H)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot u_j \cdot H)}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \rho \cdot g_j \cdot u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} \cdot u_i).$$

Получим запись этого уравнения через осредненные величины, расписав сначала некоторые слагаемые:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\overline{\rho \cdot u_j \cdot H})}{\partial x_j} &= \frac{\partial (\overline{\rho \cdot (\tilde{u}_j + u_j'') \cdot (\tilde{H} + H'')})}{\partial x_j} = \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \tilde{u}_j \cdot \tilde{H})}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{\rho \cdot u_j'' \cdot H''})}{\partial x_j}; \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \cdot \frac{\partial (\tilde{T} + T'')}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + \lambda \cdot \frac{\partial T''}{\partial x_j} \right); \\ \frac{\partial (\overline{\rho \cdot H})}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{\rho \cdot u_j \cdot H})}{\partial x_j} &= \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \tilde{H})}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \tilde{u}_j \cdot \tilde{H})}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{\rho \cdot u_j'' \cdot H''})}{\partial x_j} = \bar{\rho} \cdot \frac{D \tilde{H}}{Dt} + \frac{\partial (\overline{\rho \cdot u_j'' \cdot H''})}{\partial x_j}; \end{aligned}$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij} \cdot u_i)} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\tau}_{ij} \cdot \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\tau_{ij} \cdot u_i''});$$

$$\bar{\rho} \cdot \frac{D\tilde{H}}{Dt} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} + g_j \cdot \bar{\rho} \cdot \tilde{u}_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + \lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}''}{\partial x_j} - \overline{\rho \cdot u_j'' \cdot H''} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} \cdot \tilde{u}_i + \overline{\tau_{ij} \cdot u_i''}). \quad (4.14^*)$$

В качестве осредненного уравнения состояния (см. (4.7г)) следует использовать:

$$\bar{p} = \bar{\rho} \cdot R \cdot \tilde{T}. \quad (4.15)$$

Пренебрегая пульсациями коэффициентов вязкости и теплопроводности, можно **представить** (см. (4.7д, 4.7ж, 4.7з)):

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \cdot \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right] + \mu \cdot \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j''}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial \bar{u}_k''}{\partial x_k} \right]; \quad (4.16^*a)$$

$$\mu = \left(\frac{\tilde{T}}{273,15} \right)^{3/2} \cdot \frac{273,15 + C_s}{\tilde{T} + C_s} \cdot \mu_0, \quad \lambda = \frac{C_p \cdot \mu}{Pr}. \quad (4.16b)$$

В работе [63] утверждается, что второй член в уравнении (4.16*а), связанный с молекулярной вязкостью, на практике следует считать малым по сравнению с членом $-\overline{\rho \cdot u_i'' \cdot u_j''}$. Кроме того, на практике компоненты тензора вязких напряжений, содержащие пространственные производные от компонент вектора скорости, включающие помеченные двумя штрихами пульсации, считаются малыми, и ими можно пренебречь [63]. Тогда для практических расчетов следует записать:

$$\bar{\tau}_{ij} \approx \mu \cdot \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right]. \quad (4.16a)$$

Мы пренебрегаем членом $\lambda \cdot \frac{\partial \bar{T}''}{\partial x_j}$, считая его малым по сравнению с $-\overline{\rho \cdot u_j'' \cdot H''}$. В

этом случае уравнение (4.14*) **примет вид**:

$$\bar{\rho} \cdot \frac{D\tilde{H}}{Dt} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} + g_j \cdot \bar{\rho} \cdot \tilde{u}_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} - \overline{\rho \cdot u_j'' \cdot H''} + \bar{\tau}_{ij} \cdot \tilde{u}_i + \overline{\tau_{ij} \cdot u_i''} \right). \quad (4.14)$$

Кажущиеся турбулентные напряжения $-\overline{\rho \cdot u_i'' \cdot u_j''}$ часто называют напряжениями Рейнольдса, кажущиеся турбулентные тепловые потоки $-\overline{\rho \cdot u_j'' \cdot H''}$ – тепловыми потоками Рейнольдса [166].

Уравнения (4.11, 4.13 – 4.16) не могут быть решены в том виде, как они записаны. Это связано с тем, что напряжения Рейнольдса и тепловые потоки Рейнольдса следует считать новыми неизвестными. Необходимо принять гипотезу замыкания для кажущихся турбулентных напряжений и тепловых потоков.

Одна из применяемых для замыкания системы модель турбулентной вязкости (так называемая $(K - \varepsilon)$ -модель (см. выше)) базируется на широко известной гипотезе Бус-

синеска о связи кажущихся турбулентных сдвиговых напряжений со скоростью средней деформации через эффективную скалярную турбулентную вязкость. Эта $(K - \varepsilon)$ -модель относится к наиболее эффективным и широко применяемым на практике моделям турбулентности [93]. Тензор рейнольдсовых напряжений в данном случае имеет вид [63]:

$$-\overline{\rho \cdot u''_i \cdot u''_j} = \mu_T \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \left(\mu_T \cdot \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} + \bar{\rho} \cdot \bar{K} \right) = \frac{\mu_T}{\mu} \cdot \bar{\tau}_{ij} - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{K}, \quad (4.17a)$$

где μ_T – коэффициент турбулентной вязкости и $\bar{K} = 0,5 \cdot \overline{u''_i \cdot u''_i}$ – кинетическая энергия турбулентности.

Вычисление рейнольдсового теплового потока производится при помощи алгебраических моделей в виде аналогии Рейнольдса, которая основана на подобии между переносом тепла и импульса. В применении к кажущимся турбулентным тепловым потокам она заключается в том, что постулируется гипотеза Буссинеска (см. (4.73)) [63]:

$$-\overline{\rho \cdot u''_j \cdot H''} = \lambda_T \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = \frac{C_p \cdot \mu_T}{Pr_T} \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}, \quad (4.176)$$

где λ_T – коэффициент турбулентной теплопроводности; Pr – число Прандтля; нижний индекс « T » означает «турбулентный». Величину $\overline{\tau_{ij} \cdot u''_i}$ выразим в виде:

$$\overline{\tau_{ij} \cdot u''_i} = \frac{\mu_T}{\mu} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \vec{\mathbf{V}} - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot K \cdot \vec{\mathbf{V}}.$$

По аналогии с кинетической теорией газов турбулентную вязкость можно с достаточной точностью представить в виде [63]:

$$\mu_T = \bar{\rho} \cdot \nu_T \cdot l_T, \quad (4.18)$$

где ν_T и l_T – характерные масштабы скорости и длины турбулентности соответственно. Л. Прандтль [169] и А.Н. Колмогоров [63] предположили, что в формуле (4.18) масштаб скорости пропорционален корню квадратному из кинетической энергии турбулентности. Таким образом [63]:

$$\mu_T = C' \cdot \bar{\rho} \cdot (\bar{K})^{1/2} \cdot l_\varepsilon = \frac{C_\mu \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{K}^2}{\varepsilon}, \quad (4.19)$$

где ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности; l_ε – масштаб диссипации; C' , C_μ – константы.

Кинетическую энергию турбулентности для $(K - \varepsilon)$ -модели определяют в соответствии с уравнением, которое было получено в результате преобразований уравнений Навье – Стокса [93, 170]:

$$\bar{\rho} \cdot \frac{D\bar{K}}{Dt} = \bar{\nabla} \cdot \left[\frac{\mu + \mu_T}{Pr_k} \cdot \bar{\nabla} \bar{K} \right] + G - \bar{\rho} \cdot \varepsilon - \frac{\mu_T}{\bar{\rho} \cdot Pr_T} \cdot (\bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\rho}), \quad (4.20a)$$

где

$$G = \mu_T \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\} - \frac{2}{3} \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{K} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}. \quad (4.206)$$

В (4.20а) члены имеют следующий физический смысл: член в левой части уравнения – приращение $\bar{K}$ в жидком объеме; первый член правой части уравнения – диффузионный член для $\bar{K}$; второй член правой части уравнения – скорость генерации для $\bar{K}$; третий член правой части уравнения – скорость диссипации для $\bar{K}$; четвертый член правой части уравнения – влияние сил тяжести на изменение $\bar{K}$.

Чтобы замкнуть систему уравнений, добавляется параболическое уравнение переноса для ε [93]:

$$\bar{\rho} \cdot \frac{D\varepsilon}{Dt} = \bar{\nabla} \cdot \left[\frac{\mu + \mu_T}{Pr_\varepsilon} \cdot \bar{\nabla} \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{\bar{K}} \cdot \left(C_2 \cdot G - C_3 \cdot \bar{\rho} \cdot \varepsilon - C_1 \cdot \frac{\mu_T}{\bar{\rho} \cdot Pr_T} \cdot (\bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\rho}) \right). \quad (4.21)$$

Члены в правой части уравнения (4.21) можно интерпретировать как диффузионный член для ε , скорость возрастания ε , скорость убывания ε , а также влияние сил тяжести на изменение ε .

Значения эмпирических констант в уравнениях (4.17б, 4.19 – 4.21) выбираются в каждом случае из соображений наилучшего соответствия результатов расчета модельному эксперименту. В табл. 4.1 указаны типичные наборы таких значений, приведенные в различных публикациях.

Таблица 4.1

Значения эмпирических констант

Источ- ник	C_μ	C_1, C_2	C_3	Pr_T	Pr_K	Pr_ε
[63]	0,09	1,44	1,92	0,90	1,00	1,30
[93]	0,09	1,45	0,18	1,00	1,00	1,00
[171]	0,09	1,44	1,92	0,70	1,00	1,30
[172]	0,08	1,43; 1,40	1,92; 1,90	0,5; 0,75; 0,85	1,00; 0,7	1,30; 1,00
[173]	0,09	1,44	1,92	–	1,00	1,30
[174]	0,09	1,44	1,92	1,00	1,00	1,219

Разброс констант в данной таблице объясняется, вероятно, тем, что они определялись для разных типов течения.

Итак, уравнения (4.11, 4.13, 4.14 – 4.17, 4.19 – 4.21) описывают нестационарное неизотермическое турбулентное течение однокомпонентного сжимаемого совершенного газа. В результате их решения мы получаем осредненные значения для полей скоростей, давлений, температур и плотностей. Если для удобства записи отбросить черту над осредненными значениями и считать, что под осреднением векторной величины понимается осреднение ее компонент, то систему (4.11, 4.13, 4.14 – 4.17, 4.19 – 4.21) можно переписать в виде:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot (\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{V}}) = 0; \quad (4.22a)$$

$$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = (\rho - \rho_{атм}) \cdot \vec{g} - \vec{\nabla}P + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\mu + \mu_T}{\mu} \cdot \vec{\tau} \right) - \frac{2}{3} \cdot \vec{\nabla}(\rho \cdot K); \quad (4.22б)$$

$$\rho \cdot \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho \cdot \vec{g} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot \left((\lambda + \lambda_T) \cdot \vec{\nabla}T + \frac{\mu + \mu_T}{\mu} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{V} - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot K \cdot \vec{V} \right); \quad (4.22в)$$

$$\rho \cdot \frac{DK}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\mu + \mu_T}{Pr_K} \cdot \vec{\nabla}K \right] + G - \rho \cdot \varepsilon - \frac{\mu_T}{\rho \cdot Pr_T} \cdot (\vec{g} \cdot \vec{\nabla}\rho); \quad (4.22г)$$

$$\rho \cdot \frac{D\varepsilon}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\mu + \mu_T}{Pr_\varepsilon} \cdot \vec{\nabla}\varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{K} \cdot \left(C_2 \cdot G - C_3 \cdot \rho \cdot \varepsilon - C_1 \cdot \frac{\mu_T}{\rho \cdot Pr_T} \cdot (\vec{g} \cdot \vec{\nabla}\rho) \right); \quad (4.22д)$$

$$P = \rho \cdot R \cdot T + \rho_{атм} \cdot g \cdot (x_3 - x_{3,0}); \quad H = C_p \cdot T + \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2}; \quad (4.22е)$$

$$\mu = \left(\frac{T}{273,15} \right)^{3/2} \cdot \frac{273,15 + C_s}{T + C_s} \cdot \mu_0; \quad \mu_T = \frac{C_\mu \cdot \rho \cdot K^2}{\varepsilon}; \quad \lambda_T = \frac{C_p \cdot \mu_T}{Pr_T}; \quad (4.22ж)$$

$$\tau_{ij} = \mu \cdot \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]; \quad (4.22з)$$

$$G = \mu_T \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\} - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot K \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad (4.22и)$$

где P – пьезометрическое давление (здесь оно вводится для упрощения задания граничных условий при моделировании выбросов легких или тяжелых газов (паров) в атмосферу); x_3 – координата на вертикальной оси, направленной от центра Земли (см. описание обозначений в (4.7)); $x_{3,0}$ – фиксированная координата, соответствующая уровню моря; нижний индекс «атм» означает «атмосфера».

Если рассматриваемая среда представляет собой смесь нескольких газов (газов и паров), то система уравнений (4.22), описывающая движение однокомпонентного сжимаемого газа, претерпевает некоторые изменения, и ее необходимо дополнить уравнениями для определения концентраций компонентов смеси.

В общем случае различные компоненты смеси движутся в каждой точке пространства с разными скоростями. Для удобства описания иногда вводят скорости движения составляющих относительно центра масс смеси или среды в целом, которые называют диффузионными скоростями [79]:

$$\vec{W}_m = \vec{V}_m - \vec{V}, \quad \sum_{m=1}^N \rho_m \cdot \vec{W}_m = 0, \quad \rho = \sum_{m=1}^N \rho_m, \quad \rho \cdot \vec{V} = \sum_{m=1}^N \rho_m \cdot \vec{V}_m, \quad (4.23)$$

где $\vec{V}_m$ – скорость движения m -ой компоненты; $\vec{V}$ – скорость центра масс смеси; $\rho \equiv \rho_{с.месь}$ – плотность смеси; ρ_m – приведенная плотность m -ой компоненты смеси (масса m -ой компоненты в единице объема смеси); N – число компонент смеси. Уравнения движения и энергии для многокомпонентной смеси в общем случае зависят от

значений скоростей $\vec{W}_m$. Уравнение неразрывности для смеси в целом не включают в себя слагаемые, содержащие диффузионные скорости [79].

В гомогенной смеси газов ее составляющие размешаны и взаимодействуют на молекулярном или атомарном уровне [79], а скорости их относительного движения малы. Приближение в механике, когда пренебрегают слагаемыми, содержащими величины второго порядка относительно диффузионных скоростей $\vec{W}_m$, называется диффузионным приближением.

Для определения диффузионных скоростей в гомогенной газовой смеси здесь применяется приближенный закон бинарной диффузии Фика [79, 175]:

$$\rho_m \cdot \vec{W}_m = -\rho \cdot D_m \cdot \vec{\nabla} Y_m, \quad (4.24)$$

где D_m – коэффициент бинарной диффузии в газовой фазе; $D = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=1}^N D_m$ (для случая течения многокомпонентной смеси данный коэффициент соответствует диффузии компоненты в остальную смесь), $Y_m = \rho_m / \rho$ – относительная массовая концентрация m -ой компоненты.

В диффузионном приближении уравнения неразрывности (4.22а) и движения (4.22б), записанные для всей смеси, не изменяют свой вид. Уравнение энергии для смеси газов **представляется так** (с учетом выражения (4.24)):

$$A(x_i, \rho, \vec{V}, P, T, \lambda, \mu, \lambda_T, \mu_T) = \sum_{m=1}^N \vec{V} \cdot [\rho \cdot e_m \cdot D_m \cdot \vec{\nabla} Y_m], \quad (4.25)$$

где $A(x_i, \rho, \vec{V}, P, T, \lambda, \mu, \lambda_T, \mu_T) = 0$ – уравнение энергии для однокомпонентной среды (см. (4.22в)); e_m – удельная (на единицу массы) внутренняя энергия m -ой компоненты.

Уравнение неразрывности для каждой из компонент в диффузионном приближении и в отсутствии химических реакций, с учетом выражения (4.24), имеет вид [79]:

$$\frac{\partial(\rho \cdot Y_m)}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\rho \cdot Y_m \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot D_m \cdot \vec{\nabla} Y_m) = 0, \quad m = \overline{1, N-1}. \quad (4.26)$$

Уравнения (4.26) служат для определения относительных массовых концентраций для любых $(N-1)$ компонент. Относительная массовая концентрация компоненты с номером N определяется из очевидного условия равенства единице суммы относительных концентраций всех компонент:

$$Y_N = 1 - \sum_{m=1}^{N-1} Y_m. \quad (4.27)$$

Для получения уравнения неразрывности компоненты смеси в форме Рейнольдса представим величину Y_m , по аналогии с (4.9, 4.10), в виде суммы взвешенной по плотности осредненной по времени функции и ее пульсации:

$$Y_m = \tilde{Y}_m + Y_m''; \quad \tilde{Y}_m = \frac{\overline{\rho \cdot Y_m}}{\bar{\rho}}. \quad (4.28)$$

Подставим (4.28) и записи (4.9) для плотности и компоненты скорости u_j в (4.26). Осредняя получившееся уравнение по аналогии с осреднением уравнения энергии, имеем:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \tilde{Y}_m)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho} \cdot \tilde{Y}_m \cdot \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\rho \cdot Y_m'' \cdot u''_i}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(D_m \cdot \rho \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(D_m \cdot \rho \cdot \frac{\partial Y_m''}{\partial x_i} \right) = 0,$$

$$m = \overline{1, N-1}. \quad (4.29)$$

Введем функцию $\gamma_i = \partial Y_m / \partial x_i$. Тогда $\tilde{\gamma}_i = \partial \tilde{Y}_m / \partial x_i$; $\gamma_i'' = \partial Y_m'' / \partial x_i$. Отсюда, с учетом (4.10), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(D_m \cdot \rho \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (D_m \cdot \overline{\rho \cdot \tilde{\gamma}_i}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (D_m \cdot \bar{\rho} \cdot \tilde{\gamma}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(D_m \cdot \bar{\rho} \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x_i} \right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(D_m \cdot \rho \cdot \frac{\partial Y_m''}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (D_m \cdot \overline{\rho \cdot \gamma_i''}) = 0.$$

Вычисление рейнольдсового массового потока компоненты производится при помощи алгебраических моделей в виде аналогии Рейнольдса, которая основана на подобии между переносом компоненты и импульса. В применении к кажущимся турбулентным потокам массы компоненты она заключается в том, что постулируется гипотеза Буссинеска:

$$-\overline{\rho \cdot Y_m'' \cdot u''_i} = \rho \cdot (D_m)_T \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x_j} \cdot \frac{\mu_T}{Sc_m} \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x_j}, \quad (4.30)$$

где $Sc_m = \mu / (\rho \cdot D_m)$ – число Шмидта [87] (следует отметить, что в большинстве литературных источников в (4.30) используется турбулентное число Шмидта; в данной монографии различие между значениями числа Шмидта и турбулентного числа Шмидта не делается). Подставляя (4.30) в (4.29) и опуская символы осреднения, окончательно имеем:

$$\frac{\partial(\rho \cdot Y_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot Y_m \cdot u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu + \mu_T}{Sc_m} \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x_i} \right), \quad m = \overline{1, N-1}. \quad (4.31)$$

Перейдем к рассмотрению формы Рейнольдса для уравнения энергии (4.25). Левая часть была рассмотрена ранее, поэтому проведем выкладки для слагаемых суммы правой части:

$$\begin{aligned} \overline{\vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot e_m \cdot D_m \cdot \vec{\nabla} Y_m)} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (\rho \cdot \tilde{e}_m + \rho \cdot e_m'') \cdot D_m \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{Y}_m + Y_m'') \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\rho} \cdot \tilde{e}_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{e}_m \cdot D_m \cdot \rho \cdot \frac{\partial Y_m''}{\partial x_i} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{\rho \cdot e''} \cdot D_m \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_m \cdot \rho \cdot e'' \cdot \frac{\partial Y_m''}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Второе и третье слагаемые правой части (4.32), согласно (4.10), равны нулю. Четвертое слагаемое представим в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_m \cdot \rho \cdot e'' \cdot \frac{\partial Y_m''}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left((D_m)_T \cdot \bar{\rho} \cdot \tilde{e}_m \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x_i} \right), \quad (4.33)$$

где $(D_m)_T$ – турбулентный коэффициент бинарной диффузии в газовой фазе. Подставим (4.33) в (4.32) и получим:

$$\vec{\nabla} \cdot (\overline{\rho \cdot e_m \cdot D_m \cdot \vec{\nabla} Y_m}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\rho} \cdot \tilde{e}_m \cdot [D_m + (D_m)_T] \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x_i} \right). \quad (4.34)$$

Таким образом, подставляя (4.34) в (4.25), объединяя (4.22) и (4.31), опуская символы осреднения, получим искомую систему уравнений:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0; \quad (4.35a)$$

$$\rho \cdot \frac{DY_m}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\mu + \mu_T}{Sc_m} \cdot \vec{\nabla} Y_m \right), \quad m = 1, N-1; \quad Y_N = 1 - \sum_{m=1}^{N-1} Y_m; \quad (4.35б)$$

$$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = (\rho - \rho_{амм}) \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\mu + \mu_T}{\mu} \cdot \tau \right) - \frac{2}{3} \cdot \vec{\nabla} (\rho \cdot K); \quad (4.35в)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{DH}{Dt} = & \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho \cdot \vec{g} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot \left((\lambda + \lambda_T) \cdot \vec{\nabla} T + \frac{\mu + \mu_T}{\mu} \cdot \tau \cdot \vec{V} - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot K \cdot \vec{V} \right) + \\ & + \sum_{m=1}^N \vec{\nabla} \cdot \left[e_m \cdot \frac{\mu + \mu_T}{Sc_m} \cdot \vec{\nabla} Y_m \right]; \end{aligned} \quad (4.35г)$$

$$\rho \cdot \frac{DK}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\mu + \mu_T}{Pr_K} \cdot \vec{\nabla} K \right] + G - \rho \cdot \varepsilon - \frac{\mu_T}{\rho \cdot Pr_T} \cdot (\vec{g} \cdot \vec{\nabla} \rho); \quad (4.35д)$$

$$\rho \cdot \frac{D\varepsilon}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\mu + \mu_T}{Pr_\varepsilon} \cdot \vec{\nabla} \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{K} \cdot \left(C_2 \cdot G - C_3 \cdot \rho \cdot \varepsilon - C_1 \cdot \frac{\mu_T}{\rho \cdot Pr_T} \cdot (\vec{g} \cdot \vec{\nabla} \rho) \right); \quad (4.35е)$$

$$P = \rho \cdot R_0 \cdot T \cdot \sum_{m=1}^N \frac{Y_m}{M_m} + \rho_{амм} \cdot g \cdot (x_3 - x_{3,0}); \quad H = C_p \cdot T + \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2}; \quad (4.35ж)$$

$$\alpha = \alpha_{смесь} = \sum_{m=1}^N f_\alpha(Y_m, \alpha_m), \quad \text{где } \alpha \equiv \mu, \lambda, C_p, C_v;$$

$$\mu = \left(\frac{T}{273,15} \right)^{3/2} \cdot \frac{273,15 + C_s}{T + C_s} \cdot \mu_0; \quad \mu_T = \frac{C_\mu \cdot \rho \cdot K^2}{\varepsilon}; \quad \lambda_T = \frac{C_p \cdot \mu_T}{Pr_T}; \quad Sc_m = \frac{\mu}{\rho \cdot D_m}; \quad (4.35з)$$

$$\tau_{ij} = \mu \cdot \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]; \quad (4.35и)$$

$$G = \mu_T \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\} - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot K \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad (4.35к)$$

где R_0 – универсальная газовая постоянная; $f_\alpha(\dots)$ – известные полуэмпирические функции (см., например, [67]).

Как отмечалось выше, $(K - \varepsilon)$ -модель турбулентности плохо описывает процессы течения в непосредственной близости от обтекаемых поверхностей. Это объясняется тем, что, обладая тривиальными ГУ, данная модель содержит источниковые члены, принимающие очень большие значения вблизи обтекаемой поверхности. К сожалению, в некоторых случаях даже вне зоны турбулентного слоя, в $(K - \varepsilon)$ -модели может проводиться деление двух очень малых величин при определении коэффициента турбулентной вязкости, что приводит к неестественно высоким значениям данного параметра [176].

Для преодоления этих недостатков и повышения адекватности моделирования выбросов горючих продуктов при авариях на трубопроводах ТЭК для замыкания уравнений Рейнольдса наряду с $(K - \varepsilon)$ -моделью используется $(K - \omega)$ -модель турбулентности, где $\omega = K^{0.5} \cdot L^{-1}$ – частота турбулентности, L – масштаб длины [177]. У $(K - \omega)$ -модели турбулентности отсутствуют пристеночные функции традиционного вида.

В качестве ГУ для ω используется равенство нулю производной частоты турбулентности по нормали к поверхности, что приводит к сильной зависимости вычисляемых значений ω от применяемой разностной сетки. Алгоритм определения значений частот турбулентности у стенки [178] требует размещения в вязком подслое большего, чем обычно, количества узлов. Тем не менее есть примеры успешного применения $(K - \omega)$ -модели турбулентности для прикладных расчетов на традиционных сетках [179].

Здесь следует отметить, что удачный выбор параметров турбулентной модели благоприятно влияет на ее свойства. С этой целью в работе [180] вместо кинетической энергии турбулентности K используется параметр $q = K^{0.5}$ (скорость турбулентности), а вместо частоты турбулентности ω параметр $\nu = \omega^{0.5}$. В качестве ГУ на стенке применяется условие $q \equiv 0$ и аппроксимация односторонними разностями уравнения для ν в узлах расчетной сетки, совпадающих с положением твердой поверхности. Использование параметра ν вместо частоты турбулентности ω в сочетании с такими ГУ способствует снижению влияния разностной сетки на турбулентные параметры у стенки [176].

Для решения системы уравнений (4.35), как правило, применяются различные модификации широко известных МКО или МКЭ. Пример трехмерного моделирования факельных выбросов природного газа (метана) при авариях на МГ с рабочим давлением 3,0 МПа представлен на рис. 4.2. Расчет параметров факела был выполнен К.И. Дикаревым и В.Е. Селезевым.

Примеры практического применения модели аварийных выбросов газов (4.35) при решении производственных задач трубопроводного транспорта ТЭК подробно описаны в работах [1, 4, 6, 45, 54, 55, 61].

В монографии [6] было проведено сравнение параметров факельного выброса метана, полученных при решении задачи (4.35) в плоской и трехмерной постановках. По результатам сравнения было сделано заключение, что *для оценки геометрии и конфигурации топливно-воздушных облаков или пламен (см. ниже), образующихся при разрывах трубопроводов высокого давления, следует применять численное моделирование в трехмерной постановке.*

В работе [6] также проведено сравнение для трехмерной постановки задачи параметров факельного выброса метана, полученных в результате решения на крупной

пространственной сетке системы уравнений Рейнольдса (4.35) и полной системы уравнений Навье – Стокса, имеющей вид:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0; \quad (4.36a)$$

$$\rho \cdot \frac{DY_m}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (\rho \cdot D_m \cdot \vec{\nabla} Y_m), \quad m = \overline{1, N-1}; \quad Y_N = 1 - \sum_{m=1}^{N-1} Y_m; \quad (4.36б)$$

$$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = (\rho - \rho_{амм}) \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \tau; \quad (4.36в)$$

$$\rho \cdot \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho \cdot \vec{g} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T + \tau \cdot \vec{V}) + \sum_{m=1}^N \vec{\nabla} \cdot [\rho \cdot e_m \cdot D_m \cdot \vec{\nabla} Y_m]; \quad (4.36г)$$

$$P = \rho \cdot R_0 \cdot T \cdot \sum_{m=1}^N \frac{Y_m}{M_m} + \rho_{амм} \cdot g \cdot (x_3 - x_{3,0}); \quad H = C_p \cdot T + \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2}; \quad (4.36д)$$

$$\alpha_s = \sum_{m=1}^N f_\alpha(Y_m, \alpha_m), \quad \text{где } \alpha \equiv \mu, \lambda, C_p, C_v;$$

$$\tau_{ij} = \mu \cdot \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]. \quad (4.36е)$$

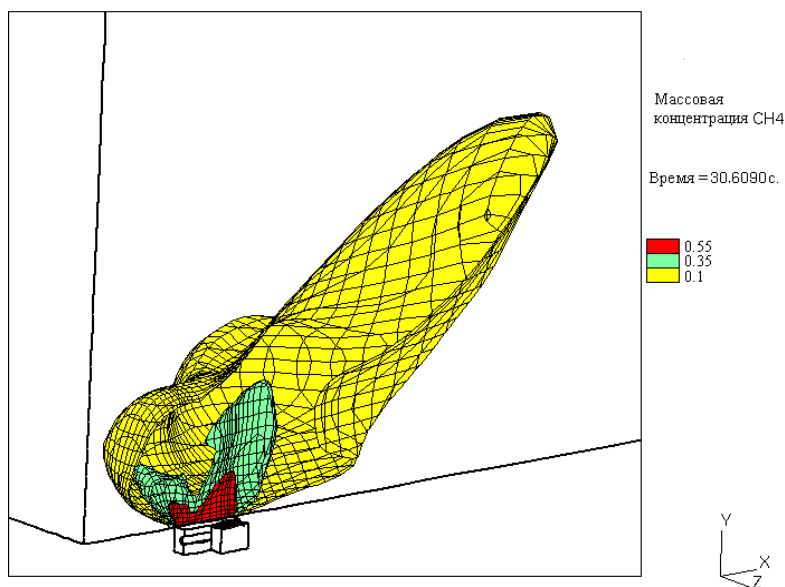


Рис. 4.2. Трехмерное поле относительных массовых концентраций метана (три изоповерхности концентраций для значений: 0,10; 0,35; 0,55) на момент времени 30,61с при скорости ветра 6м/с

По результатам сравнения были сделаны следующие обоснованные выводы:

1. В случае моделирования истечения метана в атмосферу с использованием полной

системы уравнений Навье – Стокса (4.36) наблюдается существенное увеличение размеров облаков метановоздушной смеси по сравнению с аналогичными оценками, полученными с использованием системы уравнений Рейнольдса (4.35). Это, прежде всего, обусловлено снижением интенсивности перемешивания компонентов смеси (а, следовательно, и интенсивности потери импульса струи) за счет отсутствия турбулентной составляющей коэффициента диффузии.

2. Симметричность метановоздушного облака относительно направления ветрового потока, получаемая при решении полной системы уравнений Навье – Стокса (4.36), свидетельствует о практическом отсутствии вихревых течений в модельной атмосфере. Также следствием отсутствия турбулентных вихрей является более интенсивный по отношению к источнику снос облака ветром.

Из вышесказанного можно сделать заключение о том, что, несмотря на качественное сходство характера распространения метановоздушных облаков в атмосфере при моделировании с использованием полных систем уравнений Рейнольдса (4.35) и Навье – Стокса (4.36), наблюдаются существенные количественные различия в их геометрических параметрах. Поэтому, при решении задач анализа пожаровзрывоопасности объектов ТЭК, *необходимо использовать систему дифференциальных уравнений Рейнольдса (4.35).*

Здесь следует отметить, что аналогичные выводы, полученные при моделировании турбулентных диффузионных пламен, были изложены в монографии [181] и работах [182, 183]. В этих работах отмечается то, что даже если кто-то путем прямого численного моделирования с использованием полной системы уравнений Навье – Стокса на мелких сетках и получил бы решение для турбулентного реагирующего потока, имеющего практический интерес, такое решение содержало бы столь огромное количество деталей, что для его анализа потребовалось бы усреднить выходные параметры.

4.3.2. Численный анализ возможности возникновения пожара или взрыва

Основными исходными данными для численного анализа возможности возникновения пожара или взрыва топливно-воздушного облака, образующегося на открытой местности или в помещениях после разрушения трубопроводов, являются температурные и концентрационные поля, полученные в результате математического моделирования утечек или выбросов горючих продуктов (см. Раздел 4.3.1).

Под показателями пожарной опасности горючих газов (паров) здесь подразумеваются предельные условия возникновения горения их смесей с воздухом [161]. Определение показателей пожарной опасности горючих газов (паров) регламентируется ГОСТ 12.1.044-89 «Пожаровзрывоопасность веществ и материалов. Номенклатура показателей и методы их определения». К основным показателям пожароопасности горючих газов (паров) следует отнести [161]: скорость распространения пламени; концентрационные пределы распространения пламени (концентрационные пределы воспламенения) (КПР); температуру самовоспламенения. Также изначально предполагается, что воспламенение горючей топливно-воздушной смеси происходит от внешнего источника – искры, открытого пламени, высокотемпературных поверхностей и т.д. Регламентация по источникам зажигания содержится, например, в документе [184].

При анализе возможности зажигания образовавшейся топливно-воздушной смеси, в соответствии с рекомендациями работ [4, 6, 185], используется тепловая модель зажигания. При этом считается, что скорость химической экзотермической реакции подчиняется закону Аррениуса. Более подробно данная задача будет рассмотрена в последующих Разделах настоящей Главы.

С учетом вышесказанного, при полевом моделировании выбросов или утечек горючих продуктов, транспортируемых по трубопроводам, в окружающую среду (атмосферный воздух) в качестве одного из основных *критериев возникновения пожарной опасности на объектах ТЭК* можно рассматривать:

формирование на территории объекта ТЭК (включая помещения в зданиях и служебных строениях) облаков топливно-воздушных смесей, для которых значения относительных массовых концентраций горючего газа (горючих паров) лежат в диапазоне, ограниченном нижним КПП (НКПП) и верхним КПП (ВКПП) для рассматриваемого горючего газа (горючих паров).

Облака топливно-воздушной смеси могут быть локальными или объединенными в одно глобальное облако в зависимости от погодных условий, рельефа местности, наличия строений, режима функционирования источника выброса газа и т.д. Данный критерий был предложен В.Е. Селезевым и В.В. Мотлоховым.

Для помещений объектов ТЭК, помимо условий возникновения пожарной опасности, в качестве *критерия возникновения угрозы взрыва на объекте ТЭК целесообразно использовать превышение минимального взрывоопасного содержания кислорода (МВСК)* [161]. В общем случае, МВСК можно рассматривать как концентрацию окислителя на ВКПП. При этом следует учитывать, что избыточное содержание горючей компоненты в богатых смесях обуславливает повышенное флегматизирующее действие по сравнению с инертными разбавителями (например, азотом), поскольку теплоемкость горючих газов (паров), как правило, больше теплоемкости этих разбавителей. Поэтому обычно МВСК определяют через флегматизирующую «пиковую» концентрацию азота путем построения графиков $C_x = f(C_\phi)$ и вычисления по формуле [161]:

$$МВСК (\% об.) = 0,209 \cdot [100 - (C_x + C_\phi)], \quad (4.37)$$

где C_x – концентрация горючего газа (горючих паров) в точке флегматизации, близкая к стехиометрическому содержанию газа (паров) в воздухе, $[\% об.]$; C_ϕ – концентрация флегматизатора в точке флегматизации, близкая к стехиометрическому содержанию газа (паров) в воздухе, $[\% об.]$.

Алгоритм численного анализа возможности возникновения пожара или взрыва на объекте ТЭК, разработанный В.В. Мотлоховым и В.Е. Селезевым, предусматривает проведение исследований на разных временных шагах моделирования аварийной ситуации. Процесс исследования на конкретном временном шаге можно представить в виде следующих этапов.

На *первом этапе* по критерию возникновения пожарной опасности на объекте ТЭК определяются геометрия и размеры топливно-воздушных облаков, представляющих пожарную опасность. Если такие облака не обнаружены, то делается заключение об отсутствии пожарной опасности на данном временном шаге. В противном случае – осуществляется переход ко второму этапу.

На *втором этапе* производится разделение пожароопасных облаков на облака, находящиеся в помещениях и на открытой местности. Для облаков, образовавшихся в помещениях, производится проверка выполнения *критерия возникновения угрозы взрыва на объекте ТЭК*. В случае его выполнения данные облака считаются пожаровзрывоопасными.

На *третьем этапе* контуры пожароопасных и пожаровзрывоопасных приземных облаков топливно-воздушной смеси проецируются на план или географическую карту территории объекта ТЭК. В качестве опасной зоны на карту наносится не контур пожаровзрывоопасного облака, а контур помещения или здания, где образовалось облако.

Контуры пожароопасных облаков (облаков на открытой местности) наносятся на карту в качестве зон опасности возгорания.

На **четвертом этапе** проводится ранжирование всех построенных зон по степени их опасности с точки зрения возможности возгорания и последствий этого возгорания. При этом степень опасности увеличивается:

- с приближением к потенциальным источникам зажигания;
- с превышением концентрацией кислорода МВСК;
- с ростом геометрических размеров зон опасности возгорания;
- с приближением зон опасности возгорания к местам скопления персонала объекта ТЭК и путям возможной эвакуации людей при пожаре, и т.д.

Алгоритм численного анализа возможности возникновения пожара или взрыва на объекте ТЭК последовательно применяется для разных погодных условий и различных сценариев аварий. Для задания конкретных погодных условий и конкретного сценария аварии, как правило, используется стохастический подход с применением закона равномерного распределения плотностей вероятностей для исходных параметров. Это позволяет получить развернутую картину наихудших сценариев зарождения и развития пожарной опасности на территории объекта ТЭК. Наличие такой информации позволяет разработать научно обоснованные схемы размещения датчиков-сигнализаторов горючих газов и научно обоснованные схемы размещения средств пожаротушения.

Другие алгоритмы построения зон газовой опасности с применением численного трехмерного газодинамического анализа представлены в работах [186, 187].

4.3.3. Численный анализ эффективности путей предотвращения пожара или взрыва

Как отмечалось в предыдущем Разделе, наличие информации о типовой картине возникновения пожарной опасности на объектах ТЭК позволяет разработать научно обоснованные схемы размещения специальных газоанализаторов и газосигнализаторов. Наибольшее распространение среди газоанализаторов и газосигнализаторов получили термохимические приборы, принцип действия которых основан на каталитическом окислении горючих примесей в воздухе в специальной камере, являющейся одним из плеч равновесного моста Уинстона [161]. За счет выделяющегося при окислении горючих примесей тепла плечо (электроспираль) нагревается, увеличивается его электрическое сопротивление, приводя к разбалансу моста. По величине разбаланса определяется содержание в воздухе горючих примесей.

Контроль за накоплением пожаровзрывоопасных газов (паров) в помещениях и на территории исследуемого объекта является одной из активных мер взрывозащиты и защиты от пожара. Другой мерой снижения опасности возникновения взрыва и пожара на объектах ТЭК является аварийное вентилирование помещений [161]. Аварийное вентилирование помещений следует рассматривать как один из наиболее распространенных традиционных способов предупреждения образования взрывоопасных сред. Данный способ легко поддается численному анализу его эффективности [6].

Третьей мерой снижения опасности возникновения взрыва и пожара на объектах ТЭК является упреждающая флегматизация пожаровзрывоопасной среды в помещениях данных объектов. Метод флегматизации основан на разбавлении пожаровзрывоопасной смеси до состояния, когда она становится неспособной распространять пламя [161]. Для анализа эффективности данного метода и для научно обоснованного подбора параметров флегматизации целесообразно использовать полевое моделирование [6, 54].

Одним из эффективных путей снижения пожаровзрывоопасности на объектах ТЭК

является раннее обнаружение разрывов газопроводов, позволяющее оперативно перекрыть краны и тем самым сократить объемы выбрасываемого в атмосферу транспортируемого газа (см. Приложение 8). При аварийном разрыве многониточных газопроводов наиболее актуальной задачей является идентификация аварийной нитки. В начале XXI века А.Л. Бойченко, В.Е. Селезнев и С.Н. Прялов разработали новый метод идентификации аварийных ниток многониточных газопроводов с применением ГДС [6, 35, 188].

В соответствии с этим новым методом, решение данной задачи осуществляется на основе анализа изменения градиента давления на концах поврежденного участка, т.к. именно этот газодинамический параметр имеет наиболее значительные отличия при номинальных и аварийных (т.е., при наличии разрыва) режимах транспортирования газа (рис. 4.3). Рассмотрим участок многониточного газопровода, представляющий собой одну нитку, ограниченную двумя соседними крановыми площадками (рис. 4.4). По результатам анализа режимов транспортирования газов условие наличия аварийного истечения газа из разрушившейся нитки при совместном использовании результатов натурных измерений, полученных с помощью SCADA-системы объекта ТЭК, и расчетных оценок параметров течения, найденных с применением ГДС в режиме реального времени, можно описать в виде выполнения следующей системы неравенств:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial P_A^H(t)}{\partial x} < -\varepsilon_1 \wedge \left| \frac{\partial P_A^H(t)}{\partial x} \right| \geq \left| \frac{\partial P_A^P(t)}{\partial x} \right| + \varepsilon_2 \right) \vee P_A^H(t) < P_A^P(t) - \Delta P_A^{\text{заданное}}; \\ & \left(\frac{\partial P_B^H(t)}{\partial x} > \varepsilon_1 \wedge \left| \frac{\partial P_B^H(t)}{\partial x} \right| \geq \left| \frac{\partial P_B^P(t)}{\partial x} \right| + \varepsilon_2 \right) \vee P_B^H(t) < P_B^P(t) - \Delta P_B^{\text{заданное}}, \end{aligned} \right. \quad (4.38)$$

где $P_A^H(t)$, $P_B^H(t)$ – измеренные значения статического давления транспортируемого газа в точках А и В (см. рис. 4.4); $P_A^P(t)$, $P_B^P(t)$ – рассчитанные с использованием ГДС значения статических давлений газа в точках А и В; x – пространственная координата, отсчитываемая по оси трубопровода; $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\Delta P_A^{\text{заданное}} > 0$, $\Delta P_B^{\text{заданное}} > 0$ – наперед заданные величины, связанные с точностью датчиков SCADA-системы. Операторы « $\wedge$ » и « $\vee$ » означают операции булевой алгебры «И» и «ИЛИ» соответственно.

В системе (4.38) неравенства $\frac{\partial P_A^H(t)}{\partial x} < -\varepsilon_1$ и $\frac{\partial P_B^H(t)}{\partial x} > \varepsilon_1$ отражают условия наличия практически значимого течения в соответствующих точках, при выполнении которых имеет смысл сравнение градиентов давления. Неравенства типа $P^H(t) < P^P(t) - \Delta P^{\text{заданное}}$ описывают условие наличия аварийного истечения газа из участка трубопровода при практическом отсутствии течения в указанных точках.

Здесь целесообразно отметить, что в системе (4.38) содержится **анализ текущих значений** давления и градиентов давления газа на концах контролируемых участков трубопровода (фактически проводится сравнение указанных выше величин с соответствующими номинальными расчетными оценками, полученными с использованием ГДС), а **не анализ динамики изменения** параметров транспортирования газа (см. Приложение 8 и монографию [8]). Применение ГДС, адекватно моделирующего нестационарные процессы транспортирования газа, позволяет корректно выделить «аварийные» значения градиентов давления для полного спектра режимов работы контролируемого газопровода (см. Главу 2 и работу [6]).

Следует также подчеркнуть, что условие (4.38) было сформулировано без строгого математического вывода. Оно явилось продуктом анализа многочисленных реальных

режимов работы трубопроводных систем ТЭК и результатов соответствующих численных экспериментов по моделированию разрывов многониточных газопроводов. В настоящей монографии условие (4.38) следует рассматривать как некоторый математический постулат.

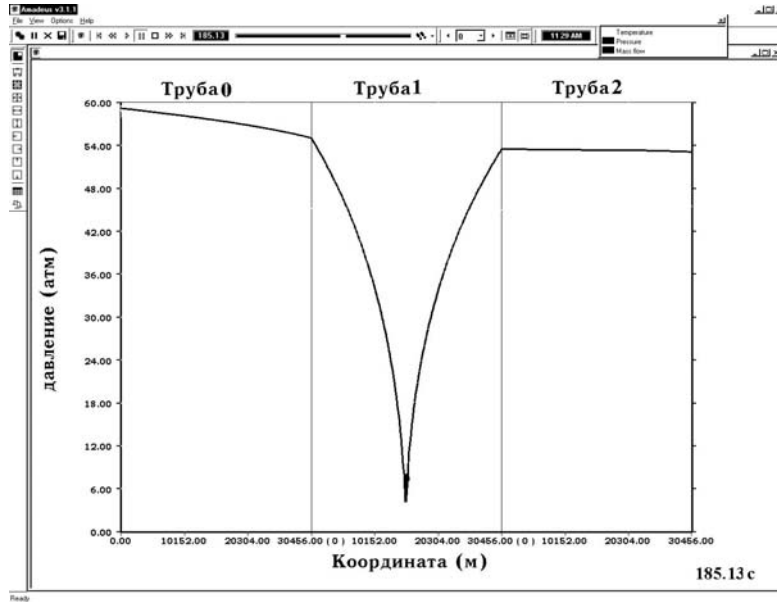


Рис. 4.3. Пример характерного изменения давления транспортируемого газа при разрыве одной из ниток многониточного газопровода

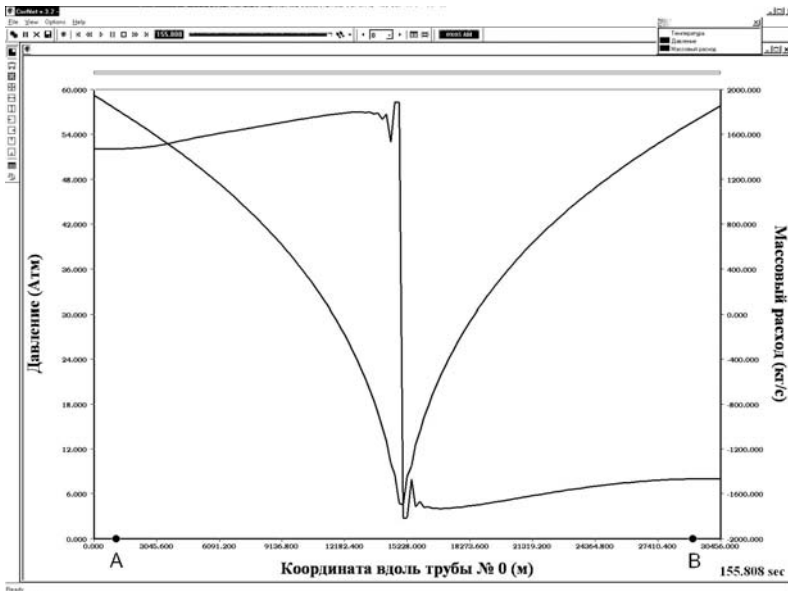


Рис. 4.4. Пример характерных изменений газодинамических параметров для нитки участка многониточного газопровода между соседними крановыми площадками (аварийный режим)

Для обнаружения разрыва многониточного газопровода в трубопроводной системе объекта ТЭК должны быть выделены однопунктные участки, для каждого из которых контролируется выполнение системы неравенств (4.38).

Критерий обнаружения разрыва на конкретном участке нитки ЛЧМГ (критерий (4.38)), предложенный А.Л. Бойченко, можно записать в следующей формулировке [6, 35]:

Если при сравнении измеренных (с помощью SCADA-системы объекта ТЭК) и рассчитанных (с применением ГДС) значений давления газа для контрольных точек А и В (см. рис. 4.4) рассматриваемого участка установлено, что:

- 1) *измерительная система работает корректно и безаварийно,*
- 2) *ГДС работает корректно,*
- 3) *выполняется система неравенств (4.38),*

то делается вывод о наличии на участке нитки многониточного газопровода между контрольными точками А и В разрыва трубопровода.

Для реализации предложенного метода необходима работа ГДС в режиме реального времени.

Для каждого выделенного однопунктного участка ЛЧМГ во времени производится контроль выполнения критерия (4.38). Блок-схема алгоритма контроля представлена на рис. 4.5. Она построена на примере газотранспортного предприятия.

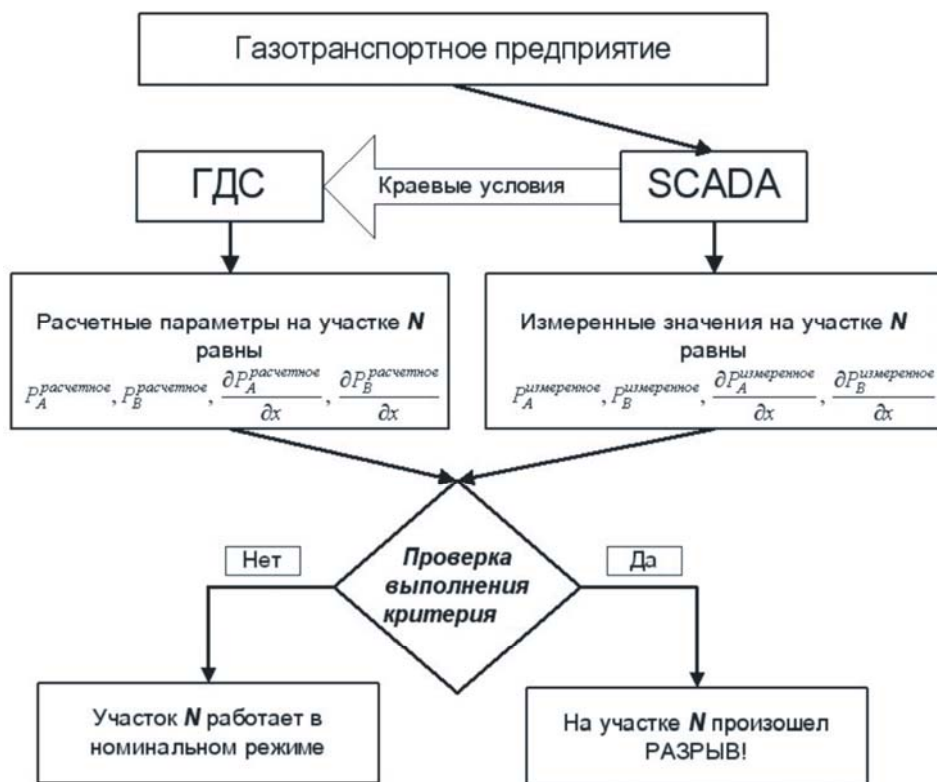


Рис. 4.5. Блок-схема алгоритма реализации метода обнаружения разрывов трубопроводов газотранспортного предприятия

Для определения величины градиента давления газа можно аппроксимировать зависимость давления по показаниям системы датчиков давления. Минимально необходимое количество датчиков при этом – два. В случае анализа газотранспортного предприятия датчики давления размещаются в районе крановых площадок, оборудованных межниточными перемышками (рис. 4.6; здесь места размещения датчиков условно обозначены светлыми кружками).

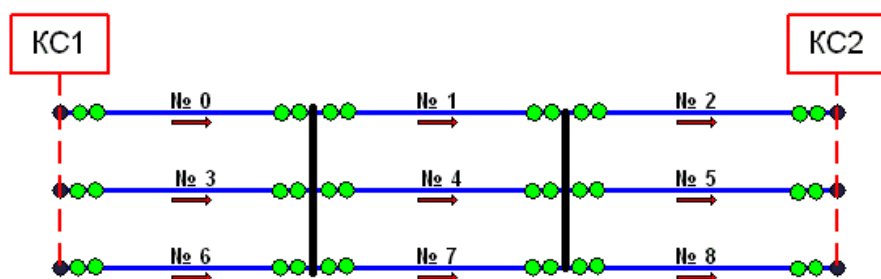


Рис. 4.6. Пример топологии участка ЛЧМГ (длина каждого пронумерованного участка – 30км)

Величина перепада давления газа, определяемого по показаниям каждой пары датчиков, позволяет оценить значение градиента давления на концах контролируемых участков ($\frac{\partial P}{\partial x} \approx \frac{\Delta P}{\Delta x}$, где Δx – расстояние между датчиками, ΔP – разница в показаниях данной пары датчиков).

Датчики каждой пары должны размещаться на некотором расстоянии друг от друга. **Расстояние между датчиками** связано с их точностью и режимами транспортирования газа и **определяется расчетным путем с применением ГДС**.

Датчики давления, попарно размещенные на концах контролируемых участков многониточного газопровода, составляют основу блоков определения градиентов давления газа на концах участков.

Для определения координаты места разрыва могут применяться методы, основанные, например, на разнице времени фиксации заданного перепада давления газа или на аппроксимации кривой падения давления. При разрыве одной из ниток многониточного газопровода волна спада давления в транспортируемом газе распространяется вдоль этой нитки со скоростью звука. Зная скорость звука в транспортируемом газе и время регистрации заданного перепада давления на каждом из концов поврежденной нитки, можно определить предполагаемое место разрыва.

При аппроксимации кривой падения давления можно, например, использовать линейную зависимость. В этом случае коэффициенты аппроксимирующей прямой определяются значениями давления для конкретной пары датчиков. Координата, в которой аппроксимирующая зависимость равна критическому значению давления, является некоторой оценкой координаты места разрыва. Среднее арифметическое значение между рассчитанными координатами для двух пар датчиков на противоположных концах одного участка принимается как прогнозируемая координата места разрыва.

Данные, позволяющие судить о точности методов, были получены в результате серии численных экспериментов, выполненных с использованием ГДС участка ЛЧМГ (см. рис. 4.6). Они представлены в табл. 4.2. В ней приведены результаты расчетов прогнозируемых координат места аварии для различного расположения разрыва на аварийной нитке. Расчеты проводились для топологии, показанной на рис. 4.6. Разрывы находились на участке №1.

Таблица 4.2

Сравнение точности способов определения места разрыва многониточных трубопроводов газотранспортного предприятия

Координата разрыва, км	15км	12км	10км	8км	6км	4км
Левая пара датчиков (расстояние между датчиками – 1км)						
Время фиксации разрыва, с	34	23	18,8	14, 4	12,2	11,1
Перепад давления, атм	0,38	1,83	2,98	9,68	9,68	2,84
Давление на датчике крановой площадки Р, атм	58,4	57,7	56,9	56,0	54,7	54,5
Правая пара датчиков (расстояние между датчиками – 1км)						
Время фиксации разрыва, с	33	38	43,2	48,2	53,27	58,9
Перепад давления, атм	0,49	0,42	0,41	0,39	0,36	0,38
Давление на датчике крановой площадки Р, атм	56,8	57,0	57,0	57,0	57,1	57,0
Прогнозируемая координата места разрыва получена:						
по линейной аппроксимации кривой падения давления, км	15,23	15,23	9,57	2,90	2,82	0,96
по разнице времени фиксации заданного перепада давления, км	15,43	12,15	10,23	8,299	6,81	5,43

Как видно из приведенных в табл. 4.2 результатов, линейная аппроксимация зависимости падения давления газа позволяет спрогнозировать координату места разрыва ЛЧМГ с точностью до 5÷8км (~1/3 длины участка ЛЧМГ между крановыми площадками). Определение же координаты места разрыва по разнице времени фиксации заданного перепада давления позволяет определить координату разрыва с точностью до 1км. Следует отметить, что для этого необходимо иметь показания датчиков с интервалом не реже 1с.

Для уточнения месторасположения разрыва многониточного газопровода объекта ТЭК после идентификации аварийной нитки, с использованием ГДС проводится серия расчетов для аварийного участка нитки как для однониточного трубопровода. Граничные условия берутся по показаниям датчиков давления SCADA-системы, расположенных на крановых площадках, ограничивающих данную нитку, на момент обнаружения разрыва. Варианты расчета отличаются между собой месторасположением модельного разрыва. Тот вариант, результаты которого лучше всего совпадают с показаниями SCADA-системы, дает уточненную оценку месторасположения разрыва на аварийной нитке.

Опыт проведения практических расчетов, моделирующих как гипотетические, так и реальные аварии, свидетельствует о том, что при правильном построении расчетной схемы и правильном выборе эффективных методов ее численного анализа, на современных персональных компьютерах решение задачи может быть получено в реальном времени. Наличие такого решения, совпадающего с показаниями SCADA-системы, дополнительно подтверждает возникновение аварии на многониточном газопроводе, что

увеличивает надежность идентификации разрыва.

Заканчивая изложение метода оперативного обнаружения разрывов многониточных газопроводов с применением ГДС, необходимо отметить, что при его разработке большое внимание уделялось возможности практической реализации, эффективности и надежности метода. Именно с этой точки зрения здесь был выбран для анализа достаточно информативный газодинамический параметр – градиент давления транспортируемого газа (см. Приложение 8). Для магистральных газопроводов выше были проиллюстрированы возможность получения оценок выбранного параметра и их достаточность. Форма записи критерия А.Л. Бойченко отражает не только газодинамические процессы, которые предлагается анализировать, но и то, как проводить анализ, какие необходимы натурные измерения, и т.д. Она обусловлена возможностями современных измерительных систем, применяемых в газовой промышленности. На МГ скорость газового потока в трубе не измеряется, а измерение расхода газа производится в специально оборудованных расходомерных узлах, размещение которых вдоль каждой нитки на крановых площадках практически невозможно. При этом современные расходомеры, применяемые на МГ, обладают достаточно низкой точностью измерений.

Формулировка критерия А.Л. Бойченко ориентирована именно на измерение давления газа, являющееся сравнительно недорогим и имеющее приемлемую точность. Другие формулировки и интерпретации изложенного выше метода идентификации мест разрывов аварийных ниток многониточных газопроводов (см., например, [8]) *искажают его направленность на максимально возможное упрощение практической реализации данного метода.*

Для оценки эффективности механизма снижения пожаровзрывоопасности на объекте ТЭК за счет оперативного перекрытия кранов трубопроводной сети С.Н. Пряловым и В.Е. Селезневым был предложен способ применения ГДС для анализа поступления транспортируемого газа к источнику выброса [4]. С точки зрения оценки эффективности снижения пожаровзрывоопасности необходимо знать количество выброшенного в атмосферу горючего газа и временной закон его выброса. Данная величина и соответствующая временная зависимость складываются из двух составляющих. Первая составляющая вычисляется путем интегрирования по времени функции массового расхода природного газа в зоне аварии от момента разрыва газопровода до момента перекрытия крана. Вторая составляющая равняется количеству горючего газа, оставшегося в аварийном трубопроводе на момент перекрытия крана.

Приведем основные этапы и результаты решения этой задачи по следующему алгоритму. По результатам измерений SCADA-системы объекта ТЭК формируются исходные данные для ГДС. По показаниям датчиков SCADA-системы определяются ГУ на аварийном участке многониточного газопровода до аварии и в ее период. В качестве начальных условий принимается распределение газодинамических параметров, соответствующее установившемуся течению по трубопроводной системе при заданных ГУ для момента образования разрыва трубопровода.

Далее по результатам работы ГДС с высокой точностью определяется табличная функция изменения массового расхода транспортируемого природного газа в зоне разрыва трубопровода от времени. Интегрирование данной функции по времени позволяет установить количество выброшенного в окружающую среду продукта на текущий момент времени.

Временной закон поступления горючего газа к источнику выброса используется не только при моделировании возникновения пожаровзрывоопасности на объектах ТЭК, но и при численном анализе параметров пожаров на этих объектах, связанных с разрушением трубопроводов (см. последующие Разделы данной Главы).

При аварии на ЛЧМГ основные действия по тушению пожара направлены на спасение жизни людей и прилегающих к месту разрыва МГ производственных и социальных

объектов. Место разрыва, как правило, воздействию средств пожаротушения не подвергается. Это связано с необходимостью предотвращения распространения природного газа по местности и возможности возникновения новых возгораний. Таким образом, ориентировочная продолжительность пожара после перекрытия кранов может быть оценена с использованием ГДС по формуле В.А. Пчелинцева [160]:

$$\tau = \frac{S}{u_{\text{выгорания}}}, \quad (4.39)$$

где S – количество горючего вещества (природного газа при нормальных условиях), [кг]; $u_{\text{выгорания}}$ – скорость выгорания горючего вещества [кг/ч]. Скорость выгорания не является постоянной величиной и зависит от многих факторов [160] (см. ниже).

4.3.4. Технология численного прогнозирования токсической опасности и пожаровзрывоопасности на объектах ТЭК

Анализ рассмотренного в Разделах 4.3.1 – 4.3.3 материала позволил В.Е. Селезневу и В.В. Мотлохову предложить *технология численного прогнозирования токсической опасности и пожаровзрывоопасности на промышленных энергетических объектах ТЭК с применением высокоточных компьютерных газодинамических или гидравлических симуляторов трубопроводных сетей*. Она требует последовательного выполнения следующих этапов:

- проведение численной оценки физических параметров нестационарных режимов транспортирования горючих продуктов по трубопроводам объектов ТЭК с использованием высокоточных компьютерных газодинамических или гидравлических симуляторов (см. Главу 2);
- проведение исследования прочности трубопроводной системы объекта ТЭК с использованием КПС (см. Главу 1 и [7]) для обнаружения потенциальных мест разрушения трубопроводной сети (например, от нагрузки нестационарного давления транспортируемого продукта (см. пункт выше));
- проведение численного моделирования геометрии источника истечения (разлития) (см. Раздел 4.2);
- проведение численной оценки параметров функционирования источника истечения (разлития и испарения) с применением высокоточного компьютерного газодинамического или гидравлического симулятора (см. Главу 2 и Раздел 4.3.3);
- проведение численного моделирования истечения и распространения транспортируемого продукта в помещениях и на территории объекта ТЭК (см. Раздел 4.3.1), включая испарение горючих жидких продуктов;
- проведение численной оценки возможности токсического и/или удушающего воздействия на персонал и население прилегающих к месту аварии районов на базе анализа динамики изменения полей относительных концентраций транспортируемого газа (паров транспортируемого продукта) в атмосфере вблизи места аварии (см. Раздел 4.3.1);
- проведение численного анализа возможности возникновения пожара или взрыва на исследуемом объекте ТЭК по результатам численного анализа температурных и концентрационных полей в зоне аварии с применением предложенных выше критериев возникновения пожарной опасности и/или угрозы взрыва на объектах ТЭК (см. Раз-

дел 4.3.2);

- проведение численного анализа эффективности путей предотвращения пожара или взрыва на объекте ТЭК (см. Раздел 4.3.3).

Данная технология позволяет формулировать научно обоснованные рекомендации по размещению на объектах ТЭК газоанализаторов и газосигнализаторов, определению эффективных режимов работы в зданиях и сооружениях ТЭК систем аварийной вентиляции и упреждающей флегматизации [6].

4.3.5. К вопросу об оценке состояния атмосферы в зоне аварийного выброса транспортируемого продукта

Одной из главных трудностей на пути получения практически значимого решения задачи численного прогнозирования токсической опасности и пожаровзрывоопасности на объектах ТЭК является отсутствие достоверной метеорологической информации о состоянии атмосферы в зоне выброса. Под состоянием атмосферы здесь следует подразумевать совокупность значений ее свойств, существенных с точки зрения решаемой задачи. Интересующими нас свойствами атмосферы в данном случае являются поля температуры и ветра в зоне факельного выброса. Отсутствие такой информации не позволяет сформировать корректные краевые условия газодинамической задачи (4.35), и, следовательно, правильно решить поставленную задачу. Поэтому задача оценки пространственно-временных полей температуры и ветра на территории, прилегающей к месту аварийного, организованного или прогнозируемого факельного выброса является актуальной и способствует корректному решению проблемы анализа, диагностики и прогнозирования последствий выбросов горючих продуктов, транспортируемых по трубопроводам ТЭК.

Информация о пространственно-временных полях температуры и ветра теоретически может быть получена (оценена) с применением какой-либо прогностической модели (например, мезомасштабной, используемой обычно при гидродинамическом прогнозе погоды [189, 190]) или задана на основе реальных измерений. С учетом сложного характера уравнений гидродинамики, применяемых в прогностических моделях (см., например, [190, 191]), и трудности корректного задания граничных условий на боковых открытых границах заданной мезомасштабной области использование гидродинамического подхода для решения задач пространственного прогнозирования температуры и ветра в зоне факельного выброса является достаточно затруднительным.

Здесь следует отметить, что реальные измерения параметров состояния атмосферы проводятся лишь на ограниченном числе аэрологических станций, часто существенно удаленных от места аварийного выброса. Даже в случае густой сети станций, что характерно для стран Европы, США и Канады, наименьшее расстояние между ближайшими станциями, как правило, составляет $300\div 400$ км [192]. При этом, в северных районах России, США и Канады места аварийных разрывов магистральных газопроводов, сопровождающихся выбросом природного газа, могут быть не освещены метеорологической информацией из-за труднодоступности указанных территорий. Также, эта информация в силу целого ряда объективных причин может быть не доступна специалистам ТЭК, расследующим причины аварий и их последствия. Очевидно, что в такой ситуации требуется использование некоторой процедуры интерполяции или экстраполяции имеющейся метеорологической информации для оценки состояния атмосферы в зоне аварийного выброса.

Масштаб интерполяции (экстраполяции) мезометеорологических полей существенно меньше расстояний между аэрологическими станциями, и, следовательно, данное обстоятельство не позволяет надежно восстановить трехмерную структуру этих полей с

большим пространственным разрешением [193]. Для этих целей можно использовать методы теории оптимального оценивания [194, 195].

Одним из основных достоинств данных методов является тот факт, что для их реализации не требуется (как, например, для физико-статистических методов [196]) большого объема экспериментальной информации. Они позволяют с помощью аппарата калмановской фильтрации и выбранной математической модели атмосферы провести оценку текущего и ожидаемого состояния атмосферы в заданных районах, опираясь на оперативные метеорологические измерения в ограниченном числе точек прилегающей к месту аварии территории. Однако, эти методы, как и методы полиномиальной и сплайновой аппроксимации [192, 197], не дают надежных результатов в районах с редкой сетью станций наблюдений за состоянием атмосферы, а также при прогнозах на не освещенную данными наблюдений территорию [193]. Это, прежде всего, связано с тем, что для своей реализации они требуют задания достаточно полной априорной информации как о самих процессах в атмосфере, так и о характеристиках помех и случайных возмущений, действующих на атмосферу и систему измерений ее параметров.

Исправить сложившуюся ситуацию можно с использованием динамико-стохастических методов решения задач пространственного и временного прогноза (диагностики) мезомасштабных полей температуры и ветра. Характерными представителями математических моделей, на базе которых строятся такие методы, являются малопараметрические разностные динамико-стохастические модели пространственно-временной экстраполяции (интерполяции) полей параметров состояния атмосферы в области мезомасштаба [193]. Они базируются на применении процедуры оптимального комплексирования модифицированного метода группового учета аргументов с методом калмановской фильтрации. Другим ярким представителем малопараметрических динамико-стохастических моделей являются модели на основе алгебраических полиномов с изменяющимися во времени коэффициентами для пространственной и временной экстраполяции (интерполяции) параметров состояния атмосферы [198].

Для решения задач анализа токсической опасности и пожаровзрывоопасности была разработана на базе малопараметрических динамико-стохастических моделей состояния атмосферы вычислительная технология оценки пространственно-временных полей температуры и ветра на территории, прилегающей к месту аварийного, организованного или прогнозируемого факельного выброса. Ее теоретическую основу составил материал, изложенный в работе [198]. В результате применения технологии оцениваются характеристики состояния атмосферы в зоне выброса, и в автоматизированном режиме формируются краевые условия для решения задачи моделирования произошедшего или прогнозируемого аварийного выброса (с использованием полной системы уравнений Рейнольдса (4.35)).

Рассматриваемая технология оценки пространственно-временных полей температуры и ветра на территории, прилегающей к месту аварийного, организованного или прогнозируемого аварийного выброса транспортируемого по трубопроводам продукта в атмосферу предполагает поэтапное решение совокупности задач математического моделирования, относящихся к проблемам вычислительной газодинамики, теории вероятностей и математической статистики. В основу используемых в технологии алгоритмов положен аппарат калмановской фильтрации и различные классы динамико-стохастических моделей локального мониторинга состояния атмосферы [198].

В современных динамико-стохастических моделях могут применяться упрощенные уравнения гидротермодинамики, двумерное уравнение мезомасштабной диффузии, полиномы высоких порядков с изменяющимися во времени коэффициентами, а также смешанные разностные уравнения регрессивного типа. В нашем случае в качестве диагностических и прогностических моделей динамико-стохастического вида используются

системы обобщенных разностных уравнений, описывающих поведение случайного процесса в пространстве и во времени [198]. При этом временные и пространственные корреляционные функции искомой метеорологической величины, как правило, аппроксимируются экспоненциальными зависимостями или оцениваются полиномами высоких порядков на основе фильтра Калмана.

Формирование краевых условий задачи моделирования механизмов и последствий факельного выброса горючих газов на объектах ТЭК осуществляется по результатам оценки пространственно-временных полей температуры и ветра на территории, прилегающей к месту выброса. При выполнении данной операции используются дополнительные процедуры полиномиальной интерполяции и экстраполяции.

Моделирование неоднородности атмосферы в расчетной области для задания начальных условий и в процессе счета осуществляется методами, предложенными в монографии [163] на основе решения уравнений Рейнольдса для сжимаемого теплопроводного газа с учетом подстилающей поверхности, фонового ветра [199], приповерхностных термиков [200], а также дрейфа термиков в стратифицированных воздушных потоках [201]. В некоторых работах, например в [202], рекомендуется при численном моделировании аварий на объектах газовой промышленности для задания начальных условий и описания неоднородности атмосферы в процессе расчета применять упрощенный подход, а именно – известную эмпирическую модель атмосферной турбулентности, использующую классы устойчивости Паскуилла [203, 204]. Эта модель базируется на статистических обобщениях натурных наблюдений за изменениями параметров атмосферы, в зависимости от погодных условий, времени суток, высоты над уровнем земли, и т.д. В данной модели практически не учитываются географическое положение точки газового выброса, рельеф местности в зоне аварии, влияние газовой струи на изменение параметров окружающей атмосферы, и т.д. С учетом вышесказанного рекомендация работы [202] является в нашем случае неприемлемой, т.к. приводит к существенному снижению адекватности численных методов моделирования аварийных выбросов газов в атмосферу, рассматриваемых в настоящей монографии. Здесь следует особо подчеркнуть, что необоснованное сопряжение методов эмпирического анализа и методов численного моделирования, допускаемое в [202], во многих случаях может привести к потере практической значимости результатов моделирования.

В завершение Раздела 4.3 отметим, что описанная здесь технология численного прогнозирования токсической опасности и пожаровзрывоопасности была реализована в подсистеме «Alfargus/ToxicGasHazard» на базе КАИ (см. Раздел 1.6).

4.4. Численное моделирование пожаров на газопроводах и прилегающих территориях

4.4.1. Общие замечания

Прежде чем перейти к описанию численного моделирования пожаров на газопроводах, целесообразно процитировать два основных определения, сформулированные в действующих нормативных документах и актуальные в нашем случае.

1. **Пожаром** называется неуправляемый процесс горения, приносящий вред обществу и окружающей среде.
2. Под **пожарной опасностью** подразумевается опасность возникновения и распространения неуправляемого процесса горения (пожара).

В Разделе 4.4 математическое моделирование пожаров и анализ пожарной опасности ограничены рассмотрением причин, механизмов и последствий возгораний, возникающих при аварийных выбросах горючих газов в окружающую среду из трубопроводных сетей или хранилищ газов (искусственных или естественных резервуаров), входящих в структуру промышленных энергетических объектов. Здесь будут рассматриваться причины и последствия пожаров, произошедших на открытой местности или в помещениях на объектах ТЭК.

Наибольшее количество метана (как главной составляющей природного газа) в отрясах ТЭК транспортируется по МГ. Поэтому здесь основное внимание будет уделено пожарам, возникающим при воспламенении метановоздушной смеси, которая образуется при аварийном разрушении МГ. Методы моделирования пожаров на МГ практически без доработок распространяются и на пожары, возникающие при разрушении хранилищ природного газа (метана).

С учетом сделанных выше замечаний *технология оценки пожарной опасности газопроводных сетей ТЭК с использованием методов численного моделирования* можно представить в виде следующей последовательности шагов:

- 1) *численное прогнозирование возникновения пожаровзрывоопасности* на объектах газопроводных сетей и прилегающих территориях (прогнозирование образования и эволюции горючих газозвудушных облаков) (см. Раздел 4.3.4);
- 2) *анализ причин и механизмов прогнозируемого или реального воспламенения* образовавшейся горючей газозвудушной смеси (см. Раздел 4.4.2);
- 3) *анализ горения газозвудушной смеси* на открытой местности или в помещениях объектов ТЭК (см. Раздел 4.4.3);
- 4) *оценка зон теплового поражения* людей, животных, растительности, социальных и промышленных объектов (см. Раздел 4.4.3);
- 5) *оценка зон поражения* людей и животных *продуктами горения*, распространяющимися в окружающей среде при пожаре;
- 6) *оценка эффективности механизма тушения* пожара.

Создание на открытой местности условий для дефлаграционного взрыва метановоздушной смеси при аварийном разрыве газопровода является маловероятным [41], поэтому численная оценка последствий внутреннего (т.е., в помещении) взрыва газозвудушной смеси рассматривается только для зданий на объектах ТЭК (см. Раздел 4.4.6).

Для практической реализации Шагов 2 и 3 вычислительной технологии оценки пожарной опасности МГ считается, что образовавшаяся газозвудушная смесь обладает *реакционноспособностью*, т.е., в ней возможно возникновение интенсивной экзотермической химической реакции. Реакционноспособность подразумевает резкую зависимость скорости химической реакции от внешних и внутренних условий [185].

Под *стехиометричностью* газозвудушной смеси в зоне горения (воспламенения) понимается тот факт, что исходные вещества в смеси находятся в таком соотношении, что химическая реакция способна полностью перевести их в продукты реакции.

Здесь следует отметить, что выполнение Шага 5 технологии оценки пожарной опасности МГ проводится по алгоритмам, описанным в Разделе 4.4.3 (образование и распространение продуктов горения в зоне пламени) и Разделе 4.3.2 (распространение продуктов горения на территории объекта ТЭК).

Для выполнения Шага 6 используются алгоритмы Раздела 4.3.3 (при этом вместо подачи флегматизаторов может рассматриваться подача тушащих газовых смесей).

4.4.2. Численный анализ причин и механизмов воспламенения образовавшейся газовой смеси

Под зажиганием (воспламенением) облаков горючей газовой смеси понимается переход от экзотермического химического превращения, стимулированного внешним воздействием, к самоподдерживающемуся экзотермическому химическому процессу [185]. Воспламенение метановой смеси при аварии на газопроводах, как правило, происходит:

- от точечных источников (например, искра от замыкания в электроприборах, малый локальный источник открытого огня и т.п.);
- линейных источников (например, накаливаемые провода при замыкании высоковольтной линии электропередачи);
- плоскостных источников (например, раскаленная стена сооружения, «стена» открытого огня и т.п.);
- пространственных источников (например, большой костер в зоне аварии или перегретый электроприбор на крановой площадке ЛЧМГ [4]).

При оценочных расчетах пространственные источники фрагментируются, и их фрагменты условно представляются в виде точечных, цилиндрических или плоскостных источников. Это позволяет при моделировании зажигания применять принцип субмоделирования с использованием одномерных субмоделей воспламенения в области полупространства, неограниченного цилиндра или сферы.

Алгоритм численного анализа возможности воспламенения облаков газовой смеси в зоне разрыва трубопровода, предложенный В.Е. Селезневым в середине 90-х годов прошлого века, базируется на совместном использовании принципа субмоделирования и широко известной модели теплового взрыва [185]. Его можно рассматривать как некоторое дополнение к основному методу решения системы дифференциальных уравнений в частных производных (4.35). Действие данного алгоритма распространяется на текущий временной шаг решения системы (4.35). Он предполагает последовательное выполнение двух этапов.

На первом этапе для всей расчетной области решения системы (4.35) проводится анализ температурных и концентрационных полей. По результатам анализа в расчетной области выделяются элементарные подобласти (субмодели: сферы, бесконечные цилиндры, плоские подпространства), соответствующие:

- максимумам температур;
- диапазонам концентраций, при которых происходит горение газовой смеси;
- близости расположения к предполагаемым источникам зажигания, и т.п.

Размеры выделенных подобластей (субмоделей), как правило, **соизмеримы с шагами пространственной расчетной сетки, характерными для зоны их выделения**.

На втором этапе предполагается, что газовой смесь находящаяся внутри субмодели является химически реакционноспособной. Это дает возможность в автоматизированном режиме провести для каждой субмодели одномерный оценочный расчет, результаты которого позволят сделать предположение о возможности или невозможности зажигания газовой смеси за текущий временной шаг решения системы уравнений (4.35).

В соответствии с принципом субмоделирования краевые условия одномерных задач формируются по результатам решения системы (4.35) на рассматриваемом временном

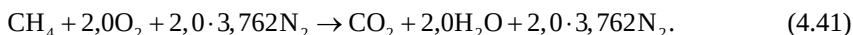
шаге. Учитывая малые размеры субмодели и малое расчетное время ее работы (длительность одного временного шага решения системы (4.35)), смесь в рамках субмодели можно условно считать неподвижной и несжимаемой. Конвективный теплообмен внутри подобласти моделируется подбором эффективных коэффициентов теплопроводности [87, 205, 206].

Запишем нестационарное уравнение теплопроводности для условно неподвижной несжимаемой газовой смеси с учетом внутреннего тепловыделения:

$$C_p(T) \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \cdot x^n \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + F(T, Y), \quad (4.40a)$$

где $C_p(T)$ – теплоемкость смеси при постоянном давлении; $T(x, t)$ – поле абсолютной температуры; x – локальная пространственная координата для субмодели; t – время; ρ – плотность смеси; n – параметр, определяющий геометрию субмодели ($n=0$ – полупространство, $n=1$ – неограниченный цилиндр, $n=2$ – сфера); $\lambda(T)$ – теплопроводность смеси; $Y(x, t)$ – поле относительных массовых концентраций топлива в исходной (непрореагировавшей) смеси. Функция тепловыделения от внутренних источников тепла $F(T, Y)$ задается в виде суммы тепловыделения химической реакции $F_{хим}(T, Y)$ и известного тепловыделения от дополнительных источников $F_{дон}(t)$, например, искры электрического разряда, металлической нити накаливания и т.д.

Теперь перейдем к рассмотрению моделирования процессов зажигания газовой смеси в субмоделях. При этом, в первом приближении, все протекающие химические реакции можно условно заменить одной глобальной экзотермической одностадийной необратимой реакцией горения метана на воздухе [181]:



В глобальной химической реакции (4.41) активно участвуют два обобщенных компонента – метан и кислород. Азот в этом случае играет роль разбавляющей инертной присадки. Такое упрощение вполне приемлемо при численной оценке возможности зажигания и анализа динамики изменения геометрии диффузионного турбулентного факела метановоздушной смеси, горящей на открытой местности [181, 207, 208]. Это соответствует одностадийной необратимой брутто-реакции между топливом и окислителем [162]:

$$Y_{метан} + \xi_{воздух}^{масса} \cdot Y_{воздух} \rightarrow \left(1 + \xi_{воздух}^{масса}\right) \cdot Y_{прод\_гор}, \quad (4.42)$$

где

$$\xi_{воздух}^{масса} = \frac{\xi_{\text{O}_2}^{моль} \cdot M_{\text{O}_2} + \xi_{\text{N}_2}^{моль} \cdot M_{\text{N}_2}}{\xi_{метан}^{моль} \cdot M_{метан}} = \frac{2 \cdot 32 + 2 \cdot 3,762 \cdot 28,15}{1 \cdot 16} = 17,24$$

(в предположении о том, что все рассматриваемые газы являются совершенными [209]);

$\xi_{вещество}^{масса}$ – массовый стехиометрический коэффициент вещества [209], участвующего в химической реакции; $\xi_{метан}^{масса} = 1$; $\xi_{вещество}^{моль}$ – молярный стехиометрический коэффициент вещества или просто стехиометрический коэффициент вещества; $M_{вещество}$ – молярная масса вещества, [кг/кмоль]; $Y_{прод\_гор} = Y_{\text{H}_2\text{O}} + Y_{\text{CO}_2} + Y_{\text{N}_2}$. Такой подход был назван Д.Б. Сполдингом простой химически реагирующей системой [208].

Все вышесказанное позволяет записать выражение для массовой скорости химиче-

ской реакции первого порядка (для метана), подчиняющейся закону Аррениуса, в известном виде [162, 181, 210]:

$$\omega_{\text{метан}}(T, Y) = M_{\text{метан}} \cdot Z \cdot e^{-\frac{E_{\text{активация}}}{R \cdot T}} \cdot \left(\frac{\rho \cdot Y_{\text{метан}}}{M_{\text{метан}}} \right)^{\xi_{\text{метан}}^{\text{моль}}} \cdot \left(\frac{\rho \cdot Y_{\text{воздух}}}{M_{\text{воздух}}} \right)^{\xi_{\text{воздух}}^{\text{моль}}}, \quad (4.40б)$$

где $M_{\text{метан}} = 16 \text{ кг/кмоль}$; $M_{\text{воздух}} = 28,96 \text{ кг/кмоль}$; $Z = \tilde{Z} \cdot T^{\beta}$ – предэкспонент [185] (при расчетах с учетом реакции (4.42) его составляющие равны $\tilde{Z}_{\text{метан}} = 9,66 \cdot 10^{13} \text{ К/с}$ [185, 211], $\beta_{\text{метан}} = -1$ [185, 211]); $E_{\text{активация}}$ – энергия активации (при расчетах в нашем случае она равна $E_{\text{метан}}^{\text{активация}} = 14,8 \text{ МДж/кг}$ [185, 211]); $\xi_{\text{метан}}^{\text{моль}} = 1$ и $\xi_{\text{воздух}}^{\text{моль}} = 9,524$ (см. (4.41)). С учетом (4.40б) функция тепловыделения химической реакции может быть записана следующим образом:

$$F_{\text{хим}}(T, Y) = Q_{\text{горение}} \cdot \omega_{\text{метан}}(T, Y), \quad (4.40в)$$

где $Q_{\text{горение}}$ – массовая теплота сгорания метана; для метана $Q_{\text{горение}} = 52,8 \text{ МДж/кг}$ [212].

Уравнения (4.40а–в) следует дополнить уравнениями изменения относительных массовых концентраций (см. (4.26), (4.42) и [213]):

$$\rho \cdot \frac{\partial Y_{\text{метан}}}{\partial t} = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{\text{метан}}(T) \cdot x^n \cdot \frac{\partial Y_{\text{метан}}}{\partial x} \right) - \omega_{\text{метан}}(T, Y); \quad (4.40г)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial Y_{\text{воздух}}}{\partial t} = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{\text{воздух}}(T) \cdot x^n \cdot \frac{\partial Y_{\text{воздух}}}{\partial x} \right) - \xi_{\text{воздух}}^{\text{масса}} \cdot \omega_{\text{метан}}(T, Y), \quad (4.40д)$$

где $D_{\text{вещество}}(T)$ – обобщенный коэффициент бинарной и турбулентной диффузии компоненты в метановоздушной смеси.

Система уравнений (4.40), дополненная соответствующими краевыми условиями, позволяет определить тепловые и концентрационные поля в субмодели при зажигании реакционноспособной смеси в течение текущего временного шага решения системы (4.35). В качестве начальных условий принимаются заданные распределения температуры и концентрации в исследуемой области. ГУ на границах субмодели могут быть I, II или III рода.

Критерием воспламенения газозводушных смесей в субмодели (а, следовательно, и во всей расчетной области) на исследуемом временном шаге может служить совместное выполнение следующих условий (по В.Е. Селезневу [6]):

- 1) *смещение максимума на профиле поля температуры от внешней границы смеси вглубь нее (для субмодели в виде полупространства) или от центра субмодели (для субмодели в виде сферы или бесконечного цилиндра, в центре которых находится источник зажигания (как правило, в виде электрической искры));*
- 2) *достижение значения максимума на профиле поля температуры величины, равной абсолютной температуре в зоне реакции адиабатической стационарной волны горения смеси (для горения метана на воздухе $T_{\text{ад}} = 2222 \text{ К}$ [181]).*

Решение поставленной выше задачи (4.40) с учетом заданных краевых условий может проводиться МКР с использованием модификации широко известной абсолютно устойчивой неявной разностной схемы Кранка – Николсона [93].

Если при численном исследовании конкретной субмодели выполненлся сформулиро-

ванный выше критерий зажигания, то для всего объема этой субмодели на нескольких последующих временных шагах решения системы уравнений (4.35) задается температура, равная абсолютной температуре в зоне реакции адиабатической стационарной волны горения смеси. Такой подход позволяет моделировать воспламенение газовой смеси при анализе параметров пожаров на МГ. Он активно используется во многих широко известных коммерческих программных продуктах, например, в «Star-CD» [214] и «CFX» [215] (см. также [216]).

Помимо тепловой модели зажигания при анализе возможности воспламенения метановоздушной смеси рядом ученых в области физики горения и взрыва рекомендуется рассматривать возможность инициирования экзотермической химической реакции в смеси активными центрами. Построенные модели цепного воспламенения позволяют исследовать ряд качественных явлений взрывных реакций и «холодного» горения, но, к сожалению, на их основе не было создано метода расчета, который позволил бы провести прямое сопоставление с экспериментом [185]. Поэтому при дальнейшем рассмотрении подходов к моделированию зажигания метановоздушной смеси ограничимся только тепловой моделью зажигания.

Численные эксперименты по моделированию зажигания метановоздушной смеси с использованием рассмотренного выше подхода подробно описаны в работе [4]. Эти эксперименты показали, что численное моделирование на основе тепловой модели способно отразить влияние геометрической формы поджигающей поверхности не только на процесс распространения волны горения по метановоздушной смеси, но и на процесс инициирования в ней интенсивной химической реакции (зажигание).

Вычислительная технология моделирования работы сложных источников зажигания (например, электрических приборов, установленных на МГ) подробно изложена в монографии [4].

В завершение данного Раздела отметим, что согласно диффузионной теории горения газов, скорость потребления горючего лимитируется процессами турбулентного смешения компонентов, тогда как сами реакции считаются бесконечно быстрыми (скорость реакции может, например, описываться моделью распада турбулентных вихрей [207]). Также предполагается, что горение метановоздушной смеси в газовой фазе определяется не только процессами диффузии метана и воздуха, но и зависит от процессов турбулентного переноса [185]. Это означает, что, как и в первоначально разработанной Д.Б. Сполдингом модели «распада вихря», скорость распада турбулентности и скорость реакции горения пропорциональны масштабу времени распада крупных вихрей $\tau_e = K/\varepsilon$ (см. (4.35)) [217].

Условно считается также, что объемная скорость реакции горения метановоздушной смеси в общем случае пропорциональна наименьшей из осредненных концентраций метана, воздуха и продуктов горения (см. (4.42)) [162, 171]:

$$\omega_{\text{метан}} = \rho \cdot A \cdot \frac{\varepsilon}{K} \cdot \min \left(Y_{\text{метан}}, \frac{Y_{\text{воздух}}}{\xi_{\text{масса}}}, \frac{B \cdot Y_{\text{прод\_гор}}}{1 + \xi_{\text{масса}}} \right), \quad (4.43)$$

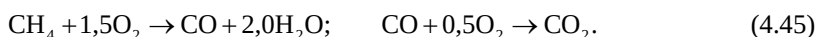
где A, B – константы диффузионной модели горения газов [171]; $Y_{\text{прод\_гор}} = 1 - Y_{\text{метан}} - Y_{\text{воздух}}$. В работе [171] предлагается использовать следующие значения констант в (4.43): $A = 4,0$ и $B = 0,5$. При оценочных расчетах, в которых учитываются обобщенный продукт горения, последний член в скобках в уравнении (4.43) может не рассматриваться, чтобы не усложнять расчеты [171]. Тогда формулу (4.43), с учетом вышеизложенного и материалов монографии [162], можно преобразовать к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{\text{метан}} = \rho \cdot A \cdot \frac{\varepsilon}{K} \cdot \min \left(Y_{\text{метан}}, \frac{Y_{\text{воздух}}}{\xi_{\text{масса}} \cdot \xi_{\text{воздух}}} \right), \quad \text{если } НКПР \leq Y_{\text{метан}} \leq ВКПР; \\ \omega_{\text{метан}} = 0, \quad \text{в противном случае.} \end{array} \right. \quad (4.44)$$

4.4.3. Численный анализ параметров пожара на газопроводе в условиях открытой местности

Современная модель химической кинетики реакции образования NO_x при горении метана в воздухе требует учета 196 прямых и обратных (196+196) элементарных химических реакций, в которых участвуют 32 компонента [218]. Среди них есть компоненты исходной смеси – метан CH_4 и газы, образующие воздух: O_2 , N_2 ; продукты реакции горения H_2O , CO_2 , CO , H_2 ; радикалы, играющие существенную роль в сложном протекании реакции горения – H , O , OH , HO_2 , H_2O_2 , CH_3 , CHO , CH_2O , CH_5O ; различные азотосодержащие вещества, которые могут образовываться при высоких температурах, – N , NO_x , HN , HNO , HCN и т.д. [219–221]; наиболее важные из веществ и радикалов, входящих в цепочки образования оксидов азота, – CH , CH_2 , C_2H , C_2H_2 , C_2H_3 , C_2H_4 , C_2H_5 , C_2H_6 . Здесь следует отметить, что в работе [222] предлагается рассматривать модели горения метановоздушной смеси, в которых уже рассматриваются 217 обратимых реакций с участием 35 компонентов, а в работе [181] – 288 обратимых реакций между 34 компонентами.

Основной проблемой при использовании детальных механизмов реакции является необходимость решения уравнения сохранения для каждого компонента и применения специального модуля кинетики химических реакций для правильного расчета суммарного тепловыделения реакций во времени. Поэтому в нашем случае предпочтительно использовать упрощенные схемы химических реакций, которые описывают реагирующую систему при помощи небольшого числа компонентов [181]. Это можно сделать, применяя сокращенные механизмы реакций, которые основаны на предположениях о квазистационарных состояниях и частичных равновесиях [223]. В качестве таких примеров можно представить глобальную экзотермическую одностадийную необратимую реакцию горения метана на воздухе (4.41) или обобщенные упрощенные реакции, описывающие процессы догорания сажи и имеющие вид:



Более подробно процессы сажеобразования изложены в монографии [181].

Для численной оценки параметров горения метановоздушной смеси на открытой местности воспользуемся классической турбулентной моделью диффузионного горения предварительно перемешанных газов в режиме турбулентного факела [181]. В данной модели горения фронт пламени локализуется на границе раздела «горючее – окислитель». Физика, лежащая в основе этого явления, достаточно проста. Горючее и окислитель диффундируют в зону пламени, в которой химические реакции преобразуют их в продукты реакций, что сопровождается выделением энергии. Процессы взаимной диффузии горючего и окислителя ускоряются за счет интенсивного турбулентного перемешивания. Продукты реакций диффундируют и переносятся турбулентными вихрями, а энергия рассеивается из зоны реакций как в горючее, так и в окислитель.

Здесь следует отметить, что математическая модель турбулентного горения метановоздушной смеси не претерпевает принципиальных изменений при уменьшении или увеличении числа компонентов химической реакции. Поэтому для упрощения изложения материала данного Раздела (без потери общности рассуждений) будем рассматривать в качестве сокращенного механизма реакции формулу (4.41). В соответ-

ствии с рекомендациями работ [181, 223] оценка скорости химической реакции (4.41) будет проводиться согласно широко известному закону Аррениуса (см. (4.40б)).

Для учета влияния процессов турбулентного перемешивания газовой смеси на параметры факела применяются уравнения Рейнольдса (см., (4.35)). Таким образом, **модель турбулентного диффузионного горения метановоздушной смеси на открытой местности** можно записать в виде:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = 0; \quad (4.46a)$$

$$\rho \cdot \frac{DY_{\text{метан}}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\mu + \mu_T}{Sc_{\text{метан}}} \cdot \vec{\nabla} Y_{\text{метан}} \right) - \omega_{\text{метан}}; \quad (4.46б)$$

$$\rho \cdot \frac{DY_{\text{воздух}}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\mu + \mu_T}{Sc_{\text{воздух}}} \cdot \vec{\nabla} Y_{\text{воздух}} \right) - \xi_{\text{воздух}} \cdot \omega_{\text{метан}}; \quad (4.46в)$$

$$Y_{\text{прод\_гор}} = 1 - Y_{\text{метан}} - Y_{\text{воздух}}; \quad (4.46г)$$

$$\omega_{\text{метан}} = M_{\text{метан}} \cdot Z \cdot \exp \left(-\frac{E_{\text{активация}}}{R \cdot T} \right) \cdot \left(\frac{\rho \cdot Y_{\text{метан}}}{M_{\text{метан}}} \right)^{\xi_{\text{моль}} \cdot \frac{\rho \cdot Y_{\text{метан}}}{M_{\text{метан}}}} \cdot \left(\frac{\rho \cdot Y_{\text{воздух}}}{M_{\text{воздух}}} \right)^{\xi_{\text{моль}} \cdot \frac{\rho \cdot Y_{\text{воздух}}}{M_{\text{воздух}}}}; \quad (4.46д)$$

$$\rho \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = (\rho - \rho_{\text{атм}}) \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\mu + \mu_T}{\mu} \cdot \tau \right) - \frac{2}{3} \cdot \vec{\nabla} (\rho \cdot K); \quad (4.46е)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{DH}{Dt} = & \frac{\partial P}{\partial t} + Q_{\text{горение}} \cdot \omega_{\text{метан}} - S_{\text{рад}} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho \cdot \vec{g} \cdot \vec{V} + \\ & + \vec{\nabla} \cdot \left((\lambda + \lambda_T) \cdot \vec{\nabla} T + \frac{\mu + \mu_T}{\mu} \cdot \tau \cdot \vec{V} - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot K \cdot \vec{V} \right) + \sum_{m=1}^{N^*} \vec{\nabla} \cdot \left[e_m \cdot \frac{\mu + \mu_T}{Sc_m} \cdot \vec{\nabla} Y_m \right]; \end{aligned} \quad (4.46ж)$$

$$\rho \cdot \frac{DK}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\mu + \mu_T}{Pr_K} \cdot \vec{\nabla} K \right] + G - \rho \cdot \varepsilon - \frac{\mu_T}{\rho \cdot Pr_T} \cdot (\vec{g} \cdot \vec{\nabla} \rho); \quad (4.46з)$$

$$\rho \cdot \frac{D\varepsilon}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\mu + \mu_T}{Pr_\varepsilon} \cdot \vec{\nabla} \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{K} \cdot \left(C_2 \cdot G - C_3 \cdot \rho \cdot \varepsilon - C_1 \cdot \frac{\mu_T}{\rho \cdot Pr_T} \cdot (\vec{g} \cdot \vec{\nabla} \rho) \right); \quad (4.46и)$$

$$S_{\text{рад}} = \sum_{j=1}^L \varphi_j(Y_j) \cdot \int_{\nu=0}^{\infty} \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_{\nu,j}^r d\nu, \quad \text{где } \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_{\nu,j}^r = \chi_{\nu,j} \cdot \left(4 \cdot \pi \cdot I_{\nu b}(T) - \int_{4 \cdot \pi} I_{\nu,j}(s, \vec{\theta}, t) d\vartheta \right); \quad (4.46к)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{\text{излучение}}} \cdot \frac{\partial I_{\nu,j}(s, \vec{\theta}, t)}{\partial t} + \vec{\theta} \cdot \vec{\nabla} I_{\nu,j}(s, \vec{\theta}, t) + (\chi_{\nu,j} + \beta_{\nu,j}) \cdot I_{\nu,j}(s, \vec{\theta}, t) = \\ = \chi_{\nu,j} \cdot I_{\nu b}(T) + \frac{\beta_{\nu,j}}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{4 \cdot \pi} \gamma_{\nu,j}(\vec{\theta}, \vec{\theta}') \cdot I_{\nu,j}(s, \vec{\theta}', t) d\vartheta', \quad j = \overline{1, L}; \end{aligned} \quad (4.46л)$$

$$\text{для грунта: } C_{\text{грунт}} \cdot \rho_{\text{грунт}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda_{\text{грунт}} \cdot \vec{\nabla} T); \quad (4.46м)$$

$$P = \rho \cdot R \cdot T + \rho_{атм} \cdot g \cdot (x_3 - x_{3,0}); \quad R = R_0 \cdot \sum_{m=1}^{N^*} \frac{Y_m}{M_m}; \quad (4.46н)$$

$$H = C_p \cdot T + \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2}; \quad \alpha = \alpha_{смесь} = \sum_{m=1}^{N^*} f_{\alpha}(Y_m, \alpha_m), \quad \text{где } \alpha \equiv \mu, \lambda, C_p, C_v;$$

$$\mu = \left(\frac{T}{273,15} \right)^{3/2} \cdot \frac{273,15 + C_s}{T + C_s} \cdot \mu_0; \quad \mu_T = \frac{C_{\mu} \cdot \rho \cdot K^2}{\varepsilon}; \quad \lambda_T = \frac{C_p \cdot \mu_T}{Pr_T}; \quad (4.46о)$$

$$\tau_{ij} = \mu \cdot \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]; \quad Sc_m = \frac{\mu}{\rho \cdot D_m}; \quad (4.46п)$$

$$G = \mu_T \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right\} - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot K \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad (4.46р)$$

где $m=1$ соответствует метану, $m=2$ – воздуху, $m=3$ – продуктам горения; N^* – число компонент в газовой смеси, в данном случае $N^* = 3$; $S_{рад}$ – радиационный источниковый член; L – количество рассматриваемых раскаленных газов (например, газообразных продуктов горения); $\varphi_j(Y_j)$ – заданная весовая функция; ν – частота излучения; $\chi_{\nu,j}$ – спектральный коэффициент поглощения излучения j -ым газом; $I_{vb}(T)$ – спектральная интенсивность излучения абсолютного черного тела при температуре T в вакууме; $I_{\nu,j}$ – спектральная интенсивность излучения j -го раскаленного газа в точке с координатой s ($j = \overline{1, L}$); s – длина пути (координата), измеряемая вдоль распространения излучения $\vec{\theta}$; $\vec{\theta}$ – направление распространения излучения; $c_{излучение}$ – скорость распространения излучения в среде; $\beta_{\nu,j}$ – спектральный коэффициент рассеяния излучения j -ым газом; $\gamma_{\nu,j}(\vec{\theta}, \vec{\theta}')$ – спектральная индикатриса рассеяния; $\vec{\theta}'$ – осевая направляющая телесного угла $d\Omega'$; индекс «грунт» означает, что параметры относятся к грунту, включенному в расчетную область; остальные обозначения – см. (4.7), (4.17 – 4.30), (4.35), (4.40) и (4.42).

Здесь следует отметить, что вместо уравнения (4.46д), для повышения точности моделирования, следовало бы использовать уравнение, записанное для осредненной скорости реакции (см. Раздел 4.3.1). Механизм такого осреднения с использованием статистического подхода изложен в работе [181]. Его применение приводит к появлению в системе (4.46) нового уравнения переноса функции плотности вероятности, что существенно осложняет решение практических задач (на современном этапе развития и доступности компьютерной техники это делает решение производственных задач ТЭК практически невозможным). Поэтому в данном случае мы вынуждены идти на снижение адекватности моделирования процессов горения и использовать уравнение (4.46д). Аналогичный упрощенный подход применяется во многих широко известных коммерческих программных продуктах, например, в «Star-CD» [214] и «CFX» [215].

Уравнения (4.46) дополняются соответствующими **граничными условиями** в зависимости от конкретной постановки задачи:

- массовый расход, температура, относительные концентрации, кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации задаются **на границах расчетной области**

ти, где метан выбрасывается в атмосферу из газопровода;

- условия, соответствующие непроницаемой неподвижной стенке, и условия сопряжения, связывающие поток лучистой энергии, тепловой поток в грунт и конвективный теплообмен в пристенном слое задаются *на поверхностях рельефа и кратера, образующегося при разрыве подземного трубопровода;*
- поле ветра, относительные массовые концентрации, температура, кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации задаются *на «входной» боковой границе;*
- пьезометрическое давление, диффузионные потоки температуры, относительных концентраций, кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации задаются *на «выходной» боковой границе;*
- поле ветра, температура, относительные концентрации, кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации задаются *на верхней границе и на «пассивных» боковых границах* в случае втекания газовой среды через эти границы в расчетную область; в случае вытекания среды из расчетной области задаются условия «выходной» границы;
- граничные условия третьего рода, связывающие потоки лучистой энергии от раскаленных продуктов горения с изменением объемной плотности излучения этих газов, задаются *на всех атмосферных границах;*
- температура задается *в глубине грунта на нижней границе расчетной области* (см. (4.46м));
- адиабатические условия задаются *на боковых границах грунта.*

В качестве *начальных условий* выбирается квазистационарное распределение параметров, удовлетворяющее граничным условиям при отсутствии истечения газа из аварийного трубопровода.

Если в расчетной области на поверхности грунта находится объект (например, участок соседнего газопровода), подверженный тепловому воздействию от пламени, то необходимо задать дополнительные условия сопряжения. Эти условия будут связывать поток лучистой энергии, тепловой поток в стенке трубы и конвективный теплообмен в пристенном слое при заданном поле степеней черноты внешней стенки рассматриваемого участка газопровода. Термодинамические граничные условия третьего рода задаются на внутренней поверхности стенки газопровода. Температура природного газа в трубе оценивается в результате решения сопряженной задачи с использованием ГДС (см. Главу 2 и [224]). Начальные термодинамические условия задаются в виде некоторого известного поля температур стенки газопровода и природного газа внутри него.

Для решения (4.46), как правило, применяется интегро-интерполяционный метод А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [70, 94] (или его упрощенная версия – МКО [71, 72, 92]), дополненный:

- модифицированным дифференциальным алгоритмом средних потоков, предложенным Н.Н. Пономаревым и Н.А. Рубцовым [225], и МКЭ [48] для решения уравнения теплопроводности грунта;
- статистическими алгоритмами Монте-Карло [226, 227] и алгоритмами численного решения модели взвешенной суммы серых газов, предложенной Г. Хоттелем и А. Сарофимом [228].

При прямом моделировании пожаров на газопроводах наиболее сложным и трудоемким является решение интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения (4.46л). Одним из перспективных путей решения данного типа уравнений являются так называемые дифференциальные методы [225, 229–232]. Они базируются на преобразованиях

уравнений (4.46л) и соответствующих краевых условий в систему обыкновенных дифференциальных уравнений [233]. При этом в качестве искомым функций выступают различные угловые моменты от поля интенсивности излучения, а коэффициенты системы (коэффициенты переноса) оказываются функционалами решения задачи [225].

В зависимости от выбора тех или иных допущений относительно коэффициентов переноса получаются различные приближения исходной задачи. Таким образом, несмотря на строгость и полную эквивалентность дифференциальной задачи исходной, дифференциальные методы относятся к приближенным методам, в которых, как правило, коэффициенты переноса уточняются в процессе итеративного решения задачи [230, 234].

При моделировании пожаров на газопроводах наиболее широкими возможностями (из класса дифференциальных методов) обладает модифицированный метод средних потоков (СП-метод), предложенный Н.Н. Пономаревым [225, 231, 235]. Описание СП-метода для общего случая решения уравнений (4.46л) является достаточно объемным. Поэтому, не загромождая изложение материала (но, не теряя общности рассуждений), познакомимся с данным методом на примере решения краевой осесимметричной задачи переноса излучения для плоскопараллельного случая. Здесь излучение распространяется в слое поглощающей, излучающей и рассеивающей среды с непрозрачными диффузионно излучающими и диффузионно отражающими границами и заданным распределением температур $T(\bar{X})$. Представленная постановка задачи иллюстрирует математическую сложность всей проблемы определения интенсивности излучения в поглощающей, излучающей и рассеивающей среде при соответствующих ГУ [235].

В этом случае интегро-дифференциальные уравнения переноса излучения (4.46л) следует преобразовать к более простому виду [235]:

$$\mu \cdot \frac{\partial I_v(\tau_v, \mu)}{\partial \tau_v} + I_v(\tau_v, \mu) = (1 - \omega_v) \cdot n_v^2 \cdot B_v(T) + \frac{\omega_v}{2} \cdot \int_{-1}^1 \gamma_v(\mu, \mu') \cdot I_v(\tau_v, \mu') d\mu', \quad (4.47)$$

$$0 < \tau_v < \tau_{0,v}, \quad -1 \leq \mu \leq 1;$$

$$I_v^+(0, \mu) = \varepsilon_{1,v} \cdot n_v^2 \cdot B_v(T_1) + 2 \cdot r_{1,v} \cdot \int_0^1 I_v^-(0, -\mu') \cdot \mu' d\mu', \quad \mu > 0; \quad (4.48)$$

$$I_v^-(\tau_{0,v}, \mu) = \varepsilon_{2,v} \cdot n_v^2 \cdot B_v(T_2) + 2 \cdot r_{2,v} \cdot \int_{-1}^0 I_v^+(\tau_{0,v}, \mu') \cdot \mu' d\mu', \quad \mu < 0, \quad (4.49)$$

где I_v – спектральная интенсивность излучения; I_v^+ и I_v^- – спектральная интенсивность излучения в переднюю и заднюю полусферы соответственно;

$$\int_{-1}^1 I_v(\tau_v, \mu') d\mu' = \int_0^1 I_v^+(\tau_v, \mu') d\mu' + \int_{-1}^0 I_v^-(\tau_v, \mu') d\mu'; \quad (4.50)$$

μ – косинус угла между направлением распространения излучения и осью координат x ;

$$B_v(T) = \frac{2 \cdot h \cdot \nu^3}{c_{\text{излучение}}^2 \cdot [\exp(h \cdot \nu / k \cdot T - 1)]} \quad (4.51)$$

– функция излучения абсолютно черного тела в среду, отличную от вакуума (функция Планка) [236]; h – постоянная Планка; $\tau_v = k_v \cdot x$ и $\tau_{0,v} = k_v \cdot \delta$ – спектральные оптические глубина и толщина слоя соответственно; δ – физическая толщина слоя

(характерный размер); $k_\nu = \chi_\nu + \beta_\nu$ – спектральный коэффициент ослабления излучения [236]; χ_ν – спектральный коэффициент поглощения излучения; β_ν – спектральный коэффициент рассеяния излучения; $\omega_\nu = \beta_\nu/k_\nu$ – спектральное альbedo однократного рассеяния (число Шустера) [236]; n_ν – спектральный показатель преломления; $\varepsilon_{1(2),\nu}$ и $r_{1(2),\nu}$ – спектральные полусферические диффузионные излучательная и отражательная способности границ, связанные между собой соотношением $\varepsilon_{1(2),\nu} = 1 - r_{1(2),\nu}$ [225]. Спектральная индикатриса рассеяния $\gamma_\nu(\mu, \mu')$ постулируется в виде [236]:

$$\gamma_\nu(\mu, \mu') = \sum_{l=0}^L a_l \cdot P_l(\mu) \cdot P_l(\mu'), \quad a_0 = 1, \quad (4.52)$$

где P_l – полином Лежандра порядка l ; a_l – коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра. Здесь следует отметить, что в инженерных приложениях разложение индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра, как правило, не превышает второго порядка (т.е. моделируется изотропное рассеивание, линейное анизотропное рассеивание и релеевское рассеивание) [214].

Интегрируя последовательно уравнение переноса излучения (4.47) и граничные условия (4.48) и (4.49) по угловой переменной μ с весом 1 и μ соответственно, после несложных преобразований получим эквивалентную систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений [225, 235]:

$$\frac{d}{d\tau_\nu} (\Phi_\nu^+ - \Phi_\nu^-) + (1 - \omega_\nu) \cdot (m_\nu^+ \cdot \Phi_\nu^+ - m_\nu^- \cdot \Phi_\nu^-) = (1 - \omega_\nu) \cdot n_\nu^2 \cdot \Phi_{0,\nu}; \quad (4.53)$$

$$\frac{d}{d\tau_\nu} (m_\nu^+ \cdot \delta_\nu^+ \cdot \Phi_\nu^+ - m_\nu^- \cdot \delta_\nu^- \cdot \Phi_\nu^-) + (1 - \omega_\nu \cdot \bar{\zeta}_\nu) \cdot (\Phi_\nu^+ - \Phi_\nu^-) = 0 \quad (4.54)$$

с граничными условиями:

$$\tau_\nu = 0: \quad \Phi_\nu^+ = 0, 25 \cdot \varepsilon_{1,\nu} \cdot n_\nu^2 \cdot \Phi_{0,1,\nu} + \tau_{1,\nu} \cdot \Phi_\nu^-; \quad (4.55)$$

$$\tau_\nu = \tau_{0,\nu}: \quad \Phi_\nu^- = 0, 25 \cdot \varepsilon_{2,\nu} \cdot n_\nu^2 \cdot \Phi_{0,2,\nu} + \tau_{2,\nu} \cdot \Phi_\nu^+, \quad (4.56)$$

где

$$\Phi_\nu^\pm(\tau_\nu) = \pm \frac{\pi \cdot \int_{0(-1)}^{1(0)} I_\nu(\tau_\nu, \mu') \cdot \mu' d\mu'}{2 \cdot \sigma \cdot T_r^4} \quad (4.57)$$

– безразмерные плотности полусферических потоков [237]; σ – постоянная Стефана – Больцмана;

$$m_\nu^\pm(\tau_\nu) = \pm \frac{\int_{0(-1)}^{1(0)} I_\nu(\tau_\nu, \mu') d\mu'}{\int_{0(-1)}^{1(0)} I_\nu(\tau_\nu, \mu') \cdot \mu' d\mu'}, \quad \delta_\nu^\pm(\tau_\nu) = \pm \frac{\int_{0(-1)}^{1(0)} I_\nu(\tau_\nu, \mu') \cdot (\mu')^2 d\mu'}{\int_{0(-1)}^{1(0)} I_\nu(\tau_\nu, \mu') d\mu'} \quad (4.58)$$

– коэффициенты переноса, которые являются функционалами решения и находятся в

процессе итераций; $\Phi_{0,\nu} = B_\nu / (4 \cdot \sigma \cdot T_r^4)$ – безразмерная плотность потока равновесного излучения; T_r – определяющая температура ($T_r = T(0)$); $\bar{\zeta}_\nu = \frac{1}{2} \cdot \int \gamma_\nu(\mu, \mu') \cdot \mu' d\mu'$ – средний косинус угла рассеяния. Из функций Φ_ν^+ и Φ_ν^- находятся плотность результирующего потока излучения [225, 236]:

$$\Phi_\nu = \Phi_\nu^+ - \Phi_\nu^- \quad (4.59)$$

и плотность потока падающего объемного излучения

$$\Phi_{*\nu} = m_\nu^+ \cdot \Phi_\nu^+ - m_\nu^- \cdot \Phi_\nu^-. \quad (4.60)$$

Ограничиваясь $L = 2$ в разложении (4.52), из формального решения задачи (4.47–4.49) можно получить аналитические соотношения для коэффициентов переноса [225]:

$$m_\nu^\pm(\tau_\nu) = \pm \frac{S_0^\pm(\tau_\nu)}{S_1^\pm(\tau_\nu)}; \quad \delta_\nu^\pm(\tau_\nu) = \pm \frac{S_2^\pm(\tau_\nu)}{S_0^\pm(\tau_\nu)}, \quad (4.61)$$

где обобщенные моменты имеют следующий вид (индекс « ν » для краткости записи опущен) [236]:

$$S_n^+(\tau) = c_1 \cdot E_{n+2}(\tau) + \int_0^\tau [\Psi_1(\tau') \cdot E_{n+1}(\tau - \tau') - \Psi_2(\tau') \cdot E_{n+2}(\tau - \tau') + \Psi_3(\tau') \cdot E_{n+3}(\tau - \tau')] d\tau', \quad (4.62)$$

$$S_n^-(\tau) = (-1)^n \cdot \{c_2 \cdot E_{n+2}(\tau) + \int_\tau^{\tau_0} [\Psi_1(\tau') \cdot E_{n+1}(\tau - \tau') - \Psi_2(\tau') \cdot E_{n+2}(\tau - \tau') + \Psi_3(\tau') \cdot E_{n+3}(\tau - \tau')] d\tau'\},$$

$n = 0, 1, 2.$

(4.63)

Здесь

$$c_1 = \frac{\varepsilon_1 \cdot \Phi_0(0)}{2} + 2 \cdot r_1 \cdot \Phi^-(0) = m^+(0) \cdot \Phi^+(0); \quad (4.64)$$

$$c_2 = \frac{\varepsilon_2 \cdot \Phi_0(\tau_0)}{2} + 2 \cdot r_2 \cdot \Phi^+(0) = -m^-(0) \cdot \Phi^-(0); \quad (4.65)$$

$$\Psi_1(\tau) = \frac{1-\omega}{2} \cdot \Phi_0(\tau) + \frac{\omega}{2} \cdot [m^+(\tau) \cdot \Phi^+(\tau) - m^-(\tau) \cdot \Phi^-(\tau)] - \frac{1}{3} \cdot \Psi_3(\tau); \quad (4.66)$$

$$\Psi_2(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot a_1 \cdot [\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)]; \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \Psi_3(\tau) = & \frac{3}{8} \cdot \omega \cdot a_2 \cdot \{3 \cdot [m^+(\tau) \cdot \delta^+(\tau) \cdot \Phi^+(\tau) - m^-(\tau) \cdot \delta^-(\tau) \cdot \Phi^-(\tau)]\} - \\ & - [m^+(\tau) \cdot \Phi^+(\tau) - m^-(\tau) \cdot \Phi^-(\tau)], \end{aligned} \quad (4.68)$$

где

$$E_n(\tau) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) \cdot \mu^{n-2} d\mu \quad (4.69)$$

– интегрально-экспоненциальная функция.

Уравнения (4.53 – 4.56) называют СП-системой [225]. Метод ее решения заключается в следующем [225]. В качестве начального приближения используются осредненные значения коэффициентов переноса $m_\nu^\pm = \pm 2$, $\delta_\nu^\pm = \pm 1/3$, полученные из соотношений (4.58) в предположении изотропности поля излучения в соответствующих полусферах. Далее решается СП-система и коэффициенты переноса уточняются по формулам (4.61 – 4.63), затем снова решается система (4.53 – 4.56). Итерационный процесс повторяется до выполнения критерия завершения итераций. На каждом шаге итераций краевая задача (4.53 – 4.56) решается методом матричной прогонки [225].

При корректной постановке задачи радиационного теплообмена необходимо принимать во внимание зависимость оптических свойств среды от частоты излучения [236]. Для этой цели можно использовать модель спектральных полос [236]. Согласно данной модели коэффициенты поглощения, а также свойства поглощения (отражения) границ и все оптико-геометрические инварианты излучения предполагаются постоянными в пределах каждой частотной полосы $\Delta\nu$.

При использовании модели спектральных полос СП-метод легко обобщается на случай селективных свойств среды [225, 235]. Краевая задача (4.53 – 4.56) решается для каждой из $j = 1, \dots, J$ выделенных полос $\Delta\nu_j$. При этом плотность потока равновесного излучения в полосе вычисляется по формуле [225]:

$$\Phi_{0,j} = \frac{T^4}{T_r^4} \cdot \varphi_b(\Delta\nu_j), \quad (4.70)$$

где

$$\varphi_b(\Delta\nu_j) = \frac{15}{\pi^4} \cdot \int_{h\nu_{j-1}/kT}^{h\nu_j/kT} \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx,$$

$\varphi_b(\Delta\nu_j)$ – функция Дебая. Полусферические потоки определяются выражениями [225]:

$$\Phi_j^\pm(\tau_j) = \pm \frac{\int_{\Delta\nu_j} 2 \cdot \pi \cdot \int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) \cdot \mu d\mu d\nu}{4 \cdot \sigma \cdot T_r^4}. \quad (4.71)$$

Плотность результирующего интегрального потока излучения находится из соотношения (см. (4.59)):

$$\Phi = \sum_{j=1}^J (\Phi_j^+ - \Phi_j^-). \quad (4.72)$$

При рассмотрении модельного серого излучения индексы « ν » опускаются.

Модели серых полос нашли свое отражение в так называемой модели взвешенной суммы серых газов, предложенной Г. Хоттелем и А. Сарофимом [228]. В рамках данной модели, в соответствии с рекомендациями работы [228], радиационный источниковый член (4.46к) записывается в виде:

$$S_{rad} = \sum_{j=1}^L k_j \cdot (a_j \cdot E_b - E_j), \quad (4.73)$$

где k_j – интегральная поглощательная способность, или интегральный коэффициент поглощения излучения j -ым газом (продуктом горения); a_j – заданные весовые ко-

эффиценты (они играют в уравнении (4.73) роль весовых функций $\varphi_j(Y_j)$ (см. (4.46к))) [171, 207]; E_b – объемная плотность излучения абсолютно черного тела; E_j – объемная плотность излучения j -ого газа. Для оценки значений интегральных коэффициентов k_j используются различные способы (например, табличный полуэмпирический способ их расчета). Значения данных коэффициентов можно получить, применяя закон Кирхгофа.

Для таких продуктов горения метановоздушной смеси как водяной пар, углекислый газ и сажа значения интегральных коэффициентов теплового излучения газовых объемов (степеней черноты) ε_j (следовательно, в соответствии с законом Кирхгофа [236], и интегральных коэффициентов поглощения излучения k_j) при моделировании могут находиться с использованием экспериментальных номограмм [238].

При численном анализе пожара с использованием уравнения (4.73) применяется широко известное толсто-тонкое приближение, в котором для оптически толстых и оптически тонких компонентов решение осуществляется на основе диффузионного приближения и модели объемного высвечивания соответственно [236].

Если оптическая толщина j -го серого газа τ_j меньше некоторой заданной граничной величины $\tau_{\text{крит}}$, то используется приближение объемного высвечивания. Объемная интенсивность излучения j -го серого газа считается малой по сравнению с интенсивностью излучения абсолютно черного тела, поэтому (4.73) с учетом закона Кирхгофа преобразуется к виду [236]:

$$S_{\text{рад}} = \sum_{j=1}^L 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_j \cdot a_j \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{\text{атм}}^4), \quad (4.74)$$

где σ – константа Стефана – Больцмана. С другой стороны, для серых газов, для которых факел является оптически толстым ($\tau_j > \tau_{\text{крит}}$), используется диффузионное приближение. Разложение интенсивности излучения в ряд по сферическим гармоникам показывает, что в первом приближении поток лучистой энергии пропорционален градиенту плотности энергии излучения, т.е., $\vec{q}_j^r = -\frac{1}{3 \cdot \varepsilon_j} \cdot \vec{\nabla} E_j$ [236]. Тогда (см. (4.74))

$$S_{\text{рад}} = \sum_{j=1}^L \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_j^r = - \sum_{j=1}^L \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot \varepsilon_j} \cdot \vec{\nabla} E_j \right), \quad (4.75)$$

где неизвестные функции E_j определяются в результате решения дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа (см. (4.46к) и (4.75)):

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot \varepsilon_j} \cdot \vec{\nabla} E_j \right) = \varepsilon_j \cdot (E_j - a_j \cdot E_b). \quad (4.76)$$

Для решения уравнения (4.76) необходимо задать граничные условия на всех поверхностях, ограничивающих расчетную область. На каждой из таких поверхностей, характеризуемой определенной температурой и степенью черноты $\varepsilon_{\text{граница}}$, граничное условие третьего рода записывается в виде [171]:

$2 \cdot (\vec{q}_j^r, \vec{n}) = \frac{\varepsilon_{\text{граница}}}{2 - \varepsilon_{\text{граница}}} \cdot (a_j \cdot E_{b, \text{граница}} - E_{j, \text{граница}})$, где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали; индексом «граница» обозначены значения параметров на границе области. На оси

симметрии (в случае осесимметричной постановки задачи) для искомой функции ставится условие Неймана. На внешних границах области и подстилающей поверхности используется значение $\varepsilon_{\text{граница}} = 1$.

В соответствии с рекомендациями работ [171, 207], для повышения надежности метода взвешенной суммы серых газов [228] после выполнения нескольких десятков шагов данного метода проводится уточняющее решение (4.46л) с использованием статистических алгоритмов Монте-Карло [226, 227].

Для проверки справедливости изложенных выше теоретических основ решения производственных задач по оценке пожарной опасности промышленных газопроводов проводился сравнительный анализ результатов натурных измерений и численной оценки геометрических параметров пламени бытовой метановоздушной горелки и факелов, возникающих при разрушениях газопроводов. Этот сравнительный анализ подтвердил хорошую адекватность используемых моделей реальным объектам [4, 6, 46].

Пример практического моделирования пожара на газопроводе (рис. 4.7) в трехмерной постановке представлен на рис. 4.8 (а, б, в – различные ракурсы факела) [57].

На рис. 4.8 под различными углами зрения показан трехмерный временной срез поля относительных массовых концентраций метана, соответствующих стехиометрической смеси ($Y = 0,0548$ для метана [6]). Такой выбор значения относительной массовой концентрации объясняется тем, что в этом случае нам удастся оценить минимальные размеры факела. На рис. 4.7 и 4.8 мы видим хорошее качественное совпадение формы пламени в реальности и при численном моделировании. Расчет параметров пожара в данном случае был проведен В.Е. Селезневом и К.И. Дикаревым.

Наиболее адекватный анализ зон теплового поражения при авариях на газопроводах можно было бы проводить, решая систему уравнений (4.46) для многокилометровых расчетных областей. Однако, такой подход на современном уровне развития вычислительной техники является трудно осуществимым при решении производственных задач по анализу пожарной и промышленной безопасности объектов ТЭК. Поэтому в данном случае целесообразно воспользоваться рядом упрощений, применяемых в инженерных подходах к оценке геометрии зон поражения.

Главное упрощение основано на том, что для оценки максимального уровня последствий для людей и сооружений, находящихся вблизи места аварии, анализ полей излучения вне зоны пламени проводится в предположении оптически тонкого слоя (см. (4.74)). В этом случае расчетную область можно разбить на две подобласти: подобласть пламени и подобласть теплового поражения излучением.



Рис. 4.7. Пример пожара на газопроводе (фото – интернет-газета «gazeta.ru»)

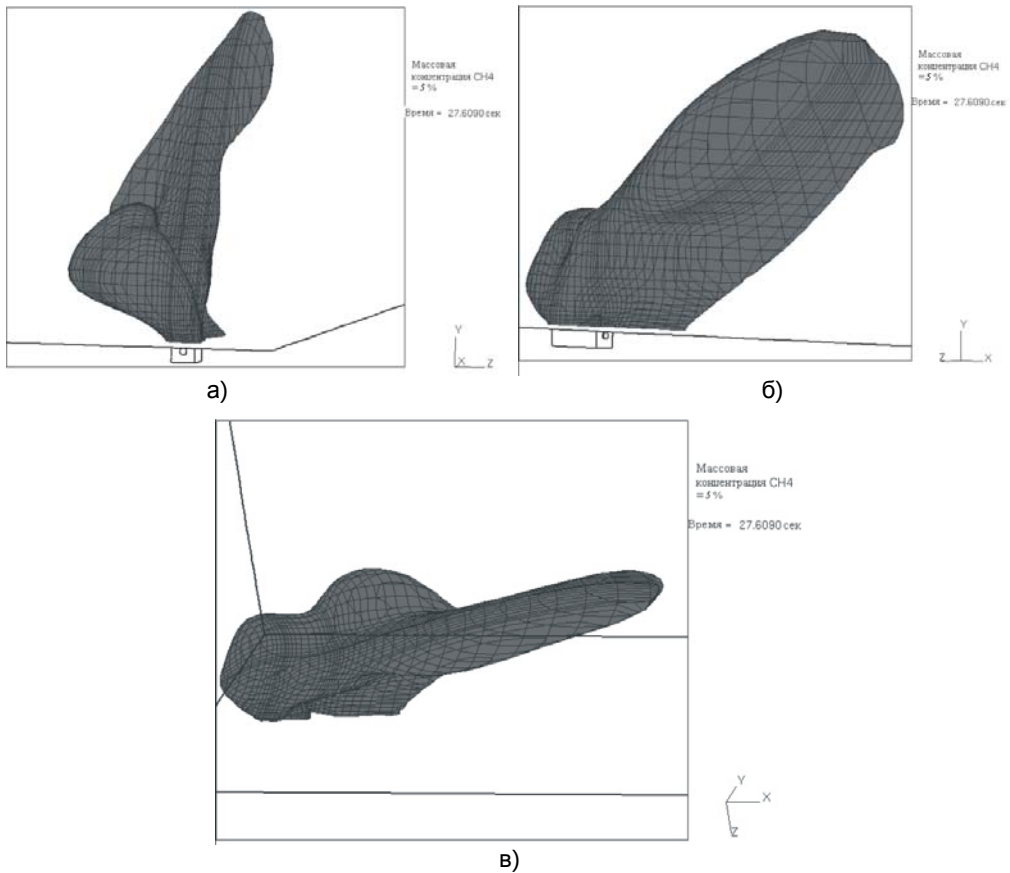


Рис. 4.8. Пример временного среза поля относительных массовых концентраций метана, соответствующих максимально интенсивной реакции в метановоздушной смеси при пожаре на газопроводе

Размеры подобласти пламени следует минимизировать, при этом для точек на границе G между подобластями должен выполняться следующий критерий:

$$\left\| \vec{V}_{D \in G} - \vec{V}_{D \in G}^{ам} \right\| \leq \varepsilon, \quad (4.77)$$

где $\|...\|$ – евклидова норма вектора; $\vec{V}_{D \in G}$ – вектор расчетной скорости среды в точке D , принадлежащей границе G , при горении факела в заданных погодных условиях; $\vec{V}_{D \in G}^{ам}$ – вектор расчетной скорости среды в точке D , принадлежащей границе G , в условиях невозмущенной горением факела атмосферы; $\varepsilon = const > 0$ – наперед заданная малая величина. При расчетах обе подобласти, как правило, задают в виде трехмерных тел простой формы (цилиндры, полусферы и т.д.), оси симметрии которых проходят через источник выброса горючего газа.

Для определения условной границы зоны пламени (факела) система уравнений (4.46) решается представленным выше интегро-интерполяционным методом А.А. Самарского [69], дополненным соответствующими алгоритмами решения интегро-дифференциальных уравнений переноса излучения (4.46л). Для указанных систем уравнений ГУ задаются на границе подобласти пламени.

Условная граница зоны пламени строится как охватывающая поверхность, в которую включается видимая зона факела и невидимая зона завершения горения в факеле.

Как известно, видимой в факеле является так называемая зона воспламенения, в которой происходит зажигание смеси и одновременное сгорание уже воспламененных объемов газа [181]. В зоне завершения горения наблюдается практически полное сгорание топлива, догорание сажи (см. (4.45)) (или иных продуктов горения при многостадийных реакциях), а также достигается равновесие между молекулами водяного пара, углекислого газа и продуктами их диссоциации. Размеры зон воспламенения и завершения горения метановоздушной смеси в пламени можно оценить по результатам численного решения системы уравнений (4.46).

После построения условной поверхности пламени (факела) осуществляется переход к так называемому твердотельному моделированию излучения факела, часто применяемому в инженерных методах оценки пожарной опасности промышленных объектов [162]. Температура условной поверхности факела в данном случае определяется по результатам численных расчетов с помощью интерполяции значений температур в узлах расчетной сетки, расположенных по обе стороны от поверхности факела. Распределение степеней черноты условной поверхности факела определяется аналогичным образом с использованием результатов расчета полей степеней черноты продуктов горения в подбласти пламени.

Анализ теплового воздействия излучения от факела на людей и прилегающие к месту аварии объекты в твердотельном приближении, по предложению В.Е. Селезнева и С.В. Фотина, производится с применением метода смены квазистационарных состояний [4, 239].

Лучистый теплообмен является господствующим механизмом теплопередачи при исследовании теплового воздействия горящей метановоздушной смеси на удаленные объекты и определении масштаба поражаемой области. Распространяя закон Стефана – Больцмана на систему из N замкнутых серых поверхностей, получим [236]:

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\delta_{ij}}{\varepsilon_j} - F_{ij} \cdot \frac{1 - \varepsilon_j}{\varepsilon_j} \right) \cdot \frac{1}{A_j} \cdot Q_j = \sum_{j=1}^N (\delta_{ij} - F_{ij}) \cdot \sigma \cdot T_j^4, \quad (4.78)$$

где i, j – индексы, обозначающие рассматриваемые поверхности; ε_j – степень черноты j -той поверхности; F_{ij} – фактор формы (фактор формы между двумя поверхностями с

площадями A_i и A_j определяется как [236] $F_{ij} = \frac{1}{A_i} \cdot \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cdot \cos \theta_j}{\pi \cdot r^2} dA_i dA_j$, r – рас-

стояние между элементарной площадкой dA_i на накалиной поверхности и элементарной площадкой пространства dA_j ; θ_i и θ_j – углы между нормалью элементарной площадки и направлением лучистого потока тепла для элементарных площадок dA_i и dA_j соответственно); Q_j – количество тепла, переданного от поверхности i к поверхности j , с учетом их положения в пространстве. Выражение (4.78) может быть использовано для построения одной строки в матричном уравнении

$$[\mathbf{C}] \cdot \{\mathbf{Q}\} = [\mathbf{D}] \cdot \{T^4\}, \quad (4.79)$$

такой, что $[c_{ij}] = \left(\frac{\delta_{ij}}{\varepsilon_j} - F_{ij} \cdot \frac{1 - \varepsilon_j}{\varepsilon_j} \right) \cdot \frac{1}{A_j}$ и $[d_{ij}] = (\delta_{ij} - F_{ij}) \cdot \sigma$, $j = \overline{1, N}$, где

$\{T^4\} = (T_1^4, T_2^4, \dots, T_N^4)^T$. Выражая из (4.79) $\{Q\}$, получим:

$$\{Q\} = [C]^{-1} \cdot [D] \cdot \{T^4\} = [K^{rad}] \cdot \{T^4\}, \quad (4.80)$$

где $[K^{rad}]$ – матрица излучения. Решение уравнения (4.80), при условии задания начальных и граничных условий (как правило, условий первого рода) для тепловой задачи с излучением, не представляет сложности и выполняется с применением МКЭ (для построения матрицы $[K^{rad}]$) [56].

Использование формулы (4.80) для оценки пространственного распространения излучения от горящей метановоздушной смеси состоит из следующих основных этапов:

- определение геометрии поверхностей, участвующих в теплообмене излучением;
- определение размерности задачи (осесимметричная постановка задачи или трехмерная постановка задачи);
- построение КЭ-модели, включающее в себя задание расчетной сетки, свойств материалов и ГУ (на излучающих и поглощающих поверхностях);
- генерация матрицы излучения;
- подстановка матрицы $[K^{rad}]$ в (4.80);
- решение (4.80);
- визуализация полученных результатов;
- интерпретация полученных результатов.

Алгоритм подробной интерпретации результатов анализа зон теплового поражения изложен в монографии [4]. Его суть заключается в прогнозе поражения человека и прилегающих объектов под действием излучения, параметры которого оценены при численном решении тепловой задачи. Так, например, тепловое поражение человека связано с утратой кожного покрова в результате ожога. Ожог 20% кожи способен повлечь за собой летальный исход, вероятность которого зависит от мест и степени полученных ожогов. Интегральная оценка степени поражения человека определяется как вероятность летального исхода, после воздействия на человека некоторой дозой теплового излучения [204].

В понятие дозы входит интегральная оценка интенсивности падающего на человека теплового излучения за период воздействия, учитывающая изменение интенсивности теплового излучения во времени и возможное перемещение человека [204]. Перевод значения дозы теплового излучения в вероятность летального исхода человека осуществляется полуэмпирической пробит-функцией, совмещающей теоретическое распределение вероятности данного события и экспериментальные данные по тепловому поражению человека [204].

Под тепловым поражением объектов, окружающих очаг пожара, понимается тепловое воздействие на материал поверхности объекта, приводящее к его воспламенению и/или деформации конструкции объекта (являющейся причиной полной или частичной потери его работоспособности). Эмпирические оценки поглощаемых объектом доз и их критические значения, соответствующие воспламенению и/или деформации конструкции, определяются в результате обобщения экспериментальных данных по исследованию воспламенения различных веществ и материалов в широком диапазоне поглощаемого теплового излучения.

4.4.4. Анализ прочности открытых участков трубопроводов при тепловом воздействии пожара

Одними из наиболее опасных и масштабных промышленных аварий являются разрывы газопроводов высокого давления с воспламенением транспортируемого природного газа на производственных площадках объектов ТЭК в зонах, где сосредоточено множество трубопроводных систем высокого давления, транспортирующих пожароопасные газы и жидкости. К таким объектам можно отнести компрессорные и газораспределительные станции, узлы пересечений многониточных МТ, газоперерабатывающие заводы, узлы редуцирования МГ, хранилища природного газа, ТЭС и т.д.

В случае разрыва в такой зоне подземного или надземного газопровода и образования факела метановоздушной смеси интенсивное тепловое воздействие пожара на близлежащие открытые участки трубопроводов может привести к существенному повышению температуры стенок труб. В свою очередь, повышение температуры может вызвать потерю несущей способности трубопроводов, их разрушение и воспламенение транспортируемых по ним продуктов, то есть, привести к каскадному развитию аварийной ситуации. Для выработки рекомендаций по принятию своевременных мер с целью предотвращения подобных аварийных ситуаций, а также максимальному снижению тяжести последствий возможных аварий, необходимы, прежде всего, конкретные количественные оценки влияния теплового потока от пожара на находящиеся поблизости открытые участки трубопроводов высокого давления. Вследствие существенных трудностей проведения адекватных экспериментальных исследований, наиболее эффективным средством получения таких оценок является численное моделирование.

В последнее время разработке методов расчетного анализа несущей способности промышленных конструкций, в частности сосудов и трубопроводов высокого давления, в условиях теплового воздействия пожара уделяется повышенное внимание во всем мире [240]. Учитывая то, что техническое состояние трубопроводных сетей большинства промышленных объектов российского ТЭК характеризуется высокой степенью изношенности [241], широкое внедрение методов численного анализа последствий пожаров на газопроводах особенно актуально для нашей страны.

При известном распределении нестационарного поля высоких температур в трубопроводной конструкции (см. Раздел 4.4.3), ее сложное нелинейное¹ НДС может быть определено с использованием представленной выше технологии численного прочностного анализа трубопроводных систем (см. Главу 3). В данном случае необходимо будет учесть только два обстоятельства – дополнительную нагрузку от термодформаций трубопроводной конструкции и зависимость характеристик физико-механических свойств трубных сталей от температуры.

С другой стороны, при повышенных температурах разрушение трубопроводной конструкции может произойти также из-за деформаций высокотемпературной ползучести трубной стали. Поэтому для расширения функциональных возможностей подсистемы «Alfargus/StructuralAnalysis» (см. Раздел 1.6) в области анализа аварийных ситуаций на магистральных трубопроводах В.В. Алешиным совместно с В.В. Кобяковым были разработаны метод и технология численного анализа прочности трубопроводных конструкций, находящихся в условиях действия кратковременных высоких температур, с учетом ползучести трубной стали. Далее излагаются теоретические основы и базовые алгоритмы практической реализации метода моделирования и вычислительной технологии анализа сложного НДС и оценки прочности трубопроводных конструкций при тепловом воздействии от пожара на газопроводе.

¹ С учетом упруго-пластического поведения материала.

Математическая теория ползучести конструкционных материалов представляет собой один из разделов МДГТ, основные модели и методы которого сложились в более позднее время, чем теории упругости и пластичности. В отечественной науке теория ползучести сформировалась в самостоятельное направление с выходом монографии Ю.Н. Работнова [242]. Активные теоретические и экспериментальные исследования явления ползучести материалов, выполненные за последние десятилетия в нашей стране и за рубежом, привели, в свою очередь, к образованию самостоятельных направлений, феноменологически и математически описывающих процессы ползучести различных материалов – металлов и сплавов, бетона, полимеров, горных пород и др.

В поставленной выше задаче рассматривается достаточно узкий вопрос математического моделирования высокотемпературной ползучести низколегированных трубопроводных сталей. Поэтому при построении и реализации модели для численного анализа НДС трубопроводов в условиях пожара использовались наиболее логически завершенные и проверенные на практике классические методы теории ползучести металлических материалов (см., например, [153, 242–246]).

С точки зрения механики сплошных сред [123, 242, 243], макроскопическая ползучесть металлов трактуется как медленная необратимая деформация, неограниченно развивающаяся в конструкции под действием приложенных нагрузок. В данном случае термин «медленная» означает, что зависимость между напряжениями и деформациями должна содержать время (в явном виде или посредством некоторых операторов), и введен лишь для отличия деформации ползучести от «мгновенной» пластической деформации, которая от времени не зависит. Другой феноменологической особенностью ползучести металлов является то, что ее проявление становится заметным только в условиях повышенных температур. Для большинства конструкционных сталей и сплавов до температуры $\approx 0,35 \cdot T_{\text{л}}$ [244, 246], где $T_{\text{л}}$ – температура плавления по абсолютной шкале, деформации ползучести практически не имеют никакого значения и их можно не учитывать при анализе конструкций на прочность.

Основные характеристики поведения металлических материалов при ползучести получают из стандартных испытаний образцов на растяжение при постоянной нагрузке [153, 243]. Результаты этих испытаний представляются в виде так называемых кривых ползучести, дающих зависимости полной деформации ε от времени t . Типичная кривая ползучести схематично изображена на рис. 4.9. Здесь ε_0 – мгновенная упругая или упруго-пластическая деформация образца, зависящая только от приложенной нагрузки.

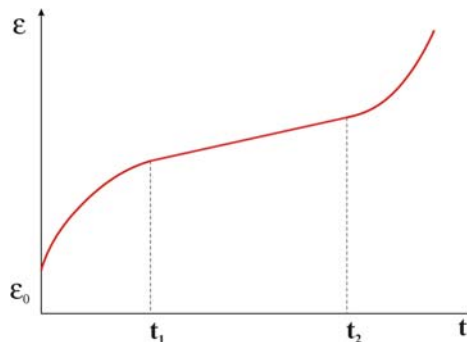


Рис. 4.9. Типичная кривая ползучести

На кривой ползучести можно условно выделить три участка (см. рис. 4.9). На первом участке ($t < t_1$) скорость деформации уменьшается. Здесь деформация образца сопровождается структурными изменениями, которые затрудняют ползучесть, вследствие чего

происходит упрочнение материала.

При выходе на второй участок ($t_1 < t < t_2$) способность материала к упрочнению исчерпывается, скорость деформации становится постоянной, равной минимальному для заданных условий испытаний (напряжение и температура) значению скорости ползучести (установившаяся ползучесть). На третьем участке скорость ползучести резко возрастает, пока не наступает разрыв образца. Сразу заметим, что третий участок соответствует стадии разрушения, предваряемого значительным уменьшением площади поперечного сечения образца, локализацией деформаций (образованием «шейки»), процессами трещино- и порообразования, и в практических расчетах конструкций на ползучесть обычно не рассматривается. Здесь, как и в случае анализа упруго-пластического разрушения, считается, что к началу третьей стадии несущая способность конструкции полностью исчерпана [153, 244]. Также следует отметить, что в зависимости от условий испытаний и характеристик материала на кривой ползучести может отсутствовать любой из условно выделенных трех участков [243].

При анализе НДС конструкций полная деформация в общем случае представляется как сумма мгновенной упруго-пластической деформации и деформации ползучести [153, 242]:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^c, \quad (4.81)$$

где $\varepsilon^e + \varepsilon^p = \varepsilon_0$ (см. рис. 4.9). Методы вычисления упругих и пластических деформаций уже были рассмотрены ранее в Главе 3. Здесь нужно определить только связь напряжения с деформацией ползучести ε^c . Дифференцируя выражение (4.81) по времени и рассматривая только деформацию ползучести, для одноосного НДС запишем:

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = \dot{\varepsilon}^c, \quad (4.82)$$

где $\dot{\varepsilon}^c$ – скорость ползучести, определяемая из стандартных испытаний на одноосное растяжение. В общем случае скорость ползучести зависит от температуры, напряжения, деформации, времени и некоторых структурных параметров материала $\dot{\varepsilon}^c = \dot{\varepsilon}^c(T, \sigma, \varepsilon, t, q_1, \dots, q_n)$. На участке установившейся ползучести (см. рис. 4.9) скорость ползучести $\dot{\varepsilon}^c$ от времени не зависит.

В теории ползучести существует несколько гипотез [123, 153, 242–246], в соответствии с которыми выбирается набор определяющих параметров, вид функции $\dot{\varepsilon}^c$ и способ обобщения установленных в ходе одноосных испытаний образцов законов ползучести на случай сложного НДС. К сожалению, объединение всех этих гипотез в одну универсальную теорию, удовлетворительно описывающую ползучесть металлических материалов при всех (чрезвычайно разнообразных) условиях работы реальных конструкций, не представляется возможным в обозримом будущем [242]. Поэтому для получения адекватных результатов численного анализа НДС трубопровода в условиях воздействия пожара необходимо выбрать наиболее подходящую модель ползучести.

Согласно [243], определяющей характеристикой условий работы конструкции при ползучести является длительность срока службы, обуславливающая также рабочие напряжения и температуры. Условная классификация областей развития теории ползучести следующая:

- 1) длительная ползучесть – месяцы и годы (умеренные напряжения и температуры);
- 2) ползучесть средней длительности – часы и дни (высокие напряжения, умеренные температуры или умеренные напряжения, высокие температуры);

- 3) кратковременная ползучесть – секунды и минуты (до $20 \div 30$ мин, высокие напряжения и температуры).

При аварийном возгорании транспортируемых природных газов (или других углеводородных топлив) время наиболее опасного теплового воздействия на близлежащие участки трубопроводов, способного вызвать каскадное развитие аварии, измеряется десятками минут. Поэтому при построении математической модели ползучести трубных сталей следует опираться, в основном, на методы исследования кратковременной ползучести [242–244].

По результатам испытаний конструкционных сталей в диапазоне напряжений и температур кратковременной ползучести были установлены следующие особенности [123, 242, 243]:

- 1) Ползучесть происходит без заметного упрочнения материала, первый участок кривой ползучести (см. рис. 4.9) отсутствует, и ползучесть сначала происходит с постоянной скоростью.
- 2) Скорость ползучести зависит только от напряжения и температуры и практически не зависит от истории нагружения и накопленных до начала испытаний упруго-пластической деформации и деформации ползучести. Отмеченный факт справедлив лишь в области малых (до 2%) деформаций и до температур, вызывающих структурное перестроение и рекристаллизацию материала, приводящих к быстрому разупрочнению.
- 3) Анизотропия материала не играет существенной роли. Высокая температура сглаживает анизотропию механических свойств, зависящую от текстуры материала.
- 4) Разрушение образцов происходит при величине равномерного удлинения, которая примерно постоянна¹. Разрушению предшествует появление третьего участка на кривой ползучести, но в данном случае это происходит не за счет изменения площади поперечного сечения образца, а за счет развития трещин по границам зерен структуры металла, которые сливаются в микротрещины. Данный процесс наблюдается во всем объеме нагруженной области уже при деформациях порядка $1 \div 2\%$.

Эти наблюдения позволяют считать скорость деформации кратковременной ползучести функцией только температуры и напряжения $\dot{\xi}^c(T, \sigma)$, а механические свойства материала изотропными. Кроме того, при анализе аварийных ситуаций в качестве дополнительного критерия исчерпания несущей способности трубопроводной конструкции следует использовать величину накопленной деформации кратковременной ползучести, равную 2%.

Как уже отмечалось ранее, ползучесть металлов представляет собой развитие необратимой деформации во времени. Основной механизм ползучести – скольжение в определенных атомных плоскостях по определенным направлениям в результате продвижения дислокаций – тот же, что и механизм пластической деформации [245]. Микроскопические картины деформации ползучести и мгновенной пластической деформации имеют ряд отличий [245]. Однако, это не отражается на макроскопических механических характеристиках металлических материалов, и в МДТТ считается [243], что ползучесть есть один из видов пластической деформации. В связи с этим, для построения математической модели ползучести в случае сложного НДС постулируется [123, 242] применимость основных гипотез теории пластичности, в частности теории пластического течения [123].

¹ То есть величина равномерного удлинения разрушенного образца не зависит от заданных при испытании значений температуры и напряжения.

Предполагается [123, 153], что существует зависимость скоростей деформаций ползучести от напряжений потенциального типа, т.е., существует потенциал $g(\sigma_{ij})$ такой, что аналогично ассоциированному закону течения [123]:

$$\xi_{ij}^c = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (4.83)$$

Подставляя компоненты скоростей деформаций ползучести (4.83) в выражение для интенсивности скоростей деформаций ползучести

$$\xi_i^c = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \xi_{ij}^c \xi_{ij}^c}, \quad (4.84)$$

получим:

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\xi_i^c}{\sqrt{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}}}. \quad (4.85)$$

Уравнение $g(\sigma_{ij}) = 0$ представляет собой в пространстве компонент тензора напряжений гиперповерхность, называемую (по аналогии с поверхностью текучести в теории пластичности) гиперповерхностью ползучести.

Далее принимается гипотеза несжимаемости материала: $\varepsilon_{ii}^c = 0$, или, продифференцировав, $\xi_{ii}^c = 0$. Для изотропного несжимаемого материала потенциал ползучести g зависит только от второго и третьего инвариантов девиатора тензора напряжений s_{ij} (см. (3.35)). Причем на практике, как и в случае пластических деформаций, влиянием третьего инварианта можно пренебречь [123], исключив его из выражения для g и получив условие для скоростей деформаций ползучести в виде, аналогичном критерию Губера – Мизеса (см. (3.22)). Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} = 3 \cdot s_{ij}, \quad (4.86)$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi_i^c}{\sigma_i}, \quad (4.87)$$

где $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot s_{ij} s_{ij}}$ – интенсивность напряжений.

Подставляя (4.86), (4.87) в (4.83), получаем зависимость компонент тензора скоростей деформаций ползучести от компонент тензора напряжений:

$$\xi_{ij}^c = \frac{3}{2} \cdot \frac{\xi_i^c}{\sigma_i} \cdot \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \frac{I_1}{3} \right), \quad (4.88)$$

где I_1 – первый инвариант тензора напряжений (см. (3.35)).

Для использования результатов испытаний образцов на одноосное растяжение при анализе сложного НДС конструкции можно воспользоваться несколькими различными гипотезами классической теории ползучести [123, 242] – теорией старения, теорией течения, теорией упрочнения и наследственной теорией ползучести. Анализ приведенных выше особенностей кратковременной ползучести показывает, что в данном случае более всего подходит теория течения. Согласно гипотезам теории течения [123, 242], при за-

данной температуре потенциал ползучести g зависит от второго инварианта девиатора тензора напряжений, интенсивности скоростей деформаций ползучести и времени. В нашем случае (см. выше) ползучесть установившаяся, и время исключается:

$$g = \frac{3}{2} \cdot s_{ij} s_{ij} - \left[\Phi(\xi_i^c) \right]^2 = 0, \quad (4.89)$$

откуда

$$\sigma_i = \Phi(\xi_i^c), \quad (4.90)$$

где Φ – некоторая однозначная функция, вид которой сохраняется для любого НДС конструкции. Тогда, в случае одноосного растяжения, используя (3.22) и производя последовательную свертку тензорного произведения в (4.84) для главных значений тензора скоростей деформаций, имеем:

$$\sigma = \Phi(\xi^c). \quad (4.91)$$

Разрешая (4.91) относительно ξ^c , получим:

$$\xi^c = F(\sigma). \quad (4.92)$$

Выражение (4.92) определяет зависимость скорости ползучести от напряжения для заданной температуры. Для учета влияния на скорость ползучести температуры, исходя из опытного факта подобия кривых ползучести, вводится предположение [243, 244], что общая зависимость скорости ползучести от напряжения и температуры может быть представлена в виде произведения функций:

$$\xi^c(T, \sigma) = G(T) \cdot F(\sigma). \quad (4.93)$$

В теории ползучести [123, 242–246] предложено несколько аналитических выражений, удовлетворительно аппроксимирующих функцию $F(\sigma)$ на разных участках кривой ползучести. Для конструкционных сталей наиболее часто применяемой зависимостью¹ является закон Нортонa [244]:

$$F(\sigma) = B \cdot \sigma^n, \quad (4.94)$$

где B , n – константы материала.

Для определения вида функции $G(T)$ используется следующий общепринятый подход [242, 244, 245]. Предполагается, что деформация ползучести связана с движением некоторых структурных элементов металлического материала, вызванных температурными флуктуациями. Каждый из этих элементов в данный момент времени имеет энергию H , причем распределение энергий между отдельными элементами подчинено закону Максвелла. Пусть $(p \cdot dH)$ – вероятность того, что энергия определенного элемента в определенный момент времени заключена между H и $(H + dH)$. По закону Максвелла:

$$p = \frac{1}{R \cdot T} \cdot \exp\left(-\frac{H}{R \cdot T}\right), \quad (4.95)$$

где R – универсальная газовая постоянная.

¹ Применение данной зависимости для расчета ползучести конструкционных сталей обосновано многочисленными экспериментами и результатами решения прикладных задач.

В (4.95) множитель перед экспонентой определен из условия:

$$\int_0^{\infty} p \, dH = 1.$$

Если энергия некоторого элемента превысит величину H_0 , называемую энергией активации, то этот элемент переместится, вследствие чего произойдет некоторая деформация. Вероятность активации элемента или, что то же самое, относительное количество активированных элементов определяется следующим образом:

$$\int_{H_0}^{\infty} p \, dH = \exp\left(-\frac{H_0}{R \cdot T}\right).$$

Предполагая, что скорость ползучести пропорциональна количеству активированных структурных элементов, получаем выражение для $G(T)$ в виде закона Аррениуса:

$$G(T) = A \cdot \exp\left(-\frac{H_0}{R \cdot T}\right), \quad (4.96)$$

где A – константа материала.

Объединяя (4.94) и (4.96), получаем аппроксимирующую функцию для скорости ползучести:

$$\xi^c(T, \sigma) = C \cdot \sigma^n \cdot \exp\left(-\frac{H_0}{R \cdot T}\right). \quad (4.97)$$

В связи с трудностями теоретического вычисления значения H_0 , входящая в выражение (4.97) комбинация $k = H_0 / R$ обычно также рассматривается как подлежащая экспериментальному определению константа материала, и функциональная зависимость скорости ползучести от напряжения и температуры приобретает окончательный вид:

$$\xi^c = C \cdot \sigma^n \cdot \exp(-k/T). \quad (4.98)$$

Определив по результатам испытаний на кратковременную ползучесть образцов из трубной стали входящие в (4.98) материальные константы C , n и k , получим выражение, необходимое для анализа сложного НДС трубопровода в условиях теплового воздействия пожара с учетом ползучести материала труб. Например, обработка результатов таких испытаний¹ [246] позволила определить зависимость напряжения от температуры при одноосном растяжении образцов из низколегированной стали с установившейся скоростью кратковременной ползучести $\xi^c = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ [6]. Используя полученную экспериментальную кривую, методом наименьших квадратов были подобраны материальные константы в уравнении (4.98): $C = 5,292 \cdot 10^{-16}$; $n = 2,65$; $k = 1,934 \cdot 10^4$. Проверка уравнения (4.98) с подобранными константами показала хорошую аппроксимацию экспериментальных данных, начиная с температуры 450°C [6]. В то же время, построенная эмпирическая формула плохо описывала экспериментальную кривую до температуры $T = 450^\circ\text{C}$. Это объяснялось тем, что при сравнительно низких температурах еще не обеспечивались отмеченные выше условия кратковременной ползучести. Поэтому при моделировании НДС трубопроводных конструкций в условиях теплового воздействия пожара уравнение (4.98) с подобранными константами следует применять только при достижении температуры металла (низколегированной стали)

¹ Представленные в работе [246] экспериментальные данные по испытаниям на кратковременную ползучесть образцов из конструкционных сталей и сплавов опубликованы с разрешения Американского общества металловедов (American Society for Metals).

450°C .

С другой стороны, для адекватного анализа поведения трубопроводов, изготовленных из низколегированных сталей, в условиях воздействия интенсивного теплового потока (пожара), вклад деформаций ползучести в сложное НДС трубопроводной конструкции необходимо учитывать, начиная с температуры 350°C . Поэтому в диапазоне температур $350^{\circ}\text{C} \leq T < 450^{\circ}\text{C}$ целесообразно применять следующий подход¹. Уравнение для скорости ползучести представляется в виде:

$$\dot{\xi}^c = B(T) \cdot \sigma^n, \quad (4.98^*)$$

где функция $B(T)$ задается в табличном виде по результатам обработки экспериментальных кривых.

Еще раз отметим, что моделировать высокотемпературную ползучесть при численном анализе НДС стальных трубопроводных конструкций следует, начиная с момента достижения максимальной температуры стенок труб величины 350°C . При более низких температурах в металле таких трубопроводов возникают только упругие или упруго-пластические деформации².

Таким образом, в соответствии с представленными в настоящем Разделе математическими моделями и алгоритмами, при анализе результатов численного моделирования сложного НДС, оценке несущей способности и огнестойкости конструкций стальных трубопроводов в условиях интенсивного теплового воздействия пожара следует рассматривать возможность возникновения следующих трех предельных состояний:

- 1) достижение значения интенсивности напряжений величины истинного предела прочности трубной стали при соответствующей температуре стенки в каком-либо сечении трубопровода;
- 2) достижение максимальной температуры стенки трубопровода нормативного предела допускаемой для данной марки стали температуры (для марок низколегированных трубных сталей этот предел составляет $480 \div 510^{\circ}\text{C}$);
- 3) достижение интенсивности деформаций ползучести предела кратковременной ползучести (2%) в каком-либо сечении трубопровода.

Примеры практического применения изложенного выше подхода к анализу прочности открытых участков газопроводов при тепловом воздействии пожара представлены в работах [6, 58].

4.4.5. Численный анализ параметров пожара на газопроводе в условиях помещения

Пожары в помещениях, связанные с воспламенением метановоздушной смеси, образовавшейся при разрушении (или протечках) трубопровода внутренней газопроводной обвязки, как правило, сопровождаются возгоранием находящегося в зоне аварии горючего материала (например, текстиля, деревянных конструкций и т.д.). Поэтому при моделировании система уравнений (4.46) должна быть дополнена двумя новыми дифференциальными уравнениями [247]:

¹ Данный подход также широко распространен в расчетах металлических конструкций на ползучесть [242–246].

² Единственным исключением является так называемое «нейтронное разбухание» (или «нейтронная ползучесть») – зависящая от времени, необратимая объемная деформация металла, подвергаемого воздействию нейтронного излучения. Нейтронное разбухание возникает в стальных трубопроводах (например, трубопроводах АЭС) при любой температуре.

- уравнением закона сохранения оптической плотности дыма

$$\frac{D\Sigma_{on}}{Dt} = \varpi_{on}; \quad (4.99a)$$

- уравнением неразрывности для горючего материала

$$\frac{dm_{zm}}{dt} = -W_{zm}, \quad (4.99b)$$

где Σ_{on} – оптическая плотность дыма; $\varpi_{on} = \Sigma_{onz} \cdot W_{zm} / \Delta V$ – интенсивность внутренних источников оптической плотности дыма, возникающей из-за его образования (реакции горения); Σ_{onz} – дымообразующая способность горючего материала; W_{zm} – скорость газификации горючего материала; m_{zm} – остаточная масса горючего материала; ΔV – объем газовой среды, внутри которой находится источник (или сток) масс. Здесь следует отметить, что при выводе уравнения (4.99a) предполагалось, что при коагуляции или дроблении частиц дыма его оптическая плотность не изменяется [247].

4.4.6. К вопросу об анализе взрывоустойчивости зданий при взрывах газовоздушной смеси в помещении

Одной из основных задач моделирования дефлаграционного взрыва газовоздушной смеси в помещении, рассматриваемых в настоящей монографии, является получение расчетной оценки взрывоустойчивости зданий на территории объектов ТЭК или жилых домов. Дифференциальное уравнение, описывающее темп роста статического давления в помещении с проемами при внутреннем дефлаграционном взрыве в условиях квазистатичности процесса, имеет вид [248]:

$$\frac{dp}{dt} = P_{\text{полное}}(t) \cdot \left[\alpha \cdot S(t) \cdot (\varepsilon - 1) \cdot U_n - \mu_{\text{расход}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta P}{\rho_i}} \cdot S_{np} \cdot f(t, \Delta P) \right] \cdot \left[\frac{V_1}{\gamma_1} + \frac{V_2}{\gamma_2} \right]^{-1} \cdot \left[\frac{\kappa P a}{c} \right], \quad (4.100)$$

где $P_{\text{полное}}(t)$ – текущее значение полного давления, $[\kappa \text{Па}]$; α – коэффициент интенсивности процесса взрывного горения; $S(t)$ – текущее значение площади поверхности пламени, $[\text{м}^2]$; ε – коэффициент расширения горючей смеси при сгорании; U_n – нормальная скорость пламени, $[\text{м/с}]$; $\mu_{\text{расход}}$ – коэффициент расхода газа, истекающего через сбросные проемы; ΔP – избыточное давление внутри помещения, $[\kappa \text{Па}]$; ρ_i – плотность истекающих газов: ρ_1 – плотность исходной смеси и ρ_2 – плотность продуктов сгорания, $[\text{кг/м}^3]$; S_{np} – общая площадь всех проемов в помещении, $[\text{м}^2]$; $f(t, \Delta P)$ – функциональная зависимость вскрытия предохранительных конструкций (например, стекол в оконных рамах); V_1 – текущий объем свежей смеси, $[\text{м}^3]$; V_2 – текущий объем продуктов сгорания, $[\text{м}^3]$; γ_1 – показатель адиабаты свежей смеси; γ_2 – показатель адиабаты продуктов сгорания. Значения всех эмпирических параметров в уравнении (4.100) и дополнительные пояснения представлены в работе [248].

Начальные условия для решения (4.100) задаются в виде параметров исходного невозмущенного состояния газовой среды внутри помещения. Численные методы решения

уравнения (4.100) подробно описаны, например, в работе [98]. Здесь следует отметить, что, приравняв $dp/dt = 0$, получим условие максимума давления в помещении [248]:

$$\Delta P_{\max} = 0,5 \cdot \rho_i \cdot U_n^2 \cdot (\varepsilon - 1)^2 \cdot \alpha^2 \cdot \left(\frac{S_{\max}}{S_{np}} \right)^2, \quad S_{\max} = \max S(t).$$

В завершение Раздела 4.4 отметим, что описанные здесь подходы и методы численного моделирования пожаров на газопроводах и прилегающих объектах были реализованы в подсистемах «Alfargus/FireHazard» и «Alfargus/StructuralAnalysis» **на базе КАИ** «Alfargus» (см. Раздел 1.6). Математические методы моделирования аварий на газопроводах, описанные в Разделах 4.2 – 4.4, могут быть распространены на анализ аварийных ситуаций в хранилищах газовых смесей.

4.5. Моделирование пожаров разлития горючих жидкостей при разрушении трубопроводов или резервуаров хранения

4.5.1. К вопросу оперативной оценки зон теплового поражения от пожара разлития

Пожары разлитий занимают одну из основных позиций в классификации крупномасштабных пожаров в трубопроводных системах ТЭК.

В настоящем Разделе на базе обобщения опытных и теоретических данных рассматривается вариант *метода инженерной оценки основных характеристик пожаров разлития с анализом факторов возможного ущерба и поражения человека тепловым излучением*. Этот метод был разработан С.В. Фотиным и А.Н. Худовым при участии В.Е. Селезнева.

Пожар разлития может произойти в ряде случаев. Одна из пространственно-ограниченных форм проявления пожаров разлития – это пожар в резервуаре хранения, например, когда в результате внутреннего (либо внешнего) взрыва резервуар остается без крыши, или происходит локальное разлитие транспортируемого продукта в зоне разрыва трубопровода. В резервуарах, сделанных из алюминия, стенки могут оплавляться до уровня жидкости, и, таким образом, резервуар будет становиться все более низким по мере того, как сгорает жидкость. В этих ситуациях, а также при горении жидкости, заполнившей обвалование, образуются четкие границы и формы очагов горения, которые чаще всего имеют круглый или прямоугольный вид.

В других случаях (например, при разрушении магистрального трубопровода) пожары разлития происходят после того, как жидкость выбрасывается на поверхность земли. При этом форма и глубина разлития определяются особенностями местности. На заводах и в аэропортах, занимающих большие территории, жидкость будет устремляться в водостоки, где она может гореть под землей. Дренажные каналы вдоль автомобильных дорог обычно несут воды в ближайшее русло. Поэтому при выбросе на дороге потоки горючей жидкости могут переносить огонь на сотни метров (см. Главу 5). Наконец, происходят выбросы непосредственно на поверхности водостоков, рек, озер или морей, где возможности для распространения являются практически неограниченными.

Поверхность горения жидкости, находящейся в круглых или прямоугольных обвалованиях, по своей форме близка к цилиндру. При наличии ветра ось цилиндра будет отклонена от вертикали на некоторый угол, зависящий от скорости ветра и характерных

размеров поверхности разлития. При исследовании горения жидких углеводородных топлив в крупных хранилищах (до 50000 м^3) на предприятиях ТЭК и пожаров разлитий на площадях до 10000 м^2 наблюдалась конусообразная форма пламени [204, 247].

Характерной чертой пожаров разлитий является «накрытие» или «растяжение пламени» с подветренной стороны. Ряд проведенных экспериментов показал, что «накрытие» увеличивает эффективный диаметр пожара на $25\div 50\%$ (рис. 4.10) [204, 247].

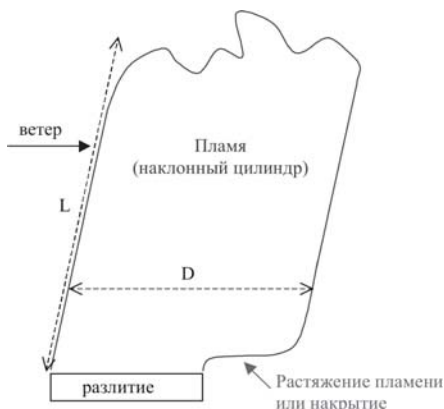


Рис. 4.10. Схематическое изображение пожара разлития

Характер пожаров разлития изменяется во времени. Можно выделить индукционный период (в течение которого скорость горения увеличивается по мере того, как возрастает интенсивность теплового излучения и повышается скорость испарения) и стационарный период, при котором достигается равновесие. При изучении явлений, связанных с процессами перемещения и хранения веществ, удобно пользоваться диаграммой состояния.

Для наглядности будем предполагать, что рассматривается однокомпонентная система, и что изменение ее состояния происходит без химического разложения. Диаграмма состояния такой системы представлена на рис. 4.11 [247]. Кривая фазового равновесия А–В показывает соотношение между давлением пара и температурой для твердой фазы, а кривая фазового равновесия В–С – соотношение между давлением пара и температурой для жидкой фазы; точка С соответствует «критической температуре».



Рис. 4.11. Диаграмма состояния вещества

При температурах больших, чем критическая температура, вещество не может находиться в жидком состоянии. Давление, которому соответствует точка C , является «критическим», т. е., при этом давлении еще сохраняется возможность сжижения газообразной фазы. Физические свойства газообразной и жидкой фаз в этой точке идентичны¹.

Газообразная фаза имеет подфазу, именуемую «паровой», которая лежит в области температур ниже критической и, таким образом, находится в таких условиях, когда для перевода в жидкую фазу ее надо лишь сжать. Для области газообразной фазы, лежащей выше критической температуры, нет специального названия.

Для некоторых веществ температура, при которой происходит их разложение, ниже температуры, соответствующей точке B . Такие вещества могут находиться только в твердом или парообразном состоянии. У других веществ разложение может осуществляться в интервале температур между точками B и C . Поэтому для подобных веществ физический смысл имеет только часть диаграммы состояния. Ряд веществ имеют несколько твердых фаз (сера, фосфор). Для водорода и гелия характерны аномальные свойства при низких температурах. Однако для вопросов, рассматриваемых в данном Разделе, все эти исключения не имеют сколько-нибудь существенного значения.

Технология перемещения и хранения любого из рассматриваемых веществ устанавливается, в первую очередь, исходя из свойств данного вещества (определяемых диаграммой состояния) в диапазоне температур окружающей среды.

По способам хранения и перемещения вещества можно разделить на четыре основные категории [204]:

- первая категория – вещества, у которых критическая температура ниже температуры окружающей среды;
- вторая категория – вещества, у которых критическая температура выше, а точка кипения ниже температуры окружающей среды;
- третья категория – вещества, у которых критическое давление выше атмосферного и точка кипения выше температуры окружающей среды;
- четвертая категория – вещества, содержащиеся при повышенных температурах.

К другим категориям можно отнести вещества, которые в определенном интервале температур окружающей среды могут принадлежать сразу двум из вышеназванных категорий, например, если этот интервал охватывает докритические и надкритические условия.

Разлитие жидкости первой категории. Рассмотрим криогенную жидкость (жидкая фаза газообразного вещества), вытекающую из разрушенного трубопровода. Подвод тепла из окружающей среды приводит к немедленному вскипанию жидкости с интенсивностью, пропорциональной скорости подвода тепла.

Разность температур между вытекающим сжиженным природным газом и окружающей средой составляет около $180K$, а для жидкого кислорода – около $200K$. Однако столь сильный перепад температур не обязательно гарантирует высокую скорость передачи тепла. Это происходит вследствие существования двух режимов кипения – пузырькового и пленочного, характеризующихся значительно отличающимися коэффициентами теплоотдачи.

При умеренных перепадах температур (обозначим соответствующую величину ΔT) на границе между кипящей жидкостью и твердым телом тепловой поток пропорционален ΔT^3 . В точке, соответствующей первой критической тепловой нагрузке, это

¹ Плотность, удельная энтальпия, вязкость и другие свойства вещества имеют одно и то же значение, а скрытая теплота парообразования (конденсации) равна нулю.

соотношение нарушается, так как пузырьковое кипение переходит в пленочное, и слой пара отделяет жидкость от твердой стенки.

Таким образом, плотность теплового потока стремится к максимуму при увеличении перепада температур, а затем наблюдается быстрый спад до минимума, известного как точка Лейденфроста. Дальнейшее повышение ΔT за этой точкой вызывает увеличение теплового потока значительно более медленное, чем при пузырьковом кипении. Тепловой поток в этом режиме пропорционален $\Delta T^{0,75}$.

Разлитие жидкости второй категории. Ко второй категории относятся жидкости, являющиеся газами (парами) при температуре окружающей среды и имеющие критическую температуру выше температуры окружающей среды. Такие газы можно хранить при температуре окружающей среды в сосудах под давлением. При разлитии они «мгновенно испаряются», т. е., часть жидкости быстро испаряется, а температура оставшейся части падает до точки кипения при атмосферном давлении. Подвод тепла из окружающей среды приводит к полному испарению жидкой фазы подобно жидкостям первой категории. Процесс протекает очень интенсивно, и значительная часть жидкости выбрасывается в виде пены и брызг.

Разлитие жидкости третьей категории. Поведение этих жидкостей при разлитии зависит от их летучести. Данный класс охватывает вещества, которые можно хранить при температуре окружающей среды и атмосферном давлении. В зависимости от температуры среды при разлитии, жидкости с низкой летучестью, если они нагреты, могут иметь характеристики, сходные с характеристиками холодных, но более летучих жидкостей.

Опасность разлития, в данном случае, имеет существенное значение только при разрушении резервуара или трубопровода ниже уровня жидкости. Интенсивность такой утечки зависит от давления жидкости (гидростатический напор, давление хранения). Хранение жидкостей третьей категории под давлением характерно для более летучих жидкостей из этой категории, таких, например, как ацетальдегид. Без повышения давления такие жидкости трудно перекачивать.

Поведение разлития после утечки будет зависеть от рельефа местности. В отличие от разлития криогенных жидкостей, при котором существует подвод тепла от окружающей среды, или сжиженных паров, когда помимо подвода тепла есть еще и мгновенное испарение, на испарение жидкостей третьей категории влияет только ветер. Скорость испарения при этом зависит от размера разлития и скорости ветра.

Разлитие жидкости четвертой категории. В эту категорию входят жидкости, относящиеся к третьей категории, если они находятся при температуре окружающей среды, но содержащиеся при повышенной температуре. При разлитии они испаряются подобно жидкостям второй категории.

Под тепловым воздействием здесь будем понимать различные аспекты поражения человека (боль, ожоги, летальный исход) и окружающих объектов (воспламенение, разрушение) вследствие воздействия на них потока тепловой энергии от пожара разлития. Как отмечалось выше, основным механизмом передачи тепловой энергии от очага горения к окружающим телам является тепловое излучение. Таким образом, оценка теплового воздействия пожара разлития заключается в определении интенсивности теплового излучения и применении соответствующих критериев поражения для человека и окружающих объектов.

Напомним, что форма пламени пожара разлития, согласно ранее принятым в этом Разделе упрощениям, принимается в виде наклонного цилиндра, приподнятого над землей за счет отрыва пламени от поверхности жидкости и эффекта растяжения (см. рис. 4.10). Указанные особенности позволяют перейти к более подробному описанию по-

верхности пламени (рис. 4.12), в котором основные параметры (высота цилиндра, угол наклона и др.) могут быть определены из материала, изложенного ниже.

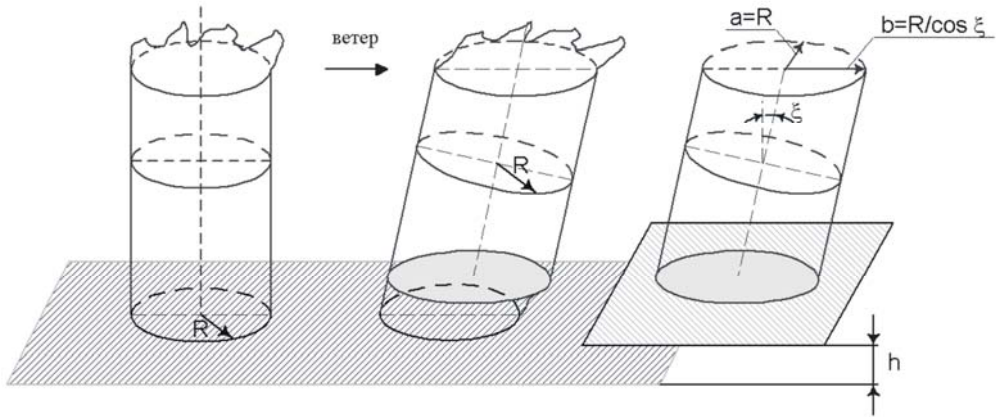


Рис. 4.12. Геометрическая модель пламени пожара разлития

Плоскость основания цилиндра параллельна плоскости земли и оторвана от нее на некоторую высоту h . Определим интенсивность теплового излучения от пламени пожара разлития в произвольной точке данной плоскости, предполагая, что величина отрыва h несущественна по сравнению с размерами поверхности пламени и не превышает среднего роста человека. Введем цилиндрическую (r, φ, z) и декартову (x, y, z) системы координат, связанные с осью цилиндра пламени, а также цилиндрическую (d, ψ, z') и декартову (x', y', z') системы координат, связанные с плоскостью дна цилиндра (рис. 4.13).

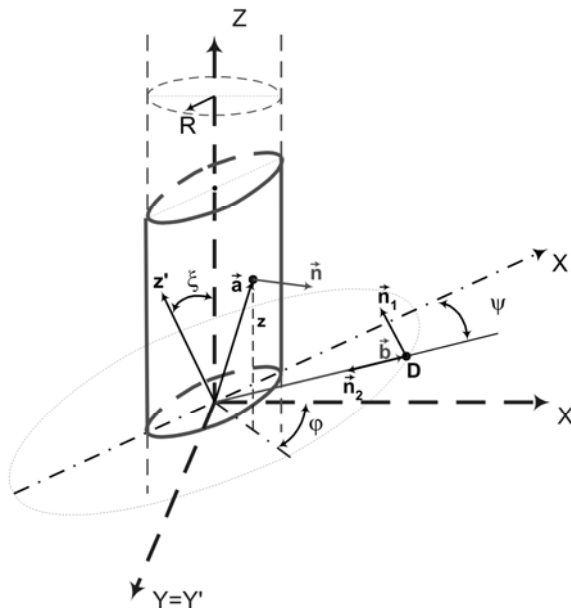


Рис. 4.13. Привязка систем координат

Поверхность, образующая боковую поверхность цилиндра, может быть описана радиус-вектором $\vec{a} = (R \cdot \cos \varphi, R \cdot \sin \varphi, z)^T$, соответственно, нормаль $\vec{n}$ к данной поверхности в точке с координатами $(R \cdot \cos \varphi, R \cdot \sin \varphi, z)$ будет иметь вид: $\vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T$.

Пусть точка D на плоскости дна цилиндра имеет цилиндрические координаты $(D, \psi, 0)$. Нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, образующие базис в плоскости, проходящей через ось цилиндра, в декартовой системе координат (x', y', z') имеют вид:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -\cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, перейдя в декартовую систему координат (x, y, z) , получим:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} D \cdot \cos \psi \cdot \cos \xi \\ D \cdot \sin \psi \\ D \cdot \cos \psi \cdot \sin \xi \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -\sin \xi \\ 0 \\ \cos \xi \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -\cos \psi \cdot \cos \xi \\ -\sin \psi \\ -\cos \psi \cdot \sin \xi \end{pmatrix}.$$

Таким образом, местный угловой коэффициент для элементарной площадки с нормалью $\vec{n}_1$ будет определяться выражением:

$$\varphi_{n_1} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_A \frac{(\vec{n}, \vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{n}_1, \vec{a} - \vec{b})}{|\vec{b} - \vec{a}|^2} dA = \frac{1}{\pi} \cdot \int_A \frac{(D \cdot \delta - R) \cdot (z \cdot \cos \xi - R \cdot \sin \xi \cdot \cos \varphi)}{(D^2 + R^2 + z^2 - 2 \cdot D \cdot (R \cdot \delta + z \cdot \cos \psi \cdot \sin \xi))^2} dA,$$

где $(\dots, \dots)$ – скалярное произведение векторов, а комплекс δ соответствует выражению:

$$\delta = \cos \psi \cdot \cos \xi \cdot \cos \varphi + \sin \psi \cdot \sin \varphi.$$

Аналогично для элементарной площадки с нормалью $\vec{n}_2$ можно записать:

$$\varphi_{n_2} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_A \frac{(\vec{n}, \vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{n}_2, \vec{a} - \vec{b})}{|\vec{b} - \vec{a}|^2} dA = \frac{1}{\pi} \cdot \int_A \frac{(D \cdot \delta - R) \cdot (D - R \cdot \delta - z \cdot \cos \psi \cdot \sin \xi)}{[D^2 + R^2 + z^2 - 2 \cdot D \cdot (R \cdot \delta + z \cdot \cos \psi \cdot \sin \xi)]^2} dA.$$

Проведем интегрирование полученных выражений в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Элементарная площадка dA в этом случае соответствует выражению $R \cdot dz \cdot d\varphi$. Определим пределы интегрирования, исходя из видимости участков поверхности цилиндра из точки D.

Очевидно, что для горизонтальной элементарной площадки с нормалью $\vec{n}_1$ пределы интегрирования по переменной Z ограничены только высотой его боковой поверхности:

$$Z_{down}(\varphi) = R \cdot \operatorname{tg} \xi \cdot \cos \varphi, \quad Z_{up}(\varphi) = Z_{down}(\varphi) + L,$$

а пределы интегрирования по переменной φ определяются исходя из условия видимости (рис. 4.14):

$$\varphi_- = \psi_1(\psi) - \gamma(\psi, D); \quad \varphi_+ = \psi_1(\psi) + \gamma(\psi, D);$$

$$\psi_1(\psi) = \begin{cases} \arctg(\tg \psi / \cos \xi), & \text{если } |\psi| \leq \frac{\pi}{2}; \\ \arctg(\tg \psi / \cos \xi) + \pi \cdot \frac{|\psi|}{\psi}, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\gamma(\psi, D) = \arccos \left(\frac{R}{D \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \psi \cdot \sin^2 \xi}} \right).$$

Нетрудно заметить, что внутри указанных пределов интегрирования по переменной φ выполняется условие $D \cdot \delta \geq R$, которое является аналогом требования $(\vec{n}, (\vec{b} - \vec{a})) \geq 0$. Для вертикальной элементарной площадки с нормалью $\vec{n}_2$ пределы интегрирования по переменной φ сохраняются. Но при приближении к цилиндру со стороны оси Ox (со стороны наклона) часть боковой поверхности цилиндра будет «не видна» (рис. 4.15).

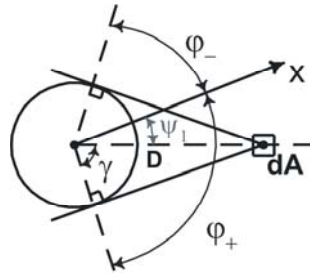


Рис. 4.14. К определению пределов интегрирования по переменной φ

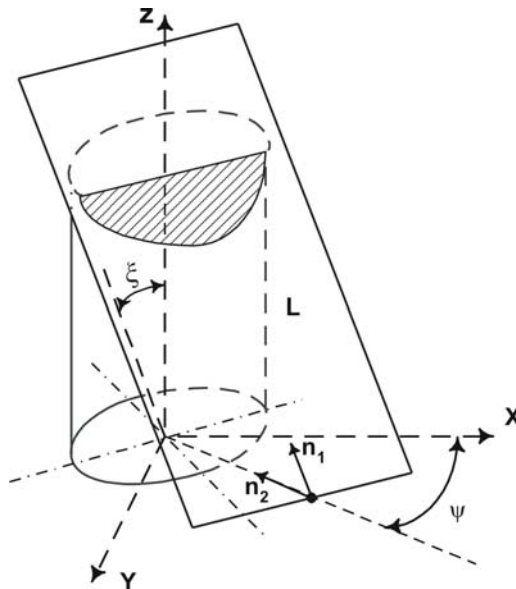


Рис. 4.15. К определению пределов интегрирования по переменной Z

Вследствие этого верхний предел интегрирования по переменной Z принимает вид:

$$Z_{up2}(D, \psi, \varphi) = \begin{cases} Z_{up}(\varphi), & \text{если } Z_{up}(\varphi) \cdot \cos \psi \cdot \sin \xi < D - R \cdot \delta; \\ (D - R \cdot \delta) / (\cos \psi \cdot \sin \xi), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Указанный предел обеспечивает выполнение условия:

$$D - R \cdot \delta - z \cdot \cos \psi \cdot \sin \xi \geq 0,$$

аналогом которого является требование $(\vec{n}_2, (\vec{a} - \vec{b})) \geq 0$.

Пользуясь симметрией задачи, плотность потока теплового излучения в точке D можно определить следующим выражением $I_D(\psi, D) = I \cdot \sqrt{\varphi_{n_1}^2 + \varphi_{n_2}^2}$, в котором местные угловые коэффициенты определяются из формул:

$$\varphi_{n_1}(\psi, D) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\psi_1 - \gamma}^{\psi_1 + \gamma} d\varphi \int_{Z_{down}}^{Z_{up}} \frac{(D \cdot \delta - R) \cdot (z \cdot \cos \xi - R \cdot \sin \xi \cdot \cos \varphi)}{[D^2 + R^2 + z^2 - 2 \cdot D \cdot (R \cdot \delta + z \cdot \cos \psi \cdot \sin \xi)]^2} \cdot Rdz;$$

$$\varphi_{n_2}(\psi, D) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\psi_1 - \gamma}^{\psi_1 + \gamma} d\varphi \int_{Z_{down}}^{Z_{up2}} \frac{(D \cdot \delta - R) \cdot (D - R \cdot \delta - z \cdot \cos \psi \cdot \sin \xi)}{[D^2 + R^2 + z^2 - 2 \cdot D \cdot (R \cdot \delta + z \cdot \cos \psi \cdot \sin \xi)]^2} \cdot Rdz.$$

Оценка воздействия теплового излучения на человека и окружающие объекты основывается на подстановке найденной функции плотности потока теплового излучения в различные критерии поражения. Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим практическую задачу определения зон теплового поражения для следующих исходных данных (рис. 4.16):

- **геометрия задачи** – в землю вертикально вкопана цистерна ($R=1,5\text{м}$; $h=12\text{м}$) так, что верхний край цистерны незначительно выступает над уровнем земли;
- **внешние условия** – горение происходит в атмосфере, имеющей температуру 300К ; при этом цистерну обдувает ветер со средней скоростью 5м/с ;
- **топливо** – в цистерне содержится изооктан¹ (C_8H_{18}), полностью наполняющий ее в начальный момент времени.

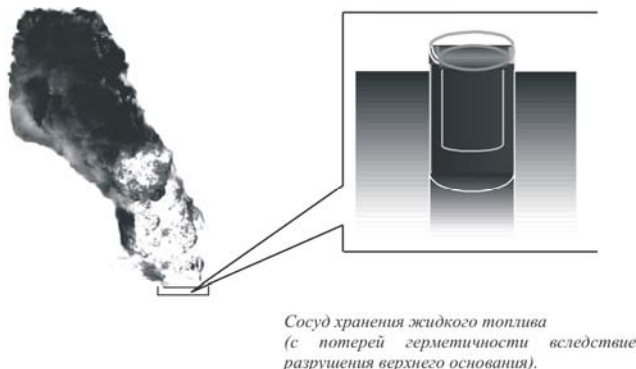


Рис. 4.16. Характерное развитие диффузионного пламени при возгорании горючей жидкости в обваловании

¹ Изооктан по своим горючим свойствам близок к бензину.

Из справочных данных [249] по изооктану и бензину сформирована табл. 4.3.

Таблица 4.3

Тепло-физические свойства горючей жидкости

Параметр	Значение
Плотность жидкости, $\rho_{ж}$	620 кг/м^3
Скорость послойного горения (для резервуара диаметром 3м), ν	$3,9 \div 4,0 \text{ мм/мин} \approx 6,67 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$
Теплота сгорания, Q	$3,2 \cdot 10^4 \text{ кДж/кг}$
Теплоемкость паров, c_p (1090K)	$3,45 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{K)}$
Степень черноты пламени, ε	0,6

В первую очередь определим геометрические параметры поверхности пламени.

Угол отклонения оси цилиндра от вертикали. Воспользуемся следующим эмпирическим соотношением [247]:

$$\begin{cases} \cos \xi = 1 & \text{при } U < 1; \\ \cos \xi = 1/\sqrt{U} & \text{при } U \geq 1; \end{cases} \quad U = \frac{U_w}{1,9 \cdot (Q \cdot M)^{0,2}} \cdot \left(\frac{2 \cdot c_p \cdot T_{атм} \cdot \rho_{атм}}{\pi \cdot \rho_v \cdot Q^*} \right)^{-1/3},$$

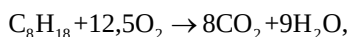
где U_w – скорость ветра, $[м/с]$; M – массовый расход жидкого топлива, $[кг/с]$. Вычислим массовый расход жидкого топлива:

$$M = \nu \cdot \rho_{ж} \cdot S_{\text{зеркало жидкости}} \approx 6,67 \cdot 10^{-5} \cdot 620 \cdot 3,1415 \cdot 1,5^2 \approx 0,292 [кг/с],$$

где $S_{\text{зеркало жидкости}}$ – площадь поверхности разлития. Подсчитав молярную массу изооктана C_8H_{18} , вычислим теоретическую плотность паров изооктана:

$$\rho_v = 114 \cdot 10^{-3} / 2,24 \cdot 10^{-2} \approx 5,09 [кг/м^3].$$

Для определения величины теплоты сгорания смеси горючего с окислителем Q^* воспользуемся записью химической реакции окисления изооктана [213]:



из которой следует, что на один моль изооктана при полном окислении требуется 12,5 молей кислорода. Таким образом, учитывая, что кислород в атмосферном воздухе составляет 21%, получаем:

$$Q^* = Q \cdot \tilde{c} = \frac{Q \cdot c_{O_2} \cdot M_{C_8H_{18}} / 12,5}{M_{\text{возд}} + c_{O_2} \cdot M_{C_8H_{18}} / 12,5} \approx \frac{3,2 \cdot 10^7 \cdot 0,21 \cdot 114 / 12,5}{29 + 0,21 \cdot 114 / 12,5} \approx 1,98 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right],$$

где $\tilde{c} \approx 0,061$ – массовая доля изооктана в стехиометрической смеси с воздухом;

$c_{O_2} \approx 0,21$ – массовая доля кислорода в атмосферном воздухе. Теплоемкость смеси изоктана и воздуха можно рассчитать аналогичным образом (c_p (при 1090K) для воздуха равна $1,157 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$):

$$c_p = c_{p(\text{возд})} \cdot (1 - \tilde{c}) + c_{p(C_8H_{18})} \cdot \tilde{c} \approx 0,939 \cdot 1,157 + 0,061 \cdot 3,45 \approx 1,296 \left[\text{кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) \right].$$

Учтем, что плотность воздуха при нормальных условиях составляет $1,161 \text{ кг}/\text{м}^3$:

$$U \approx \frac{5}{1,9 \cdot (3,2 \cdot 10^4 \cdot 0,292)^{0,2}} \cdot \left(\frac{2 \cdot 1,296 \cdot 300 \cdot 1,161}{3,1415 \cdot 5,09 \cdot 1,98 \cdot 10^3} \right)^{-1/3} \approx 1,384;$$

$$\xi = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{U}} \right) \approx 31,78^\circ.$$

В дальнейших расчетах будем использовать округленное значение угла отклонения от вертикали $32^\circ \approx 0,5585 \text{ радиан}$.

Длина боковой поверхности цилиндра (длина пламени). Для определения высоты пламени воспользуемся соотношением

$$\delta = \frac{\beta \cdot \rho_v \cdot v}{4 \cdot \rho_{O_2} \cdot D \cdot c_{O_2}} \cdot R^2,$$

в котором стехиометрический коэффициент β определяется следующим образом:

$$\beta = 12,5 \cdot M_{O_2} / M_{C_8H_{18}} = 12,5 \cdot 32 / 114 \approx 3,51,$$

плотность кислорода в нормальных условиях составляет $1,43 \text{ кг}/\text{м}^3$, коэффициент диффузии $D = 1,81 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$. С учетом этого получаем:

$$L = \delta = \frac{3,51 \cdot 5,09 \cdot 6,67 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 1,43 \cdot 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot 0,21} \cdot (1,5)^2 \approx 12,4 \text{ [м]}.$$

Плотность теплового излучения с поверхности горения. Поверхность горения состоит из боковой поверхности цилиндра (с площадью $S_{\text{бок}}$) и верхнего сечения цилиндра (с площадью $S_{\text{верх}}$). Общая площадь поверхности горения $S_{\text{пов}}$ составляет (см. рис. 4.12):

$$S_{\text{бок}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot L \approx 116,87 \text{ [м}^2\text{]}; \quad S_{\text{верх}} = \frac{\pi \cdot R^2}{\cos \xi} \approx 8,33 \text{ [м}^2\text{]}; \quad S_{\text{пов}} \approx 125,2 \text{ [м}^2\text{]}.$$

Плотность потока теплового излучения с поверхности горения оценим по формуле (оценка сверху):

$$I \leq \varepsilon \cdot \frac{Q \cdot \rho_{\text{ж}} \cdot v \cdot S_{\text{зеркало жидкости}}}{S_{\text{пов}}}.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$I \leq 0,6 \cdot \frac{3,2 \cdot 10^7 \cdot 620 \cdot 6,7 \cdot 10^{-5} \cdot 7,07}{125,2} \approx 4,5 \cdot 10^4 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right].$$

Поскольку при оценке теплового поражения нас интересует наихудший случай, то в дальнейших расчетах воспользуемся определенной здесь верхней границей плотности потока теплового излучения.

Здесь заметим, что, согласно [249], затухание пожара вследствие уменьшения уровня горючего в цистерне не произойдет, т.к. по эмпирической зависимости $z_0 = 6,924 \cdot d^{1,7} \approx 44,8 [м]$, где z_0 – критическая глубина уровня жидкого топлива в цистерне, при котором происходит затухание пламени, [м]; d – диаметр цистерны, [м]. Применение вышеописанных соотношений к определенным ранее характеристикам пламени пожара разлития позволило численно рассчитать линии с одинаковой плотностью потока теплового излучения вокруг очага разлития для следующих плотностей потока (рис. 4.17): $1,7 \text{ кВт/м}^2$ (безопасный для человека уровень плотности потока теплового излучения); $7,5 \text{ кВт/м}^2$; 15 кВт/м^2 .

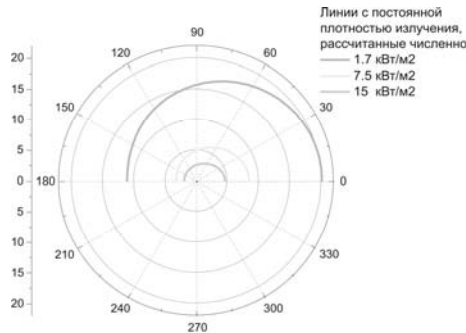


Рис. 4.17. Результат численного интегрирования для определения линий с постоянной плотностью потока теплового излучения

Приемлемое приближение полученных кривых можно получить на основе модифицированной улитки Паскаля [89]:

$$r(\varphi) = a + b \cdot \cos \varphi + \sin^2 \varphi \cdot (c + d \cdot \cos \varphi). \quad (4.101)$$

Результат экстраполяции для рассчитанных кривых представлен на рис. 4.18. Приняв гипотезу о том, что линии с одинаковой плотностью потока теплового излучения имеют вид (4.101), можно получить следующие выражения для определения коэффициентов a, b, c, d :

$$a = (r_0 + r_\pi)/2; \quad b = a - r_{\pi/4}; \quad c = r_{\pi/2} - a; \quad d = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (r_{\pi/4} - a - b/\sqrt{2} - c/2), \quad (4.102)$$

где $r_0, r_{\pi/4}, r_{\pi/2}, r_\pi$ – расстояния, на которых реализуется заданная плотность потока теплового излучения вдоль линий $\varphi = 0, \pi/4, \pi/2, \pi$ соответственно.

Кривые, соответствующие плотности потока теплового излучения вдоль указанных линий, можно рассчитать численно (рис. 4.19). Для удобства дальнейшего анализа, представим экстраполяцию данных кривых в виде зависимости расстояния от заданной плотности потока излучения $r = r(I)$.

Анализ указанных кривых показал, что приемлемой степени экстраполяции можно достигнуть на следующем шаблоне:

$$r(I) = r_0 + A_1 \cdot e^{-\frac{I-I_0}{t_1}} + A_2 \cdot e^{-\frac{I-I_0}{t_2}}. \quad (4.103)$$

Результат экстраполяции указанных кривых представлен в табл. 4.4.

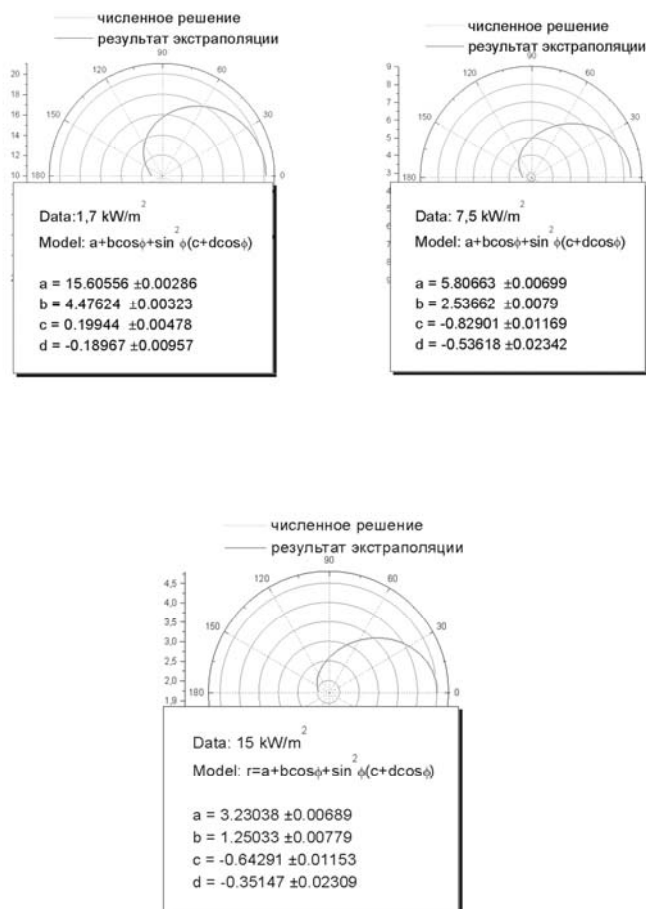


Рис. 4.18. Экстраполяция численного решения

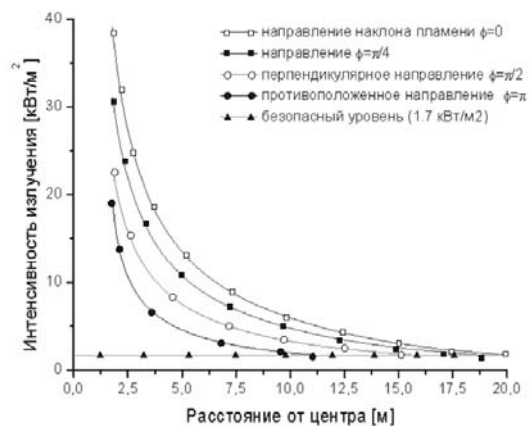


Рис. 4.19. Результат численного расчета плотности потока теплового излучения

Таблица 4.4

Таблица результатов экстраполяции

Линия	r_0	I_0	A_1	t_1	A_2	t_2
$\varphi = 0$	1,8	0	15,394	8,603	15,069	1,685
$\varphi = \pi/4$	1,8	1,717	5,351	1,518	11,462	7,112
$\varphi = \pi/2$	1,8	1,717	4,308	1,208	9,533	5,276
$\varphi = \pi$	1,8	1,684	2,951	1,007	6,41	3,853

Аналогичным образом построим экстраполяцию функции $I = I_0(r)$ вдоль линии $(\varphi = 0)$:

$$I_0(r) = 0,64491 + 20,05711 \cdot e^{\frac{r-1,74551}{6,2105}} + 18,44842 \cdot e^{\frac{r-1,74551}{1,07576}}. \quad (4.104)$$

Зависимости (4.103), (4.104), дополненные соотношениями (4.102), позволяют численно построить зависимость коэффициентов $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$, $d(r)$ вдоль линии $(\varphi = 0)$ согласно следующей последовательности:

$$\begin{aligned} a &\xrightarrow{(4.102)} a(r_0, r_{\pi/4}, r_{\pi/2}, r_{\pi}) \xrightarrow{(4.103)} a(I) \xrightarrow{(4.104)} a(r_{\varphi=0}); \\ b &\xrightarrow{(4.102)} b(r_0, r_{\pi/4}, r_{\pi/2}, r_{\pi}) \xrightarrow{(4.103)} b(I) \xrightarrow{(4.104)} b(r_{\varphi=0}); \\ c &\xrightarrow{(4.102)} c(r_0, r_{\pi/4}, r_{\pi/2}, r_{\pi}) \xrightarrow{(4.103)} c(I) \xrightarrow{(4.104)} c(r_{\varphi=0}); \\ d &\xrightarrow{(4.102)} d(r_0, r_{\pi/4}, r_{\pi/2}, r_{\pi}) \xrightarrow{(4.103)} d(I) \xrightarrow{(4.104)} d(r_{\varphi=0}). \end{aligned} \quad (4.105)$$

Кривые (4.105) с достаточной степенью точности экстраполируются кубическими парабололами вида:

$$y(r) = y_0 + y_1 \cdot r + y_2 \cdot r^2 + y_3 \cdot r^3. \quad (4.106)$$

Результат экстраполяции представлен в следующей табл. 4.5.

Таблица 4.5

Таблица результатов экстраполяции

Коэффициент	y_0	y_1	y_2	y_3
a	0,73118	0,50492	0,01278	$-5,0881 \cdot 10^{-5}$
b	-0,73192	0,49516	-0,01277	$5,079 \cdot 10^{-5}$
c	0,19982	-0,25872	0,01865	$-2,8534 \cdot 10^{-4}$
d	0,45462	-0,34307	0,02982	$-7,0788 \cdot 10^{-4}$

Объединим полученные результаты. Пусть нам дана точка на плоскости с координатами (r, φ) . Очевидно, что через эту точку проходит некоторая кривая (4.101), описывающая множество точек с одинаковой плотностью потока теплового излучения. Представим коэффициенты искомой кривой в виде (4.106). Тогда уравнение (4.101) пре-

вращается в кубическое уравнение относительно $r_{\varphi=0}$:

$$\begin{aligned} & [\Phi(a_0, b_0, c_0, d_0, \varphi) - r] + \Phi(a_1, b_1, c_1, d_1, \varphi) \cdot r_{\varphi=0} + \\ & + \Phi(a_2, b_2, c_2, d_2, \varphi) \cdot r_{\varphi=0}^2 + \Phi(a_3, b_3, c_3, d_3, \varphi) \cdot r_{\varphi=0}^3 = 0, \end{aligned} \quad (4.107)$$

где функция $\Phi(a, b, c, d, \varphi) = a + b \cdot \cos \varphi + \sin^2 \varphi \cdot (c + d \cdot \cos \varphi)$ принимает в качестве своих аргументов a, b, c, d соответствующие значения из указанной выше таблицы.

Корни уравнения (4.107) легко определяются при помощи известного правила Кардано, в соответствии с которым в качестве решения следует выбрать корень, удовлетворяющий требованию: $r_{\varphi=0}$ – наименьший из корней, превышающих или равных величине r .

Подставляя полученное значение $r_{\varphi=0}$ в соотношение (4.104), находим плотность потока теплового излучения в точке (r, φ) .

Описанный выше способ экстраполяции позволил получить численное приближение искомой функции плотности потока теплового излучения, минуя интегрирование по поверхности. Это сократило время дальнейшего анализа в несколько раз. О точности подобного приближения можно судить по данным, представленным в табл. 4.6. В табл. 4.6 пустым ячейкам соответствует воздействию с плотностью потока излучения менее $1,7 \text{ кВт/м}^2$. Из статистической обработки данных табл. 4.6 следует, что погрешность найденного приближения не превышает 5,1%. Математическое ожидание точности приближения составляет 0,998. Среднеквадратичное отклонение – 0,017.

Таблица 4.6

Таблица для оценки точности

Радиус [м]	Точность приближения ($I_{\text{интегр.}}/I_{\text{экстрапол.}}$)								
	$\varphi=0$	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
3	1,000	0,991	0,992	1,011	1,001	0,963	0,949	0,976	0,996
4	1,009	1,003	1,004	1,012	0,997	0,965	0,958	0,98	0,993
5	1,005	0,999	0,997	1,003	0,991	0,97	0,972	0,991	1,000
10	0,996	0,997	1,003	1,010	1,014	1,018	1,022	1,018	1,014
15	1,014	1,015	1,016	1,015	1,008				
20	1,004	1,002							

Проведенные выше расчеты показали, что плотность потока теплового излучения от пожара разлития относительно невелика и снижается до безопасного для человека уровня ($1,7 \text{ кВт/м}^2$) на расстоянии около 20 м от центра очага горения. В силу этой причины, несмотря на достаточно продолжительное время горения, можно обоснованно предположить, что время опасного воздействия теплового излучения на человека мало. Это время определяется траекторией выхода человека из опасной зоны и его скоростью движения.

В любом случае, расстояние порядка 20 м человек преодолеет менее чем за минуту своего движения. Это означает, что при определении дозы теплового излучения можно не принимать во внимание поправку на рассеивание тепла с поверхности кожи [204,

247].

Из вышеприведенных расчетов видно, что линии с одинаковой плотностью потока теплового излучения представляют собой подобие улитки Паскаля с контуром, отличным от окружности. В случае минимизации дозы теплового излучения, траектория выхода человека из зоны теплового воздействия отлична от прямой линии. Данная траектория должна проходить ортогонально линиям уровня плотности потока теплового излучения.

Это замечание дает вполне серьезные основания для «усложнения» расчета поглощаемой человеком дозы теплового излучения, но, благодаря обоснованному выше краткосрочному характеру воздействия, оно теряет свою существенность. С другой стороны, пренебрежение оптимальной траекторией может быть оправдано крайне низкой вероятностью «расчета» траектории своего движения убегающим человеком, который, как правило, считает, что:

- чем дальше он находится от источника теплового воздействия, тем меньше его обжигает;
- прямая линия является кратчайшим расстоянием между двумя точками.

Приведенные выше рассуждения дают возможность считать траекторией выхода человека из-под воздействия теплового излучения прямую линию ($\varphi = \text{const}$).

Полученные результаты и выводы можно представить в виде зон поражения человека в области очага пожара разлития (рис. 4.20).

Рассмотренный выше метод был основан на использовании аналитических зависимостей в виде модифицированных улиток Паскаля. Он позволяет расширить возможности методики НПБ 105-03 «Определение категорий помещений, зданий и наружных установок по взрывопожарной и пожарной опасности» [250] в части метода расчета интенсивности теплового излучения при определении значений критериев пожарной опасности наружных установок, дополнив ее учетом влияния ветра.



Рис. 4.20. Зоны теплового поражения пожара разлития

4.5.2. Численное моделирование пожаров разлития

Как известно [208, 249], горение жидкости, разлитой по прилегающей к зоне разрушения трубопровода (или резервуара хранения) местности, представляет собой горение

струи ее пара в воздухе. Поток пара в пламени поддерживается благодаря непрерывно идущему испарению, скорость которого определяется мощностью теплового потока от пламени к жидкости. Кислород, необходимый для горения, поступает в зону реакции из окружающей атмосферы. Пламя при горении жидкости можно отнести к диффузному типу пламен. Таким образом, при моделировании горения жидкости целесообразно рассматривать как специфический случай горения неперемешанных газов [181].

Высокоточное моделирование пожаров разлива является крайне трудной задачей вследствие сложности и многообразия физико-химических процессов, сопровождающих возможное формирование гомотермического слоя в жидкости, кипение и испарение топлива, его возможное разбрызгивание, зажигание и горение паров горючей жидкости. Механизмы этих процессов могут существенно варьироваться в зависимости от типа топлива, состояния и типа грунта в зоне аварии, погодных условий и т.д. [249]. В данном Разделе описывается *способ численного моделирования горения жидкостей, транспортируемых по трубопроводам и/или содержащихся в резервуарах хранения на объектах ТЭК, с целью проведения оценочных расчетов параметров возможных пожаров разлива.*

При решении задачи принимается, что разлитие горючей жидкости произошло на местности с пористым основанием (грунтом). Параметры пятна разлива на местности считаются заданными. В первом приближении при моделировании условно не рассматривается *фаза прогрева топлива*. Химические реакции горения считаются бесконечно быстрыми.

Сначала достаточно детально познакомимся с решением задачи оценочного моделирования *фазы испарения топлива*. Топливо испаряется в газовую фазу и образуется горючая смесь. При моделировании испарения топлива принимаются следующие необходимые упрощения и допущения:

- предполагается квазистационарность состояния топлива и окружающей среды при испарении;
- процессы переноса тепла и массы считаются идентичными (число Льюиса равно единице);
- для смеси атмосферного воздуха с парами топлива принимается постоянство коэффициента теплопроводности λ , произведения плотности смеси ρ и коэффициента бинарной диффузии паров топлива в атмосферном воздухе $D_{нар}$, а также их независимость от температуры T ;
- принимается постоянство и независимость от температуры удельной теплоемкости паров топлива $c_p^{пар}$;
- пары топлива диффундируют в стоячем воздухе по вертикальной координатной оси Oz , направленной от центра Земли;
- величина диффузионного массового потока $(J = \rho \cdot w)^1$ имеет конечное значение лишь для паров топлива, т.е., $J = J_{нар}$, где w – проекция средней скорости центра масс смеси паров топлива и атмосферного воздуха на координатную ось Oz (w – это единственная ненулевая проекция данной скорости);
- работа сдвиговых напряжений и кинетическая энергия пренебрежимо малы;

¹ Обычно такой поток в механике жидкостей и газов называют конвективным. В нашем случае его название было изменено в соответствии с физикой процессов испарения и рекомендациями работы [208].

- внешние объемные источники энергии в зоне испарения топлива отсутствуют;
- воздух не растворяется в топливе;
- химических реакций при испарении не происходит.

Испарение разлившегося жидкого топлива является вариантом известной задачи о стефановском потоке. Для постановки и решения данной задачи запишем уравнение неразрывности для пара жидкого топлива в диффузионном приближении с учетом принимаемой квазистационарности процесса испарения и перечисленных выше допущений (см. (4.26)):

$$\rho \cdot w \cdot \frac{dY_{\text{нап}}}{dz} - \rho \cdot D_{\text{нап}} \cdot \frac{d^2 Y_{\text{нап}}}{dz^2} = 0, \quad (4.108a)$$

где $Y_{\text{нап}}$ – относительная массовая концентрация паров топлива; z – пространственная координата на вертикальной оси Oz . В качестве граничных условий этой задачи принимаются:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0: \quad Y_{\text{нап}} &= Y_{\text{нап},0} = Y_{\text{нап},\text{нас}}; \\ \text{при } z = l: \quad Y_{\text{нап}} &= Y_{\text{нап},l} = Y_{\text{нап},\text{смex}}, \end{aligned} \quad (4.108б)$$

где $z = 0$ – уровень свободной поверхности топлива; $Y_{\text{нап},\text{нас}}$ – относительная массовая концентрация паров топлива при насыщении; $z = l$ – уровень фронта горения над топливом; l – толщина газовой прослойки между свободной поверхностью топлива и фронтом горения; $Y_{\text{нап},\text{смex}}$ – известная относительная массовая концентрация паров топлива в их стехиометрической смеси с воздухом.

Проведем первое интегрирование уравнения (4.108a) с учетом принятых упрощений и допущений:

$$\rho \cdot w \cdot Y_{\text{нап}} - \rho \cdot D_{\text{нап}} \cdot \frac{dY_{\text{нап}}}{dz} = \text{const} = \rho \cdot w$$

или

$$\rho \cdot D_{\text{нап}} \cdot \frac{dY_{\text{нап}}}{dz} = \rho \cdot w \cdot (Y_{\text{нап}} - 1).$$

Второе интегрирование уравнения (4.108a) дает следующее решение:

$$\ln(Y_{\text{нап}} - 1) = \frac{\rho \cdot w \cdot z}{\rho \cdot D_{\text{нап}}} + \text{const.}$$

Использование ГУ (4.108б) приводит к тому, что

$$\ln(Y_{\text{нап},\text{нас}} - 1) = \text{const}$$

и

$$\ln(Y_{\text{нап},\text{смex}} - 1) = \frac{\rho \cdot w \cdot l}{\rho \cdot D_{\text{нап}}} + \text{const.}$$

Тогда,

$$\frac{\rho \cdot w \cdot l}{\rho \cdot D_{\text{нап}}} = \ln \left(\frac{1 - Y_{\text{нап},\text{смex}}}{1 - Y_{\text{нап},\text{нас}}} \right).$$

Таким образом, мы получаем оценку диффузионного массового потока паров топлива в зону горения в виде:

$$J_{\text{nap}} = \rho \cdot w = \frac{\rho \cdot D_{\text{nap}}}{l} \cdot \ln \left(\frac{1 - Y_{\text{nap, смех}}}{1 - Y_{\text{nap, нас}}} \right). \quad (4.109)$$

Несмотря на всю очевидность описанного выше подхода к моделированию процессов испарения жидкого топлива, с практической точки зрения оценка потока паров топлива в зону горения (4.109) является малопривлекательной из-за сложности определения параметров l и $Y_{\text{nap, нас}}$ ¹. Поэтому получим оценку диффузионного массового потока паров топлива в зону горения другим способом. Запишем с учетом сделанных выше допущений и упрощений модификацию уравнения энергии (4.7в):

$$-\lambda \cdot \frac{d^2 T}{dz^2} + \rho \cdot w \cdot c_p^{\text{nap}} \cdot \frac{dT}{dz} = 0. \quad (4.110)$$

Первое интегрирование (4.110) дает [208]:

$$\lambda \cdot \frac{dT}{dz} - \rho \cdot w \cdot c_p^{\text{nap}} \cdot T = -Q_0 - \rho \cdot w \cdot c_p^{\text{nap}} \cdot T_0$$

или

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{\lambda} \cdot [\rho \cdot w \cdot c_p^{\text{nap}} \cdot (T - T_0) - Q_0],$$

где Q_0 – тепловой поток к поверхности топлива; T_0 – температура на поверхности топлива. Интегрируя второй раз, получим:

$$\ln \left[T - T_0 - \frac{Q_0}{\rho \cdot w \cdot c_p^{\text{nap}}} \right] = \frac{\rho \cdot w \cdot c_p^{\text{nap}} \cdot z}{\lambda} + \text{const.}$$

Подстановка ГУ ($\text{при } z = 0: T = T_0$) и ($\text{при } z = L: T = T_L$) позволяет записать:

$$\text{const} = \ln \left[-\frac{Q_0}{\rho \cdot w \cdot c_p^{\text{nap}}} \right]; \quad \ln \left[1 - \frac{c_p^{\text{nap}} \cdot (T_L - T_0)}{Q_0 / \rho \cdot w} \right] = \frac{\rho \cdot w \cdot c_p^{\text{nap}} \cdot L}{\lambda},$$

где L – некоторое известное расстояние в расчетной области (см. ниже).

Ранее отмечалось, что в первом приближении мы пренебрегаем процессами прогрева топлива. Тогда можно считать, что в модельном пожаре разлития свободная поверхность топлива от начала пожара до момента истощения запасов горючей жидкости имеет температуру, равную температуре кипения $T_{\text{кип}}$ этой жидкости. Это вполне допустимо, т.к. в фазе прогрева топлива энергия передается в его поверхностный слой до тех пор, пока он не достигнет температуры кипения [181]. Подвод тепла в жидкость от грунта или других источников, не связанных с пламенем, здесь не учитывается. В таком случае можно записать, что $(Q_0 = -\rho \cdot w \cdot q_0)$, где q_0 – скрытая теплота испарения топлива (см. [208]). В результате мы получаем оценку диффузионного массового потока паров топлива в зону горения в виде:

$$J_{\text{nap}} = \rho \cdot w = \frac{\lambda}{L \cdot c_p^{\text{nap}}} \cdot \ln \left[1 + \frac{c_p^{\text{nap}} \cdot (T_L - T_{\text{кип}})}{q_0} \right]. \quad (4.111)$$

¹ Здесь следует подчеркнуть, что величина $Y_{\text{nap, нас}}$ существенно влияет на процесс испарения и зависит от температуры [208].

Температура T_L в процессе численного решения задачи сеточными методами, как правило, связывается с изменяющейся во времени температурой смеси паров жидкости и воздуха в узлах пространственной расчетной сетки, ближайших к поверхности топлива со стороны газовой фазы. При расчетах коэффициент теплопроводности λ в (4.111) заменяется коэффициентом эффективной теплопроводности, который рассчитывается по справочным данным и методикам, изложенным, например, в работе [251]. Величины $c_p^{пар}$ и q_0 являются экспериментальными справочными данными (см., например, [249]).

При моделировании пожара разлития и/или возникновения токсической угрозы формула (4.111) позволяет дать оценку сверху параметрам функционирования источника горючих и/или токсических паров. Получить оценку времени исчерпания запасов разлившейся жидкости при ее интенсивном испарении, зная функциональную зависимость диффузионного массового потока ее паров (4.111), не представляет труда. Эта оценка необходима для прогнозирования продолжительности пожара и/или длительности сохранения токсической опасности.

На стадии **фазы горения паров топлива** проводится численный анализ параметров горения летучих паров жидкости в газовой фазе как предварительно не перемешанной газовой смеси с применением подходов Раздела 4.4.3 (см. также (4.46)). В этом случае вместо (4.46д) используется модель распада турбулентных вихрей, предложенная Д.Б. Сполдингом, в виде (4.43) или (4.44). С учетом вышесказанного, моделирование фазы горения здесь не рассматривается, т.к. оно фактически было описано в указанном Разделе. Анализ последствий вредных воздействий пожара проводится в соответствии с вычислительной технологией, изложенной в Разделе 4.4.4 и работах [4, 252].

Для моделирования развития токсической опасности при разлитии жидкостей, кипящих при низких температурах, используется метод, предложенный в Разделе 4.3.1 (см. также (4.36)). Источник токсических паров моделируется в соответствии с зависимостью (4.111). Численный анализ вредных последствий разлития и испарения токсических жидкостей проводится по технологии, представленной в монографии [6]. Такой подход был реализован в подсистеме «Alfargus/ToxicGasHazard» на базе КАИ «Alfargus» (см. Раздел 1.6).

На рис. 4.21 представлены фотографии реальных пламен горения разлитого в лабораторных условиях изооктана и примеры результатов их численного моделирования: а) – фотография пламени без ветра; б) – изоповерхность относительных массовых концентраций паров изооктана, соответствующая максимально интенсивной реакции в топливовоздушной смеси при горении без ветра (стехиометрическая концентрация); в), г) и д) – горение при скорости бокового ветра 0,05 м/с. При моделировании использовалась глобальная экзотермическая одностадийная необратимая реакция горения паров изооктана на воздухе (см. Раздел 4.5.1). В Разделе 4.5.1 также приведены используемые при расчетах физико-химические характеристики данного топлива. Различия в геометрических параметрах пламени в численном и натурном эксперименте представлены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

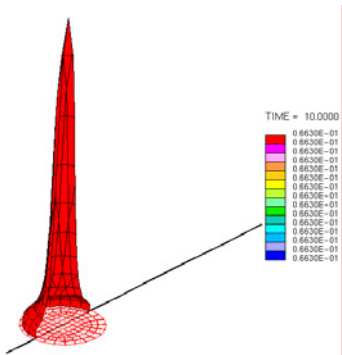
Результаты сравнения натурных измерений и численных расчетов по горению изооктана

Параметр	Натурные измерения	Численный расчет	Относительная ошибка, %
Длина пламени L , мм	115	128	10,2

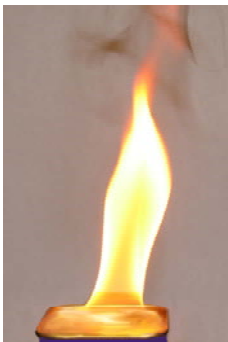
Ширина пламени W на уровне 10мм от поверхности жидкости, мм	32	26	23,1
Угол θ отклонения пламени от вертикали при ветре 0,05 м/с, градус	9,46	15,84	40,3



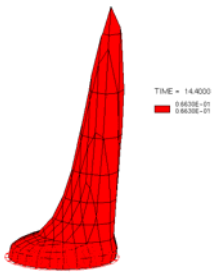
а)



б)



в)



г)



д)

Рис. 4.21. Пример моделирования горения разлитого изооктана

Пример моделирования полномасштабных пожаров разлития представлен на рис. 4.22: а – изоповерхность относительных массовых концентраций паров бензина, соответствующая максимально интенсивной реакции в топливовоздушной смеси при горении с ветровой нагрузкой (стехиометрическая концентрация); б – изоповерхность температурного поля. Расчет был выполнен В.Е. Селезевым и К.И. Дикаревым.

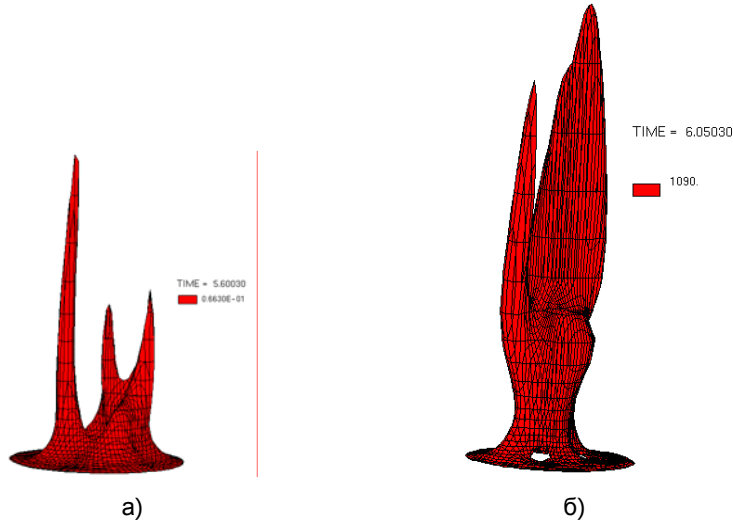


Рис. 4.22. Пример моделирования развития во времени пожара разлития бензина при аварии на бензозаправочной станции

При анализе механизмов затухания пожаров разлития (или действия токсической угроз) в ряде случаев требуется оценить количество жидкого топлива, просочившегося в почву, и геометрию зоны его фильтрации в грунтовый пласт [204]. Для решения поставленной задачи используется численный анализ параметров *безнапорной изотермической однофазной фильтрации несжимаемой вязкой химически инертной жидкости в недеформируемом пласте грунта* [253–256]. Вязкость жидкости при этом считается постоянной. Исходя из анализа реальных аварийных ситуаций, длительность процесса разлития предполагается много меньшей, чем длительность процесса фильтрации. Такое предположение позволяет разделить при моделировании процессы разлития и фильтрации, что дает возможность отказаться от решения сопряженной задачи.

В случае безнапорной изотермической однофазной фильтрации вязкой жидкости в изотропной пористой среде определяющие уравнения задаются в виде [254]:

$$\frac{\partial(m_{\text{пласт}} \cdot \rho_{\text{ж}})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_{\text{ж}} \cdot \vec{\omega}) = \Omega; \quad (4.112a)$$

$$\vec{\omega} = -\frac{k_{\text{пласт}}}{\mu_{\text{ж}}} \cdot (\vec{\nabla} p + \rho_{\text{ж}} \cdot \vec{g}); \quad (4.112б)$$

$$\rho_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}}(p); \quad m_{\text{пласт}} = m_{\text{пласт}}(p); \quad k_{\text{пласт}} = k_{\text{пласт}}(p); \quad \mu_{\text{ж}} = \mu_{\text{ж}}(p), \quad (4.112в)$$

где $m_{\text{пласт}}$ – пористость грунтового пласта; $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости (топлива); $\vec{\omega}$ – скорость фильтрации жидкости в грунтовый пласт; Ω – источник (сток) жидкости в грунтовом пласте (например, из-за химической реакции); $k_{\text{пласт}}$ – коэффициент прони-

цаемости грунтового пласта; $\mu_{ж}$ – динамический коэффициент вязкости жидкости; p – фильтрационное (статическое) давление. Уравнение (4.112а) выражает закон сохранения масс, уравнение (4.112б) включает закон Дарси [253]. Вид функциональных зависимостей параметров от фильтрационного давления в (4.112в) считается известным.

С учетом принятых выше упрощений и допущений система (4.112) примет вид:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0; \quad (4.113а)$$

$$\vec{\omega} = -\frac{k_{пласт}}{\mu_{ж}} \cdot (\vec{\nabla} p + \rho_{ж} \cdot \vec{g}); \quad (4.113б)$$

$$\rho_{ж} = const; \quad m_{пласт} = const; \quad k_{пласт} = const; \quad \mu_{ж} = const. \quad (4.113в)$$

В данной системе уравнений искомыми параметрами являются компоненты вектора скорости и фильтрационное давление. Плотность жидкости, коэффициент проницаемости грунтового пласта и коэффициент динамической вязкости жидкости в данном случае являются заданными величинами. При моделировании фильтрации жидкого топлива через анизотропную пористую среду уравнение (4.113б) заменяется на уравнение [254]:

$$\omega_i = -\frac{k_{пласт,ij}}{\mu_{ж}} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho_{ж} \cdot g_j \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.114)$$

В качестве ГУ в грунте задаются нулевые скорости и давление на границах, расположенных на значительном удалении от места разлива. На свободной поверхности жидкого топлива давление приравнивается к атмосферному давлению.

После замыкания системы уравнений (4.113) (или (4.113а, 4.114, 4.113в)) соответствующими граничными условиями его решение может проводиться МКР или МКЭ, или МКО. Оригинальный метод решения аналогичных задач фильтрации жидкостей предложен в работе [257].

В завершение Раздела 4.5 отметим, что описанные в них подходы и методы численного моделирования пожаров разлива в трубопроводных системах были реализованы в подсистемах «Alfargus/ToxicLiquidHazard» и «Alfargus/FireHazard» на базе КАИ «Alfargus» (см. Раздел 1.6).

4.6. К вопросу моделирования огненных шаров при горении углеводородного топлива

Как отмечается в работах [204], пожары на объектах ТЭК и химических предприятий могут протекать в режиме огненного шара. Для данного режима характерно сгорание больших объемов топливно-воздушной смеси в течение нескольких секунд. Несмотря на существенные различия в механизмах возникновения огненных шаров и протекания пожаров в режиме диффузионного факела, при расчете параметров огненного шара применимы (с незначительными модификациями) математические модели аварийной ситуации и методы их численного анализа, изложенные в предшествующих Разделах настоящей Главы (см. также [171, 207]).

4.7. Моделирование аварий в газотранспортных системах, связанных с неустойчивой работой газоперекачивающего оборудования

Изложение материала данного Раздела будет проводиться на примере ГТС, транспортирующей природный газ.

В процессе нормальной работы ЦН с уменьшением массового расхода природного газа через нагнетатель происходит увеличение его давления за ЦН. Дальнейшее снижение массового расхода газа ведет к резкому изменению структуры потока в нагнетателе ГПА. В результате ЦН входит либо в срыв, либо в помпаж. Процесс помпажа может быть столь интенсивен, что формируется обратный ток транспортируемого газа, сопровождающийся появлением на входе в ЦН природного газа, ранее подвергнувшегося в нем сжатию¹.

Безотносительно к характеру возникающих явлений, согласно общепринятой терминологии, рабочая точка на характеристиках ЦН, в которой происходит нарушение устойчивости исходного осесимметричного течения газа, называется «точкой помпажа» [258]. Геометрическое место точек помпажа на рабочих характеристиках ЦН, относящихся к различным значениям скорости вращения его вала, известно как линия границы помпажа [111].

Ущерб, наносимый помпажом, связан с возникновением поперечных нагрузок на детали рабочего колеса и корпус ЦН, обусловленных неосесимметричной природой помпажа. Помпаж вызывает значительные газодинамические потери на лопатках рабочего колеса ЦН и дальнейшее усиление вредных эффектов (например, вибрации деталей ЦН). Неосесимметричность явления помпажа определяется тем, что сначала помпаж проявляется как обратный ток, возникающий и нарастающий в некоторой возбужденной точке.

В данном Разделе моделируется возникновение помпажа в системе «группа ЦН – прилегающие ТГ – антипомпажный рециркуляционный газопровод». Разделение на стадии срыва и собственно помпажа при этом не производится. Численный анализ возможности возникновения помпажа в системе «группа ЦН – прилегающие ТГ – антипомпажный рециркуляционный газопровод», как правило, проводится при оптимальном управлении безопасным транспортированием природного газа по ГТС для оценки устойчивости прогнозируемого положения рабочей точки на характеристиках ЦН с позиции зарождения и развития аварийной ситуации. Помпаж в системе «группа ЦН – прилегающие ТГ – антипомпажный рециркуляционный газопровод» может также моделироваться для настройки и тестирования автоматической системы управления клапаном антипомпажного рециркуляционного газопровода².

Для обеспечения внутренней согласованности математических моделей транспортирования газа в ГДС строящиеся модели помпажа должны быть одномерными (см. Главу 2). Первый опыт разработки таких моделей помпажных явлений в газопроводных системах КЦ (КС) был получен И.И. Сафроновым и В.Е. Селезневым в середине девяностых годов прошлого века [1, 115]. Эти модели успешно применялись при отработке систем антипомпажной автоматики [115]. В их основу были положены

¹ Это явление характерно для глубокого помпажа.

² Здесь следует отметить, что антипомпажный рециркуляционный газопровод по своей сути также относится к ТГ. Таким образом, все математические выкладки, сделанные ниже для ТГ, будут справедливыми и для данного газопровода.

теоретические разработки и экспериментальные исследования, описанные в монографиях [112, 113, 259, 260].

При моделировании помпажных явлений принимаются более существенные упрощения, чем при численном анализе номинальных режимов транспортирования природного газа по ГТС (см. Главу 2). Это объясняется сложностью исследуемого процесса и трудностями, возникающими при построении его физической модели. К сожалению, помпажные явления и сейчас являются слабоизученными [258]. Поэтому модели помпажа носят в основном качественный характер и на практике моделирования ГТС используются для проведения только оценочных расчетов параметров помпажа¹. **Список принимаемых здесь упрощений и допущений** можно записать так:

- 1) *трубопроводы, входящие в состав моделируемой трубопроводной системы, имеют малую протяженность и малые перепады высот их расположения над уровнем моря* [78];
- 2) *трубопроводы, входящие в состав моделируемой трубопроводной системы, условно имеют абсолютно гладкие стенки, т. е., не вызывают гидравлического сопротивления трения при течении по ним газа;*
- 3) *для моделирования причин возникновения помпажа в трубопроводной системе в ее состав включаются искусственные дроссели;*
- 4) *по сравнению с протяженностью моделируемых трубопроводов длиной каждого дросселя можно пренебречь;*
- 5) *течение газа по прилегающим к ЦН технологическим трубопроводам условно считается изэнтропическим* [258, 260];
- 6) *течение газа в дросселях считается адиабатическим;*
- 7) *при моделировании помпажа предполагается, что природный газ подчиняется известному УРС идеализированного газа²: $P = Z \cdot \rho \cdot R \cdot T$, где P – давление газа; ρ – плотность газа; Z – коэффициент сжимаемости газа; R – газовая постоянная; T – температура газа;*
- 8) *коэффициент сжимаемости газа Z условно считается постоянным по длине трубопровода или дросселя.*

Здесь следует отметить, что в соответствии с первым допущением действием массовых сил на транспортируемый газ можно пренебречь.

Учитывая принятые допущения и требование согласованности математических моделей в ГДС, для численного анализа помпажных явлений будем использовать упрощенную модель течения газа по цилиндрическим трубопроводам, а именно – модель с сосредоточенными параметрами. Применение такой модели на практике является возможным, т.к. в натурных экспериментах неоднократно было показано, что при помпаже газ в рассматриваемой трубопроводной системе колеблется как единое целое, а акустические явления практически не оказывают влияния на характер процесса [260]. Рассмотрим эту модель более подробно.

Модель с сосредоточенными параметрами в нашем случае предполагает последова-

¹ Под оценочными расчетами в нашем случае подразумевается получение оценок сверху, которые направлены на анализ наихудших сценариев развития помпажа в трубопроводной системе КЦ (КС) с точки зрения промышленной безопасности. Например, учет в модели трубопроводов шероховатости будет способствовать расширению диапазона устойчивой работы ЦН. По данной причине рассмотрение абсолютно гладких труб соответствует оценкам наихудших сценариев развития помпажа.

² Подходы к описанию движения идеализированного газа в данном случае полностью соответствуют подходам к описанию движения идеального газа.

тельное рассмотрение двух процессов. Их условное разделение стало возможным благодаря экспериментальным данным о незначительном влиянии акустических явлений на характер движения газа в трубе при помпаже (см. выше).

Первым процессом в нашей модели является движение газового столба по цилиндрическому трубопроводу как единого целого, т.е., **плотность газа по длине ТГ (или его участка) предполагается постоянной** ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$) [260]. С практической точки зрения, это допущение можно обосновать малыми фактическими перепадами давлений газа в граничных поперечных сечениях ТГ, фиксируемых на реальных КС газотранспортных предприятий.

Предположим, что столб газа движется по трубопроводу ускоренно (рис. 4.23).

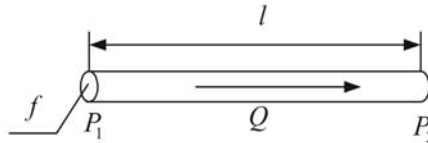


Рис. 4.23. «Инерционная модель» течения газа в трубопроводе

Тогда давление газа P_2 на выходе из трубопровода не будет равно давлению газа P_1 на его входе, а будет уменьшено на величину, затрачиваемую на преодоление силы инерции газового столба в рассматриваемом трубопроводе [260]. Уравнение движения природного газа в цилиндрическом трубопроводе в первом процессе представляется в виде¹:

$$L_a \cdot \frac{dQ}{dt} = P_1 - P_2, \quad (4.115)$$

где $L_a = \rho \cdot l / f$ – акустическая масса (l – длина трубопровода между сечениями 1 и 2; f – площадь поперечного сечения трубопровода); $Q = f \cdot w$ – объемный расход газа (см. рис. 4.23); t – время.

Уравнение (4.115) можно получить интегрированием по пространственной координате уравнения движения однокомпонентного газа (см. (2.36)):

$$\rho \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho \cdot Q \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = -f \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x} + g \cdot \rho \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} \right) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \lambda \cdot f^{-1.5} \cdot \rho \cdot Q^2.$$

Здесь следует отметить, что **изменение скорости газа w по длине ТГ практически не оказывает влияния на его ускорение, т. е., можно принять, что $\partial w / \partial x \approx 0$** . С учетом принятых упрощений рассматриваемое уравнение движения будет иметь вид:

$$\frac{\rho}{f} \cdot \frac{dQ}{dt} \cdot \int_0^l dx = - \int_{P_1}^{P_2} dP.$$

Отсюда получается уравнение (4.115). Это уравнение описывает так называемые инерционные свойства движения газа по трубе [260].

Второй процесс, исследуемый при моделировании помпажа, описывает акустические явления, связанные со скоростью изменения давления газа в объеме моделируемого трубопровода. Трубопровод в данном случае рассматривается как некоторая емкость, содержащая газ, плотность которого мгновенно осредняется по объему (рис. 4.24).

¹ В настоящем Разделе нижние числовые индексы связывают какой-либо физический параметр газового потока с конкретным поперечным сечением трубопровода, имеющим индексное обозначение на схеме.

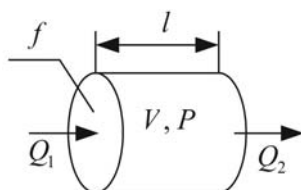


Рис. 4.24. «Объемная модель» течения газа в трубопроводе

Исходя из предположения об изоэнтропическом процессе течения идеализированного газа по ТГ и постоянства плотности газа по объему, проинтегрируем уравнение неразрывности (2.36а) для однокомпонентного газа

$$\left(\frac{\partial(\rho \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot f \cdot w)}{\partial x} = 0 \right) \Rightarrow \left(f \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \right)$$

по пространству¹:

$$\left(f \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \int_0^l dx + \rho \cdot \int_{Q_1}^{Q_2} dQ = 0 \right) \Rightarrow \left(\frac{V}{\rho \cdot c_0^2} \cdot \frac{dP}{dt} = Q_1 - Q_2 \right),$$

где $V = l \cdot f$ – объем моделируемого трубопровода между граничными поперечными сечениями; c_0 – местная скорость звука. Тогда можно записать (см. рис. 4.24):

$$C_a \cdot \frac{dP}{dt} = Q_1 - Q_2, \quad (4.116)$$

где $C_a = V / (\rho \cdot c_0^2) = V / (\gamma \cdot R \cdot \rho \cdot T) = V \cdot Z / (\gamma \cdot P)$ – акустическая гибкость; γ – показатель адиабаты.

Уравнения (4.115, 4.116) описывают инерционные и емкостные свойства движения газа в трубопроводе соответственно. Схематизация процесса течения газа в реальном ТГ осуществляется в виде «инерционного» трубопровода с емкостью на одном из концов [260] (рис. 4.25).

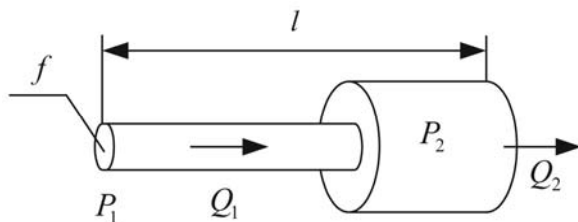


Рис. 4.25. Схематизация течения газа в трубопроводе (вариант 1)

Тогда для движения газа как системы, изображенной на рис. 4.25, имеем уравнения:

$$L_{a1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} = P_1 - P_2; \quad (4.117a)$$

¹ Здесь для вывода уравнения используется известное соотношение термодинамики применительно к изоэнтропическим процессам $dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \cdot d\rho = c_0^2 \cdot d\rho$, где S – энтропия.

$$C_{a2} \cdot \frac{dP_2}{dt} = Q_1 - Q_2, \quad (4.1176)$$

где

$$L_{a1} = \frac{\rho_1 \cdot l}{f} \cdot K_{L1}; \quad C_{a2} = \frac{l \cdot f}{\rho_2 \cdot (c_0^2)_2} \cdot K_{C2} = \frac{l \cdot f \cdot Z_2}{\gamma \cdot P_2} \cdot K_{C2}; \quad K_{L1} + K_{C2} = 1; \quad (4.118)$$

K_{Li} ($i=1,2$) – коэффициенты приведения, учитывающие влияние инерционных свойств газа с акустической массой L_{ai} в ТГ на условие самовозбуждения колебаний газового столба в данном ТГ (этот коэффициент был введен В.В. Казакевичем в монографии [260]; его рекомендованное значение для цилиндрических трубопроводов $K_{Li} = 0,5$ ($i=1,2$) [260]) (см. ниже); K_{Ci} ($i=1,2$) – коэффициенты приведения, учитывающие влияние емкостных свойств газа с акустической гибкостью C_{ai} в ТГ на условие самовозбуждения колебаний газового столба в данном ТГ (этот коэффициент был введен В.В. Казакевичем в монографии [260]; его рекомендованное значение для цилиндрических трубопроводов $K_{Ci} = 0,5$ ($i=1,2$) [260]) (см. ниже).

Пусть теперь емкость условно сосредоточена на левом конце трубопровода (рис. 4.26).

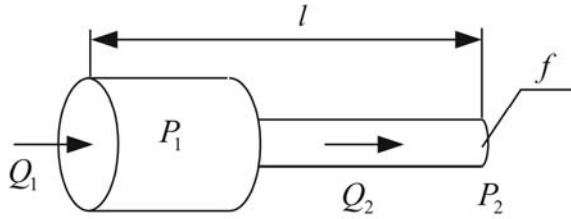


Рис. 4.26. Схематизация течения газа в трубопроводе (вариант 2)

Тогда, повторив вышеизложенные рассуждения, получим:

$$L_{a2} \cdot \frac{dQ_2}{dt} = P_1 - P_2; \quad (4.119a)$$

$$C_{a1} \cdot \frac{dP_1}{dt} = Q_1 - Q_2, \quad (4.1196)$$

где

$$L_{a2} = \frac{\rho_2 \cdot l}{f} \cdot K_{L2}; \quad C_{a1} = \frac{l \cdot f}{\rho_1 \cdot (c_0^2)_1} \cdot K_{C1} = \frac{l \cdot f \cdot Z_1}{\gamma \cdot P_1} \cdot K_{C1}; \quad K_{L2} + K_{C1} = 1. \quad (4.120)$$

Вычитая уравнение (4.119a) из уравнения (4.117a) и уравнение (4.1196) из (4.1176), с учетом принятых допущений можно записать:

$$\rho_1 \cdot \frac{dQ_1}{dt} = \rho_2 \cdot \frac{dQ_2}{dt}; \quad (4.121)$$

$$\frac{1}{P_1} \cdot \frac{dP_1}{dt} = \frac{1}{P_2} \cdot \frac{dP_2}{dt}. \quad (4.122)$$

Из этих равенств следует совпадение уравнений (4.117) и (4.119). Таким образом, можно

говорить об уравнениях движения газа в ТГ, одновременно характеризующегося инерционными и емкостными свойствами. Из вышесказанного следует, что здесь при моделировании течения газа в ТГ достаточно одного уравнения для объемного расхода газа (одно из уравнений (4.117а) или (4.119а)) и одного уравнения для давления газа (одно из уравнений (4.117б) или (4.119б)).

Как отмечалось выше, для моделирования причин возникновения помпажа в трубопроводной системе в ее состав включаются *искусственные дроссели*. Эти дроссели предназначены для имитации изменения массового расхода газа в трубопроводах с помощью мгновенного изменения площади их поперечного сечения на очень коротких участках. С практической точки зрения дроссели могут моделировать ошибки в управлении кранами ГТС, последствия стихии¹ и воздействия третьих лиц, способствующие уменьшению пропускной способности трубопроводов, аварии при проведении внутритрубной дефектоскопии и т.д. Дроссели также используются для моделирования работы антипомпажных клапанов.

Для построения модели течения газа через дроссель рассмотрим его схематичное представление (рис. 4.27). В одномерном случае дроссель можно моделировать в виде достаточно протяженного участка трубы с уменьшенным поперечным сечением. Пусть площадь проходного сечения через дроссель равна $f_{\text{дроссель}} = k_{\text{дроссель}} \cdot f$, где $k_{\text{дроссель}} \in (0,1]$ – коэффициент сужения поперечного сечения дросселя.

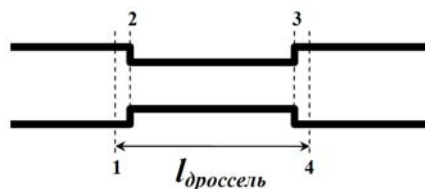


Рис. 4.27. Схематичное представление конструкции дросселя

Рассмотрим на рис. 4.27 участок между сечениями 1 и 4. Условно считается, что ядро газового потока успевает сузиться и расшириться на отрезках $[x_1, x_2]$ и $[x_3, x_4]$ соответственно (здесь нижние индексы представляют собой номера точек на рис. 4.27). При этом принимается, что

$$l_{\text{дроссель}} \approx |x_3 - x_2|. \quad (4.123)$$

Вследствие малой длины газового канала дросселя (по сравнению с протяженностью ТГ) здесь условно принимается, что газодинамические процессы мгновенно распространяются по дросселю. В этом случае в каждый момент времени процесс транспортирования газа через дроссель можно считать установившимся. Пренебрегая влиянием силы тяжести (по причине малой длины дросселя), рассмотрим уравнение движения газа в недивергентной форме для установившегося режима течения (см. (2.36)):

$$w \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} + \frac{\lambda \cdot w^2 \cdot \sqrt{\pi}}{4 \cdot \sqrt{f}} = 0,$$

где λ – эффективный коэффициент гидравлического сопротивления для дросселя (см. ниже). При определении коэффициента гидравлического сопротивления трения λ ус-

¹ Здесь подразумевается, что стихия (например, оползни) может вызывать значительные деформации стенок труб.

ловно считается, что режим течения является квадратичным, т.е., при определении λ не используются параметры потока газа (см. (П2.3)). Из приведенного выше уравнения получается запись уравнения Бернулли применительно к рассматриваемому процессу:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{w^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} + \frac{\lambda \cdot w^2 \cdot \sqrt{\pi}}{4 \cdot \sqrt{f}} = 0. \quad (4.124)$$

Проинтегрируем (4.124) на отрезке $[x_1, x_4]$, полагая, что процесс течения газа через дроссель является адиабатическим ($P = \text{const} \cdot \rho^\gamma$). Отсюда

$$\rho(x) = \rho_1 \cdot \left(\frac{P(x)}{P_1} \right)^{1/\gamma}. \quad (4.125)$$

Учитывая (4.125), второе слагаемое (4.124) можно преобразовать к виду (см., также, [106]):

$$\int_1^4 \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} dx = \int_1^4 \frac{dP}{\rho} = \frac{P_1^{1/\gamma}}{\rho_1} \cdot \int_1^4 \frac{dP}{P^{1/\gamma}} = \frac{1}{G} \cdot \frac{P_1}{\rho_1} \cdot \left[\left(\frac{P_4}{P_1} \right)^G - 1 \right], \quad (4.126)$$

где $G = (\gamma - 1)/\gamma$; здесь и далее цифрами в пределах интегрирования условно обозначены координаты x соответствующих поперечных сечений трубы (см. рис. 4.27).

Для первого слагаемого (4.124) запишем

$$\frac{1}{2} \cdot \int_1^4 \frac{d(w^2)}{dx} dx = \frac{w_4^2 - w_1^2}{2}. \quad (4.127)$$

С учетом уравнения неразрывности (см. (2.36а))

$$\rho_1 \cdot w_1 = \rho_4 \cdot w_4$$

и (4.125), формулу (4.127) можно представить в виде:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_1^4 \frac{d(w^2)}{dx} dx = \frac{w_4^2}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{\rho_4}{\rho_1} \right)^2 \right) = \frac{Q_4^2}{2 \cdot f^2} \cdot \left(1 - \left(\frac{P_4}{P_1} \right)^{2/\gamma} \right). \quad (4.128)$$

Распишем третье слагаемое уравнения (4.124). Учитывая (4.123), данный интеграл можно записать в виде:

$$\int_1^4 \sqrt{\frac{\pi}{f(x)}} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot w^2 dx \approx \int_2^3 \sqrt{\frac{\pi}{f(x)}} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot w^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{f_{\text{дроссель}}}} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot \int_2^3 w^2 dx = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \lambda \cdot J^2}{4 \cdot f_{\text{дроссель}}^{2,5}} \cdot \int_2^3 \frac{dx}{\rho^2}, \quad (4.129)$$

где $J = \rho(x) \cdot w(x) \cdot f(x)$ – массовый расход газа. При установившемся течении $J(x) = \text{const}$. Интеграл в (4.129) оценим по следующей формуле:

$$\int_2^3 \frac{dx}{\rho^2} \approx \int_1^4 \frac{dx}{\rho^2} \approx \frac{l_{\text{дроссель}}}{2} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_4^2} \right) = \frac{l_{\text{дроссель}}}{2 \cdot \rho_4^2} \cdot \left(1 + \left(\frac{\rho_4}{\rho_1} \right)^2 \right) = \frac{l_{\text{дроссель}}}{2 \cdot \rho_4^2} \cdot \left(1 + \left(\frac{P_4}{P_1} \right)^{2/\gamma} \right),$$

откуда для третьего слагаемого справедлива запись:

$$\int_1^4 \sqrt{\frac{\pi}{f}} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot w^2 dx \approx \frac{\sqrt{\pi} \cdot \lambda \cdot J^2 \cdot l_{\text{дроссель}}}{8 \cdot \rho_4^2 \cdot f_{\text{дроссель}}^{2,5}} \cdot \left(1 + \left(\frac{P_4}{P_1} \right)^{2/\gamma} \right)$$

или

$$\int_1^4 \sqrt{\frac{\pi}{f}} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot w^2 dx \approx \frac{\sqrt{\pi} \cdot \lambda \cdot Q_4^2 \cdot l_{\text{дроссель}}}{8 \cdot k_{\text{дроссель}}^{2,5} \cdot f^{2,5}} \cdot \left(1 + \left(\frac{P_4}{P_1} \right)^{2/\gamma} \right). \quad (4.130)$$

Подставляя (4.126), (4.128) и (4.130) в интегральную форму уравнения (4.124), получаем:

$$\frac{Q_4^2}{2 \cdot f^2} \cdot \left(1 - \left(\frac{P_4}{P_1} \right)^{2/\gamma} \right) + \frac{1}{G} \cdot Z \cdot R \cdot T_1 \cdot \left[\left(\frac{P_4}{P_1} \right)^G - 1 \right] + \frac{\sqrt{\pi} \cdot \lambda \cdot l_{\text{дроссель}} \cdot Q_4^2}{8 \cdot k_{\text{дроссель}}^{2,5} \cdot f^{2,5}} \cdot \left(1 + \left(\frac{P_4}{P_1} \right)^{2/\gamma} \right) = 0. \quad (4.131a)$$

Введем для обозначения входа и выхода дросселя индексы « $вх\_д$ » и « $вых\_д$ », тогда из (4.131a) можно записать:

$$Q_{\text{вых\_д}}^2 = \frac{\frac{2}{G} \cdot f^2 \cdot Z \cdot R \cdot T_{\text{вх\_д}} \cdot \left[1 - \left(\frac{P_{\text{вых\_д}}}{P_{\text{вх\_д}}} \right)^G \right]}{\left[1 - \left(\frac{P_{\text{вых\_д}}}{P_{\text{вх\_д}}} \right)^{2/\gamma} \right] + \sqrt{\frac{\pi}{f}} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{l_{\text{дроссель}}}{k_{\text{дроссель}}^{2,5}} \cdot \left[1 + \left(\frac{P_{\text{вых\_д}}}{P_{\text{вх\_д}}} \right)^{2/\gamma} \right]}. \quad (4.132a)$$

С учетом постоянства массового расхода газа по длине дросселя и (4.125) имеем:

$$Q_{\text{вх\_д}}^2 = Q_{\text{вых\_д}}^2 \cdot \left(\frac{P_{\text{вых\_д}}}{P_{\text{вх\_д}}} \right)^{2/\gamma}. \quad (4.132б)$$

Формула (4.132a) содержит неявность относительно параметра $P_{\text{вых\_д}}$, что требует использования численных методов для его определения (при известных значениях параметров $P_{\text{вх\_д}}$, $Q_{\text{вх\_д}}$ и $T_{\text{вх\_д}}$). Для решения данной проблемы можно предложить следующий способ упрощения.

Сравним первые два слагаемые (4.124). Второе слагаемое (4.124) можно преобразовать к виду:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} = \frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{P}{\bar{\rho}} \right),$$

где $\bar{\rho}$ – некоторое среднее значение плотности ρ на рассматриваемом участке. С учетом данной формулы рассмотрим сумму указанных слагаемых (4.124):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{w^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{w^2}{2} + \frac{P}{\bar{\rho}} \right).$$

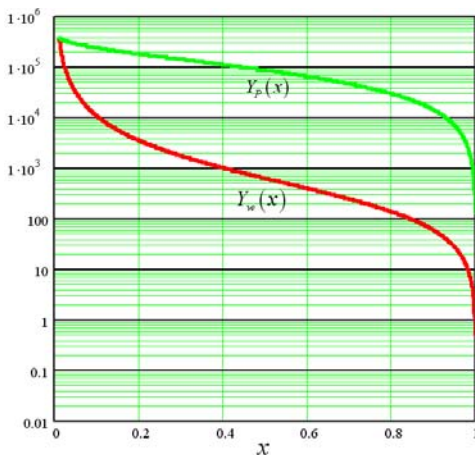
Покажем, что в первом приближении слагаемым $d(w^2)/dx$ можно пренебречь по сравнению со слагаемым $(1/\rho) \cdot dP/dx$. Интегралы от этих слагаемых по длине дросселя

представлены формулами (4.126) и (4.128) соответственно. Оценим абсолютные значения данных интегралов. Обозначим модуль интеграла от первого слагаемого через $Y_w(x)$, модуль интеграла от второго слагаемого через $Y_p(x)$, где $x = P_4/P_1$, $0 < x < 1$. Тогда

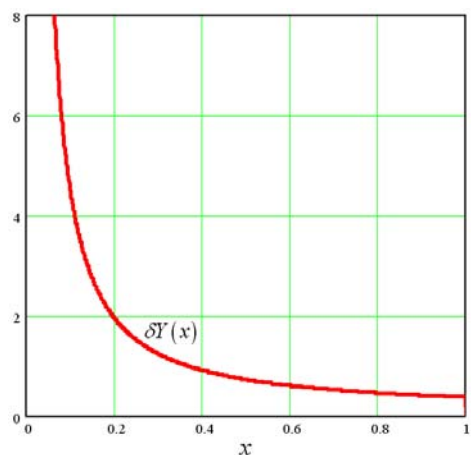
$$Y_w(x) = \frac{Q_4^2}{2 \cdot f^2} \cdot (1 - x^{2/\gamma}) = \frac{Q_1^2 \cdot x^{-2/\gamma}}{2 \cdot f^2} \cdot (1 - x^{2/\gamma}); \quad Y_p(x) = \frac{Z \cdot R \cdot T_1}{G} \cdot (1 - x^G).$$

В процессе преобразований первой формулы использовалось уравнение неразрывности для установившихся течений ($\rho_4 \cdot Q_4 = \rho_1 \cdot Q_1$), а также соотношение для адиабатического процесса ($\rho_1/\rho_4 = (P_1/P_4)^{1/\gamma} = x^{-1/\gamma}$). На рис. 4.28 и 4.29 представлены графики зависимостей $Y_p(x)$ и $Y_w(x)$, а также функции $\delta Y(x) = [Y_w(x)/Y_p(x)] \cdot 100\%$ для природного газа (метана) применительно к двум диаметрам труб: $d = 0,7 \text{ м}$ и $d = 1,2 \text{ м}$. Значения параметров при построении данных кривых принимались следующими (параметры соответствуют номинальным режимам транспорта газа через ЦН): $Z = 0,9$; $R = 518,26 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$; $T_1 = 288,15 \text{ К}$; $Q_1 = 10 \text{ м}^3/\text{с}$; $\gamma = 1,33$.

Как видно из представленных рисунков, величина $Y_w(x)$ достаточно мала по сравнению с $Y_p(x)$. Так, например, для труб диаметром $d = 0,7 \text{ м}$ значения функции $\delta Y(x)$ для основного диапазона x ($0,2 < x < 1$) не превышают 2%. Для труб диаметром $d = 1,2 \text{ м}$ влияние $Y_w(x)$ по сравнению с $Y_p(x)$ в 10 раз меньше, чем для труб диаметром $d = 0,7 \text{ м}$. Таким образом, показано, что при построении модели дросселя в первом приближении с сохранением достаточной точности можно пренебречь влиянием слагаемого $d(w^2)/dx$ по сравнению ($\rho^{-1} \cdot dP/dx$).

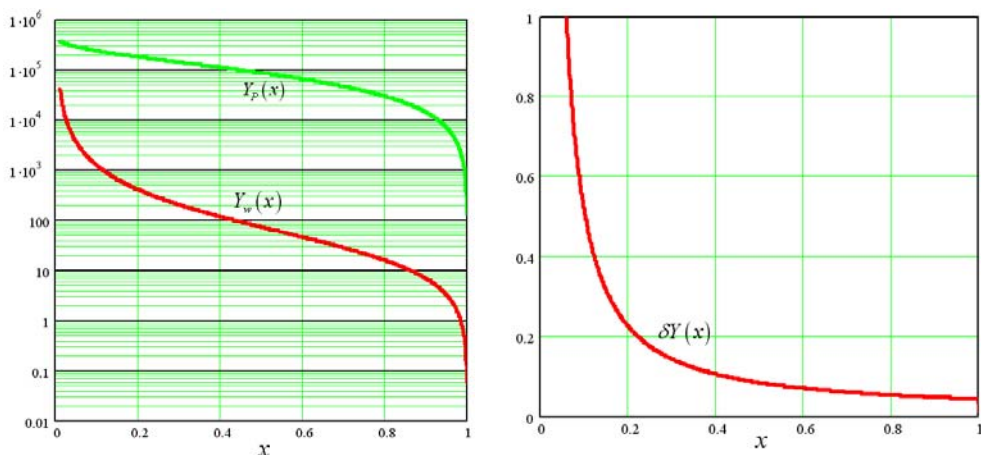


а) зависимости $Y_w(x)$ и $Y_p(x)$, Дж/кг



б) зависимость $\delta Y(x)$, %

Рис. 4.28. График зависимостей $Y_p(x)$, $Y_w(x)$ и $\delta Y(x)$ (%) для трубы диаметром 0,7 м

а) зависимости $Y_w(x)$ и $Y_p(x)$, Дж/кгб) зависимость $\delta Y(x)$, %**Рис. 4.29.** График зависимостей $Y_p(x)$, $Y_w(x)$ и $\delta Y(x)$ для трубы диаметром 1,2м

Рассмотрим теперь преобразования (4.129). Последний интеграл в этих преобразованиях можно оценить следующим образом:

$$\int_2^3 \frac{dx}{\rho^2} \approx \int_1^4 \frac{dx}{\rho^2} \approx \frac{l_{\text{дроссель}}}{\rho_1^2} \quad \text{или} \quad \int_2^3 \frac{dx}{\rho^2} \approx \int_1^4 \frac{dx}{\rho^2} \approx \frac{l_{\text{дроссель}}}{\rho_4^2}.$$

Отсюда

$$\int_1^4 \sqrt{\frac{\pi}{f}} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot w^2 dx \approx \sqrt{\pi} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{J^2}{f_{\text{дроссель}}^{2,5}} \cdot \int_2^3 \frac{dx}{\rho^2} \approx \sqrt{\pi} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{Q_1^2 \cdot l_{\text{дроссель}}}{f_{\text{дроссель}}^{2,5}}$$

или

$$\int_1^4 \sqrt{\frac{\pi}{f}} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot w^2 dx \approx \sqrt{\pi} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{Q_4^2 \cdot l_{\text{дроссель}}}{f_{\text{дроссель}}^{2,5}}.$$

Тогда (4.131а) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{G} \cdot Z \cdot R \cdot T_{\text{вх}_\partial} \cdot \left[\left(\frac{P_{\text{вых}_\partial}}{P_{\text{вх}_\partial}} \right)^G - 1 \right] + \frac{\sqrt{\pi} \cdot \lambda \cdot l_{\text{дроссель}} \cdot Q_{\text{вх}_\partial}^2}{4 \cdot k_{\text{дроссель}}^{2,5} \cdot f^{2,5}} = 0 \quad (4.131б)$$

или

$$\frac{1}{G} \cdot Z \cdot R \cdot T_{\text{вх}_\partial} \cdot \left[\left(\frac{P_{\text{вых}_\partial}}{P_{\text{вх}_\partial}} \right)^G - 1 \right] + \frac{\sqrt{\pi} \cdot \lambda \cdot l_{\text{дроссель}} \cdot Q_{\text{вх}_\partial}^2}{4 \cdot k_{\text{дроссель}}^{2,5} \cdot f^{2,5}} = 0. \quad (4.131в)$$

Из данного уравнения получаем:

$$P_{\text{вых}_\partial} = P_{\text{вх}_\partial} \cdot \left[1 - \frac{\sqrt{\pi} \cdot \lambda \cdot l_{\text{дроссель}} \cdot Q_{\text{вх}_\partial}^2 \cdot G}{4 \cdot k_{\text{дроссель}}^{2,5} \cdot f^{2,5} \cdot Z \cdot R \cdot T_{\text{вх}_\partial}} \right]^{1/G}$$

или

$$P_{\text{вых}_\partial} = P_{\text{вх}_\partial} \cdot \left[1 - \frac{\sqrt{\pi} \cdot \lambda \cdot l_{\text{дроссель}} \cdot Q_{\text{вх}_\partial}^2 \cdot G}{4 \cdot k_{\text{дроссель}}^{2,5} \cdot f^{2,5} \cdot Z \cdot R \cdot T_{\text{вх}_\partial}} \right]^{1/G}.$$

Отсюда

$$\xi = \left[1 - \frac{\sqrt{\pi} \cdot \lambda \cdot l_{\text{дроссель}} \cdot Q_{\text{вх}_\partial}^2 \cdot G}{4 \cdot k_{\text{дроссель}}^{2,5} \cdot f^{2,5} \cdot Z \cdot R \cdot T_{\text{вх}_\partial}} \right]^{1/G} \quad (4.132\text{в})$$

или

$$\xi = \left[1 - \frac{\sqrt{\pi} \cdot \lambda \cdot l_{\text{дроссель}} \cdot Q_{\text{вх}_\partial}^2 \cdot G}{4 \cdot k_{\text{дроссель}}^{2,5} \cdot f^{2,5} \cdot Z \cdot R \cdot T_{\text{вх}_\partial}} \right]^{1/G}, \quad (4.132\text{г})$$

где функцию ($\xi = P_{\text{вых}_\partial} / P_{\text{вх}_\partial}$) будем называть рабочей характеристикой дросселя.

Модель транспортирования газа через ЦН была подробно описана в Главе 2. Эта модель связывает параметры газа на входе и выходе ЦН:

$$P_{\text{вых}_\text{ЦН}} = \varepsilon(Q_{\text{вх}_\text{ЦН}}) \cdot P_{\text{вх}_\text{ЦН}}; \quad (4.133\text{а})$$

$$T_{\text{вых}_\text{ЦН}} = T_{\text{вх}_\text{ЦН}} \cdot \left[\varepsilon(Q_{\text{вх}_\text{ЦН}}) \right]^\sigma, \quad (4.133\text{б})$$

где $\varepsilon(Q_{\text{вх}_\text{ЦН}})$ – степень сжатия газа в ЦН, являющаяся его паспортной характеристикой (вообще говоря, $\varepsilon = \varepsilon(n, P_{\text{вх}_\text{ЦН}}, T_{\text{вх}_\text{ЦН}}, Q_{\text{вх}_\text{ЦН}})$ (см. Главу 2), n – частота вращения вала ЦН); $\sigma = (\gamma - 1) / (\gamma \cdot \eta_p) = (\eta - 1) / \eta = G / \eta_p$ [112]; η_p – политропический коэффициент полезного действия ЦН [112]; η – показатель политропы.

Рассмотрим применение описанных выше моделей ТГ, искусственных дросселей и ЦН при численной оценке возможности возникновения помпажных явлений в системе «группа ЦН – прилегающие ТГ – антипомпажный рециркуляционный газопровод». Пусть имеется гипотетический компрессорный цех (рис. 4.30). В его состав входят N параллельно соединенных ГПА. Для выхода из помпажа, возникающего в одной или более системах «ЦН – прилегающие ТГ» исследуемого КЦ, используется общий антипомпажный рециркуляционный газопровод, оснащенный антипомпажным клапаном. Следует отметить, что подобная технологическая схема КЦ была реализована, например, в одном из цехов КС «Моркинская» ООО «Волготрансгаз».

Целью моделирования является оценка устойчивости рабочих точек на характеристиках всех ЦН в КЦ (КС) при условиях внезапных аварийных нарушений пропускной способности трубопроводной системы КЦ или КС, изначально функционирующей в заданном установившемся режиме транспортирования природного газа. Изменение пропускной способности в данном случае имитируется закрытием искусственных дросселей на входе и/или выходе заданной трубопроводной системы. Моделирование работы антипомпажного клапана производится открытием дросселя, обозначенного на схеме (см. рис. 4.30) как «дроссель 3». В открытом положении площадь поперечного сечения дросселя совпадает с площадью поперечного сечения прилегающего трубопровода. При безаварийном транспортировании газа дроссель 3 закрыт.

Для обозначения физических параметров транспортирования газа и геометрических размеров трубопроводов или дросселей ниже будут использованы следующие символы: l – длина трубопровода или дросселя; f – площадь поперечного сечения трубопрово-

нию всасывающего ТГ с номером $i \ (i = \overline{1, N})$; $i1$ – выходному поперечному сечению (совпадает со входом в i -ый ЦН) всасывающего ТГ с номером $i \ (i = \overline{1, N})$; $i2$ – входному поперечному сечению (совпадает с выходом из i -ого ЦН) нагнетательного ТГ с номером $i \ (i = \overline{1, N})$; $нд2\_i$ – выходному поперечному сечению нагнетательного ТГ с номером $i \ (i = \overline{1, N})$; $нд2$ – входному поперечному сечению дросселя номер 2, установленного на выходе трубопроводной системы группы ЦН; $кд2$ – выходному поперечному сечению дросселя номер 2; $нд3$ – поперечному сечению трубопровода на входе дросселя номер 3, моделирующего работу антипомпажного рециркуляционного клапана; $кд3$ – поперечному сечению трубопровода на выходе дросселя номер 3; $p1$ – входному сечению антипомпажного рециркуляционного газопровода; $p2$ – выходному сечению антипомпажного рециркуляционного газопровода; K – поперечному сечению трубы на выходе из моделируемой трубопроводной системы. Длины цилиндрических трубопроводов обозначаются в соответствии с индексами их входных или выходных граничных сечений при условии, что данное обозначение в схеме является уникальным.

При моделировании помпажа в системе «группа ЦН – прилегающие ТГ – антипомпажный рециркуляционный газопровод» считается, что переходные газодинамические процессы существенны только на участке системы между входным и выходным граничными сечениями, указанными на схеме под индексами « H » и « K ». Давление и температура во входном сечении и давление в выходном сечении при помпаже остаются неизменными и равными значениям, полученным для исходного установившегося режима транспортирования газа, который предшествовал возникновению помпажных явлений.

При моделировании функционирования антипомпажного рециркуляционного газопровода полагается, что движение газа происходит в направлении от начального сечения газопровода « $p1$ » к его конечному сечению « $p2$ ». Противоток газа здесь не допускается, т.к. это привело бы к отказу в работе антипомпажного клапана.

Как следует из Главы 2, для коэффициентов сжимаемости газа на входе или на выходе ЦН справедливы соотношения: $Z_{i1}/Z_{i2} \approx 1, i = \overline{1, N}$. Тогда с учетом принятого допущения о постоянстве коэффициентов сжимаемости по длине трубопровода или дросселя можно записать, что

$$Z_H = Z_{нд1} = Z_{кд1} = Z_{p2} = Z_{i1} = Z_{i2} = Z_{p1} = Z_{нд2} = Z_{кд2} = Z_K, \quad i = \overline{1, N}.$$

Следовательно, данные коэффициенты не зависят от времени.

В первом приближении для моделирования помпажа при слиянии потоков газа условно считается, что в узле сочленения трубопроводов происходит мгновенное изобарическое перемешивание газовых потоков. На реальных КС сливающиеся потоки близки по значениям массового расхода, поэтому температуру в узле сочленения при смешивании будем определять простым осреднением. Также условно считается, что поток газа, перебрасываемый по антипомпажному рециркуляционному газопроводу в узел сочленения магистральных трубопроводов, не оказывает влияния на общее изменение температуры транспортируемого газа в зоне слияния потоков на входе в группу ЦН. Такое допущение является оправданным, т.к. потоки газа по антипомпажному рециркуляционному газопроводу значительно меньше основных транспортных потоков. Также следует отметить, что в начальный момент времени функционирования данного газопровода на участке за антипомпажным клапаном содержится газ с температурой,

близкой к температуре газа на входе ЦН.

В соответствии с рекомендациями монографии [260] принимается, что

$$K_{Li1} = K_{Li2} = K_{L\_н\partial 1} = K_{L\_к\partial 2} = K_{L\_н\partial 3} = K_{L\_к\partial 3} = K_L = 0,5 \left(i = \overline{1, N} \right)$$

и

$$K_{Ci1} = K_{Ci2} = K_{C\_н\partial 3} = K_{C\_к\partial 3} = K_C = 0,5 \left(i = \overline{1, N} \right)$$

(см. (4.118) и (4.120)). Также целесообразно отметить, что в нашем случае выполняются равенства: $P_{к\partial 1\_i} = P_{p2} = P_{к\partial 1}$; $P_{н\partial 2\_i} = P_{p1} = P_{н\partial 2}$, $i = \overline{1, N}$.

Список исходных данных решаемой задачи имеет следующий вид (см. рис. 4.30):

- длины всех трубопроводов и искусственных дросселей системы;
- площади поперечных сечений всех трубопроводов системы;
- эффективные коэффициенты гидравлического сопротивления $\lambda_{oi} \left(i = \overline{1, 3} \right)$ для искусственных дросселей трубопроводной системы (см. ниже);
- газовая постоянная R для заданного химического состава природного газа;
- давление газа P_H на входе трубопроводной системы;
- давление газа P_K на выходе трубопроводной системы;
- температура газа T_H на входе трубопроводной системы;
- показатель адиабаты для природного газа γ для начальных давления и температуры газа на входе системы;
- политропический коэффициент полезного действия η_p для заданных типов ЦН [112];
- коэффициент сужения поперечного сечения $k_{oi} \left(i = \overline{1, 3} \right)$ для дросселей трубопроводной системы;
- частоты вращения валов ЦН n_i , $i = \overline{1, N}$;
- паспортные характеристики ЦН $\varepsilon_i(Q_{i1})$, $i = \overline{1, N}$ (см., например, [111]);
- коэффициент сжимаемости газа Z_H .

Инерционные свойства ТГ описываются следующими уравнениями:

- для всасывающих ТГ в группе ЦН (см. (4.119а), (4.120))

$$L_{ai1} \cdot \frac{dQ_{i1}}{dt} = P_{к\partial 1} - P_{i1}, \quad L_{ai1} = K_L \cdot \rho_{i1} \cdot \frac{l_{i1}}{f_{i1}}, \quad i = \overline{1, N}; \quad (4.134a)$$

- для нагнетательных ТГ в группе ЦН (см. (4.117а), (4.118))

$$L_{ai2} \cdot \frac{dQ_{i2}}{dt} = P_{i2} - P_{н\partial 2}, \quad L_{ai2} = K_L \cdot \rho_{i2} \cdot \frac{l_{i2}}{f_{i2}}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.134б)$$

Исходя из условий равенства массовых расходов газа через ЦН $(\rho_{i1} \cdot Q_{i1} = \rho_{i2} \cdot Q_{i2}, i = \overline{1, N})$ (см. Главу 2), постоянства коэффициентов сжимаемости газа при анализе работы ЦН и зависимостей (4.133), можно записать:

$$Q_{i2} = Q_{i1} \cdot [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-1}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.135)$$

Используя дополнительное предположение о незначительном изменении плотности газа для трубопроводов (см. принятые упрощения при построении моделей трубопроводов), получим:

$$\frac{d(\rho_{i1} \cdot Q_{i1})}{dt} = \frac{d(\rho_{i2} \cdot Q_{i2})}{dt}, \quad i = \overline{1, N},$$

отсюда

$$\rho_{i1} \cdot \frac{dQ_{i1}}{dt} = \rho_{i2} \cdot \frac{dQ_{i2}}{dt}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.136)$$

Умножим уравнения (4.134а) на $\varepsilon_i(Q_{i1})$ и сложим их с соответствующими уравнениями (4.134б). Тогда с учетом (4.133а) и (4.136)

$$L_{ai} \cdot \frac{dQ_{i1}}{dt} = \varepsilon_i(Q_{i1}) \cdot P_{\kappa\partial 1} - P_{\partial 2}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.137)$$

где $L_{ai} = K_L \cdot \frac{l_{i1}}{f_{i1}} \cdot [\varepsilon_i(Q_{i1}) + A_i] \cdot \frac{P_{i1}}{Z_H \cdot R \cdot T_{i1}}$; $A_i = \frac{l_{i2}}{l_{i1}} \cdot \frac{f_{i1}}{f_{i2}}$. Умножим уравнения (4.134а) на l_{i2}/f_{i2} и вычтем из них соответствующие уравнения (4.134б), умноженные на l_{i1}/f_{i1} . Тогда с учетом (4.133а), (4.136) и (4.137)

$$P_{i1} = \frac{A_i \cdot P_{\kappa\partial 1} + P_{\partial 2}}{A_i + \varepsilon_i(Q_{i1})}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.138)$$

Уравнения, описывающие емкостные свойства ТГ, запишутся так (см. рис. 4.30):

- для всасывающих ТГ в группе ЦН (см. (4.119б) и (4.120))

$$C_{ai1} \cdot \frac{dP_{\kappa\partial 1}}{dt} = Q_{\kappa\partial 1_i} - Q_{i1}, \quad C_{ai1} = \frac{K_C \cdot l_{i1} \cdot f_{i1}}{\gamma} \cdot \frac{Z_H}{P_{\kappa\partial 1}}, \quad i = \overline{1, N}; \quad (4.139a)$$

- для нагнетательных ТГ в группе ЦН (см. (4.117б), (4.118) и (4.135))

$$C_{ai2} \cdot \frac{dP_{\partial 2}}{dt} = Q_{i1} \cdot [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-1} - Q_{\partial 2_i}, \quad C_{ai2} = \frac{K_C \cdot l_{i2} \cdot f_{i2}}{\gamma} \cdot \frac{Z_H}{P_{\partial 2}}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.139б)$$

Просуммируем между собой уравнения (4.139а), а также уравнения (4.139б), с учетом равенств $\sum_{i=1}^N Q_{\kappa\partial 1_i} = Q_{\kappa\partial 1} + Q_{p2}$ и $\sum_{i=1}^N Q_{\partial 2_i} = Q_{\partial 2} + Q_{p1}$:

$$\frac{dP_{\kappa\partial 1}}{dt} = B_1 \cdot \frac{P_{\kappa\partial 1}}{Z_H} \cdot \left[Q_{\kappa\partial 1} + Q_{p2} - \sum_{i=1}^N Q_{i1} \right]; \quad (4.140a)$$

$$\frac{dP_{\partial 2}}{dt} = B_2 \cdot \frac{P_{\partial 2}}{Z_H} \cdot \left[\sum_{i=1}^N (Q_{i1} \cdot [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-1}) - Q_{\partial 2} - Q_{p1} \right], \quad (4.140б)$$

где $B_j = \gamma \cdot \left[K_C \cdot \sum_{i=1}^N (l_{ij} \cdot f_{ij}) \right]^{-1}$, $j = 1, 2$.

Для дальнейших рассуждений приведем формулы для расчета температур газа в трубопроводной системе (см. рис. 4.30), полученные в соответствии с принятой постановкой задачи:

$$T_{н\partial 1} = T_H \cdot \left(\frac{P_{н\partial 1}}{P_H} \right)^G; \quad T_{к\partial j} = T_{н\partial j} \cdot \left(\frac{P_{к\partial j}}{P_{н\partial j}} \right)^G, \quad j = \overline{1, 3}; \quad T_{i1} = T_{к\partial 1} \cdot \left(\frac{P_{i1}}{P_{к\partial 1}} \right)^G, \quad i = \overline{1, N};$$

$$T_{i2} = T_{i1} \cdot [\varepsilon_i(Q_{i1})]^\sigma, \quad i = \overline{1, N}; \quad T_{н\partial 2} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left[T_{i2} \cdot \left(\frac{P_{н\partial 2}}{P_{i2}} \right)^G \right]; \quad T_{p1} = T_{н\partial 2}; \quad T_K = T_{к\partial 2} \cdot \left(\frac{P_K}{P_{к\partial 2}} \right)^G;$$

$$T_{н\partial 3} = T_{p1} \cdot \left(\frac{P_{н\partial 3}}{P_{p1}} \right)^G; \quad T_{p2} = T_{к\partial 1}$$

или

$$T_{н\partial 1} = T_H \cdot \left(\frac{P_{н\partial 1}}{P_H} \right)^G; \quad T_{к\partial 1} = T_{p2} = T_H \cdot \left(\frac{P_{к\partial 1}}{P_H} \right)^G; \quad T_{i1} = T_H \cdot \left(\frac{P_{i1}}{P_H} \right)^G, \quad i = \overline{1, N};$$

$$T_{i2} = T_{i1} \cdot [\varepsilon_i(Q_{i1})]^\sigma, \quad i = \overline{1, N}; \quad T_{н\partial 2} = T_{p1} = T_H \cdot \left(\frac{P_{н\partial 2}}{P_H} \right)^G \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G};$$

$$T_{к\partial 2} = T_H \cdot \left(\frac{P_{к\partial 2}}{P_H} \right)^G \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G}; \quad T_K = T_H \cdot \left(\frac{P_K}{P_H} \right)^G \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G};$$

$$T_{н\partial 3} = T_H \cdot \left(\frac{P_{н\partial 3}}{P_H} \right)^G \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G}; \quad T_{к\partial 3} = T_H \cdot \left(\frac{P_{к\partial 3}}{P_H} \right)^G \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G}. \quad (4.141)$$

Введем функции $\xi_{\partial 1}(Q_{н\partial 1}, P_{к\partial 1})$, $\xi_{\partial 2}(Q_{к\partial 2}, P_{н\partial 2}, Q_{i1})$ и $\xi_{\partial 3}(Q_{к\partial 3}, P_{н\partial 3}, Q_{i1})$ в качестве рабочих характеристик дросселей трубопроводной системы (см. рис. 4.30), причем

$$P_{к\partial 1} = \xi_{\partial 1}(Q_{н\partial 1}, P_{к\partial 1}) \cdot P_{н\partial 1}; \quad (4.142a)$$

$$P_{к\partial 2} = \xi_{\partial 2}(Q_{к\partial 2}, P_{н\partial 2}, Q_{i1}) \cdot P_{н\partial 2}; \quad (4.142b)$$

$$P_{к\partial 3} = \xi_{\partial 3}(Q_{к\partial 3}, P_{н\partial 3}, Q_{i1}) \cdot P_{н\partial 3}. \quad (4.142b)$$

Эти характеристики можно построить в результате решения соответствующих нелинейных алгебраических уравнений (см. (4.132a)):

$$\frac{2 \cdot f_H^2 \cdot Z_H \cdot R \cdot T_H}{G} \cdot \left(\frac{P_{к\partial 1}}{P_H} \right)^G \cdot \frac{[1 - (\xi_{\partial 1})^G]}{(\xi_{\partial 1})^G} - \frac{Q_{н\partial 1}^2}{(\xi_{\partial 1})^{2/\gamma}} = 0;$$

$$\left[1 - (\xi_{\partial 1})^{2/\gamma} \right] + \sqrt{\frac{\pi}{f_H} \cdot \frac{\lambda_{\partial 1}}{4} \cdot \frac{l_{\partial 1}}{k_{\partial 1}^{2.5}} \cdot [1 + (\xi_{\partial 1})^{2/\gamma}]} \quad (4.143a)$$

$$\frac{2 \cdot f_K^2 \cdot Z_H \cdot R \cdot T_H}{G \cdot N} \cdot \left(\frac{P_{н\partial 2}}{P_H} \right)^G \cdot [1 - (\xi_{\partial 2})^G] \cdot \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G} - Q_{к\partial 2}^2 = 0;$$

$$\left[1 - (\xi_{\partial 2})^{2/\gamma} \right] + \sqrt{\frac{\pi}{f_K} \cdot \frac{\lambda_{\partial 2}}{4} \cdot \frac{l_{\partial 2}}{k_{\partial 2}^{2.5}} \cdot [1 + (\xi_{\partial 2})^{2/\gamma}]} \quad (4.143b)$$

$$\frac{2 \cdot f_{p1}^2 \cdot Z_H \cdot R \cdot T_H}{G \cdot N} \cdot \left(\frac{P_{н03}}{P_H} \right)^G \cdot \left[1 - (\xi_{03})^G \right] \cdot \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G} - Q_{к03}^2 = 0. \quad (4.143в)$$

$$\left[1 - (\xi_{03})^{2/\gamma} \right] + \sqrt{\frac{\pi}{f_{p1}}} \cdot \frac{\lambda_{03}}{4} \cdot \frac{l_{03}}{k_{03}^{2,5}} \cdot \left[1 + (\xi_{03})^{2/\gamma} \right]$$

С учетом (4.132б), (4.142а) и (4.142б), уравнения (4.140) можно представить в виде:

$$\frac{dP_{к01}}{dt} = B_1 \cdot \frac{P_{к01}}{Z_H} \cdot \left[Q_{н01} \cdot [\xi_{01}(Q_{н01}, P_{к01})]^{-\frac{1}{\gamma}} + Q_{p2} - \sum_{i=1}^N Q_{i1} \right]; \quad (4.144а)$$

$$\frac{dP_{н02}}{dt} = B_2 \cdot \frac{P_{н02}}{Z_H} \cdot \left[\sum_{i=1}^N (Q_{i1} \cdot [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-1}) - Q_{к02} \cdot [\xi_{02}(Q_{к02}, P_{н02}, Q_{i1})]^{-\frac{1}{\gamma}} - Q_{p1} \right]. \quad (4.144б)$$

Для транспортирования природного газа через ТГ на входе трубопроводной системы можно записать (см. рис. 4.30 и (4.119а), (4.120), (4.142а)):

$$L_{a\_н01} \cdot \frac{dQ_{н01}}{dt} = P_H - \frac{P_{к01}}{\xi_{01}(Q_{н01}, P_{к01})}, \quad (4.145)$$

где $D_H = \frac{K_L \cdot l_H}{f_H} \cdot \frac{(P_H)^G}{Z_H \cdot R \cdot T_H}$; $L_{a\_н01} = D_H \cdot \left(\frac{\xi_{01}(Q_{н01}, P_{к01})}{P_{к01}} \right)^{G-1}$. По аналогии, для транспортирования природного газа через ТГ на выходе трубопроводной системы получим (см. рис. 4.30 и (4.117а), (4.118), (4.142б)):

$$L_{a\_к02} \cdot \frac{dQ_{к02}}{dt} = \xi_{02}(Q_{к02}, P_{н02}, Q_{i1}) \cdot P_{н02} - P_K, \quad (4.146)$$

где

$$D_K = \frac{K_L \cdot l_K}{f_K} \cdot \frac{(P_H)^G}{Z_H \cdot R \cdot T_H}; \quad L_{a\_к02} = D_K \cdot \frac{N \cdot (\xi_{02}(Q_{к02}, P_{н02}, Q_{i1}) \cdot P_{н02})^{1-G}}{\sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G}}.$$

Система уравнений для описания транспортирования газа через антипомпажный рециркуляционный газопровод будет иметь вид (см. рис. 4.30 и (4.117 – 4.120), (4.132б), (4.142в)):

$$L_{a\_p1} \cdot \frac{dQ_{p1}}{dt} = P_{н02} - P_{н03}; \quad (4.147а)$$

$$\frac{dP_{н03}}{dt} = B_{н03} \cdot \frac{P_{н03}}{Z_H} \cdot \left[Q_{p1} - Q_{к03} \cdot [\xi_{03}(Q_{к03}, P_{н03}, Q_{i1})]^{-\frac{1}{\gamma}} \right]; \quad (4.147б)$$

$$L_{a\_p2} \cdot \frac{dQ_{p2}}{dt} = \xi_{03}(Q_{к03}, P_{н03}, Q_{i1}) \cdot P_{н03} - P_{к01}; \quad (4.147в)$$

$$\frac{dP_{к01}}{dt} = B_{к01} \cdot \frac{P_{к01}}{Z_H} \cdot [Q_{к03} - Q_{p2}], \quad (4.147г*)$$

$$\text{где } D_{p1} = \frac{K_L \cdot l_{н03}}{f_{н03}} \cdot \frac{(P_H)^G}{Z_H \cdot R \cdot T_H}; \quad L_{a\_p1} = D_{p1} \cdot \frac{N \cdot (P_{н02})^{1-G}}{\sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G}}; \quad D_{p2} = \frac{K_L \cdot l_{к03}}{f_{к03}} \cdot \frac{(P_H)^G}{Z_H \cdot R \cdot T_H};$$

$L_{a\_p2} = D_{p2} \cdot (P_{\kappa\partial 1})^{1-G}$; $B_{\kappa\partial 3} = \frac{\gamma}{K_C \cdot l_{\kappa\partial 3} \cdot f_{\kappa\partial 3}}$; $B_{\kappa\partial 3} = \frac{\gamma}{K_C \cdot l_{\kappa\partial 3} \cdot f_{\kappa\partial 3}}$. Вычтем из уравнения (4.147г*) уравнение (4.144а) и получим:

$$Q_{\kappa\partial 3} = \frac{B_1}{B_{\kappa\partial 3}} \cdot \left[Q_{\kappa\partial 1} \cdot [\xi_{\partial 1}(Q_{\kappa\partial 1}, P_{\kappa\partial 1})]^{-\frac{1}{\gamma}} + Q_{p2} - \sum_{i=1}^N Q_{i1} \right] + Q_{p2}. \quad (4.147\Gamma)$$

Таким образом, поведение трубопроводной системы, представленной на рис. 4.30, может быть описано системой из $(N+7)$ нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти уравнения записываются для $(N+7)$ фазовых переменных: объемного расхода газа $Q_{\kappa\partial 1}$ на входе дросселя номер 1; давления газа $P_{\kappa\partial 1}$ на выходе дросселя номер 1; объемных расходов газа на входе всех ЦН Q_{i1} ($i = \overline{1, N}$); давления газа $P_{\kappa\partial 2}$ на входе дросселя номер 2; объемного расхода газа $Q_{\kappa\partial 2}$ на выходе дросселя номер 2; объемного расхода газа Q_{p1} на входе антипомпажного рециркуляционного газопровода; давления газа $P_{\kappa\partial 3}$ на входе дросселя номер 3; объемного расхода газа Q_{p2} на выходе антипомпажного рециркуляционного газопровода. Итоговая система обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) имеет вид (см. (4.126), (4.133), (4.137), (4.138), (4.144 – 4.147)):

$$\frac{dQ_{\kappa\partial 1}}{dt} = \frac{1}{L_{a\_ \kappa\partial 1}} \cdot \left[P_H - \frac{P_{\kappa\partial 1}}{\xi_{\partial 1}(Q_{\kappa\partial 1}, P_{\kappa\partial 1})} \right]; \quad (4.148a)$$

$$\frac{dP_{\kappa\partial 1}}{dt} = B_1 \cdot \frac{P_{\kappa\partial 1}}{Z_H} \cdot \left[Q_{\kappa\partial 1} \cdot [\xi_{\partial 1}(Q_{\kappa\partial 1}, P_{\kappa\partial 1})]^{-\frac{1}{\gamma}} + Q_{p2} - \sum_{i=1}^N Q_{i1} \right]; \quad (4.148б)$$

$$\frac{dQ_{i1}}{dt} = \frac{1}{L_{ai}} \cdot [\varepsilon_i(Q_{i1}) \cdot P_{\kappa\partial 1} - P_{\kappa\partial 2}], \quad i = \overline{1, N}; \quad (4.148в)$$

$$\frac{dP_{\kappa\partial 2}}{dt} = B_2 \cdot \frac{P_{\kappa\partial 2}}{Z_H} \cdot \left[\sum_{i=1}^N (Q_{i1} \cdot [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-1}) - Q_{\kappa\partial 2} \cdot [\xi_{\partial 2}(Q_{\kappa\partial 2}, P_{\kappa\partial 2}, Q_{i1})]^{-\frac{1}{\gamma}} - Q_{p1} \right]; \quad (4.148г)$$

$$\frac{dQ_{\kappa\partial 2}}{dt} = \frac{1}{L_{a\_ \kappa\partial 2}} \cdot [\xi_{\partial 2}(Q_{\kappa\partial 2}, P_{\kappa\partial 2}, Q_{i1}) \cdot P_{\kappa\partial 2} - P_K]; \quad (4.148д)$$

$$\frac{dQ_{p1}}{dt} = \frac{1}{L_{a\_ p1}} \cdot [P_{\kappa\partial 2} - P_{\kappa\partial 3}]; \quad (4.148е)$$

$$\frac{dP_{\kappa\partial 3}}{dt} = B_{\kappa\partial 3} \cdot \frac{P_{\kappa\partial 3}}{Z_H} \cdot \left[Q_{p1} - Q_{\kappa\partial 3} \cdot [\xi_{\partial 3}(Q_{\kappa\partial 3}, P_{\kappa\partial 3}, Q_{i1})]^{-\frac{1}{\gamma}} \right]; \quad (4.148ж)$$

$$\frac{dQ_{p2}}{dt} = \frac{\xi_{\partial 3}(Q_{\kappa\partial 3}, P_{\kappa\partial 3}, Q_{i1}) \cdot P_{\kappa\partial 3} - P_{\kappa\partial 1}}{L_{a\_ p2}}, \quad (4.148з)$$

$$\text{где } A_i = \frac{l_{i2}}{l_{i1}} \cdot \frac{f_{i1}}{f_{i2}}; B_j = \gamma \cdot \left[K_C \cdot \sum_{i=1}^N (l_{ij} \cdot f_{ij}) \right]^{-1}, \quad j = 1, 2; G = (\gamma - 1)/\gamma; \sigma = \frac{\eta - 1}{\eta};$$

$$\begin{aligned}
B_{\kappa\partial 3} &= \frac{\gamma}{K_C \cdot l_{\kappa\partial 3} \cdot f_{\kappa\partial 3}}; \quad B_{\kappa\partial 3} = \frac{\gamma}{K_C \cdot l_{\kappa\partial 3} \cdot f_{\kappa\partial 3}}; \quad D_H = \frac{K_L \cdot l_H}{f_H} \cdot \frac{(P_H)^G}{Z_H \cdot R \cdot T_H}; \quad D_K = \frac{K_L \cdot l_K}{f_K} \cdot \frac{(P_H)^G}{Z_H \cdot R \cdot T_H}; \\
D_{p1} &= \frac{K_L \cdot l_{\kappa\partial 3}}{f_{\kappa\partial 3}} \cdot \frac{(P_H)^G}{Z_H \cdot R \cdot T_H}; \quad D_{p2} = \frac{K_L \cdot l_{\kappa\partial 3}}{f_{\kappa\partial 3}} \cdot \frac{(P_H)^G}{Z_H \cdot R \cdot T_H}; \quad P_{i1} = \frac{A_i \cdot P_{\kappa\partial 1} + P_{\kappa\partial 2}}{A_i + \varepsilon_i(Q_{i1})}, \quad i = \overline{1, N}; \\
L_{a\_ \kappa\partial 1} &= D_H \cdot \left(\frac{\xi_{\partial 1}(Q_{\kappa\partial 1}, P_{\kappa\partial 1})}{P_{\kappa\partial 1}} \right)^{G-1}; \quad L_{a\_ \kappa\partial 2} = D_K \cdot \frac{N \cdot (\xi_{\partial 2}(Q_{\kappa\partial 2}, P_{\kappa\partial 2}, Q_{i1}) \cdot P_{\kappa\partial 2})^{1-G}}{\sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G}}; \\
L_{a\_ p1} &= D_{p1} \cdot \frac{N \cdot (P_{\kappa\partial 2})^{1-G}}{\sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G}}; \quad L_{a\_ p2} = D_{p2} \cdot (P_{\kappa\partial 1})^{1-G}; \\
L_{ai} &= K_L \cdot \frac{l_{i1}}{f_{i1}} \cdot [\varepsilon_i(Q_{i1}) + A_i] \cdot \frac{(P_H)^G}{Z_H \cdot R \cdot T_H} \cdot (P_{i1})^{1-G}; \\
Q_{\kappa\partial 3} &= \frac{B_1}{B_{\kappa\partial 3}} \cdot \left[Q_{\kappa\partial 1} \cdot [\xi_{\partial 1}(Q_{\kappa\partial 1}, P_{\kappa\partial 1})]^{-\frac{1}{\gamma}} + Q_{p2} - \sum_{i=1}^N Q_{i1} \right] + Q_{p2}.
\end{aligned}$$

Здесь следует отметить, что в случае принятия равенства ($k_{\partial 3} = 0$) антипомпажный рециркуляционный газопровод исключается из рассмотрения трубопроводной системы¹. Следовательно, из СОДУ (4.148) исключаются уравнения (4.148е – 4.148з), а параметры потока газа Q_{p1} и Q_{p2} приравняются нулю. Равенства ($k_{\partial 1} = 0$) и ($k_{\partial 2} = 0$) при моделировании помпажа не допускаются (см. выше).

Характеристики дросселей определяются в результате решения нелинейных алгебраических уравнений (4.143). Для возможности аналитического вычисления параметров ξ можно воспользоваться предложенным ранее упрощенным подходом. Для определения зависимости $\xi_{\partial 1}(Q_{\kappa\partial 1}, P_{\kappa\partial 1})$ применим (4.131б). С учетом соотношения $T_{\kappa\partial 1} = T_H \cdot (P_{\kappa\partial 1}/P_H)^G$ (см. (4.141)) данное уравнение можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{Z_H \cdot R \cdot T_H}{G \cdot P_H^G} \cdot [P_{\kappa\partial 1}^G - P_{\kappa\partial 1}^G] + \frac{\sqrt{\pi} \cdot \lambda_{\partial 1} \cdot l_{\partial 1}}{4 \cdot k_{\partial 1}^{2,5} \cdot f_H^{2,5}} \cdot Q_{\kappa\partial 1}^2 &= 0; \\
P_{\kappa\partial 1} &= \left(P_{\kappa\partial 1}^G + \frac{\sqrt{\pi} \cdot G \cdot \lambda_{\partial 1} \cdot l_{\partial 1} \cdot P_H^G}{4 \cdot k_{\partial 1}^{2,5} \cdot f_H^{2,5} \cdot Z_H \cdot R \cdot T_H} \cdot Q_{\kappa\partial 1}^2 \right)^{1/G}; \\
\xi_{\partial 1}(Q_{\kappa\partial 1}, P_{\kappa\partial 1}) &= P_{\kappa\partial 1} \cdot \left(P_{\kappa\partial 1}^G + \frac{\sqrt{\pi} \cdot G \cdot \lambda_{\partial 1} \cdot l_{\partial 1} \cdot P_H^G}{4 \cdot k_{\partial 1}^{2,5} \cdot f_H^{2,5} \cdot Z_H \cdot R \cdot T_H} \cdot Q_{\kappa\partial 1}^2 \right)^{-1/G}. \quad (4.149a)
\end{aligned}$$

Для определения $\xi_{\partial 2}(Q_{\kappa\partial 2}, P_{\kappa\partial 2}, Q_{i1})$ и $\xi_{\partial 3}(Q_{\kappa\partial 3}, P_{\kappa\partial 3}, Q_{i1})$ воспользуемся (4.132г) с учетом формул

$$\left(T_{\kappa\partial 2} = T_H \cdot (P_{\kappa\partial 2}/P_H)^G \cdot N^{-1} \cdot \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G} \right) \quad \text{и}$$

¹ Такой подход полностью соответствует концепции построения наихудших сценариев развития аварийной ситуации (см. выше), т.к. при этом исключается дополнительное демпфирование газового столба в системе.

$$\left(T_{n\partial 3} = T_H \cdot (P_{n\partial 3}/P_H)^G \cdot N^{-1} \cdot \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G} \right) \text{ (см. (4.141))};$$

$$\xi_{\partial 2}(Q_{\kappa\partial 2}, P_{n\partial 2}, Q_{i1}) = \left[1 - \frac{\sqrt{\pi} \cdot N \cdot G \cdot \lambda_{\partial 2} \cdot l_{\partial 2} \cdot P_H^G}{4 \cdot k_{\partial 2}^{2.5} \cdot f_K^{2.5} \cdot Z_H \cdot R \cdot T_H} \cdot Q_{\kappa\partial 2}^2 \cdot \left(P_{n\partial 2}^G \cdot \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G} \right)^{-1} \right]^{1/G}; \quad (4.149б)$$

$$\xi_{\partial 3}(Q_{\kappa\partial 3}, P_{n\partial 3}, Q_{i1}) = \left[1 - \frac{\sqrt{\pi} \cdot N \cdot G \cdot \lambda_{\partial 3} \cdot l_{\partial 3} \cdot P_H^G}{4 \cdot k_{\partial 3}^{2.5} \cdot f_K^{2.5} \cdot Z_H \cdot R \cdot T_H} \cdot Q_{\kappa\partial 3}^2 \cdot \left(P_{n\partial 3}^G \cdot \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G} \right)^{-1} \right]^{1/G}. \quad (4.149в)$$

Задача моделирования помпажных явлений в системе «группа ЦН – прилегающие ТГ – антипомпажный рециркуляционный газопровод» в данном случае сводится к решению задачи Коши. Для ее решения необходимо проинтегрировать СОДУ (4.149) с заданными начальными условиями:

$$\begin{aligned} Q_{n\partial 1}(0) &= Q_{n\partial 1}^{\text{заданный}}; & P_{\kappa\partial 1}(0) &= P_{\kappa\partial 1}^{\text{заданное}}; & Q_{i1}(0) &= Q_{i1}^{\text{заданный}}, & i = \overline{1, N}; \\ P_{n\partial 2}(0) &= P_{n\partial 2}^{\text{заданное}}; & Q_{\kappa\partial 2}(0) &= Q_{\kappa\partial 2}^{\text{заданный}}; & Q_{p1}(0) &= Q_{p1}^{\text{заданный}}; \\ P_{n\partial 3}(0) &= P_{n\partial 3}^{\text{заданное}}; & Q_{p2}(0) &= Q_{p2}^{\text{заданный}}. \end{aligned} \quad (4.150)$$

Начальные условия формируются с использованием значений параметров заданного установившегося режима транспортирования газа через моделируемую трубопроводную систему (см. рис. 4.30). Определение параметров установившихся режимов функционирования КЦ и КС подробно описано в Главе 2.

Для решения СОДУ (4.148) в данном случае используется широко известный явный метод Рунге – Кутты, основанный на формулах Дормана и Принса [261]. При численном решении СОДУ (4.148) поиск значения степени сжатия газа i -го центробежного нагнетателя проводится в соответствии с построенной моделью ЦН, подробно описанной в Главе 2. Функция степени сжатия в этом случае в терминах СОДУ будет выглядеть следующим образом:

$$\varepsilon = \varepsilon(n, P_{i1}, T_{i1}, Q_{i1}),$$

где P_{i1} – давление, T_{i1} – температура, Q_{i1} – объемный расход газа на входе нагнетателя, n – частота вращения вала ЦН. В связи с этим зависимости (4.138)

$$P_{i1} = \frac{A_i \cdot P_{\kappa\partial 1} + P_{n\partial 2}}{A_i + \varepsilon_i(n, P_{i1}, T_{i1}, Q_{i1})}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.151)$$

входящие в состав СОДУ, приобретают неявный вид относительно давления газа P_{i1} на входе ЦН. Температуры газа T_{i1} , $i = \overline{1, N}$, при этом могут быть вычислены по формуле (см. (4.141)):

$$T_{i1} = T_H \cdot \left(\frac{P_{i1}}{P_H} \right)^G, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.152)$$

Уравнение (4.151) можно разрешить при помощи известных численных методов решения нелинейных уравнений с одним неизвестным. Подходящим методом является метод простой итерации. К сожалению, условие сходимости итераций в явном виде получить не удалось в связи с особенностями функции $\varepsilon = \varepsilon(n, P_{i1}, T_{i1}, Q_{i1})$. Однако, геометрическая иллюстрация характерного поведения функции в окрестности корня уравнения для ряда решенных тестовых задач (рис. 4.31) показывает, что итерации для данных задач

сходятся (т.к. выполняется условие $\partial Y / \partial P < 1$, где Y – правая часть уравнения (4.151)).

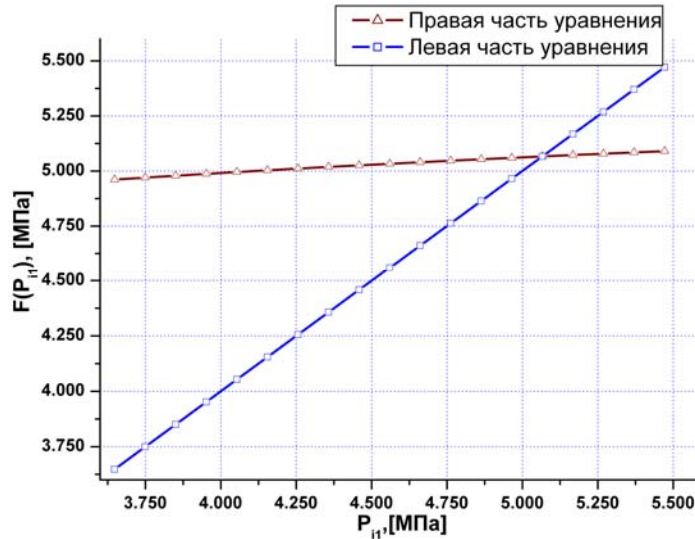


Рис. 4.31. Характерное поведение левой и правой части (4.151) в окрестности решения

Математическое подобие процессов течения газа через ЦН позволяет предположить, что и в общем случае метод простой итерации для решения (4.151) является устойчивым.

Далее целесообразно рассмотреть способ, разработанный А.С. Комиссаровым для решения СОДУ (4.148) без его дополнительного преобразования при моделировании включения/отключения из работы антипомпажного рециркуляционного газопровода (см. выше). В случае отсутствия преобразования СОДУ (4.148) значение параметра

$$Q_{\kappa\partial 3} = \frac{B_1}{B_{\kappa\partial 3}} \cdot \left[Q_{\kappa\partial 1} \cdot \left[\xi_{\partial 1}(Q_{\kappa\partial 1}, P_{\kappa\partial 1}) \right]^{-\frac{1}{\gamma}} + Q_{p2} - \sum_{i=1}^N Q_{i1} \right] + Q_{p2}$$

при малой степени открытия дросселя 3 становится отрицательным, что приводит сначала к нарастанию неустойчивости решения всей системы, а, впоследствии, к возникновению математической ошибки при вычислении слагаемых

$Q_{\kappa\partial 3} \cdot \left[\xi_{\partial 3}(Q_{\kappa\partial 3}, P_{\kappa\partial 3}, Q_{i1}) \right]^{-\frac{1}{\gamma}}$ и $(\xi_{\partial 3}(Q_{\kappa\partial 3}, P_{\kappa\partial 3}, Q_{i1}) \cdot P_{\kappa\partial 3})$ уравнений (4.148ж) и (4.148з). По предложению А.С. Комиссарова, указанная некорректность может быть устранена путем замены (4.148ж) и (4.148з) в системе (4.148) на следующие три уравнения:

$$\frac{dP_{\kappa\partial 3}}{dt} = B_{\kappa\partial 3} \cdot \frac{P_{\kappa\partial 3}}{Z_H} \cdot [Q_{p1} - Q_{\kappa\partial 3}(P_{\kappa\partial 3}, P_{\kappa\partial 3}, Q_{i1})]; \quad (4.153)$$

$$\frac{dQ_{p2}}{dt} = \frac{P_{\kappa\partial 3} - P_{\kappa\partial 1}}{L_{a\_p2}}; \quad (4.154)$$

$$\frac{dP_{\kappa\partial 3}}{dt} = B_{\kappa\partial 3} \cdot \frac{P_{\kappa\partial 3}}{Z_H} \cdot [Q_{\kappa\partial 3} - Q_{p2}], \quad (4.155)$$

где $B_{\kappa\partial 3} = \frac{\gamma}{K_C \cdot l_{\kappa\partial 3} \cdot f_{\kappa\partial 3}}$, $B_{\kappa\partial 3} = \frac{\gamma}{K_C \cdot l_{\kappa\partial 3} \cdot f_{\kappa\partial 3}}$. Функция

$$Q_{н\partial 3}(P_{н\partial 3}, P_{к\partial 3}, Q_{i1}) = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{P_{к\partial 3}}{P_{н\partial 3}}\right)^G\right] \cdot \frac{4 \cdot k_{\partial 3}^{2,5} \cdot f_{к\partial 3}^{2,5} \cdot Z_H \cdot R \cdot T_H}{\sqrt{\pi} \cdot \lambda_{\partial 3} \cdot l_{\partial 3} \cdot G \cdot N} \cdot \left(\frac{P_{н\partial 3}}{P_H}\right)^G \cdot \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G}}$$

получена из (4.132в) подстановкой $\left(T_{н\partial 3} = T_H \cdot (P_{н\partial 3}/P_H)^G \cdot N^{-1} \cdot \sum_{i=1}^N [\varepsilon_i(Q_{i1})]^{\sigma-G}\right)$ (см. (4.141)). Здесь $P_{к\partial 3}$ является дополнительной в СОДУ переменной, описывающей давление на выходе дросселя 3. Параметр $Q_{к\partial 3}$ в этом случае с учетом формулы (4.132б) примет вид

$$Q_{к\partial 3} = Q_{н\partial 3}(P_{н\partial 3}, P_{к\partial 3}, Q_{i1}) \cdot \left(\frac{P_{н\partial 3}}{P_{к\partial 3}}\right)^{1/\gamma}. \quad (4.156)$$

Таким образом, уравнения (4.148е), (4.153 – 4.155) позволяют достоверно описать влияние антипомпажного рециркуляционного канала на поведение всей рассматриваемой системы газопроводов как в случае полного перекрытия дросселя 3 (см. рис. 4.30), так и во время переходных процессов при открытии данного дросселя.

На рис. 4.32 показана фазовая плоскость, на которой представлено изменение давления в объеме газопровода на выходе ЦН в зависимости от расхода в точке входа дросселя 2. Кроме того, на этой фазовой плоскости нанесены характеристики ЦН¹ и сети², соответствующие моменту зарождения газодинамической неустойчивости системы.

Из рис. 4.32 видно, что рабочая точка (образованная пересечением характеристик ЦН и сети) является неустойчивой, так как с течением времени ее траектория на фазовой плоскости переходит в некоторый предельный цикл. При этом в трубопроводной системе образуются незатухающие колебания газодинамических параметров (рис. 4.33), что соответствует моменту возникновения помпажа.

В завершение данного Раздела, опишем методы оценки значений эффективного коэффициента гидравлического сопротивления λ для дросселей, присутствующих в СОДУ (4.148). Как известно [66], потери полного давления в любом сложном элементе трубопровода неразделимы. Однако для удобства расчета в одном и том же элементе трубопровода их часто также условно разделяют на «местные» потери (ΔP_m) и потери «трения» ($\Delta P_{тр}$). При этом считают, что «местные» потери (местное сопротивление) сосредоточены в одном сечении, хотя в действительности они распространяются на сравнительно большую длину (за исключением случая выхода потока транспортируемого продукта из сети, когда его динамическое давление теряется сразу).

Согласно [66], коэффициент гидравлического сопротивления представляет собой отношение потерь на данном участке полной энергии (мощности) к кинетической энергии (мощности) в принятом сечении (например, «0 – 0») или (что то же самое) отношение потерь на том же участке полного давления к динамическому давлению в принятом сечении. Таким образом, для общего случая (т. е. неравномерного распределения всех параметров потока по сечению и переменной плотности вдоль потока) можно записать:

$$\zeta = \frac{\Delta P_{общ}}{\rho_0 \cdot w_0^2 / 2},$$

¹ Имеется ввиду напорная характеристика, которая представляет собой зависимость давления, создаваемого в ЦН, от расхода Q .

² Характеристика сети – это графическая зависимость напора H (или давления), расходуемого в сети, от расхода Q [114].

где индекс «0» характеризует сечение «0 – 0», в котором берутся параметры ρ и w (т.е. то сечение, к которому приводится значение ζ).

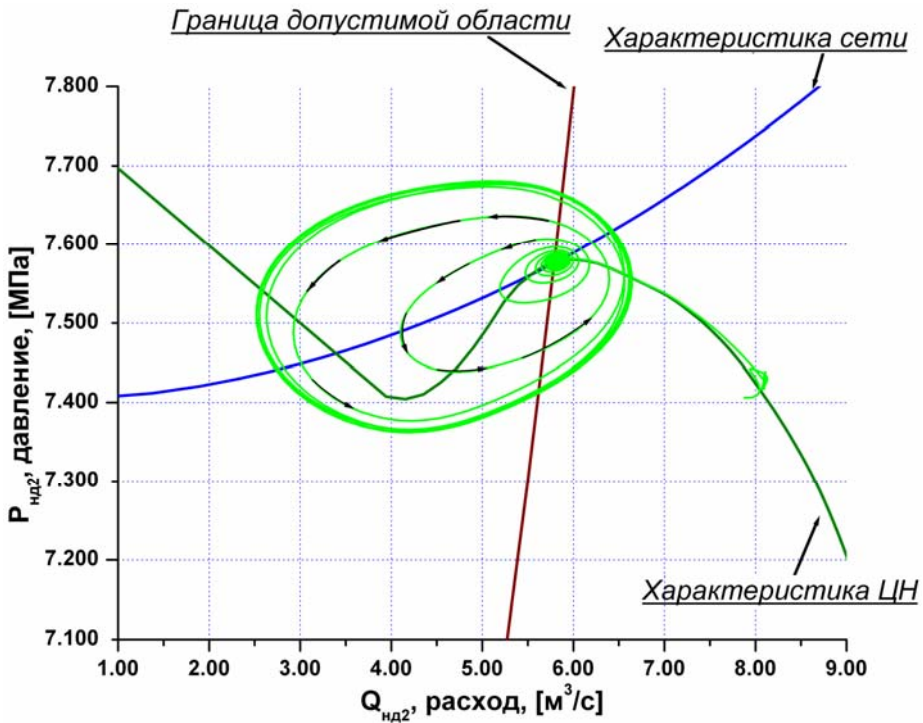


Рис. 4.32. Пример моделирования помпажа в системе «ЦН – прилегающие ТГ»

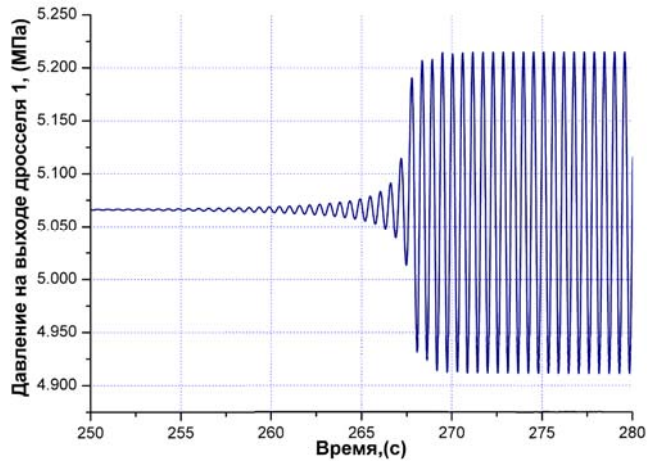


Рис. 4.33. Возникновение колебаний давления на выходе дросселя 1

Оба вида потерь суммируют по принципу наложения потерь, при котором берут арифметическую сумму потерь на трение и местных потерь [66]:

$$\Delta P_{\text{сум}} = \Delta P_{\text{тр}} + \Delta P_{\text{м}}.$$

Значение ζ зависит от того, к какой расчетной скорости, а, следовательно, к какому сечению он приведен. Коэффициент сопротивления $\zeta_i = \Delta P_{\text{общ}} / (\rho_i \cdot w_i^2 / 2)$, приведенный к скорости w_i в i -ом сечении (f_i), пересчитывается для другого сечения (например, f_0) в общем случае (ρ_i – переменное вдоль потока) по формуле [66]:

$$\zeta_0 \equiv \frac{\Delta P_{\text{общ}}}{\rho_0 \cdot w_0^2 / 2} = \zeta_i \cdot \frac{\rho_i}{\rho_0} \cdot \left(\frac{w_i}{w_0} \right)^2,$$

т.к. $\Delta P_{\text{общ}} = \zeta_0 \cdot \frac{\rho_0 \cdot w_0^2}{2} = \zeta_i \cdot \frac{\rho_i \cdot w_i^2}{2}$. С учетом уравнения неразрывности для установившихся течений $\rho_0 \cdot w_0 \cdot f_0 = \rho_i \cdot w_i \cdot f_i$ можно записать:

$$\zeta_0 = \zeta_i \cdot \frac{\rho_0}{\rho_i} \cdot \left(\frac{f_0}{f_i} \right)^2.$$

При $\rho_0 = \rho_i = \rho$ имеем:

$$\zeta_0 = \zeta_i \cdot \left(\frac{f_0}{f_i} \right)^2.$$

Суммарное гидравлическое сопротивление какого-либо элемента сети в этом случае равно:

$$\Delta P_{\text{сум}} = \Delta P_{\text{тр}} + \Delta P_{\text{м}} = (\zeta_{\text{тр}} + \zeta_{\text{м}}) \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2} = \zeta_{\text{сум}} \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2},$$

где (в соответствии с принятым условно принципом наложения потерь) $\zeta_{\text{сум}} = \zeta_{\text{тр}} + \zeta_{\text{м}}$. Коэффициент сопротивления трения $\zeta_{\text{тр}}$ рассчитываемого элемента выражается через коэффициент гидравлического трения $\lambda_{\text{тр}}$ по формуле [66]:

$$\zeta_{\text{тр}} = \lambda_{\text{тр}} \cdot l / D,$$

где l – длина рассчитываемого элемента, D – гидравлический диаметр элемента. На основании данной формулы можно записать:

$$\lambda_{\text{тр}} = \zeta_{\text{тр}} \cdot \frac{D}{l}.$$

В настоящем Разделе под эффективным коэффициентом гидравлического сопротивления понимается следующий параметр:

$$\lambda = \zeta_{\text{сум}} \cdot \frac{D}{l} = (\zeta_{\text{тр}} + \zeta_{\text{м}}) \cdot \frac{D}{l} = \lambda_{\text{тр}} + \zeta_{\text{м}} \cdot \frac{D}{l}.$$

Для вычисления значения параметра $\lambda_{\text{тр}}$ можно воспользоваться материалами справочника [66] или материалами Приложения 2. Корректное задание параметра $\zeta_{\text{м}}$ возможно только по результатам натурных экспериментов (см., например, [66]) или после проведения адекватного численного анализа режимов течений среды через рассматриваемую

конструкцию в трехмерной постановке. Оценочные значения параметра ζ_m для некоторых типов кранов, задвижек, конфузорно-диффузорных переходов и т.п. приведены в справочнике [66].

Здесь следует отметить, что описанные выше подходы и методы численного моделирования помпажных явлений в системах «группы ЦН – прилегающие ТГ – антипомпажный рециркуляционный газопровод» были реализованы в подсистеме «Alfargus/PipeFlow» на базе КАИ «Alfargus» (см. Раздел 1.6). Модельный пример анализа помпажных явлений в гипотетическом КЦ представлен в Приложении 9.

Рассмотренный в данном Разделе метод прогнозирования устойчивости функционирования газоперекачивающих центробежных нагнетателей, эксплуатирующихся в трубопроводных сетях промышленных энергетических объектов, ориентирован на выработку рекомендаций по повышению устойчивости работы газоперекачивающего оборудования при оптимальном управлении безопасным функционированием ГТС. Он также применим при настройке, тестировании и оценке эффективности автоматизированных антипомпажных систем, используемых на объектах газовой промышленности.

ГЛАВА 5

Математическое моделирование транспортирования жидкостей по системам протяженных каналов с открытым руслом и рекам

5.1. Постановка задачи

Построение моделей транспортирования жидкостей по системам протяженных каналов с открытым руслом, а также по малым и средним рекам, осуществляется в соответствии с расширенной концепцией математического моделирования, изложенной в Разделе 1.7. Основное содержание данной Главы будет посвящено численному анализу параметров распространения жидких загрязняющих веществ по руслам равнинных рек. Источником загрязнений в этом случае могут служить производственные объекты ТЭК, а также разрушившиеся резервуары хранения жидких продуктов (включая железнодорожные цистерны). В первом приближении моделирование распространения загрязняющих веществ сводится к задаче численного анализа параметров неустановившегося безнапорного плавноизменяющегося течения несжимаемой жидкости по разветвленным системам длинных каналов с открытым руслом. При моделировании считается, что каналы (русла рек) расположены на местности с плавноизменяющимся слабо наклонным рельефом (водопады и пороги из рассмотрения исключаются), имеют произвольные поперечные сечения и шероховатые абсолютно жесткие стенки (дно и берега рек). Разрабатываемая модель не будет предназначена для анализа параметров течения при наводнениях и в застойных зонах. Возможное замерзание жидкостей, транспортируемых по каналам, при моделировании также не анализируется.

В литературе предложены различные математические модели, описывающие неустановившееся движение жидкости в открытых руслах [86, 262–264]. Как правило, они базируются на модификациях системы уравнений мелкой воды (системы уравнений Сен-Венана). Данные модификации были получены с принятием множества упрощений. Так, например, в работе [86] при построении модели рассматривались течения только в широком прямоугольном призматическом канале с горизонтальным дном без учета сил трения. Разветвленные системы каналов с открытым руслом либо не моделировались вообще, либо при моделировании обеспечивалось только выполнение известного закона Кирхгофа о сохранении массовых расходов [262]. Поэтому здесь было решено разработать математическую модель, более адекватно описывающую течение жидкости по разветвленным системам каналов (руслам рек), с использованием подходов к численному моделированию, изложенных в Главе 2.

При построении математической модели для численной оценки параметров движения жидкости по системам разветвленных каналов с открытым руслом следует рассматривать произвольные формы их поперечных сечений. Движение жидкости по разветвленной системе каналов с открытым руслом является безнапорным, т.к. жидкость заполняет не все поперечное сечение канала¹. Учитывая большую протяженность каналов и малые размеры их поперечных сечений (по сравнению с их длиной), для описания безнапорного неустановившегося течения жидкости в них целесообразно использовать одномерные модели гидродинамики. Для упрощения исследования неустановившегося

¹ При течении жидкости по сети каналов часть потока жидкости ограничена поверхностью русла, а часть граничит с атмосферой.

движения будем полагать течение жидкости турбулентным плавноизменяющимся (медленно изменяющимся) по длине каналов. При этом поперечное сечение потока можно условно считать плоским, а изменение площади сечения по длине потока – малым. Кроме того, представляется возможным пренебречь составляющими скоростей и ускорений в плоскости поперечного сечения потока, т.е. считать, что скорости и ускорения направлены перпендикулярно к плоскости поперечного сечения потока. Учитывая вышесказанное, здесь скорости всех частиц жидкости в плоскости поперечного сечения условно принимаются одинаковыми (осредненными по ширине и глубине потока) и направленными вдоль оси канала. При соблюдении приведенных выше условий распределение **статического** давления по поперечному сечению потока подчиняется гидростатическому закону.

5.2. Построение математической модели неразветвленных каналов с открытым руслом

При моделировании в первом приближении условно считается, что по каналам движется вязкая ньютоновская изотропная несжимаемая однокомпонентная или многокомпонентная жидкость с заданными физическими свойствами. Также не учитывается стратификация (т.к. течения по каналам имеют малую глубину), т.е. выполняется условие Буссинеска $(\rho_{\max} - \rho_{\min})/\rho \ll 1$, где ρ – плотность транспортируемой жидкой среды. Многокомпонентную жидкость будем считать гомогенной однородной смесью основной жидкости и сопутствующих жидких примесей. Концентрации примесей считаются малыми. Также в первом приближении условно принимается, что примеси практически не влияют на физико-механические свойства основной жидкости и характер течения (например, $\rho \approx \text{const}$). Физико-механические свойства основной жидкости близки к физико-механическим свойствам воды.

Дополнительные допущения и упрощения, вводимые при построении оценочной математической модели транспортирования жидкости по руслам малых и средних рек, оговариваются в тексте Главы по ходу изложения материала.

Сначала рассмотрим построение математической модели, описывающей *неустановившееся безнапорное медленно изменяющееся течение однородной несжимаемой однокомпонентной химически инертной жидкости по неразветвленным участкам длинных каналов с открытым руслом, расположенным на местности с плавноизменяющимся слабонаклонным рельефом и имеющим симметричные поперечные сечения и шероховатые стенки. Геометрия поперечного сечения русла и его местоположение во времени не изменяются*. Построение математической модели для компьютерной оценки параметров течения жидкости по неразветвленным участкам длинных каналов и подход к ее численному анализу базируются на материале Глав 1 и 2.

Пусть дана прямоугольная декартова система координат с осями $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\theta})$. Ось $\bar{\theta}$ направлен вертикально вверх, оси $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ лежат в горизонтальной плоскости. Будем считать, что оси симметрии поперечных сечений каналов вертикальны. Пример симметричного поперечного сечения, не удовлетворяющего данному требованию, представлен на рис. 5.1. В выбранной системе координат геометрия канала представляется в виде зависимости:

$$\theta = B(\xi, \eta), \quad (5.1)$$

где ξ, η, θ – координаты произвольной точки грунта в прямоугольной декартовой сис-

теме координат $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\theta}$. Поверхность жидкости в канале описывается некоторой геометрической зависимостью:

$$\theta = \tilde{H}(\xi, \eta, t), \quad (5.2)$$

где t – время.



Рис. 5.1. Пример симметричного поперечного сечения канала с осью симметрии, отличной от вертикали

Будем считать линейные размеры волн на свободной поверхности жидкости малыми по сравнению с линейными размерами канала (глубиной, шириной и длиной). В силу этого влиянием волн на параметры течения жидкости в канале можно пренебречь. Влияние ветра и других погодных условий при моделировании в первом приближении не учитывается. Осредним поверхность жидкости, «убрав» из рассмотрения поверхностные волны и описав поверхность жидкости липшицевой алгебраической функцией. Способы осреднения здесь не являются принципиальными и могут быть различными (см. Главы 2 и 4). Для примера приведем одну из широко известных формул, используемую в математической физике для осреднения алгебраических зависимостей (рассматривается осреднение произвольной функции $\tilde{Y}(\xi, \eta, t)$):

$$Y(\xi, \eta, t) = \frac{1}{\Delta\xi \cdot \Delta\eta} \cdot \iint_{[\Delta\xi \times \Delta\eta]} \tilde{Y}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta, \quad (5.3)$$

где $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ – стороны некоторого прямоугольника $[\Delta\xi \times \Delta\eta]$, по которому производится осреднение. Данные параметры применительно к поставленной задаче должны быть, с одной стороны, гораздо больше линейных размеров волн на поверхности канала, с другой стороны, гораздо меньше линейных размеров канала.

Пусть осредненная свободная поверхность жидкости определена зависимостью:

$$\theta = H(\xi, \eta, t). \quad (5.4)$$

Введем вспомогательную криволинейную ортогональную систему координат с ортами $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$. Орт $\bar{z}$ направлен вертикально вверх; $\bar{x}$ и $\bar{y}$ лежат в горизонтальной плоскости. Для наглядности, начало координат зафиксируем в точке пересечения оси симметрии начального (по потоку жидкости) поперечного сечения канала и кривой (или прямой), описывающей дно канала (рис. 5.2). Ось Ox проведем через оси симметрии поперечных сечений канала по потоку жидкости, а ось Oy – перпендикулярно к плоскости xOz . Несмотря на то, что иллюстрирование материала данного Раздела проводится на примере прямолинейного канала правильной формы, все вышесказанное справедливо и для криволинейного канала, удовлетворяющего перечисленным ранее требованиям.

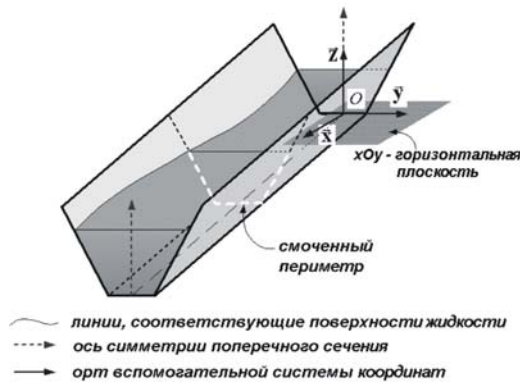


Рис. 5.2. Схематичное представление канала

Учитывая предположения о малой ширине каналов (рек), их фрагментарном моделировании и плавно изменяющемся течении с малой скоростью, будем условно пренебрегать действием силы Кориолиса и центробежных сил инерции. При таком предположении и условии отказа от рассмотрения поверхностных волн (см. выше) в каждом поперечном сечении канала линия свободной поверхности жидкости является горизонтальной прямой (см. рис. 5.2).

Аналогично (5.1) и (5.4) для поверхности русла канала и свободной поверхности жидкости, учитывая способ введения вспомогательной системы координат, можно записать:

$$z = B(x, y); \quad (5.5)$$

$$z = H(x, y, t) = H(x, t). \quad (5.6)$$

С целью обеспечения наглядности изложения материала Раздела, оставим обозначения поверхностей B и H во введенной системе координат такими же, как и в исходной системе координат.

Для произвольного объема сплошной среды V , ограниченного замкнутой поверхностью S , законы сохранения массы и количества движения записываются в следующем виде [84]:

$$\iiint_V \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} dV + \iint_S \hat{\rho} \cdot v_n dS = 0; \quad (5.7)$$

$$\iiint_V \frac{\partial (\hat{\rho} \cdot \vec{v})}{\partial t} dV + \iint_S \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot v_n dS = - \iint_S \hat{p} \cdot \vec{n} dS + \iint_S \vec{\tau}_n dS + \iiint_V \hat{\rho} \cdot \vec{F} dV, \quad (5.8)$$

где $\hat{\rho}$ – плотность жидкости; t – время (маршевая переменная); $\vec{v}$ – скорость жидкости; $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$ – проекция $\vec{v}$ на единичную внешнюю нормаль $\vec{n}$ к элементу поверхности dS ; $\hat{p}$ – давление жидкости; $\vec{\tau}_n = \vec{\tau} \cdot \vec{n}$ – напряжение, обусловленное действием сил вязкого трения на площадке с внешней нормалью $\vec{n}$ ($\vec{\tau}$ – тензор вязких напряжений); $\vec{F}$ – удельная массовая сила. Отметим, что параметры с «крышкой» определяют соответствующие гидромеханические величины в каждой точке рассматриваемого объема жидкости.

Осуществим переход от интегральной формы записи системы уравнений (5.7, 5.8) к их дифференциальному эквиваленту в предположении дифференцируемости входящих

в систему функций.

Выделим объем V , ограниченный двумя поперечными сечениями канала f и f' , расположенными на расстоянии Δx друг от друга, смоченной поверхностью русла канала ω_R и свободной поверхностью ω_0 (рис. 5.3). Обозначение Δx будет соответствовать как промежутку между соответствующими поперечными сечениями, так и его длине. Аналогично символом f будем обозначать как само поперечное сечение канала, так и его площадь.

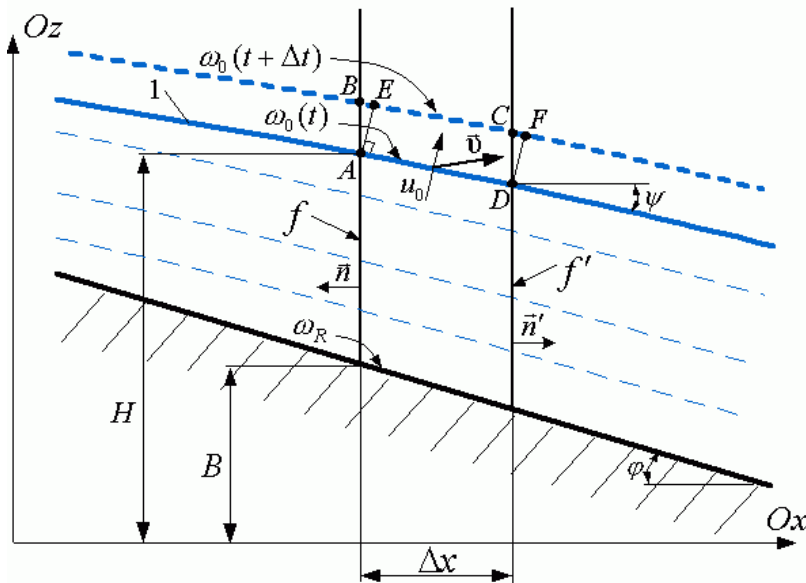


Рис. 5.3. Схематичное представление течения жидкости по каналу с открытым руслом (продольное сечение)

Рассмотрим уравнение (5.7), записанное для объема V :

$$\iiint_V \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} dV + \left(\iint_{\omega_0} \hat{\rho} \cdot v_n d\omega + \iint_{\omega_R} \hat{\rho} \cdot v_n d\omega \right) + \left(\iint_{f'} \hat{\rho} \cdot v_x df - \iint_f \hat{\rho} \cdot v_x df \right) = 0, \quad (5.9)$$

где v_x – проекция скорости $\vec{v}$ на ось Ox . Используя теорему о среднем [89], разность в уравнении (5.9), заключенную в скобки, можно представить в виде:

$$\iint_{f'} \hat{\rho} \cdot v_x df - \iint_f \hat{\rho} \cdot v_x df = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_{f_c} \hat{\rho} \cdot v_x df = \Delta x \cdot \frac{\partial (\rho \cdot w \cdot f)_c}{\partial x}, \quad (5.10)$$

где ρ и w – средние по сечению значения $\hat{\rho}$ и v_x , f_c – поперечное сечение канала в некоторой точке x_c , принадлежащей интервалу Δx ¹.

На поверхности русла канала скорость движения жидкости равна нулю. Обозначим $u_0 \equiv v_n|_{\omega_0}$ как скорость протекания жидкости через фиксированную поверхность ω_0 .

¹ Здесь и далее нижний индекс «с» соответствует некоторой точке, принадлежащей интервалу Δx

Т.к. величина Δx малая, то в пределах поверхности ω_0 можно считать величину u_0 постоянной. С учетом этого в уравнении (5.9) первое выражение, заключенное в скобки, можно представить в виде:

$$\iint_{\omega_0} \bar{\rho} \cdot v_n d\omega + \iint_{\omega_R} \bar{\rho} \cdot v_n d\omega = \iint_{\omega_0} \bar{\rho} \cdot u_0 d\omega = \bar{\rho} \cdot \iint_{\omega_0} u_0 d\omega \approx \rho_c \cdot \iint_{\omega_0} u_0 d\omega = \rho_c \cdot u_0 \cdot \omega_0, \quad (5.11a)$$

где $\bar{\rho}$ – среднее по поверхности ω_0 значение плотности. Будем считать, что $\bar{\rho} \approx \rho_c$.

Из геометрических соображений (см. рис. 5.3) произведение $(u_0 \cdot \omega_0)$ есть объем жидкости, который в единицу времени протекает через поверхность ω_0 при движении со скоростью u_0 . На рис. 5.3 проекции элементарного объема, образовавшегося за малое время Δt , соответствует прямоугольник $AEFD$. С другой стороны, площадь прямоугольника $AEFD$ равна площади параллелограмма $ABCD$. Таким образом, произведение $(u_0 \cdot \omega_0)$ равно изменению рассматриваемого объема V за время Δt :

$$u_0 \cdot \omega_0 = \frac{\partial V}{\partial t} = \Delta x \cdot \frac{\partial f_c}{\partial t}. \quad (5.11б)$$

Переходя к осредненной по сечению плотности, проведем ряд преобразований:

$$\iiint_V \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} dV = \int_{\Delta x} \left(\iint_{f(x)} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} df \right) dx = \int_{\Delta x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \iint_{f(x)} df \right) dx = \int_{\Delta x} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot f(x) \right) dx = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot f \right)_c \cdot \Delta x. \quad (5.12)$$

Подставим (5.10), (5.12) и (5.11a) с учетом (5.11б) в (5.9). Деля результирующее уравнение на Δx и опуская индексы «с» (устремляя Δx к нулю), получим следующий вид уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial(\rho \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial x} = 0. \quad (5.13a)$$

Аналогично приведенным выше выкладкам, можно показать, что для произвольной функции y , допускающей осреднение, применительно к рассмотренному случаю справедливо соотношение:

$$\iiint_V \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} dV + \iint_S \bar{y} \cdot v_n dS = \Delta x \cdot \left(\frac{\partial(y \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(y \cdot w \cdot f)}{\partial x} \right)_c. \quad (5.14)$$

Используя предположение о несжимаемости жидкости, перепишем уравнение неразрывности (5.13a) в окончательном виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(w \cdot f)}{\partial x} = 0. \quad (5.13б)$$

Спроектируем (5.8) на ось Ox и распишем каждое слагаемое.

Первое и второе слагаемые. Можно показать (см. (5.14)), что

$$\left(\iiint_V \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \vec{v})}{\partial t} dV + \iint_S \bar{\rho} \cdot \vec{v} \cdot v_n dS \right)_x = \Delta x \cdot \left(\frac{\partial(\rho \cdot w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot w^2 \cdot f)}{\partial x} \right)_c. \quad (5.15)$$

Третье слагаемое. Обозначим через $\hat{h}$ глубину погружения произвольной точки объема жидкости (измеряется по вертикали вниз). Учитывая, что давление на свободной поверхности ω_0 равно атмосферному давлению $p_{атм}$, а давление внутри потока подчиняется гидростатическому закону, запишем для выбранной точки:

$$\hat{p} = p_{атм} + \hat{\rho} \cdot g \cdot \hat{h}. \quad (5.16)$$

Будем считать, что давление $p_{атм}$ на свободной поверхности постоянно по длине канала. Учитывая способ введения параметра $\hat{h}$ и зависимости H , определяющей положение свободной поверхности жидкости, для произвольной точки потока жидкости будет справедливо соотношение:

$$\hat{h}(x, y, z, t) = H(x, t) - z. \quad (5.17)$$

Распишем третье слагаемое уравнения (5.8). Воспользуемся соотношениями (5.16) и (5.17), условием постоянства величины ускорения свободного падения g и предположением о несжимаемости жидкости. С учетом этого получим¹:

$$\begin{aligned} \left(\iint_S \hat{p} \cdot \vec{n} dS \right)_x &= \left(\iiint_V \vec{\nabla} \hat{p} dV \right)_x = \iiint_V \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dV = \int_{\Delta x} \left(\iint_f \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} df \right) dx = \\ &= \Delta x \cdot \iint_{f_c} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} df = \Delta x \cdot \iint_{f_c} \frac{\partial (p_{атм} + \hat{\rho} \cdot g \cdot \hat{h})}{\partial x} df = \Delta x \cdot \iint_{f_c} \frac{\partial (\hat{\rho} \cdot g \cdot H)}{\partial x} df = \\ &= \Delta x \cdot \iint_{f_c} \rho \cdot g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} df = \Delta x \cdot \rho \cdot g \cdot f_c \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_c. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Четвертое слагаемое.

$$\iint_S \vec{\tau}_n ds = \iint_f \vec{\tau}_n df + \iint_{f'} \vec{\tau}_n df + \iint_{\omega_0} \vec{\tau}_n d\omega + \iint_{\omega_R} \vec{\tau}_n d\omega. \quad (5.19a)$$

Первыми двумя слагаемыми правой части (5.19a) можно пренебречь по аналогии с доказательством, приведенным в Главе 2 при выводе модели течения газа по трубопроводной системе. Третьим слагаемым пренебрежем в силу предположения об отсутствии влияния ветра и других погодных условий на режимы течения.

Для бесконечно малых интервалов Δx , с учетом сделанных выше замечаний, можно записать:

$$\left(\iint_S \vec{\tau}_n ds \right)_x = \left(\iint_{\omega_R} \vec{\tau}_n d\omega \right)_x = \tau_\omega \cdot \omega_R = \tau_\omega \cdot \chi \cdot \Delta x, \quad (5.19b)$$

где τ_ω – среднее по поверхности ω_R значение τ_{nx} ; χ – смоченный периметр русла (см. рис. 5.2).

Проанализируем установившиеся течения при постоянстве гидродинамических величин (осредненных по поперечному сечению) как во времени, так и в пространстве

¹ Отметим, что функция $H(x, t)$ считается постоянной во всех точках произвольного поперечного сечения $f(x, t)$.

(предполагаем также, что канал имеет одинаковые поперечные сечения по всей длине)¹. Анализ начнем с получения проекции уравнения движения на ось Ox (см. (5.18)):

$$-\Delta x \cdot \rho \cdot g \cdot f \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \tau_{\omega} \cdot \chi \cdot \Delta x = 0 \quad (5.20a)$$

или

$$\tau_{\omega} = \frac{\rho \cdot g \cdot f}{\chi} \cdot \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (5.20б)$$

Согласно [86, 264], для моделируемых здесь течений модуль потерь напора на трение $H_{\Delta x}$ (применительно к участку канала длиной Δx) можно выразить с помощью формулы Шези²:

$$|H_{\Delta x}| = \frac{\bar{v}_{cp}^2}{C^2 \cdot r} \cdot \Delta x, \quad (5.21)$$

где $\bar{v}_{cp}$ – средняя по сечению скорость среды; C – коэффициент Шези $[\sqrt{m}/c]$ (способ его расчета подробно рассмотрен в Приложении 10); $r = f/\chi$ – гидравлический радиус $[m]$ [86, 264].

В силу медленного изменения параметров течения будем считать, что направление скорости $\bar{v}_{cp}$ близко к линии пересечения свободной поверхности жидкости и поверхности, образуемой ортами $\bar{x}$ и $\bar{z}$ ³. Также будем считать, что угол наклона ψ свободной поверхности к оси Ox мал настолько, что $\cos \psi \approx 1$.

Используя данные предположения и опираясь на геометрические соображения (см. рис. 5.3), имеем:

$$\frac{w}{|\bar{v}|} = \cos \psi \approx 1 \quad \rightarrow \quad w \approx |\bar{v}|. \quad (5.22)$$

Применяя последнюю формулу, выражение (5.21) можно переписать в виде:

$$|H_{\Delta x}| = \frac{w^2}{C^2 \cdot r} \cdot \Delta x. \quad (5.23)$$

Из формулы (5.23), с учетом направления течения, величину $\partial H / \partial x$ можно оценить следующим образом:

$$\frac{\partial H}{\partial x} \approx \frac{H_{\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r}. \quad (5.24)$$

Подставляя (5.24) в (5.20б), получаем, что для установившихся течений напряжение τ_{ω} , обусловленное вязкостью жидкости, выражается зависимостью:

$$\tau_{\omega} = -\frac{\rho \cdot g \cdot f}{\chi} \cdot \frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r}, \quad (5.25)$$

где g – модуль ускорения свободного падения. Предположив, что характеристики, ус-

¹ В работе [264] такие течения названы равномерными.

² Другими словами, при равномерном течении работа силы тяжести полностью тратится на преодоление силы трения.

³ На рис. 5.3 указанная линия обозначена цифрой 1.

тановленные для стационарных течений, сохраняются и для медленно изменяющихся течений (гипотеза квазистационарности для малоскоростных течений со слабыми волновыми процессами), воспользуемся (5.25). Таким образом, подставляя (5.25) в (5.196), окончательно имеем:

$$\left(\iint_S \vec{\tau}_n ds \right)_x = -\rho \cdot g \cdot \left(f \cdot \frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r} \right)_c \cdot \Delta x. \quad (5.26)$$

Пятое слагаемое. Будем полагать, что единственной действующей массовой силой является сила тяжести:

$$\vec{F} = -g \cdot \vec{z}. \quad (5.27)$$

Таким образом,

$$\left(\iiint_V \hat{\rho} \cdot \vec{F} dV \right)_x = 0. \quad (5.28)$$

Подставив найденные выражения в уравнение (5.8), поделив на Δx , устремив Δx к нулю и поделив на величину ρ (учитывая ее постоянство), получим:

$$\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot f)}{\partial x} = -g \cdot f \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r} \right). \quad (5.29)$$

Для замыкания рассмотренной выше системы уравнений учтем, что площадь поперечного сечения потока жидкости зависит только от рельефа дна и свободной поверхности жидкости. Для обозначения этой зависимости используется запись:

$$f = f(B, H). \quad (5.30)$$

Таким образом, окончательно построенная модификация уравнений Сен-Венана (уравнений мелкой воды), описывающих *неустановившееся безнапорное медленно изменяющееся течение однородной несжимаемой однокомпонентной химически инертной жидкости по участкам длинных каналов с открытым руслом* имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(w \cdot f)}{\partial x} = 0; \quad (5.31a)$$

$$\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot f)}{\partial x} = -g \cdot f \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r} \right); \quad (5.31б)$$

$$f = f(B, H); \quad (5.31в)$$

$$C = C(r, n_{ш}); \quad (5.31г)$$

$$r = f(B, H) / \chi(B, H), \quad (5.31д)$$

где $n_{ш}$ – коэффициент шероховатости. Поверхность русла канала (реки) и свободная поверхность жидкости описываются зависимостями $z = B(x, y)$ и $z = H(x, t)$ соответственно. Запись $f = f(B, H)$ обозначает зависимость площади поперечного сечения от рельефа русла канала (реки) и свободной поверхности.

Если рассматриваемая среда представляет собой гомогенную однородную смесь основной несущей жидкости и жидких примесей, то система уравнений, описывающая движение однокомпонентной несжимаемой жидкости (интегральный вид этой системы представлен формулами (5.7, 5.8)) претерпевает некоторые изменения, и ее необходимо дополнить уравнениями для определения концентраций компонент смеси (см. Раздел 2.3.2).

Локальная относительная массовая концентрация m -ой компоненты определяется так:

$$\hat{Y}_m = \hat{\rho}_m / \hat{\rho}, \quad m = \overline{1, N_s}, \quad (5.32)$$

где $\hat{\rho}$ – локальная (в точке) плотность смеси; $\hat{\rho}_m$ – локальная приведенная плотность m -ой компоненты смеси (масса m -ой компоненты в единице объема смеси); N_s – количество компонент смеси. В рассматриваемом приближении уравнения неразрывности и движения, записанные для всей смеси, не изменяют свой вид (см., например, [79]).

В интегральной форме уравнения для определения относительных массовых концентраций для любых $(N_s - 1)$ компонент смеси будут выглядеть следующим образом:

$$\iiint_V \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot \hat{Y}_m)}{\partial t} dV + \iint_S \hat{\rho} \cdot \hat{Y}_m \cdot \nu_n dS - \iint_S \hat{\rho} \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS = 0, \quad m = \overline{1, N_s - 1}, \quad (5.33)$$

где $\hat{D}_m$ – локальный бинарный коэффициент диффузии m -ой компоненты в оставшуюся смесь; $\partial \hat{Y}_m / \partial n = (\vec{\nabla} \hat{Y}_m \cdot \vec{n})$ – производная от функции $\hat{Y}_m$ по направлению $\vec{n}$.

Сумма концентраций всех компонент равна единице, поэтому концентрация компоненты с номером N_s определяется как:

$$\hat{Y}_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} \hat{Y}_m. \quad (5.34)$$

Поскольку жидкость является несжимаемой, то уравнения (5.33, 5.34) примут вид:

$$\iiint_V \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial t} dV + \iint_S \hat{Y}_m \cdot \nu_n dS - \iint_S \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS = 0, \quad m = \overline{1, N_s - 1}; \quad \hat{Y}_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} \hat{Y}_m. \quad (5.35)$$

Вместе с уравнениями (5.7) и (5.8) система (5.35) описывает неустановившееся течение несжимаемой многокомпонентной жидкости по неразветвленному каналу с открытым руслом. Дифференциальные аналоги уравнений (5.7) и (5.8) применительно к условиям течения жидкости по участкам открытых каналов были получены выше (см. (5.13б) и (5.29)), поэтому здесь достаточно рассмотреть уравнение (5.35).

Положим, что диффузионный поток компонент через стенки русла и свободную поверхность потока жидкости отсутствует. Учитывая вышесказанное, используя (5.14) и применяя математические преобразования, аналогичные преобразованиям при выводе (5.13), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \cdot Y_m)}{\partial t} + \frac{\partial(w \cdot f \cdot Y_m)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \iint_f \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial x} df = 0, \quad m = \overline{1, N_s - 1}; \\ \hat{Y}_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} \hat{Y}_m; \quad Y_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} Y_m. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Отсюда:

$$\frac{\partial}{\partial t}(f \cdot Y_m) + \frac{\partial}{\partial x}(w \cdot f \cdot Y_m) - \frac{\partial}{\partial x}\left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x}\right) = 0, \quad m = \overline{1, N_s - 1}; \quad Y_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} Y_m, \quad (5.37)$$

где Y_m и D_m – средние по поперечному сечению значения концентрации m -ой компоненты и бинарного коэффициента диффузии m -ой компоненты в оставшуюся смесь.

Таким образом, построенная модификация уравнений Сен-Венана (уравнений мелкой воды), описывающих *неустановившееся безнапорное медленно изменяющееся течение многокомпонентной смеси жидкостей (раствора) по длинному неразветвленному каналу с открытым руслом с произвольным поперечным сечением и шероховатыми стенками, проложенным на местности с плавноизменяющимся слаботекучим рельефом*, записывается в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(w \cdot f)}{\partial x} = 0; \quad (5.38a)$$

$$\frac{\partial(f \cdot Y_m)}{\partial t} + \frac{\partial(w \cdot f \cdot Y_m)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x}\right) = 0, \quad m = \overline{1, N_s - 1}; \quad Y_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} Y_m; \quad (5.38б)$$

$$\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot f)}{\partial x} = -g \cdot f \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r} \right); \quad (5.38в)$$

$$f = f(B, H); \quad (5.38г)$$

$$C = C(r, n_{ш}); \quad (5.38д)$$

$$r = f(B, H) / \chi(B, H). \quad (5.38е)$$

5.3. Построение математической модели сети разветвленных каналов с открытым руслом

Построение модели течения жидкости через сочленение каналов будем проводить по аналогии с выводом модели транспортирования газовой смеси через сочленение трубопроводов, впервые предложенным С.Н. Пряловым [1, 5, 6] (см. также Главу 2). При этом в одномерной модели радиус зоны сочленения стремится к нулю. По аналогии с Главой 2 для обозначения принадлежности какой-либо величины к каналу с номером n будем использовать верхний индекс слева от нее, поместив этот номер в круглые скобки, например: $^{(n)}w$.

Для каждого канала введем ось координат $^{(n)}Ox$. Направление введенной оси («в сочленение» или «из сочленения») может быть произвольным. Для каждого канала рассмотрим два поперечных сечения (см. рис. 2.11): $^{(n)}f_L$ – сечение¹, примыкающее к сочленению (координата данного сечения равна $^{(n)}x_L$); $^{(n)}f_M$ – сечение, отстоящее от $^{(n)}f_L$ на расстояние $^{(n)}\Delta x$ (координата данного сечения равна $^{(n)}x_M$). Отметим, что в

¹ Символ $^{(n)}f$ обозначает как само поперечное сечение канала, так и его площадь. Аналогично, обозначение $^{(n)}\Delta x$ будет соответствовать как промежутку с границами $^{(n)}x_M$ и $^{(n)}x_L$, так и его длине.

общем случае площадь поперечного сечения является функцией $f = f(x, t)$. Таким образом, для фиксированного момента времени t :

$$^{(n)}f_L \neq ^{(n)}f_M, \quad n = \overline{1, N}, \quad (5.39)$$

где N – число каналов в узле разветвления.

Величины, соответствующие поперечному сечению в точке $^{(n)}x_M$, будем обозначать правым нижним индексом M , в точке $^{(n)}x_L$ – правым нижним индексом L .

Обозначим через $^{(n)}V$, где $n = \overline{1, N}$, объем, ограниченный поперечными сечениями канала n в узлах с индексами M и L , смоченной поверхностью русла и свободной поверхностью жидкости (см. рис. 2.11). Через $^{(0)}V$ (см. рис. 2.11) обозначим объем, соприкасающийся со всеми объемами $^{(n)}V$, $n = \overline{1, N}$. Поверхность, ограничивающую объем $^{(n)}V$, назовем $^{(n)}S$.

Пусть $^{(n)}\vec{i}$ – орт оси $^{(n)}Ox$, $^{(0)}\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к объему $^{(0)}V$, построенная на поверхности $^{(n)}f_L$. Заметим, что данные векторы во введенной выше ортогональной криволинейной системе координат, связанной с каналом, либо сонаправлены, либо противоположно направлены. Учитывая это, введем дополнительный параметр, характеризующий направление оси $^{(n)}Ox$ (см. (2.207)):

$$^{(n)}s = -\left(^{(0)}\vec{n} \cdot ^{(n)}\vec{i}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left(^{(0)}\vec{n} \cdot ^{(n)}\vec{i}\right) < 0; \\ -1, & \text{если } \left(^{(0)}\vec{n} \cdot ^{(n)}\vec{i}\right) > 0. \end{cases} \quad (5.40)$$

Длина отрезка $^{(n)}\Delta X$ здесь может быть найдена по формуле:

$$^{(n)}\Delta X = \left| ^{(n)}x_L - ^{(n)}x_M \right| = \left(^{(n)}x_L - ^{(n)}x_M \right) \cdot ^{(n)}s. \quad (5.41)$$

Введем некоторый сравнительный параметр $\Delta \bar{X}$. Данный параметр не имеет физического смысла и может принимать любое положительное значение, например, максимальное или минимальное значение множества $\left\{ ^{(n)}\Delta X, n = \overline{1, N} \right\}$. Зададим также набор параметров, являющихся коэффициентами пропорциональности шагов $^{(n)}\Delta X$:

$$^{(n)}\gamma = ^{(n)}\Delta X / \Delta \bar{X}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (5.42)$$

По аналогии с Главой 2 для описания течения жидкости через сочленение будем использовать модель, в которой объем $^{(0)}V$ исчезающе мал. Пример трансформации сочленения, соответствующей такому объему $^{(0)}V$, схематично представлен на рис. 5.4.

При подходе к узлу сочленения каналы «сужаются» и увеличивают свою глубину так, чтобы высота свободной поверхности и площадь поперечного сечения потока жидкости оставались неизменными (относительно исходного нетрансформированного канала). Если условно считать, что воздействие на поток жидкости со стороны стенок русла (сопротивление течению) при этом не меняется, стратификацией жидкости и силами поверхностного натяжения можно пренебречь, то система уравнений, описывающая течение жидкости по подходящему к узлу сочленения каналу, будет такой же, как и в случае нетрансформированного канала.

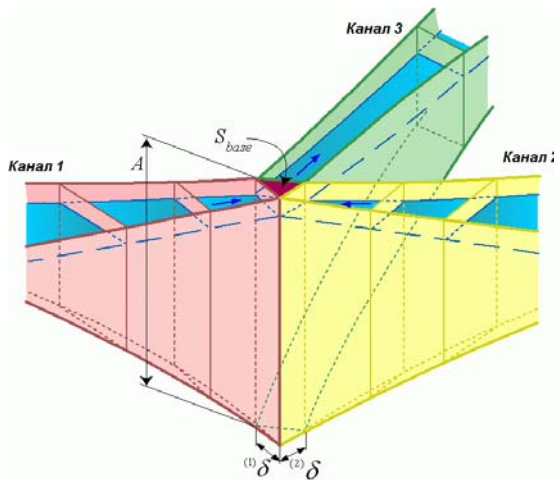


Рис. 5.4. Модельное представление сочленения каналов с открытым руслом (по С.Н. Прялову)

Объем $^{(0)}V$ можно представить в виде прямой призмы с площадью основания S_{base} и высотой A (см. рис. 5.4). Для сторон призмы, имеющих линейные размеры $^{(n)}\delta$, справедливо соотношение: $^{(n)}\delta = ^{(n)}f/A$. Площадь основания призмы можно представить следующим образом: $S_{base} = \zeta_{base} \cdot ^{(1)}\delta^2$, где ζ_{base} – коэффициент, зависящий только от геометрии основания призмы. С учетом последних двух формул, объем $^{(0)}V$ можно определить по формуле

$$^{(0)}V = A \cdot S_{base} = A \cdot \zeta_{base} \cdot \left(\frac{^{(1)}f}{A} \right)^2 = \frac{\zeta_{base} \cdot ^{(1)}f^2}{A}, \quad (5.43a)$$

из которой следует, что

$$\lim_{A \rightarrow \infty} ^{(0)}V = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\zeta_{base} \cdot ^{(1)}f^2}{A} = 0. \quad (5.43b)$$

Выделим объем V , являющийся объединением всех объемов $^{(n)}V$, где $n = \overline{0, N}$. Пусть S – поверхность, ограничивающая V . Т.к. площадь поперечного сечения каждого канала является непрерывной функцией, для объема сочленения справедливы следующие формулы:

$$^{(n)}V = ^{(n)}f_c \cdot ^{(n)}\Delta X = ^{(n)}f_c \cdot ^{(n)}\gamma \cdot \Delta \bar{X}, \quad n = \overline{1, N}; \quad (5.44a)$$

$$V \approx \sum_{n=1}^N ^{(n)}V = \sum_{n=1}^N ^{(n)}f_c \cdot ^{(n)}\Delta X = \Delta \bar{X} \cdot \sum_{n=1}^N ^{(n)}f_c \cdot ^{(n)}\gamma, \quad (5.44b)$$

где $^{(n)}f_c$ – поперечное сечение канала в некоторой точке $^{(n)}x_c$, принадлежащей интервалу $^{(n)}\Delta X$. Введем еще один параметр (см. (2.212)):

$$^{(n)}\Theta = \frac{^{(n)}V}{V} = \frac{^{(n)}f_c \cdot ^{(n)}\gamma}{\sum_{k=1}^N ^{(k)}f_c \cdot ^{(k)}\gamma}; \quad 0 < ^{(n)}\Theta < 1; \quad \sum_{n=1}^N ^{(n)}\Theta = 1; \quad ^{(n)}V = ^{(n)}f_c \cdot ^{(n)}\Delta X = ^{(n)}\Theta \cdot V. \quad (5.45)$$

Величину $^{(n)}\Theta$ можно трактовать как коэффициент присутствия канала n в объеме V .

Исходя из постановки задачи, можно считать, что $\rho = \text{const}$. При этом допущении полная система уравнений гидродинамики, описывающая течение гомогенной многокомпонентной несжимаемой жидкости записывается в виде [79, 84]:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0; \\ \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\hat{Y}_m \cdot \vec{\mathbf{v}}) - \vec{\nabla} \cdot (\hat{D}_m \cdot \vec{\nabla} \hat{Y}_m) = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \\ \hat{Y}_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} \hat{Y}_m; \\ \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \otimes \vec{\mathbf{v}}) = -\frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla} \hat{p} + \frac{1}{\rho} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \vec{\mathbf{F}}, \end{cases} \quad (5.46)$$

где $\otimes$ – символ тензорного произведения: $(\vec{\mathbf{a}} \otimes \vec{\mathbf{b}})_{ij} = a_i \cdot b_j$, i – номер строки, j – номер столбца.

При построении математической модели течения жидкой смеси будем считать p , Y_m и H непрерывными и дифференцируемыми по времени и пространству функциями (непрерывной по времени будет считаться также функция скорости). В силу малости объема $^{(0)}V$, параметры Y_m и H будем полагать одинаковыми по объему $^{(0)}V$.

Модель сочленения с исчезающе малым объемом $^{(0)}V$ предполагает, что функция скорости при «переходе» через сочленение терпит разрыв (см. ниже). Это в свою очередь приводит к разрывности функции удельного импульса.

Интегральное уравнение неразрывности имеет вид:

$$\iint_S v_n dS = 0. \quad (5.47a)$$

Рассмотрим уравнение неразрывности для объема $^{(0)}V$. С учетом отсутствия потоков жидкости через поверхность русла можно записать:

$$\sum_{n=1}^N \left(\iint_{[^{(n)}f_L]} v_n df \right) + \iint_{[^{(0)}\omega_0]} v_n d\omega = 0, \quad (5.47б)$$

где $^{(0)}\omega_0$ – свободная поверхность жидкости (и ее площадь) для объема $^{(0)}V$. В данном случае (см. рис. 5.4) исчезающе малый объем $^{(0)}V$ позволяет считать поверхность $^{(0)}\omega_0$ также исчезающе малой. По этой причине вторым слагаемым в уравнении (5.47б) можно пренебречь.

Проанализируем каждый из членов суммы в (5.47б):

$$\iint_{[^{(n)}f_L]} v_n df = \iint_{[^{(n)}f_L]} ^{(n)}v_x \cdot \left(^{(0)}\vec{\mathbf{n}} \cdot ^{(n)}\vec{\mathbf{i}} \right) df = - ^{(n)}(w \cdot f)_L \cdot ^{(n)}s, \quad (5.47в)$$

где $^{(n)}v_x$ – проекция $\vec{\mathbf{v}}$ на ось Ox n -го канала. Подставляя (5.47в) в (5.47а), получим закон Кирхгофа о равенстве расходов в виде:

$$\sum_{n=1}^N ^{(n)}w_L \cdot ^{(n)}f_L \cdot ^{(n)}s = 0. \quad (5.48)$$

Из (5.48) следует, что функция скорости в узле сочленения терпит разрыв первого рода.

Рассмотрим уравнение неразрывности для объема V :

$$\sum_{n=1}^N \left(\iint_{[(n)f_M]} v_n df + \iint_{[(n)\omega]} v_n d\omega \right) = 0, \quad (5.49)$$

где $^{(n)}\omega$ – боковая поверхность n -го канала, состоящая из смоченной поверхности русла и свободной поверхности жидкости. Распишем каждое слагаемое уравнения (5.49):

$$\iint_{[(n)f_M]} v_n df = \iint_{[(n)f_M]} v_x \cdot (\bar{\mathbf{n}} \cdot {}^{(n)}\bar{\mathbf{i}}) df = \iint_{[(n)f_M]} v_x \cdot ({}^{(0)}\bar{\mathbf{n}} \cdot {}^{(n)}\bar{\mathbf{i}}) df = - {}^{(n)}(w \cdot f)_M \cdot {}^{(n)}s, \quad (5.50a)$$

где $\bar{\mathbf{n}}$ – внешняя (по отношению к рассматриваемому объему) единичная нормаль к поверхности интегрирования. В данном случае во введенной выше ортогональной криволинейной системе координат, связанной с каналом, орты ${}^{(0)}\bar{\mathbf{n}}$ и $\bar{\mathbf{n}}$ являются сонаправленными.

По аналогии с выкладками, сделанными выше (см. (5.11б)), можно показать, что

$$\iint_{[(n)\omega]} v_n d\omega = \iint_{[(n)\omega_0]} v_n d\omega = {}^{(n)} \frac{\partial V}{\partial t} = {}^{(n)} \Delta X \cdot {}^{(n)} \frac{\partial f_c}{\partial t}. \quad (5.50b)$$

Используя выражения (5.50), уравнение (5.49) преобразуем к виду:

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left[\Delta X \cdot \frac{\partial f_c}{\partial t} - (w \cdot f)_M \cdot s \right] = 0. \quad (5.51)$$

Сложим полученное уравнение с (5.48):

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left[\Delta X \cdot \frac{\partial f_c}{\partial t} + [(w \cdot f)_L - (w \cdot f)_M] \cdot s \right] = 0. \quad (5.52)$$

Применяя теорему Лагранжа о конечном приращении, а также формулы (5.41) и (5.42), запишем:

$$\begin{aligned} {}^{(n)}s \cdot [(w \cdot f)_L - (w \cdot f)_M] &= \\ &= \frac{[(w \cdot f)_L - (w \cdot f)_M] \cdot {}^{(n)}s \cdot {}^{(n)}\Delta X}{({}^{(n)}x_L - {}^{(n)}x_M) \cdot {}^{(n)}s} = \left(\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial x} \right)_c \cdot {}^{(n)}\gamma \cdot \Delta \bar{X}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Подставим (5.53) в (5.52) и поделим на $\Delta \bar{X}$:

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}\gamma \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(w \cdot f)}{\partial x} \right)_c = 0. \quad (5.54)$$

Объединяя узлы L в общий «узел сочленения» (зона сочленения стягивается в точку, т.е. $\Delta \bar{X} \rightarrow 0$) и опуская индекс «с», получим:

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}\gamma \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(w \cdot f)}{\partial x} \right) = 0. \quad (5.55)$$

Уравнение (5.55) представляет собой одномерное дифференциальное уравнение неразрывности для узла сочленения N каналов с открытым руслом.

Интегральное уравнение движения имеет вид (см. (5.8) и (5.46)):

$$\iiint_V \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV + \iint_S \vec{v} \cdot \nu_n dS = -\frac{1}{\rho} \cdot \iiint_V \vec{\nabla} \bar{p} dV + \frac{1}{\rho} \cdot \iint_S \vec{\tau}_n dS + \iiint_V \vec{F} dV. \quad (5.56a)$$

Уравнение (5.56a) можно представить в виде суммы аналогичных уравнений для каждого из объемов ${}^{(n)}V$, $n = \overline{0, N}$, составляющих рассматриваемый объем V :

$$\sum_{n=0}^N \left(\iiint_{{}^{(n)}V} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV + \iint_{{}^{(n)}S} \vec{v} \cdot \nu_n dS + \frac{1}{\rho} \cdot \iint_{{}^{(n)}S} p \cdot \vec{n} dS - \frac{1}{\rho} \cdot \iint_{{}^{(n)}S} \vec{\tau}_n dS - \iiint_{{}^{(n)}V} \vec{F} dV \right) = 0. \quad (5.56b)$$

Для объемов ${}^{(n)}V$, $n = \overline{1, N}$, соответствующих неразветвленным каналам, уравнение движения было рассмотрено выше. Применительно к исследуемому случаю интеграл от данного уравнения на отрезке ${}^{(n)}\Delta X$ примет следующий вид¹:

$$\int_{{}^{(n)}\Delta X} \left(\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot f)}{\partial x} + g \cdot f \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r} \right) \right) \cdot {}^{(n)}\vec{i} dx = 0, \quad n = \overline{1, N}. \quad (5.57)$$

Запишем это уравнение для объема ${}^{(0)}V$. Будем считать, что вязкие напряжения внутри него пренебрежимо малы. Учет сил сопротивления течению предполагается производить изменением коэффициентов трения (коэффициентов Шези) в примыкающих к сочленениям каналах. В соответствии со сделанным допущением и предположениями об исчезающей малости объема ${}^{(0)}V$ и о непрерывности статического давления внутри него, уравнение движения для объема ${}^{(0)}V$ можно преобразовать к виду:

$$\iint_{{}^{(0)}S} \vec{v} \cdot \nu_n dS = 0. \quad (5.58)$$

Поскольку движение жидкости через стенки канала отсутствует, а площадь свободной поверхности ${}^{(0)}\omega$ в объеме ${}^{(0)}V$ стремится к нулю, уравнение (5.58) запишется так (рассматривается проекция уравнения на горизонтальную координатную плоскость):

$$\left[\iint_{{}^{(0)}S} \vec{v} \cdot \nu_n dS \right]_{xOy} = \left[\sum_{n=1}^N \iint_{{}^{(n)}f_L} {}^{(n)}\vec{v} \cdot {}^{(n)}\nu_n df \right]_{xOy} = \sum_{n=1}^N \iint_{{}^{(n)}f_L} {}^{(n)}\nu_x \cdot {}^{(n)}\vec{i} \cdot {}^{(n)}\nu_x \cdot ({}^{(n)}\vec{i} \cdot \vec{n}) df = 0$$

или

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}(\vec{i} \cdot w_L^2 \cdot f_L \cdot s) = 0, \quad (5.59)$$

где $[\dots]_{xOy}$ – оператор проецирования на горизонтальную координатную плоскость xOy . Покажем, что использование предлагаемого подхода для моделирования течения жидкости через сочленение каналов не обеспечивает выполнение уравнения движения для объема ${}^{(0)}V$. Для этого достаточно рассмотреть уравнение Кирхгофа (5.48). Если умножить каждое слагаемое суммы (5.48) на отличающиеся в общем случае множители

¹ Рассматривается проецирование уравнения (5.56b) на горизонтальную координатную плоскость.

$^{(n)}(\vec{i} \cdot \vec{w}_L)$, то сумма результирующих слагаемых уже не будет равна нулю. Нетрудно заметить, что данная сумма соответствует (5.59). Следовательно, уравнение (5.59) (уравнение движения для объема $^{(0)}V$) не выполняется. Это связано, в первую очередь, с использованием геометрической модели сочленения, в которой объем $^{(0)}V$ исчезающе мал, а давление в зоне сочленения непрерывно. В реальности область слияния (разделения) потоков в сочленении имеет конечные размеры. При этом, по закону Бернулли, изменение динамического давления $(0,5 \cdot \bar{\rho} \cdot w^2)$ в каждый фиксированный момент времени должно быть связано с изменением статического давления $\bar{p}$, что для объема $^{(0)}V$ не выполняется. Все вышесказанное доказывает некорректность применения используемого подхода для адекватного описания течения жидкости в рассматриваемом объеме $^{(0)}V$.

Несмотря на это, следует отметить, что создание модели, в первую очередь, направлено на адекватное описание основных законов сохранения (в том числе и уравнения движения) применительно к системе каналов. Учитывая данное замечание, построим уравнение движения для корректной оценки изменения импульса применительно к моделируемой разветвленной системе каналов.

Рассмотрим уравнение движения (5.56а) для объема V , объединяющего участки каналов (объемы $^{(n)}V$, $n = 1, N$) и объем $^{(0)}V$. С учетом сделанных ранее преобразований, данное уравнение можно записать в виде:

$$\sum_{n=1}^N \int_{^{(n)}\Delta x}^{(n)} \left(\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot f)}{\partial x} + g \cdot f \cdot \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r} \right] \right) \cdot ^{(n)}\vec{i} dx +$$

$$+ \left[\iiint_{^{(0)}V} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV + \iint_{^{(0)}S} \vec{v} \cdot \vec{\nu}_n dS + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\iint_{^{(0)}S} \bar{p} \cdot \vec{n} dS - \iint_{^{(0)}S} \vec{\tau}_n dS \right) - \iiint_{^{(0)}V} \vec{F} dV \right]_{xOy} = 0. \quad (5.60)$$

Допущение о малости объема $^{(0)}V$ позволяет уйти от объемных интегралов. Указанное допущение вполне корректно, поскольку длина каналов значительно превышает линейные размеры области слияния (разделения) потоков в сочленении:

$$\sum_{n=1}^N \int_{^{(n)}\Delta x}^{(n)} \left(\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot f)}{\partial x} + g \cdot f \cdot \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r} \right] \right) \cdot ^{(n)}\vec{i} dx +$$

$$+ \left[\iint_{^{(0)}S} \vec{v} \cdot \vec{\nu}_n dS + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\iint_{^{(0)}S} \bar{p} \cdot \vec{n} dS - \iint_{^{(0)}S} \vec{\tau}_n dS \right) \right]_{xOy} = 0. \quad (5.61)$$

Для моделирования течения сред через сочленения труб и каналов в современных технологиях моделирования гидравлических систем применяются подходы, основанные на введении и учете коэффициентов местного сопротивления для сочленений. Данные коэффициенты зависят от конструкции сочленений, направления потоков и т.п. (см., например, [66]). По сути, такие подходы устанавливают зависимости, определяющие влияние трех последних интегралов в (5.61) на параметры течения среды через сочленение. Следует отметить, что такой подход не требует дополнительных допущений о характере поведения давления и вязких напряжений внутри объема $^{(0)}V$, что является

несомненным преимуществом. Воспользуемся данным подходом для построения искомого уравнения движения.

Модель течения жидкости по неразветвленному каналу использует для учета сопротивления течению удельные характеристики, отнесенные к единице длины каналов. По данной причине будем «размазывать» коэффициенты местного сопротивления, определяющие влияние сочленения на параметры течения, на прилегающие к узлу разветвления участки каналов некоторой конечной фиксированной длины. Конкретные значения длин данных участков требуется определять непосредственно в каждой решаемой задаче.

Обозначим введенные таким образом параметры через ${}^{(n)}C_{Joint}$, $n = \overline{1, N}$. Индекс «Joint» в этом случае указывает на то, что введенные параметры отражают эффект сопротивления течению, вызванный присутствием сочленения. Сумму последних интегралов в (5.61) тогда можно представить в виде:

$$\iint_{(0)S} \vec{v} \cdot \vec{v}_n dS + \frac{1}{\rho} \cdot \iint_{(0)S} \vec{p} \cdot \vec{n} dS - \frac{1}{\rho} \cdot \iint_{(0)S} \vec{\tau}_n dS = \sum_{n=1}^N \int_{[(n)\Delta X]} {}^{(n)} \left(g \cdot f \cdot \frac{w \cdot |w|}{C_{Joint}^2 \cdot r} \right) \cdot {}^{(n)} \vec{i} dx. \quad (5.62)$$

Чтобы не вступать в противоречие с предыдущими технологиями построения моделей течений в каналах, где параметры ${}^{(n)}\Delta X$, $n = \overline{1, N}$, полагались бесконечно малыми, следует отметить, что в данном случае эти параметры характеризуют длину участков каналов, прилегающих к узлу сочленения. Поскольку все выкладки здесь проводятся, используя операторы интегрирования (отсутствуют осреднения по длине каналов), рассмотренный подход является корректным.

По аналогии с моделированием течений в трубопроводах (см. Главу 2) введем эффективный коэффициент Шези ${}^{(n)}C_{eff}$, который будет учитывать местные сопротивления (такие как водовороты, разветвления и т.п.) для каждого канала:

$$\frac{1}{{}^{(n)}C_{eff}^2} = \frac{1}{{}^{(n)}C^2} + \frac{1}{{}^{(n)}C_{Joint}^2}. \quad (5.63)$$

Принимая во внимание введенный параметр, подставим (5.62) в (5.61). Окончательно уравнение движения для объема, объединяющего бесконечно малый объем сочленения и примыкающие к нему участки каналов, можно записать в виде:

$$\sum_{n=1}^N \int_{[(n)\Delta X]} {}^{(n)} \left(\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot f)}{\partial x} + g \cdot f \cdot \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w \cdot |w|}{C_{eff}^2 \cdot r} \right] \right) \cdot {}^{(n)} \vec{i} dx = 0. \quad (5.64)$$

Для определения значений местных сопротивлений (в сочленениях) необходимо использовать результаты натурных или численных экспериментов. Для некоторых конкретных видов сочленений такие зависимости приведены в справочной литературе (для сочленений труб, полукруглых и прямоугольных каналов подобные зависимости имеются, например, в работе [66]). При настройке модели течения жидкости по разветвленным системам каналов с открытым руслом на параметры реального объекта эффективные коэффициенты Шези предлагается определять из решения соответствующей минимаксной задачи. Данный подход был впервые предложен В.Е. Селезневом и А.Л. Бойченко в монографии [4] (см. также Главу 2). В некоторых задачах имеет смысл решением минимаксной задачи подбирать не сам коэффициент Шези, а определяющие его параметры (например, эквивалентную шероховатость стенок).

При корректном выборе параметров $^{(n)}C_{eff}$, $n = \overline{1, N}$, уравнение движения (5.64) для объема, объединяющего бесконечно малый объем сочленения и примыкающие к нему участки каналов, справедливо при выполнении следующих уравнений движения для каждого рассматриваемого участка канала:

$$\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot f)}{\partial x} = -g \cdot ^{(n)}f \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{^{(n)}w \cdot |^{(n)}w|}{^{(n)}C_{eff}^2 \cdot ^{(n)}r} \right), \quad n = \overline{1, N}. \quad (5.65a)$$

Таким образом, для получения адекватных оценок параметров течения жидкости по системе каналов требуется в окрестности узла разветвления переходить к решению уравнения движения вида (5.65a) (вместо (5.29)).

В дальнейшем, для однозначности, будем обозначать параметр $^{(n)}C_{eff}$ через $^{(n)}C$. При этом имеется в виду, что в окрестности узла разветвления данный параметр отражает, в том числе, влияние местного сопротивления сочленения:

$$\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot f)}{\partial x} = -g \cdot ^{(n)}f \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{^{(n)}w \cdot |^{(n)}w|}{^{(n)}C^2 \cdot ^{(n)}r} \right), \quad n = \overline{1, N}. \quad (5.65b)$$

Интегральное уравнение неразрывности m -ой компоненты жидкости имеет вид:

$$\iiint_V \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial t} dV + \iint_S \hat{Y}_m \cdot v_n dS - \iint_S \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad \hat{Y}_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} \hat{Y}_m. \quad (5.66a)$$

Рассмотрим построение уравнений неразрывности компонент в предположении о непрерывности по пространству функций $\hat{Y}_m$, $m = \overline{1, N_S}$. Данное свойство многокомпонентной среды существует при наличии диффузии, т.е. при $\hat{D}_m \neq 0$, $m = \overline{1, N_S}$.

Запишем (5.66a) для объема $^{(0)}V$. Поскольку данный объем исчезающе мал, первый интеграл равен нулю. Покажем справедливость данного утверждения. Переходя к среднему по объему $^{(0)}V$ значению концентрации, имеем:

$$\lim_{^{(0)}V \rightarrow 0} \iiint_{[^{(0)}V]} \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial t} dV = \lim_{^{(0)}V \rightarrow 0} \left(\frac{\partial Y_m}{\partial t} \cdot \iiint_{[^{(0)}V]} dV \right) = 0.$$

Для второго интеграла, учитывая, что функция $\hat{Y}_m$ постоянна по объему $^{(0)}V$ (но переменна во времени), поверхность $^{(0)}\omega_0$ является исчезающе малой, а также, используя (5.47в) и (5.48), запишем:

$$\iint_{^{(0)}S} \hat{Y}_m \cdot v_n dS = ^{(k)}(Y_m)_L \cdot \iint_{^{(0)}S} v_n dS = ^{(k)}(Y_m)_L \cdot \sum_{n=1}^N \iint_{[^{(n)}f_L]} v_n df = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (5.66b)$$

Из проведенных выкладок следует, что уравнение (5.66a) для объема $^{(0)}V$ имеет вид:

$$\iint_{(0)S} \widehat{D}_m \cdot \frac{\partial \widehat{Y}_m}{\partial n} dS = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad \widehat{Y}_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} \widehat{Y}_m.$$

Считая поверхность $(0)\omega_0$ исчезающе малой (см. выше), распишем левую часть данного уравнения:

$$\begin{aligned} \iint_{(0)S} \widehat{D}_m \cdot \frac{\partial \widehat{Y}_m}{\partial n} dS &= \sum_{n=1}^N \iint_{(n)f_L} \widehat{D}_m \cdot \frac{\partial \widehat{Y}_m}{\partial n} df = \sum_{n=1}^N \iint_{(n)f_L} \widehat{D}_m \cdot \frac{\partial \widehat{Y}_m}{\partial x} \cdot \left((0)\mathbf{\bar{n}} \cdot (n)\mathbf{\bar{i}} \right) df = \\ &= - \sum_{n=1}^N \left((n) \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_L \cdot (n)s \right) = - (k) (D_m)_L \cdot \sum_{n=1}^N \left((n) \left(f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_L \cdot (n)s \right), \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

В представленных преобразованиях значение $(D_m)_L$ было вынесено из-под знака суммы в силу допущения о постоянстве указанного параметра по объему $(0)V$. Из последних двух выражений получаем одномерный вид уравнения неразрывности компонент

$$\sum_{n=1}^N \left((n) f_L \cdot \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_L \cdot (n)s \right) = 0, \quad (5.67)$$

которое можно интерпретировать как закон Кирхгофа для диффузионных потоков.

Рассмотрим теперь запись (5.66a) для объема сочленения. Первый интеграл, с учетом равенства нулю его составляющей по объему $(0)V$ (см. выше), можно представить в виде:

$$\iiint_V \frac{\partial \widehat{Y}_m}{\partial t} dV = \sum_{n=1}^N \left(\iiint_{(n)V} \frac{\partial \widehat{Y}_m}{\partial t} dV \right) + \iiint_{(0)V} \frac{\partial \widehat{Y}_m}{\partial t} dV = \sum_{n=1}^N \left(\iiint_{(n)V} \frac{\partial \widehat{Y}_m}{\partial t} dV \right). \quad (5.68)$$

Подставим (5.68) в (5.66a), прибавим к полученному уравнению математическую запись закона Кирхгофа (5.47б) о равенстве расходов, умноженную на величину $(Y_m)_L$, а также вычтем запись закона Кирхгофа (5.67) для диффузионных потоков, умноженную на величину $(D_m)_L$ ¹:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left(\iiint_{(n)V} \frac{\partial \widehat{Y}_m}{\partial t} dV + \iint_{(n)\omega} v_n \cdot \widehat{Y}_m d\omega + (Y_m)_L \cdot \iint_{(n)f_L} v_n df + \iint_{(n)f_M} v_n \cdot \widehat{Y}_m df \right) - \\ - \sum_{n=1}^N \left((n) (D_m)_L \cdot (n) f_L \cdot \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_L \cdot (n)s + \iint_{(n)f_M} \widehat{D}_m \cdot \frac{\partial \widehat{Y}_m}{\partial n} df \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.69a)$$

Интегралы, характеризующие диффузионный поток компонент жидкости через стенки русла и свободную поверхность, здесь были отброшены в соответствии с предположением об отсутствии потоков через указанные границы.

¹ При этом параметр $(D_m)_L$ считается одинаковым для всех каналов.

Согласно сделанным выше предположениям величина Y_m постоянна в объеме $^{(0)}V$, поэтому можно внести ее под знак интеграла:

$$\sum_{n=1}^N \left(\iiint_{^{(n)}V} \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial t} dV + \iint_{^{(n)}\omega} v_n \cdot \hat{Y}_m d\omega + \iint_{^{(n)}f_L} v_n \cdot \hat{Y}_m df + \iint_{^{(n)}f_M} v_n \cdot \hat{Y}_m df \right) - \sum_{n=1}^N \left(^{(n)} \left[(D_m)_L \cdot f_L \cdot \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_L - (D_m)_M \cdot f_M \cdot \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_M \right] \cdot ^{(n)}S \right) = 0 \quad (5.696)$$

или, с учетом (5.41) и (5.66б),

$$\sum_{n=1}^N \left(\iiint_{^{(n)}V} \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial t} dV + \iint_{^{(n)}S} v_n \cdot \hat{Y}_m dS \right) - \sum_{n=1}^N \left(\frac{^{(n)} \left[(D_m)_L \cdot f_L \cdot \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_L - (D_m)_M \cdot f_M \cdot \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_M \right] \cdot ^{(n)}S \cdot ^{(n)}\Delta X}{^{(n)}(x_L - x_M) \cdot ^{(n)}S} \right) = 0. \quad (5.69в)$$

Используя формулу (5.14) для отдельного канала, получим:

$$\sum_{n=1}^N ^{(n)}\Delta X \cdot \left[\frac{\partial (Y_m \cdot f)_c}{\partial t} + \frac{\partial (Y_m \cdot w \cdot f)_c}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_c \right] = 0. \quad (5.70)$$

Поделим (5.70) на $\Delta \bar{X}$ и устремим $\Delta \bar{X}$ к нулю:

$$\sum_{n=1}^N ^{(n)}\gamma \cdot \left[\frac{\partial (Y_m \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial (Y_m \cdot w \cdot f)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right] = 0. \quad (5.71)$$

Вычитая из уравнения (5.71) соотношение (5.55), умноженное на Y_m , получим следующую недивергентную форму уравнения:

$$\sum_{n=1}^N ^{(n)}\gamma \cdot \left[f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial t} + f \cdot w \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right] = 0. \quad (5.72)$$

Поделим (5.72) на $\sum_{k=1}^N (^{(k)}f \cdot ^{(k)}\gamma)$ и учтем (5.45):

$$\sum_{n=1}^N ^{(n)} \left[\Theta \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial t} \right] + \sum_{n=1}^N ^{(n)} \left[\Theta \cdot \left(w \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right] - \sum_{n=1}^N ^{(n)} \left[\frac{\Theta}{f} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right] = 0 \quad (5.73а)$$

или

$$\frac{\partial Y_m}{\partial t} + \sum_{n=1}^N ^{(n)} \left[\Theta \cdot \left(w \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) - \frac{\Theta}{f} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right] = 0. \quad (5.73б)$$

Уравнения (5.71), (5.73) представляют собой одномерные дифференциальные уравнения неразрывности m -ой компоненты жидкости (раствора) для узла сочленения N каналов при наличии диффузии.

Рассмотрим построение уравнений неразрывности компонент при условии течения жидкости без диффузии. Введем в рассмотрение понятия «подводящих» и «отводящих» каналов. К первым относятся каналы, из которых жидкость втекает в объем ${}^{(0)}V$. Ко вторым относятся каналы, в которые жидкость вытекает из объема ${}^{(0)}V$ (см. ниже). Множество «подводящих» каналов обозначим через $\mathbb{C}_{\text{IN}}$, множество «отводящих» – через $\mathbb{C}_{\text{OUT}}$. Характеристикой того, что n -ый канал относится к множеству «подводящих» каналов, является выполнение следующего условия:

$${}^{(n)}w \cdot {}^{(n)}s \geq 0.$$

В данном неравенстве скорость соответствует граничному сечению.

Будем считать, что жидкость в объеме ${}^{(0)}V$ мгновенно перемешивается. При этом концентрации компонент смеси в данном объеме и на входе «отводящих» каналов в общем случае будут одинаковы и не равны аналогичным концентрациям в граничных точках «подводящих» каналов. Это объясняется тем, что в используемой модели концентрации веществ могут переноситься только конвективным потоком. По данной причине из объема ${}^{(0)}V$ смесь с соответствующими данному объему концентрациями не может «попасть» в «подводящие» каналы. Другими словами, функция Y_m (в предположении модели об отсутствии диффузии) является в общем случае разрывной. Для «отводящих» каналов значение Y_m для каждого канала (в граничном сечении) является одинаковым и равным соответствующему значению для объема ${}^{(0)}V$.

Рассмотрим уравнение неразрывности компонент (5.66a) для объема ${}^{(0)}V$ при условии $D_m = 0$, $m = \overline{1, N_S}$. По аналогии с вышеприведенными выкладками можно показать, что объемный интеграл для исчезающе малого объема ${}^{(0)}V$ равен нулю. В этом случае уравнение (5.66a) можно преобразовать к виду:

$$\iint_{{}^{(0)}S} \widehat{Y}_m \cdot v_n dS = - \sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} {}^{(n)}(Y_m \cdot w \cdot f \cdot s) - \sum_{k \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}} {}^{(k)}(Y_m \cdot w \cdot f \cdot s) = 0.$$

Отсюда, учитывая закон Кирхгофа о сохранении расходов (5.48), для вычисления значений массовых концентраций компонент применительно к примыкающим к узлу сочленения границам «отводящих» каналов, можно записать:

$$\begin{aligned} {}^{(\xi)}Y_m &= - \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} {}^{(n)}(Y_m \cdot w \cdot f \cdot s)}{\sum_{k \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}} {}^{(k)}(w \cdot f \cdot s)} = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} {}^{(n)}(Y_m \cdot |w| \cdot f)}{\sum_{k \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}} {}^{(k)}(|w| \cdot f)} = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} {}^{(n)}(Y_m \cdot |w| \cdot f)}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} {}^{(n)}(|w| \cdot f)}, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \\ {}^{(\xi)}Y_{N_S} &= 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} {}^{(\xi)}Y_m; \quad \xi \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}. \end{aligned} \tag{5.73в}$$

Объединяя результаты предшествующих рассуждений, получаем следующую систему дифференциальных уравнений, описывающих *неустановившееся безнапорное медленно изменяющееся течение многокомпонентной химически инертной жидкости (раствора) с учетом диффузии через сочленение N длинных каналов с*

открытым руслом с произвольным поперечным сечением и шероховатыми стенками, расположенным на местности с плавноизменяющимся слабонаклонным рельефом:

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}\gamma \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (w \cdot f)}{\partial x} \right) = 0; \quad (5.74a)$$

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}\gamma \cdot \left[\frac{\partial (Y_m \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial (Y_m \cdot w \cdot f)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad (5.74б)$$

$${}^{(n)}Y_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} {}^{(n)}Y_m;$$

$$\frac{\partial (w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial (w^2 \cdot f)}{\partial x} = -g \cdot {}^{(n)}f \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{{}^{(n)}w \cdot \left| {}^{(n)}w \right|}{{}^{(n)}C^2 \cdot {}^{(n)}r} \right), \quad n = \overline{1, N}; \quad (5.74в)$$

$${}^{(n)}(Y_m) = {}^{(\xi)}(Y_m), \quad \text{для любых } n, \xi \in \overline{1, N} \text{ и } m \in \overline{1, N_S}; \quad (5.74г)$$

$${}^{(n)}H = {}^{(\xi)}H, \quad \text{для любых } n, \xi \in \overline{1, N}; \quad (5.74д)$$

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}w \cdot {}^{(n)}f \cdot {}^{(n)}s = 0; \quad \sum_{n=1}^N \left({}^{(n)}f_L \cdot \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_L \cdot {}^{(n)}s \right) = 0; \quad (5.74е)$$

$${}^{(n)}f = {}^{(n)}f \left({}^{(n)}B, {}^{(n)}H \right); \quad (5.74ж)$$

$${}^{(n)}C = {}^{(n)}C \left({}^{(n)}r, {}^{(n)}n_{\text{ш}} \right); \quad (5.74з)$$

$${}^{(n)}r = {}^{(n)}f \left({}^{(n)}B, {}^{(n)}H \right) / {}^{(n)}\chi \left({}^{(n)}B, {}^{(n)}H \right). \quad (5.74и)$$

Уравнения (5.74г–и) играют роль дополнительных соотношений для узловой точки сочленения, учитываемых при решении уравнений (5.74а–в).

При рассмотрении течения жидкой смеси без учета диффузии несколько уравнений системы (5.74) претерпевают изменения. Приведем данные уравнения, пометив их ну-мерацию символами «*» и «**».

$$\frac{\partial (f \cdot Y_m)}{\partial t} + \frac{\partial (w \cdot f \cdot Y_m)}{\partial x} = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad (5.74б*)$$

$${}^{(n)}Y_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} {}^{(n)}Y_m; \quad n \in \mathbb{C}_{\text{IN}};$$

$${}^{(k)}Y_m = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} {}^{(n)}(Y_m \cdot |w| \cdot f)}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} {}^{(n)}(|w| \cdot f)}, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad {}^{(k)}Y_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} {}^{(k)}Y_m; \quad k \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}; \quad (5.74б**)$$

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}w \cdot {}^{(n)}f \cdot {}^{(n)}s = 0. \quad (5.74e^*)$$

Совместное решение систем уравнений (5.38) и (5.74) позволяет численно оценить параметры транспортирования многокомпонентных жидкостей по системе разветвленных каналов с открытым руслом. Для замыкания модели (5.38, 5.74) задаются краевые условия. В качестве начальных условий принимаются начальные распределения для искомых функций:

$$H(x, t_0) = H_0(x); \quad w(x, t_0) = w_0(x); \quad Y_m(x, t_0) = Y_{m,0}(x), \quad m = \overline{1, N_s - 1}. \quad (5.75)$$

При моделировании течения однокомпонентной жидкости по участку канала на границах рассчитываемого участка могут задаваться следующие виды ГУ:

$$H(x_b, t) = H_b(t); \quad (5.76a)$$

$$w(x_b, t) = w_b(t); \quad (5.76б)$$

$$Q(x_b, t) = Q_b(t) = w \cdot f; \quad (5.76в)$$

$$J(x_b, t) = J_b(t) = \rho \cdot w \cdot f; \quad (5.76г)$$

$$f(x_b, t) = f_b(t), \quad (5.76д)$$

где x_b – координата границы. При моделировании течения однокомпонентной жидкости по каналам с открытым руслом требуется задание двух ГУ – по одному условию из списка (5.76а – 5.76д) на каждой границе. В случае течения многокомпонентной среды с учетом диффузии на границах рассчитываемого участка канала должны задаваться дополнительно по одному ГУ для каждой компоненты смеси. Это могут быть:

$$Y_m(x_b, t) = Y_m^b(t), \quad m = \overline{1, N_s - 1}; \quad (5.76e)$$

$$\frac{\partial Y_m(x_b, t)}{\partial x} = \delta Y_m^b(t), \quad m = \overline{1, N_s - 1}. \quad (5.76ж)$$

При моделировании течения жидкости по разветвленной системе каналов описанные ГУ следует задавать на каждой границе системы. При этом ГУ (5.76е) предпочтительней задавать на «входных» границах (т.е. границах, через которые жидкость втекает в систему каналов). При отсутствии диффузии предлагается задавать только ГУ (5.76е) на входных границах системы каналов. На выходных границах ГУ (5.76е) и (5.76ж) не задаются.

В качестве отступления от изложения материала настоящего Раздела заметим, что диффузионный поток $(D_m \cdot f \cdot \partial Y_m / \partial x)$ является незначительным по сравнению с конвективным потоком $(Y_m \cdot w \cdot f)$ (см. (5.38б) и (5.74б)). Для доказательства этого рассмотрим в качестве несущей жидкости воду. Скорость течения воды в каналах имеет порядок 1 м/с . Будем считать, что концентрации компонент смеси имеют порядок 10^{-2} . Таким образом, величина $|Y_m \cdot w|$ соответствует порядку 10^{-2} м/с .

Предположим, что концентрация компоненты может меняться на одном метре на 10% (хотя это противоречит исходной постановке задачи (см. выше)). В этом случае величина $\partial Y_m / \partial x$ имеет порядок $0,1 \text{ м}^{-1}$. Коэффициент диффузии веществ в воде имеет

порядок $10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ [265]. Таким образом, величина $|D_m \cdot \partial Y_m / \partial x|$ соответствует порядку $10^{-10} \text{ м}/\text{с}$.

Исходя из данных рассуждений, получаем, что конвективный перенос массы существенно преобладает над диффузионным. Несмотря на это, присутствие диффузионного слагаемого в рассматриваемой модели имеет принципиальное значение. Если рассматривать течение многокомпонентной жидкости без учета диффузии, то концентрация компоненты Y_m может являться разрывной функцией. Например, при слиянии двух потоков с разными относительными концентрациями компонент, по условиям построения модели, в объеме $^{(0)}V$ смесь мгновенно перемешивается. Таким образом, при «перетекании» жидкости через сочленение функция концентрации компоненты Y_m будет терпеть разрыв, что противоречит допущению о непрерывности функции Y_m .

Во-вторых, в ряде задач требуется учитывать турбулентную диффузию, которая сравнима с конвекцией. Таким образом, перечисленные причины объясняют наличие в одной из рассматриваемых моделей течения многокомпонентной смеси (раствора) по разветвленным каналам с открытым руслом (рекам) слагаемого, учитывающего диффузионные потоки. Аналогичные рассуждения можно привести относительно процессов теплопроводности.

Иногда возникает необходимость в моделировании ситуаций, когда в канал с открытым руслом (реку) из некоторого источника поступает дополнительное количество жидкости (рис. 5.5). Будем считать, что поверхность жидкости в канале всегда находится ниже точки сброса. Рассмотрим уравнение неразрывности. Одно из основных уравнений механики сплошных сред заключается в том, что для любого индивидуального объема [84]:

$$m = \text{const}, \quad (5.77)$$

где m – масса любого индивидуального объема, т.е. объема, состоящего из одних и тех же частиц. Это уравнение можно записать в другой форме, а именно:

$$\frac{dm}{dt} = 0. \quad (5.78)$$

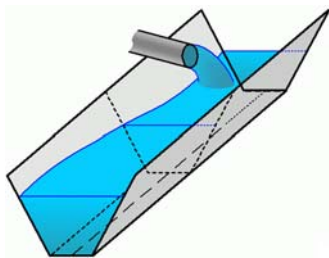


Рис. 5.5. Схематичное представление слива жидкости в канал

Моделирование дополнительного слива жидкости в канал (из канала) условно будем производить за счет источников (стоков) массы, находящихся внутри объема жидкости:

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_V \hat{J}_V dV, \quad (5.79)$$

где $\hat{J}_V$ – локальная скорость производства массы, отнесенная к единице объема (еди-

ницей измерения данной величины является $\kappa z / (c \cdot m^3)$). В [84] показано, что:

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} dV + \iint_S \hat{\rho} \cdot v_n dS. \quad (5.80)$$

Таким образом, исходное интегральное уравнение неразрывности для построения искомого эквивалентного одномерного дифференциального уравнения имеет вид:

$$\iiint_V \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} dV + \iint_S \hat{\rho} \cdot v_n dS = \iiint_V \hat{J}_V dV. \quad (5.81)$$

Эта формула справедлива для любого объема V . Правая часть уравнения (5.81) в этом случае равна массовому расходу сливающейся в канал жидкости для выделенного участка канала.

Рассмотрим правую часть (5.81):

$$\iiint_V \hat{J}_V dV = \int_{\Delta x} \left(\iint_f \hat{J}_V df \right) dx = \Delta x \cdot \left(\iint_f \hat{J}_V df \right)_c = \Delta x \cdot (J_V \cdot f)_c, \quad (5.82)$$

где J_V – среднее по сечению значение $\hat{J}_V$. Подставим (5.82) в (5.81) с учетом (5.14) и поделим на Δx . Устремляя Δx к нулю и опуская индексы «с», получим следующее уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (w \cdot f)}{\partial x} = \frac{J_V}{\rho} \cdot f. \quad (5.83)$$

Введем в рассмотрение скорость производства объема жидкости, отнесенную к единице длины канала (единицей данной величины является $[m^3 / (c \cdot m)]$):

$$Q_L = \frac{J_V}{\rho} \cdot f. \quad (5.84)$$

Параметр Q_L можно также интерпретировать как удельный (на единицу длины канала) объемный расход жидкости, вливаемый в канал (или отбираемый из канала). С учетом введенного обозначения уравнение (5.83) примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (w \cdot f)}{\partial x} = Q_L. \quad (5.85)$$

Перейдем к рассмотрению уравнения неразрывности компоненты смеси. По аналогии с вышеприведенными рассуждениями можно показать, что с учетом дополнительного источника массы в объеме среды уравнения неразрывности для компонент раствора примут вид [79, 84]:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial (\hat{\rho} \cdot \hat{Y}_m)}{\partial t} dV + \iint_S \hat{\rho} \cdot \hat{Y}_m \cdot v_n dS - \iint_S \hat{\rho} \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS = \iiint_V \hat{J}_V \cdot \hat{\gamma}_m dV, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \\ \hat{Y}_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} \hat{Y}_m; \quad \hat{\gamma}_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} \hat{\gamma}_m, \end{aligned} \quad (5.86)$$

где $\hat{\gamma}_m$ – локальное значение концентрации m -ой компоненты в сливаемой жидкости

(если жидкость отбирается из канала, то $\hat{\gamma}_m = \hat{Y}_m$).

По аналогии с вышеприведенными рассуждениями уравнение (5.86) можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\partial(f \cdot Y_m)}{\partial t} + \frac{\partial(w \cdot f \cdot Y_m)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) = \frac{f \cdot J_v \cdot \gamma_m}{\rho}, \quad m = \overline{1, N_s - 1};$$

$$Y_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} Y_m; \quad \gamma_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} \gamma_m, \quad (5.87)$$

где γ_m – среднее по сечению канала значение $\hat{\gamma}_m$. Переходя к использованию Q_L , уравнение (5.87) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial(f \cdot Y_m)}{\partial t} + \frac{\partial(w \cdot f \cdot Y_m)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) = Q_L \cdot \gamma_m, \quad m = \overline{1, N_s - 1};$$

$$Y_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} Y_m; \quad \gamma_{N_s} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} \gamma_m. \quad (5.88)$$

Рассмотрим уравнение движения. По аналогии с вышеприведенными рассуждениями можно показать, что если в объеме среды существует источник массы, «рождающейся» с начальной скоростью $\vec{v}_{SOURCE}$, то трехмерное интегральное уравнение движения будет выглядеть следующим образом:

$$\iiint_V \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot \vec{v})}{\partial t} dV + \iint_S \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \nu_n dS = - \iint_S \hat{p} \cdot \vec{n} dS + \iint_S \hat{\tau}_n dS + \iiint_V \hat{\rho} \cdot \vec{F} dV + \iiint_V \hat{J}_v \cdot \vec{v}_{SOURCE} dV. \quad (5.89)$$

Уравнение (5.89) можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot f)}{\partial x} = -g \cdot f \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r} \right) + \frac{J_v}{\rho} \cdot w_{SOURCE} \cdot f, \quad (5.90)$$

где w_{SOURCE} – проекция на ось Ox среднего по сечению вектора $\vec{v}_{SOURCE}$. Переходя к использованию Q_L , уравнение (5.90) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot f)}{\partial x} = -g \cdot f \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r} \right) + Q_L \cdot w_{SOURCE}. \quad (5.91)$$

Если параметр Q_L характеризовать как удельный (на единицу длины канала) объемный расход жидкости, вливаемый в канал, то величина w_{SOURCE} тогда является проекцией на ось Ox вектора скорости слива. Если $Q_L < 0$ (т.е. жидкость отбирается из потока), то в качестве упрощения положим $w_{SOURCE} = 0$ ¹.

Рассмотрим частный случай уравнения (5.91), когда жидкость вливается в канал с нулевой проекцией скорости на ось Ox . В этом случае уравнение движения примет вид, совпадающий с моделью течения жидкости без учета дополнительного слива жидкости в канал:

¹ Предполагается, что отбор жидкости идет перпендикулярно потоку.

$$\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot f)}{\partial x} = -g \cdot f \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r} \right). \quad (5.92)$$

Таким образом, *математическая модель, описывающая неустановившееся безнапорное медленно изменяющееся течение при наличии слива (стока) многокомпонентной химически инертной жидкой смеси (раствора) по неразветвленному длинному каналу с открытым руслом произвольного поперечного сечения и шероховатыми стенками, проложенным на местности с плавноизменяющимся слабонаклонным рельефом*, записывается в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(w \cdot f)}{\partial x} = Q_L; \quad (5.93a)$$

$$\frac{\partial(f \cdot Y_m)}{\partial t} + \frac{\partial(w \cdot f \cdot Y_m)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) = Q_L \cdot \gamma_m, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad (5.93б)$$

$$Y_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} Y_m; \quad \gamma_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} \gamma_m;$$

$$\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot f)}{\partial x} = -g \cdot f \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r} \right) + Q_L \cdot w_{SOURCE}; \quad (5.93в)$$

$$f = f(B, H); \quad (5.93г)$$

$$C = C(r, n_{III}); \quad (5.93д)$$

$$r = f(B, H) / \chi(B, H). \quad (5.93е)$$

Итак, мы полностью описали математическую модель для решения поставленной в начале данного Раздела задачи. Теперь целесообразно несколько усложнить указанную постановку задачи и рассмотреть способы моделирования распространения тепла по каналам с открытым руслом (рекам). С учетом сбросов теплых промышленных вод в реки, проводимых промышленными предприятиями и объектами муниципальных хозяйств, эта задача в настоящее время является актуальной.

5.4. Построение математической модели распространения тепла по сетям каналов с открытым руслом

Согласно [108], если скорость движения жидкости мала по сравнению со скоростью звука, то возникающие в результате движения изменения давления настолько малы, что вызываемым ими изменением плотности (и других термодинамических параметров) можно пренебречь. Однако неравномерно нагретая жидкость не является несжимаемой в том смысле, как это понималось в предыдущих Разделах настоящей Главы. Дело в том, что ее плотность меняется под влиянием изменения температуры. Этим изменением, вообще говоря, нельзя пренебречь, и потому даже при достаточно малых скоростях плотность неравномерно нагретой жидкости все же нельзя считать постоянной. Для того чтобы в уравнениях движения неравномерно нагретой жидкости можно было условно считать плотность жидкости постоянной, необходимо (помимо малости отношения скорости жидкости к скорости звука), чтобы имеющиеся в жидкости разности температур были достаточно малы [108]. В нашем случае разности температур считаются малыми,

т.е. транспортируемую среду можно условно считать несжимаемой¹. Однако, для повышения наглядности изложения материала, построение модели распространения тепла по каналам с открытым руслом начнем с рассмотрения течения среды в предположении ее сжимаемости.

Закон сохранения полной энергии можно представить в следующей дифференциальной форме записи [79, 84]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \cdot \left(\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) \right] + \bar{\nabla} \cdot \left[\bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{v}} \cdot \left(\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) \right] = -\bar{\nabla} \cdot (\bar{p} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \\ + \bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{Q} - \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{W}} + \sum_{m=1}^{N_s} \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \cdot \bar{\varepsilon}_m \cdot \bar{D}_m \cdot \bar{\nabla} Y_m) \end{aligned} \quad (5.94a)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \cdot \left(\hat{h} + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) \right] + \bar{\nabla} \cdot \left[\bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{v}} \cdot \left(\hat{h} + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) \right] = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \\ + \bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{Q} - \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{W}} + \sum_{m=1}^{N_s} \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \cdot \bar{\varepsilon}_m \cdot \bar{D}_m \cdot \bar{\nabla} Y_m), \end{aligned} \quad (5.94б)$$

где $\hat{h} = \bar{\varepsilon} + \bar{p}/\bar{\rho}$ – удельная (на единицу массы) энтальпия смеси, $\hat{T}$ – температура жидкости; $\bar{\mathbf{W}}$ – удельный (на единицу площади) тепловой поток через поверхность S с единичной нормалью $\bar{\mathbf{n}}$; $\bar{Q}$ – удельная (на единицу объема) мощность источников тепла; $\bar{\varepsilon}$ – удельная (на единицу массы) внутренняя энергия смеси; $\bar{\varepsilon}_m$ – удельная (на единицу массы) внутренняя энергия m -ой компоненты.

Пусть по длине канала расположены дополнительные сливы жидкости. Учет дополнительного слива жидкости в канал условно будем осуществлять за счет использования источников массы, находящихся внутри объема жидкости и «производящих» вещество с температурой $\hat{T}_{SOURCE}$. В этом случае к уравнению переноса тепла (5.94б) должен быть добавлен соответствующий дополнительный член:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \cdot \left(\hat{h} + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) \right] + \bar{\nabla} \cdot \left[\bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{v}} \cdot \left(\hat{h} + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) \right] = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \\ + \bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{Q} - \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{W}} + \sum_{m=1}^{N_s} \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \cdot \bar{\varepsilon}_m \cdot \bar{D}_m \cdot \bar{\nabla} Y_m) + J_v \cdot \hat{h}_{SOURCE}, \end{aligned} \quad (5.94в)$$

где $\hat{h}_{SOURCE}$ – удельная (на единицу массы) энтальпия жидкости, вливающейся в канал. Если жидкость из канала отбирается, то $\hat{h}_{SOURCE} = \hat{h}$. Для воды, с учетом уравнения состояния, можно записать $\hat{h}_{SOURCE} = c_p \cdot \hat{T}_{SOURCE}$, где c_p – удельная (на единицу массы) теплоемкость при постоянном давлении, $c_p = const$. Причина рассмотрения параметра c_p в качестве константы будет изложена ниже.

Для упрощения вывода уравнения переноса тепла с учетом источников слива жидкости (сохраняя при этом общность рассуждений) математические выкладки будем проводить на примере прямоугольной декартовой системы координат².

¹ Здесь следует особо подчеркнуть, что в данном случае речь идет именно об абсолютных значениях разностей температур, а не о градиенте температуры.

² Результирующая формула будет справедлива для общей постановки задачи.

Уравнения неразрывности (5.81) и движения (5.89) в дифференциальной форме записи имеют вид:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v}) = \hat{J}_v; \quad (5.94\Gamma)$$

$$\frac{\partial (\hat{\rho} \cdot \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\hat{\rho} \cdot \vec{v} \otimes \vec{v}] = -\vec{\nabla} \hat{p} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \hat{\rho} \cdot \vec{F} + \hat{J}_v \cdot \vec{v}_{SOURCE}, \quad (5.94\Delta)$$

где $\otimes$ – символ тензорного произведения:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})_{ij} = a_i \cdot b_j.$$

Конвективное слагаемое из (5.94д) можно записать в виде:

$$\vec{\nabla} \cdot [\hat{\rho} \cdot \vec{v} \otimes \vec{v}] = \vec{v} \cdot [\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v})] + \hat{\rho} \cdot [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}], \quad (5.95)$$

где $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) = \left(v_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$ – оператор дифференцирования (см. также [89]). Здесь нижний индекс $k, k = \overline{1,3}$ соответствует номеру оси координат. Параметры $x_k, k = \overline{1,3}$, являются прямоугольными декартовыми координатами произвольной точки трехмерного евклидового пространства. Орты осей обозначим через $\vec{e}_k, k = \overline{1,3}$. Парное присутствие одного индекса в слагаемом говорит о том, что по данному индексу производится суммирование. С учетом этого для произвольного вектора $\vec{a}$ справедлива сокращенная запись:

$$\vec{a} = a_k \cdot \vec{e}_k, \quad (5.96a)$$

где a_k – компоненты вектора $\vec{a}, k = \overline{1,3}$. Аналогично, для оператора $\vec{\nabla}$ можно представить следующий вид:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (5.96б)$$

В матричном представлении применение оператора дивергенции по отношению к тензору соответствует умножению данного тензора на оператор $\vec{\nabla}$. Следовательно, компоненты вектора $\vec{\nabla} \cdot [\hat{\rho} \cdot \vec{v} \otimes \vec{v}]$ можно записать так:

$$[\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v} \otimes \vec{v})]_j = \frac{\partial}{\partial x_k} (\hat{\rho} \cdot v_j \cdot v_k), \quad j = \overline{1,3}.$$

Отсюда,

$$\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v} \otimes \vec{v}) = \vec{e}_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{\rho} \cdot v_k \cdot v_j). \quad (5.97)$$

Докажем равенство (5.95):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot [\hat{\rho} \cdot \vec{v} \otimes \vec{v}] &= \vec{e}_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} [\hat{\rho} \cdot v_k \cdot v_j] = v_k \cdot \vec{e}_k \cdot \frac{\partial (\hat{\rho} \cdot v_j)}{\partial x_j} + \hat{\rho} \cdot \vec{e}_k \cdot v_j \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \\ &= \vec{v} \cdot [\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v})] + \hat{\rho} \cdot v_j \cdot \frac{\partial (\vec{e}_k \cdot v_k)}{\partial x_j} = \vec{v} \cdot [\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v})] + \hat{\rho} \cdot [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}]. \end{aligned}$$

В дальнейших выкладках будут использоваться следующие формулы:

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot \vec{v})}{\partial t} - \frac{\vec{v}^2}{2} \cdot \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \vec{v}^2 \cdot \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{\vec{v}^2}{2} \cdot \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{\vec{v}^2}{2} \cdot \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \hat{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{\rho} \cdot \vec{v}^2}{2} \right); \quad (5.98a)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot [\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v} \otimes \vec{v})] - \frac{\vec{v}^2}{2} \cdot [\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v})] &= \vec{v}^2 \cdot [\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v})] + \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] - \\ &- \frac{\vec{v}^2}{2} \cdot [\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v})] = \frac{\vec{v}^2}{2} \cdot [\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v})] + \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] = \\ &= \frac{\vec{v}^2}{2} \cdot [\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v})] + \hat{\rho} \cdot v_n \cdot \vec{e}_n \cdot v_j \cdot \frac{\partial(\vec{e}_k \cdot v_k)}{\partial x_j} = \\ &= \frac{\vec{v}^2}{2} \cdot [\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v})] + \hat{\rho} \cdot v_k \cdot v_j \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \frac{\vec{v}^2}{2} \cdot [\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v})] + \\ &+ \hat{\rho} \cdot v_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_k^2}{2} \right) = \frac{\vec{v}^2}{2} \cdot [\vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v})] + \hat{\rho} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) = \\ &= \frac{v_k^2}{2} \cdot \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot v_j)}{\partial x_j} + \hat{\rho} \cdot v_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_k^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\hat{\rho} \cdot v_j \cdot \frac{v_k^2}{2} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.98b)$$

Для получения закона сохранения кинетической энергии необходимо из уравнения движения (5.94д), умноженного на $\vec{v}$, вычесть уравнение неразрывности (5.94г), умноженное на $(0,5 \cdot \vec{v}^2)$. Применяя в преобразованиях формулы (5.98), можно получить следующую запись закона сохранения кинетической энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{\rho} \cdot \vec{v}^2}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}^2}{2} \right) = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \hat{p} + \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}) + \hat{\rho} \cdot \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \hat{J}_v \cdot (\vec{v}_{SOURCE} - 0,5 \cdot \vec{v}). \quad (5.99)$$

Вычитая (5.99) из (5.94в), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot \hat{h})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \hat{h}) &= \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \hat{p} + [\vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau})] + \\ &+ \hat{Q} - \vec{\nabla} \cdot \vec{W} + \sum_{m=1}^{N_s} \vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{\varepsilon}_m \cdot \hat{D}_m \cdot \vec{\nabla} Y_m) + \hat{J}_v \cdot \hat{h}_{SOURCE} + \vec{v} \cdot \hat{J}_v \cdot (0,5 \cdot \vec{v} - \vec{v}_{SOURCE}) \end{aligned} \quad (5.100a)$$

или, с учетом калорического уравнения состояния $\hat{h} = c_p \cdot \hat{T}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(c_p \cdot \hat{\rho} \cdot \hat{T} - \hat{p})}{\partial t} + c_p \cdot \vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \hat{T}) &= \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \hat{p} + [\vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau})] + \\ &+ \hat{Q} - \vec{\nabla} \cdot \vec{W} + \sum_{m=1}^{N_s} \vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \cdot \vec{\varepsilon}_m \cdot \hat{D}_m \cdot \vec{\nabla} Y_m) + c_p \cdot \hat{J}_v \cdot \hat{T}_{SOURCE} + \vec{v} \cdot \hat{J}_v \cdot (0,5 \cdot \vec{v} - \vec{v}_{SOURCE}). \end{aligned} \quad (5.100b)$$

Считая разности температур малыми, мы будем пренебрегать температурными изменениями параметра c_p , т.е. будем считать его константой. Это же относится и к коэффициенту теплопроводности k .

Оценим некоторые слагаемые в уравнениях (5.100). Теплоемкость воды c_p примерно равна $4 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$; плотность $\sim 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$; температура $\sim 300 \text{ K}$. Таким образом, $(\bar{\rho} \cdot c_p \cdot \hat{T}) \sim 10^9 \text{ Па}$. Давление $\bar{p}$ в малых и средних реках имеет значение $\sim 10^5 \text{ Па}$. Данный анализ показывает, что первое слагаемое можно заменить произведением $c_p \cdot \partial(\bar{\rho} \cdot \hat{T})/\partial t$.

Рассмотрим слагаемое $(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla} \bar{p})$. Величина $(\bar{p} \cdot \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{v}})$ может быть как отрицательной, так и положительной. По данной причине значение $\bar{\nabla} \cdot (\bar{p} \cdot \bar{\mathbf{v}}) = \bar{p} \cdot \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla} \bar{p}$ может служить оценкой для слагаемого $(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla} \bar{p})$. С учетом сделанного ранее сравнения величин $\bar{p}$ и $(\bar{\rho} \cdot \hat{h})$ рассмотрим сумму второго и четвертого слагаемого (5.100а), оценивая четвертое слагаемое величиной $\bar{\nabla} \cdot (\bar{p} \cdot \bar{\mathbf{v}})$:

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{h}) + \bar{\nabla} \cdot (\bar{p} \cdot \bar{\mathbf{v}}) = \bar{\nabla} \cdot [\bar{\mathbf{v}} \cdot (\bar{\rho} \cdot \hat{h} + \bar{p})] = \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{h}).$$

Для анализа влияния на температуру потока последнего слагаемого в (5.100б) сравним его с произведением $(c_p \cdot \hat{J}_v \cdot \hat{T}_{SOURCE})$. Согласно приведенным выше оценкам участвующих в данном слагаемом параметров, произведение $(c_p \cdot \hat{T}_{SOURCE})$ имеет значение $\sim 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2$. С другой стороны, модуль скорости жидкости в пологих каналах (равнинных реках), как правило, ограничивается величиной $< 10 \text{ м}/\text{с}$. Поэтому произведение $[\bar{\mathbf{v}} \cdot (0,5 \cdot \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_{SOURCE})]$ имеет значение $\sim 10^2 \text{ м}^2/\text{с}^2$. Таким образом, последним слагаемым уравнения (5.100б) можно пренебречь по сравнению со слагаемым $(c_p \cdot \hat{J}_v \cdot \hat{T}_{SOURCE})$. Отсюда, дифференциальная форма записи уравнения переноса тепла примет окончательный вид:

$$\begin{aligned} c_p \cdot \frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \hat{T})}{\partial t} + c_p \cdot \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \cdot \bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{T}) = & [\bar{\nabla} \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) - \bar{\mathbf{v}} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}})] + \\ & + \bar{Q} - \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{W}} + \sum_{m=1}^{N_s} \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \cdot \hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{D}_m \cdot \bar{\nabla} Y_m) + c_p \cdot \hat{J}_v \cdot \hat{T}_{SOURCE}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Рассмотрев общий подход к получению уравнения энергии для течения сжимаемой среды, вернемся к исходному допущению о постоянстве плотности транспортируемой жидкости. В данном случае интегральная форма записи данного уравнения представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho \cdot c_p \cdot \iiint_V \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} dV + \rho \cdot c_p \cdot \iint_S \hat{T} \cdot \nu_n dS = & \iint_S \bar{\boldsymbol{\tau}}_n \cdot \bar{\mathbf{v}} dS - \iiint_V \bar{\mathbf{v}} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}) dV + \\ & + \iiint_V \bar{Q} dV - \iint_S W_n dS + \rho \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \iint_S \hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS + c_p \cdot \iiint_V \hat{J}_v \cdot \hat{T}_{SOURCE} dV. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Рассмотрим каждое слагаемое (5.102).

Первое и второе слагаемые. Используя (5.14), а также предположение о допустимости осреднения температуры по поперечному сечению канала, получим:

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(\iiint_V \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} dV + \iint_S \bar{T} \cdot \nu_n dS \right) = \Delta x \cdot \rho \cdot c_p \cdot \left[\frac{\partial (T \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial (T \cdot f \cdot w)}{\partial x} \right],$$

где T – среднее по сечению значение температуры жидкости.

Третье слагаемое.

$$\iint_S \bar{\tau}_n \cdot \bar{\nu} dS = \iint_{f'} \bar{\tau}_x \cdot \bar{\nu} df - \iint_f \bar{\tau}_x \cdot \bar{\nu} df + \iint_{\omega_R} \bar{\tau}_n \cdot \bar{\nu} d\omega + \iint_{\omega_0} \bar{\tau}_n \cdot \bar{\nu} d\omega, \quad (5.103)$$

где ω_0 и ω_R – свободная поверхность жидкости и смоченная поверхность русла канала соответственно (см. выше).

Будем считать, что угол наклона дна φ и свободной поверхности ψ к оси Ox мал настолько, что $\cos \varphi \approx 1$ и $\cos \psi \approx 1$. Учитывая предположение о возможности осреднения скорости по поперечному сечению, для ядра потока получаем $\bar{\nu} \approx w \cdot \bar{\mathbf{i}}$, где $\bar{\mathbf{i}}$ – орт оси Ox . Отсюда для первых двух слагаемых (5.103) справедливы следующие выкладки:

$$\iint_{f'} \bar{\tau}_x \cdot \bar{\nu} df - \iint_f \bar{\tau}_x \cdot \bar{\nu} df = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\iint_f \bar{\tau}_x \cdot \bar{\nu} df \right) \approx \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(w \cdot \iint_f \tau_{xx} df \right). \quad (5.104)$$

Оценим величину производной в (5.104). Записывая выражение для τ_{xx} (см., например, [63, 108]) и учитывая $[(\bar{\nabla} \cdot \bar{\nu}) = 0]$ для несжимаемой жидкости, имеем:

$$\tau_{xx} = \mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \cdot \bar{\nabla} \cdot \bar{\nu} \right) = 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (5.105)$$

где μ – динамический коэффициент вязкости жидкости (см. выше). Преобразуем (5.104) по теореме о среднем, учитывая последнее выражение:

$$\Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(w \cdot \iint_f \tau_{xx} df \right) = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(w \cdot \iint_f 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} df \right) = 2 \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_f \cdot w \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot f \right), \quad (5.106)$$

где μ_f – среднее по поперечному сечению канала значение μ . Для воды $\mu \sim 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ [265]. Очевидно, что при слабых волновых процессах, когда величина $\mu \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$ мала, первыми двумя слагаемыми в правой части в (5.103) можно пренебречь.

Исследуем третье слагаемое в правой части (5.103). С учетом отсутствия течения на стенках русла, имеем:

$$\iint_{\omega_R} \bar{\tau}_n \cdot \bar{\nu} d\omega = 0. \quad (5.107)$$

Рассмотрим четвертое слагаемое в правой части (5.103). Будем считать, что угол наклона поверхности воды к горизонтальной плоскости мал настолько, что $\cos \psi \approx 1$. Тогда

$$d\omega \approx d\chi_0 \cdot dx, \quad (5.108)$$

где χ_0 – длина линии (в поперечном сечении), соответствующей свободной поверхно-

сти. Учитывая предположение о пренебрежимо малом влиянии ветра, будем считать, что скорость течения жидкости на свободной поверхности близка к скорости ядра потока:

$$\iint_{\omega_0} \bar{\tau}_n \cdot \bar{v} d\omega = \int_{\Delta x} \left(\int_{\chi_0} \bar{\tau}_n \cdot \bar{v} d\chi \right) dx = \Delta x \cdot \left(\int_{\chi_0} \bar{\tau}_n \cdot \bar{v} d\chi \right)_c \approx \Delta x \cdot \left(w \cdot \int_{\chi_0} \tau_{nx} d\chi \right)_c. \quad (5.109)$$

Оценим величину, стоящую в скобках соотношения (5.109). Записывая выражение для τ_{nx} (см., например, [63]), имеем:

$$\begin{aligned} \tau_{nx} &= (\boldsymbol{\tau} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\mathbf{i}} = \tau_{xx} \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot n_x + \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \cdot n_y + \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \cdot n_z \approx \\ &\approx \mu \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot n_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot n_z \right) = \mu \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial v_x}{\partial n} \right). \end{aligned} \quad (5.110)$$

Преобразуем (5.109) по теореме о среднем с учетом последнего выражения:

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot w \cdot \int_{\chi_0} \tau_{nx} d\chi_0 &= \Delta x \cdot w \cdot \int_{\chi_0} \mu \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial v_x}{\partial n} \right) d\chi_0 = \\ &= \Delta x \cdot w \cdot \mu_{\chi,0} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial v_x}{\partial n} \right) \cdot \chi_0, \end{aligned} \quad (5.111)$$

где $\mu_{\chi,0}$ – среднее по линии χ_0 значение вязкости жидкости; $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ и $\frac{\partial v_x}{\partial n}$ – средние по линии χ_0 значения производных $\partial v_x / \partial x$ и $\partial v_x / \partial n$.

Учитывая предположения о слабом наклоне свободной поверхности по отношению к горизонтальной плоскости и о том, что скорость течения жидкости на свободной поверхности близка к скорости ядра потока, получаем:

$$n_x \approx 0; \quad (5.112)$$

$$\partial v_x / \partial n \approx 0. \quad (5.113)$$

Подставляя (5.112), (5.113) в (5.111) и учитывая (5.109), имеем:

$$\iint_{\omega_0} \bar{\tau}_n \cdot \bar{v} d\omega \approx 0. \quad (5.114)$$

Таким образом, для третьего слагаемого (5.102) можно записать:

$$\iint_S \bar{\tau}_n \cdot \bar{v} dS = 0. \quad (5.115)$$

Четвертое слагаемое. Используя (5.26), получим:

$$\iiint_V \bar{v} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}) dV \approx w_c \cdot \bar{\mathbf{i}} \cdot \iint_S \bar{\tau}_n dS = -\Delta x \cdot g \cdot \rho \cdot \left(f \cdot \frac{|w|^3}{C^2 \cdot r} \right)_c. \quad (5.116)$$

Пятое слагаемое.

$$\iiint_V \widehat{Q} dV = \Delta x \cdot \iint_{f_c} \widehat{Q} df = \Delta x \cdot (Q \cdot f)_c, \quad (5.117)$$

где Q – среднее по сечению значение удельной (на единицу объема) мощности источников тепла.

Шестое слагаемое.

$$\iint_S \vec{W} \cdot \vec{n} dS = \left(\iint_{f'} W_x df - \iint_f W_x df \right) + \iint_{\omega} W_n d\omega, \quad (5.118)$$

где ω – боковая поверхность (состоящая из смоченной поверхности русла и свободной поверхности жидкости) (см. выше). Для первых двух слагаемых, стоящих в правой части (5.118), учитывая закон Фурье $\vec{W} = -\hat{k} \cdot \nabla \hat{T}$, получим:

$$\iint_{f'} W_x df - \iint_f W_x df = \Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_{f_c} W_x df = -\Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_{f_c} \hat{k} \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} df = -\Delta x \cdot k \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right)_c. \quad (5.119a)$$

Третье слагаемое из (5.118) запишем в следующем виде:

$$\iint_{\omega} W_n d\omega = \int \left(\int_{\Delta x} W_n d\chi \right) dx = \Delta x \cdot \int_{\chi_c} W_n d\chi, \quad (5.119б)$$

где χ – периметр контура поперечного сечения (см. выше). Введем функции $\overline{\Phi}_1(T, T_{амм})$ и $\overline{\Phi}_2(T, T_R)$:

$$\int_{\chi} W_n d\chi = \overline{\Phi}_1(T, T_{амм}) + \overline{\Phi}_2(T, T_R), \quad (5.119в)$$

где функция $\overline{\Phi}_1(T, T_{амм})$ определяется законом теплоотдачи от жидкости к атмосфере и выражает удельный (на единицу длины) суммарный тепловой поток через свободную поверхность канала ($\overline{\Phi}_1(T, T_{амм}) > 0$ – отвод тепла); $T_{амм}$ – температура атмосферного воздуха; функция $\overline{\Phi}_2(T, T_R)$ определяется законом теплоотдачи от жидкости к стенкам канала ($\overline{\Phi}_2(T, T_R) > 0$ – отвод тепла); T_R – температура стенок канала. Тогда шестое слагаемое в (5.102) можно записать в виде:

$$\iint_S W_n dS = \Delta x \cdot \left(\overline{\Phi}_1(T, T_{амм}) + \overline{\Phi}_2(T, T_R) - k \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right)_c \right). \quad (5.120)$$

Седьмое слагаемое.

$$\rho \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \iint_S \hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS \approx \rho \cdot \Delta x \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_c.$$

Восьмое слагаемое.

$$\begin{aligned}
c_p \cdot \iiint_V \hat{J}_V \cdot \hat{T}_{SOURCE} dV &= c_p \cdot \int_{\Delta x} \left(\iint_f \hat{J}_V \cdot \hat{T}_{SOURCE} df \right) dx = \\
&= \Delta x \cdot c_p \cdot \iint_{f_c} \hat{J}_V \cdot \hat{T}_{SOURCE} df = \Delta x \cdot c_p \cdot (J_V \cdot T_{SOURCE} \cdot f)_c = \Delta x \cdot c_p \cdot \rho \cdot (Q_L \cdot T_{SOURCE})_c,
\end{aligned} \quad (5.121)$$

где T_{SOURCE} – среднее по сечению значение температуры вливающейся в канал жидкости.

Подставим полученные выражения в (5.102), поделим уравнение на Δx и устремим Δx к нулю, опуская в уравнении индексы «с». Искомое уравнение переноса тепла для жидкости, транспортируемой по неразветвленному участку канала с открытым руслом, с учетом теплообмена с окружающей средой и дополнительного слива жидкости в канал, примет вид:

$$\begin{aligned}
\rho \cdot c_p \cdot \left[\frac{\partial(T \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(T \cdot f \cdot w)}{\partial x} \right] &= -\bar{\Phi}_1(T, T_{amm}) - \bar{\Phi}_2(T, T_R) + \frac{\rho \cdot g \cdot f \cdot |w|^3}{C^2 \cdot r} + \\
&+ k \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Q \cdot f + \rho \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) + c_p \cdot \rho \cdot Q_L \cdot T_{SOURCE}.
\end{aligned} \quad (5.122)$$

Если $Q_L < 0$, то это соответствует случаю слива (отбора) из канала жидкости. При $Q_L < 0$ полагается, что $T_{SOURCE} = T$.

Теперь рассмотрим подход к моделированию переноса тепла при течении жидкости через сочленение каналов с открытым руслом. Для произвольного объема сплошной среды V , ограниченного замкнутой поверхностью S , уравнение переноса тепла в интегральной форме имеет вид (5.102). Здесь будем считать, что применительно к объему сочленения источники дополнительного слива жидкости отсутствуют.

При построении уравнения переноса тепла применительно к условиям течения жидкой смеси через сочленение каналов с открытым руслом, будем считать температуру T непрерывной по времени и пространству функцией (непрерывной по времени будет считаться также функция скорости).

По аналогии с рассуждениями при построении уравнений неразрывности компонент, можно утверждать, что свойство непрерывности по пространству функции T возможно при учете диффузии и/или теплопроводности. Будем предполагать, что в примыкающих к сочленению каналах течение таково, что допускается осреднение температуры по сечению канала. Также предполагается, что в каждый момент времени температура одинакова во всем объеме $^{(0)}V$.

Рассмотрим уравнение (5.102) для объема $^{(0)}V$. С учетом исчезающей малости данного объема и допущения об отсутствии внутри него вязких напряжений уравнение (5.102) можно преобразовать к виду:

$$\rho \cdot c_p \cdot \iint_{^{(0)}S} \hat{T} \cdot \nu_n dS = - \iint_{^{(0)}S} W_n dS + \sum_{m=1}^{N_s} \iint_{^{(0)}S} \hat{\rho} \cdot \hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS. \quad (5.123)$$

Проанализируем левую часть (5.123). С учетом допущения об исчезающей малости поверхности $^{(0)}\omega$, предположения о постоянстве температуры внутри объема $^{(0)}V$ и соотношения (5.48), имеем:

$$\begin{aligned} \rho \cdot c_p \cdot \iint_{(0)S} \hat{T} \cdot v_n dS &= \rho \cdot c_p \cdot \sum_{n=1}^N \iint_{[(n)f_L]} \hat{T} \cdot v_n df = \rho \cdot c_p \cdot \sum_{n=1}^N \iint_{[(n)f_L]} \hat{T} \cdot v_x \cdot (\vec{n} \cdot {}^{(n)}\vec{i}) df = \\ &= -\rho \cdot c_p \cdot T_L \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}w_L \cdot {}^{(n)}f_L \cdot {}^{(n)}s = 0. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Учитывая допущение об исчезающей малости поверхности ${}^{(0)}\omega$ и закон Фурье, получим:

$$-\iint_{(0)S} W_n dS = -\sum_{n=1}^N \iint_{[(n)f]} W_x \cdot ({}^{(0)}\vec{n} \cdot {}^{(n)}\vec{i}) df = \sum_{n=1}^N \iint_{[(n)f]} \hat{k} \cdot \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \cdot ({}^{(0)}\vec{n} \cdot {}^{(n)}\vec{i}) df = -k \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}s \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_L \cdot {}^{(n)}f_L. \quad (5.125a)$$

Аналогично, с учетом (5.67) имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N_S} \iint_{[(0)S]} \hat{\rho} \cdot \hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS &= \sum_{m=1}^{N_S} \left[\sum_{n=1}^N \iint_{[(n)f_L]} \hat{\rho} \cdot \hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} df \right] = \\ &= \rho \cdot \sum_{m=1}^{N_S} \left[(\varepsilon_m)_L \cdot (D_m)_L \cdot \sum_{n=1}^N \left(-{}^{(n)}f_L \cdot \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_L \cdot {}^{(n)}s \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.125b)$$

Здесь используется предположение о постоянстве параметров $\hat{\varepsilon}_m$ и $\hat{D}_m$ по объему ${}^{(0)}V$. Подставляя (5.125) и (5.124) в (5.123), получаем следующее уравнение переноса тепла для объема ${}^{(0)}V$:

$$\iint_{(0)S} W_n dS = 0 \quad (5.126a)$$

или

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}s \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot {}^{(n)}f = 0, \quad (5.126b)$$

которое можно трактовать как закон Кирхгофа для тепловых потоков за счет теплопроводности.

Рассмотрим уравнение (5.102) для объема V .

Первое и второе слагаемые. Эти слагаемые можно представить в виде суммы аналогичных слагаемых для объемов ${}^{(n)}V$, $n = \overline{0, N}$:

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(\iiint_V \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} dV + \iint_S \hat{T} \cdot v_n dS \right) = \rho \cdot c_p \cdot \sum_{n=0}^N \left(\iiint_{{}^{(n)}V} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} dV + \iint_{{}^{(n)}S} \hat{T} \cdot v_n dS \right). \quad (5.127)$$

По аналогии с представленными выше выкладками можно показать, что для объемов ${}^{(n)}V$, $n = \overline{1, N}$ (участков каналов, примыкающих к сочленению) рассматриваемые слагаемые можно преобразовать к виду:

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(\iiint_{{}^{(n)}V} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} dV + \iint_{{}^{(n)}S} \hat{T} \cdot v_n dS \right) = {}^{(n)}\Delta X \cdot \rho \cdot c_p \cdot \left[\frac{\partial (T \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial (T \cdot f \cdot w)}{\partial x} \right]_c \quad (5.128a)$$

или (с учетом формулы (5.42))

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(\iiint_V \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} dV + \iint_S \hat{T} \cdot \nu_n dS \right) = {}^{(n)}\gamma \cdot \Delta \bar{X} \cdot \rho \cdot c_p \cdot \left[\frac{\partial(T \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(T \cdot f \cdot w)}{\partial x} \right]_c. \quad (5.1286)$$

Подставляя (5.124) и (5.1286) в (5.127), получаем:

$$\rho \cdot c_p \cdot \left(\iiint_V \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} dV + \iint_S \hat{T} \cdot \nu_n dS \right) = \rho \cdot c_p \cdot \Delta \bar{X} \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\gamma \cdot \left[\frac{\partial(T \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(T \cdot f \cdot w)}{\partial x} \right]_c. \quad (5.129)$$

Третье и четвертое слагаемые. Полагая внутри объема ${}^{(0)}V$ тензор вязких напряжений τ равным нулю, по аналогии с (5.115) и (5.116) можно показать, что

$$\begin{aligned} \iint_S \bar{\tau}_n \cdot \bar{\nu} dS - \iiint_V \bar{\nu} \cdot (\bar{\nabla} \cdot \tau) dV = \\ = \rho \cdot g \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\Delta X \cdot \left[\frac{{}^{(n)}f \cdot {}^{(n)}|w|^3}{{}^{(n)}C^2 \cdot {}^{(n)}r} \right]_c = \rho \cdot g \cdot \Delta \bar{X} \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\gamma \cdot \left[\frac{{}^{(n)}f \cdot {}^{(n)}|w|^3}{{}^{(n)}C^2 \cdot {}^{(n)}r} \right]_c. \end{aligned} \quad (5.130)$$

Пятое слагаемое. Считая, что внутри объема ${}^{(0)}V$ присутствуют источники тепла, имеем:

$$\iiint_V \hat{Q} dV = \sum_{n=1}^N \left({}^{(n)}\Delta X \cdot \iint_{{}^{(n)}f_c} \hat{Q} df \right) = \Delta \bar{X} \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\gamma \cdot (Q \cdot f)_c. \quad (5.131)$$

Шестое слагаемое.

$$\iint_S W_n dS = \iint_{{}^{(0)}S} W_n dS + \sum_{n=1}^N \iint_{{}^{(n)}S} W_n dS. \quad (5.132)$$

Первое слагаемое в правой части (5.132), согласно (5.126а), равно нулю. Используя приведенные выше преобразования, для слагаемых суммы (5.132) можно получить:

$$\iint_{{}^{(n)}S} W_n dS = {}^{(n)}\Delta X \cdot \left[\bar{\Phi}_1(T, T_{амм}) + \bar{\Phi}_2(T, T_R) - k \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_c, \quad (5.133)$$

где функция ${}^{(n)}\bar{\Phi}_1(T, T_{амм})$ определяется законом теплоотдачи от жидкости n -го канала к атмосфере и выражает удельный (на единицу длины) суммарный тепловой поток через свободную поверхность канала (${}^{(n)}\bar{\Phi}_1(T, T_{амм}) > 0$ – отвод тепла); функция ${}^{(n)}\bar{\Phi}_2(T, T_R)$ определяется законом теплоотдачи от жидкости n -го канала к стенкам канала (${}^{(n)}\bar{\Phi}_2(T, T_R) > 0$ – отвод тепла).

Подставляя (5.133) и (5.126) в (5.132), имеем:

$$\begin{aligned} \iint_S W_n dS &= \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\Delta X \cdot \left[\bar{\Phi}_1(T, T_{амм}) + \bar{\Phi}_2(T, T_R) - k \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_c = \\ &= \Delta \bar{X} \cdot \sum_{n=1}^N {}^{(n)}\gamma \cdot \left[\bar{\Phi}_1(T, T_{амм}) + \bar{\Phi}_2(T, T_R) - k \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_c. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Седьмое слагаемое (см. рис. 2.11).

$$\rho \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \iint_S \hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS = -\rho \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \sum_{n=1}^N \left[\left(f \cdot \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_M \cdot s \right].$$

Если запись закона Кирхгофа для диффузионных потоков (5.67) просуммировать по $m = \overline{1, N_s}$ с весовыми коэффициентами $(\rho \cdot \varepsilon_m \cdot D_m)_L$, оно будет выглядеть следующим образом (предполагается, что D_m и ε_m одинаковы во всем объеме $^{(0)}V$):

$$\rho \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \sum_{n=1}^N \left[\left(f \cdot \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_L \cdot s \right] = 0.$$

Сложим седьмое слагаемое с левой частью последнего уравнения:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \iint_S \hat{\varepsilon}_m \cdot \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS &= \rho \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \left\{ \sum_{n=1}^N \left[\left[\left(f \cdot \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_L - \left(f \cdot \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_M \right] \cdot s \right] \right\} = \\ &= \rho \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \sum_{n=1}^N \left[\frac{\left[\left(f \cdot \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_L - \left(f \cdot \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_M \right] \cdot s \cdot \Delta X}{(x_L - x_M) \cdot s} \right] = \\ &= \rho \cdot \Delta \bar{X} \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \sum_{n=1}^N \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_c. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в (5.102), поделим уравнение на $\Delta \bar{X}$ и устремим $\Delta \bar{X}$ к нулю, опуская при этом в уравнении индексы «с». Таким образом, искомое уравнение переноса тепла примет вид:

$$\begin{aligned} \rho \cdot c_p \cdot \sum_{n=1}^N \gamma \cdot \left(\frac{\partial (T \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial (T \cdot f \cdot w)}{\partial x} \right) &= - \sum_{n=1}^N \gamma \cdot \left({}^{(n)}\bar{\Phi}_1(T, T_{amm}) + {}^{(n)}\bar{\Phi}_2(T, T_R) \right) + \\ &+ k \cdot \sum_{n=1}^N \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho \cdot g \cdot \sum_{n=1}^N \gamma \cdot \frac{{}^{(n)}f \cdot {}^{(n)}|w|^3}{{}^{(n)}C^2 \cdot {}^{(n)}r} + \sum_{n=1}^N \gamma \cdot (Q \cdot f) + \\ &+ \rho \cdot \sum_{m=1}^{N_s} \sum_{n=1}^N \left[\gamma \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(f \cdot \varepsilon_m \cdot D_m \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.135a)$$

Рассмотрим теперь уравнение энергии при условии отсутствия по потоку смеси процессов диффузии и теплопроводности. В этом случае при переходе через узел сочленения температура может иметь разрывный характер. По аналогии с (5.73в) рассматриваемое уравнение будет иметь вид:

$${}^{(\xi)}T = - \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)}(T \cdot w \cdot f \cdot s)}{\sum_{k \in \mathbb{C}_{OUT}} {}^{(k)}(w \cdot s \cdot f)} = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)}(T \cdot |w| \cdot f)}{\sum_{k \in \mathbb{C}_{OUT}} {}^{(k)}(|w| \cdot f)} = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)}(T \cdot |w| \cdot f)}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)}(|w| \cdot f)}, \quad \xi \in \mathbb{C}_{OUT}. \quad (5.135b)$$

$$\rho \cdot c_p \cdot \left[\frac{\partial(T \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(T \cdot f \cdot w)}{\partial x} \right] = - {}^{(n)}\overline{\Phi}_1(T, T_{амм}) - {}^{(n)}\overline{\Phi}_2(T, T_R) + \left[\frac{\rho \cdot g \cdot f \cdot |w|^3}{C^2 \cdot r} \right] + {}^{(n)}[Q \cdot f],$$

$$n \in \mathbb{C}_{IN}.$$
(5.135в)

Для получения однозначного решения задачи переноса тепла систему уравнений (5.122), (5.1266) и (5.135) необходимо дополнить краевыми условиями. В качестве начальных условий предлагается задание функции:

$$T(x, t_0) = T_0(x). \quad (5.136a)$$

На границах рассчитываемого участка канала могут задаваться следующие виды ГУ:

$$T(x_b, t) = T_b(t); \quad (5.136б)$$

$$\frac{\partial T(x_b, t)}{\partial x} = \delta T_b(t). \quad (5.136в)$$

Граничные условия необходимо задавать на границах участков каналов, являющихся границами всей разветвленной системы каналов. Граничные условия (5.136б) предпочтительней задавать на «входных» границах системы каналов (см. выше). При отсутствии в модели диффузии и теплопроводности, на выходных границах системы каналов ГУ не задаются.

5.5. Построение разностной модели разветвленных каналов с открытым руслом

Рассмотрим построение разностной схемы для численного анализа течения жидкой смеси (раствора) по разветвленным системам каналов с открытым руслом на примере математической модели (5.38, 5.74). Разностные аналоги исходных дифференциальных уравнений в частных производных будем строить интегро-интерполяционным методом А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [70, 94, 95]¹. При этом для описания конвективных производных будем использовать разности против потока [92].

Введем равномерную по пространству и неравномерную по времени пространственно-временную сетку $\{x_i, t_j\}$ (рис. 5.6), где x_i и t_j – координаты узла сетки с номером i по пространству и j – по времени; $i, j \in Z$, Z – множество целых чисел.

Введем дополнительные, так называемые, «полуцелые» узлы разностной сетки (см. рис. 5.6):

¹ Формально используемый метод построения разностных уравнений в значительной степени соответствует интегральному методу [69, 92]. Однако, поскольку в качестве базовых дифференциальных уравнений здесь берутся дивергентные дифференциальные выражения основных законов сохранения (для участка канала длиной dx), при этом при аппроксимации дивергентных дифференциальных производных будут использованы дивергентные разностные аналоги, обеспечивающие равенство потоков на общих границах соседних ячеек, применяемый метод следует считать интегро-интерполяционным [70, 94]. Иначе говоря, при построении разностной схемы в нашем случае адекватно описываются все интересующие физические явления для рассматриваемой разностной ячейки (т.е. выполнены интегральные законы сохранения). Обобщая изложенное для произвольного участка канала, являющегося объединением соседних разностных ячеек, можно утверждать, что сумма любого разностного уравнения (например, разностного уравнения неразрывности), умноженного на произведение $(\Delta x \cdot \Delta t)$ для данных ячеек будет давать соответствующий интегральный закон сохранения применительно к рассматриваемому участку канала.

$$x_{i+0,5} = 0,5 \cdot (x_i + x_{i+1}). \quad (5.137)$$

По аналогии узлы $\{x_i\}$ назовем «целыми» узлами. Выделим контрольный (конечный) объем (см. рис. 5.6), ограниченный горизонтальными линиями $t(x) = t_j$, $t(x) = t_{j+1}$ и вертикальными линиями $x(t) = x_{i-0,5}$, $x(t) = x_{i+0,5}$. Обозначим

$$\Delta t = t_{j+1} - t_j; \quad \Delta x = x_{i+0,5} - x_{i-0,5}. \quad (5.138)$$

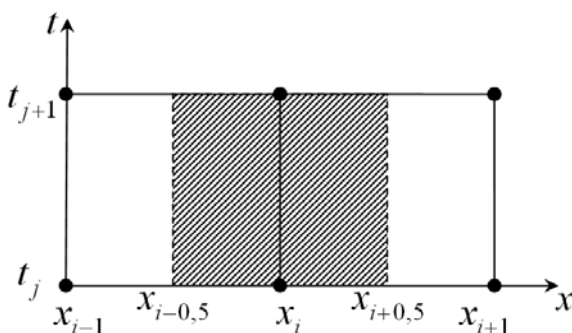


Рис. 5.6. Пространственно-временная сетка (фрагмент)

Сеточные функции $y = y(x, t)$ будут обозначаться:

$$y_i^j = y(x_i, t^j); \quad y_i = y(x_i, t); \quad y^j = y(x, t^j). \quad (5.139a)$$

Приведем используемые далее обозначения сокращенной записи разностных схем:

$$y = y_i^j; \quad t = t^j; \quad x = x_i; \quad \hat{y} = y_i^{j+1}; \quad y(+1) = y_{i+1}^j; \quad y(-1) = y_{i-1}^j;$$

$$y_{<-0,5>} = 0,5 \cdot (y + y(-1)); \quad y_{<0,5>} = y_{<-0,5>}(+1) = 0,5 \cdot (y(+1) + y);$$

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\Delta t}; \quad y_x = \frac{y(+1) - y}{\Delta x};$$

$$y_{<-0,5[up]>} = \begin{cases} y_{i-1}, & \text{если } w_{<-0,5>} > 0; \\ y_i, & \text{если } w_{<-0,5>} < 0; \\ 0,5 \cdot (y_{i-1} + y_i) & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$y_{<0,5[up]>} = y_{<-0,5[up]>}(+1) = \begin{cases} y_i, & \text{если } w_{<0,5>} > 0; \\ y_{i+1}, & \text{если } w_{<0,5>} < 0; \\ 0,5 \cdot (y_i + y_{i+1}) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.139b)$$

Не загромождая изложение материала рутинными операциями, покажем принцип получения разностных соотношений на примере уравнения (5.38б). Проинтегрируем данное уравнение по ячейке пространственно-временной сетки $[\Delta x \times \Delta t]$:

$$\frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \iint_{\Delta x \cdot \Delta t} \frac{\partial(f \cdot Y_m)}{\partial t} dt dx + \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \iint_{\Delta x \cdot \Delta t} \frac{\partial(w \cdot f \cdot Y_m)}{\partial x} dt dx - \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \iint_{\Delta x \cdot \Delta t} \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) dt dx = 0. \quad (5.140)$$

Рассмотрим каждое слагаемое уравнения (5.140).

Первое слагаемое.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int \int \frac{\partial(f \cdot Y_m)}{\partial t} dt dx &= \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \int f \cdot Y_m dx \right) dt = \\ &= \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{f(t) \cdot Y_m(t)} \cdot \int dx \right] \right) dt \approx \frac{1}{\Delta t} \cdot \int \left(\frac{\partial}{\partial t} [f_i(t) \cdot (Y_m)_i(t)] \right) dt = \quad (5.141) \\ &= \frac{f_i^{j+1} \cdot (Y_m)_i^{j+1} - f_i^j \cdot (Y_m)_i^j}{\Delta t} \rightarrow (f \cdot Y_m)_t^+, \end{aligned}$$

где $\overline{f(t) \cdot Y_m(t)}$ – некоторое среднее значение произведения на промежутке Δx . Будем относить его к i -му узлу.

Второе слагаемое. Поскольку данное слагаемое является конвективным, для его аппроксимации воспользуемся разностью против потока [92].

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int \int \frac{\partial(w \cdot f \cdot Y_m)}{\partial x} dt dx &= \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int \left(\int \frac{\partial(w \cdot f \cdot Y_m)}{\partial x} dx \right) dt = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \int \frac{(w \cdot f \cdot Y_m)|_{x_{i+0,5}} - (w \cdot f \cdot Y_m)|_{x_{i-0,5}}}{\Delta x} dt = \frac{(w \cdot f \cdot Y_m)|_{x_{i+0,5}} - (w \cdot f \cdot Y_m)|_{x_{i-0,5}}}{\Delta x} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{(w \cdot f \cdot Y_m)|_{i+0,5}^{j+1} - (w \cdot f \cdot Y_m)|_{i-0,5}^{j+1}}{\Delta x} \rightarrow \frac{\frac{w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}}{2} \cdot (f \cdot Y_m)_{i+0,5[Up]}^{j+1} - \frac{w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}}{2} \cdot (f \cdot Y_m)_{i-0,5[Up]}^{j+1}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\widehat{w}_{<0,5>} \cdot (\widehat{f} \cdot \widehat{Y}_m)_{<0,5[Up]>} - \widehat{w}_{<-0,5>} \cdot (\widehat{f} \cdot \widehat{Y}_m)_{<-0,5[Up]>}}{\Delta x} = \left[\widehat{w}_{<-0,5>} \cdot (\widehat{f} \cdot \widehat{Y}_m)_{<-0,5[Up]>} \right]_x^+, \quad (5.142) \end{aligned}$$

где запись $y|_{x_{i\pm 0,5}}$ обозначает одномерную функцию $y(x_{i\pm 0,5}, t)$; черта над выражением (5.142) указывает на осреднение по отрезку Δt (будем относить данное значение к верхнему слою по времени); запись $y|_{i\pm 0,5}^{j+1}$ означает некоторую аппроксимацию функции y в точке $x_{i\pm 0,5}^{j+1}$; символ « $\rightarrow$ » указывает на этапность построения разностных соотношений. В (5.142) для аппроксимации параметров $(f \cdot Y_m)$ в «получелых» узлах разностной сетки использован принцип «против потока»:

$$y_{i+0,5[Up]}^{j+1} = \begin{cases} y_i^{j+1}, & \text{если } 0,5 \cdot (w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) > 0; \\ y_{i+1}^{j+1}, & \text{если } 0,5 \cdot (w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) < 0; \\ 0,5 \cdot (y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.143)$$

Третье слагаемое. Данное слагаемое описывает диффузионный процесс. Поскольку это слагаемое не является конвективным, для его аппроксимации воспользуемся центральной разностью [92]:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta x} \int_{\Delta t} \frac{\partial \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)}{\partial x} dt dx = \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \left(\int_{\Delta x} \frac{\partial \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)}{\partial x} dx \right) dt = \\
& = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{\Delta t} \frac{\left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i+0,5}} - \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i-0,5}}}{\Delta x} dt = \frac{\left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i+0,5}} - \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \Big|_{x_{i-0,5}}}{\Delta x} \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{\left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \Big|_{i+0,5}^{j+1} - \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \Big|_{i-0,5}^{j+1}}{\Delta x} \rightarrow \frac{\frac{(D_m \cdot f)_{i+1}^{j+1} + (D_m \cdot f)_i^{j+1}}{2} \cdot \frac{(Y_m)_{i+1}^{j+1} - (Y_m)_i^{j+1}}{x_{i+1} - x_i}}{\Delta x} - \\
& - \frac{\frac{(D_m \cdot f)_i^{j+1} + (D_m \cdot f)_{i-1}^{j+1}}{2} \cdot \frac{(Y_m)_i^{j+1} - (Y_m)_{i-1}^{j+1}}{x_i - x_{i-1}}}{\Delta x} = \frac{(\hat{D}_m \cdot \hat{f})_{<0,5>} (\hat{Y}_m)_x - (\hat{D}_m \cdot \hat{f})_{<-0,5>} (\hat{Y}_m(-1))_x}{\Delta x} = \\
& = \left((\hat{D}_m \cdot \hat{f})_{<-0,5>} (\hat{Y}_m(-1))_x \right)_x.
\end{aligned} \tag{5.144}$$

Таким образом, разностное уравнение неразрывности компонент можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{f_i^{j+1} \cdot (Y_m)_i^{j+1} - f_i^j \cdot (Y_m)_i^j}{\Delta t} + \frac{(w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_{i+0,5[U_p]}^{j+1} - (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_{i-0,5[U_p]}^{j+1}}{2 \cdot \Delta x} = \\
& = \frac{\left[(D_m \cdot f)_{i+1}^{j+1} + (D_m \cdot f)_i^{j+1} \right] \cdot \left[(Y_m)_{i+1}^{j+1} - (Y_m)_i^{j+1} \right]}{2 \cdot \Delta x^2} - \\
& - \frac{\left[(D_m \cdot f)_i^{j+1} + (D_m \cdot f)_{i-1}^{j+1} \right] \cdot \left[(Y_m)_i^{j+1} - (Y_m)_{i-1}^{j+1} \right]}{2 \cdot \Delta x^2}
\end{aligned} \tag{5.145a}$$

или (в сокращенной записи)

$$(f \cdot Y_m)_x + \left[\hat{w}_{<-0,5>} \cdot (\hat{f} \cdot \hat{Y}_m)_{<-0,5[U_p]>} \right]_x - \left[(\hat{D}_m \cdot \hat{f})_{<-0,5>} (\hat{Y}_m(-1))_x \right]_x = 0. \tag{5.145б}$$

Применяя аналогичный подход для построения разностных уравнений законов неразрывности и движения, можно получить следующую разностную схему для численного моделирования течения жидкой смеси по неразветвленному каналу с использованием *равномерной по пространству и неравномерной по времени* разностной сетки:

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{t_{j+1} - t_j} + \frac{(w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) \cdot f_{i+0,5[U_p]}^{j+1} - (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \cdot f_{i-0,5[U_p]}^{j+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = 0; \tag{5.146a}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{f_i^{j+1} \cdot (Y_m)_i^{j+1} - f_i^j \cdot (Y_m)_i^j}{t_{j+1} - t_j} + \frac{(w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_{i+0,5[Up]}^{j+1} - (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_{i-0,5[Up]}^{j+1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})} = \\
& = \frac{[(D_m \cdot f)_{i+1}^{j+1} + (D_m \cdot f)_i^{j+1}] \cdot [(Y_m)_{i+1}^{j+1} - (Y_m)_i^{j+1}]}{2 \cdot (x_{i+1} - x_i)^2} - \frac{[(D_m \cdot f)_i^{j+1} + (D_m \cdot f)_{i-1}^{j+1}] \cdot [(Y_m)_i^{j+1} - (Y_m)_{i-1}^{j+1}]}{2 \cdot (x_i - x_{i-1})^2},
\end{aligned} \tag{5.146б}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{f_i^{j+1} \cdot w_i^{j+1} - f_i^j \cdot w_i^j}{t_{j+1} - t_j} + \frac{(w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) \cdot (f \cdot w)_{i+0,5[Up]}^{j+1} - (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \cdot (f \cdot w)_{i-0,5[Up]}^{j+1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})} = \\
& = -g \cdot f_i^{j+1} \cdot \left(\frac{H_{i+1}^{j+1} - H_{i-1}^{j+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + \frac{w_i^{j+1} \cdot |w_i^{j+1}|}{(C_i^{j+1})^2 \cdot r_i^{j+1}} \right);
\end{aligned} \tag{5.146в}$$

$$f_i^j = f_i(H_i^j), \text{ для любых } i, j \in Z; \tag{5.146г}$$

$$C_i^j = C(r_i^j, n_{\text{ш}}), \text{ для любых } i, j \in Z; \tag{5.146д}$$

$$r_i^j = f_i(H_i^j) / \chi_i(H_i^j), \text{ для любых } i, j \in Z, \tag{5.146е}$$

где $f_i(H)$, $\chi_i(H)$ – зависимости площади поперечного сечения и смоченного периметра от высоты свободной поверхности для i -го узла пространственной сетки. Обратим внимание на то, что в уравнениях (5.146г) и (5.146е) отсутствует зависимость f_i и χ_i от параметра B (см. (5.38г), (5.38е)). Это объясняется тем, что функции $f = f_i(H)$ и $\chi = \chi_i(H)$ соответствуют конкретному сечению канала (имеющему координату x_i).

В сокращенной форме записи (5.146) выглядит следующим образом:

$$f_t + [\hat{w}_{<-0,5>} \cdot \hat{f}_{<-0,5[Up]>}]_x = 0; \tag{5.147а}$$

$$(f \cdot Y_m)_t + [\hat{w}_{<-0,5>} \cdot (\hat{f} \cdot \hat{Y}_m)_{<-0,5[Up]>}]_x - \left[(\hat{D}_m \cdot \hat{f})_{<-0,5>} (\hat{Y}_m(-1))_x \right]_x = 0; \tag{5.147б}$$

$$(f \cdot w)_t + [\hat{w}_{<-0,5>} \cdot (\hat{f} \cdot \hat{w})_{<-0,5[Up]>}]_x = -g \cdot \hat{f} \cdot \left[(\hat{H}_{<-0,5>})_x + \frac{\hat{w} \cdot |\hat{w}|}{\hat{C}^2 \cdot \hat{r}} \right]; \tag{5.147в}$$

$$f = f(H); \tag{5.147г}$$

$$C = C(r, n_{\text{ш}}); \tag{5.147д}$$

$$r = f(H) / \chi(H). \tag{5.147е}$$

Здесь, при использовании сокращенной записи, $f(H)$ (см. (5.147г, 5.147е)) соответствует не $f_i^j(H_i^j)$, а $f_i(H_i^j)$. Аналогично, $\chi(H)$ (см. (5.147е)) соответствует

развернутой записи $\chi_i(H_i^j)$, а не $\chi_i^j(H_i^j)$. Для сокращенной записи $C(r, n_{\text{ш}})$ ее развернутый аналог имеет вид $C(r_i^j, n_{\text{ш}})$.

Исследуем аппроксимацию (5.147) на неравномерной пространственно-временной сетке (путем разложения в ряд Тейлора) на примере нескольких слагаемых.

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta t_{j+1}} = \frac{f_i^{j+1} - \left(f_i^{j+1} - \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_i^{j+1} \cdot \Delta t_{j+1} + O(\Delta t_{j+1}^2) \right)}{\Delta t_{j+1}} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_i^{j+1} + O(\Delta t_{j+1}), \quad (5.148)$$

где $\Delta t_{j+1} = t_{j+1} - t_j$; $O(\psi^n)$ – погрешность аппроксимации n -го порядка по произвольной переменной ψ . Первый порядок аппроксимации наблюдается у всех используемых разностных производных по времени.

Введем обозначение для неравномерной пространственной сетки:

$$h_i = x_i - x_{i-1}; \quad \alpha_i = h_{i+1}/h_i. \quad (5.149)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{H_{i+1}^{j+1} - H_{i-1}^{j+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} &= \frac{\left(H_i^{j+1} + \alpha_i \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_i^{j+1} + \frac{(\alpha_i \cdot h_i)^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_i^{j+1} + O(h_i^3) \right)}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} - \\ &- \frac{\left(H_i^{j+1} - h_i \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_i^{j+1} + \frac{h_i^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_i^{j+1} + O(h_i^3) \right)}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_i^{j+1} + \frac{(\alpha_i - 1) \cdot h_i}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2). \end{aligned} \quad (5.150)$$

Из (5.150) видно, что на неравномерной пространственной сетке рассматриваемое слагаемое аппроксимирует производную $\partial H / \partial x$ с первым порядком аппроксимации, а на равномерной пространственной сетке – со вторым порядком аппроксимации. Это справедливо для всех разностных производных, построенных с использованием центральных разностей.

Рассмотрим конвективное слагаемое уравнения (5.146а), полагая для однозначности (но не теряя общности рассуждений), что скорости течения положительны:

$$\begin{aligned} \frac{(w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) \cdot f_{i+0,5[up]}^{j+1} - (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \cdot f_{i-0,5[up]}^{j+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} &= \frac{(w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) \cdot f_i^{j+1} - (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \cdot f_{i-1}^{j+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \\ &= \frac{\left[w_i^{j+1} + \left(w_i^{j+1} + \alpha_i \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2) \right) \right] \cdot f_i^{j+1}}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} - \\ &- \frac{\left[w_i^{j+1} + \left(w_i^{j+1} - h_i \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2) \right) \right] \cdot \left[f_i^{j+1} - h_i \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2) \right]}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \cdot w_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} + \alpha_i \cdot h_i \cdot f_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2)}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} - \\
& - \frac{2 \cdot w_i^{j+1} \cdot f_i^{j+1} - 2 \cdot w_i^{j+1} \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^{j+1} - h_i \cdot f_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2)}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} = \\
& = \frac{\alpha_i \cdot h_i \cdot f_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + 2 \cdot w_i^{j+1} \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^{j+1} + h_i \cdot f_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2)}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} = \\
& = \frac{(1 + \alpha_i) \cdot h_i \cdot f_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + (1 + \alpha_i) \cdot h_i \cdot w_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^{j+1}}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} + \\
& + \frac{(1 - \alpha_i) \cdot h_i \cdot w_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2)}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} = \left(\frac{\partial (f \cdot w)}{\partial x} \right)_i^{j+1} + \frac{(1 - \alpha_i)}{(1 + \alpha_i)} \cdot w_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i).
\end{aligned} \tag{5.151}$$

Проведенный анализ показывает, что применяемые разности против потока имеют аппроксимацию исходных дифференциальных аналогов в общем случае только на равномерной пространственной сетке, т.е. при $\alpha_i = 1$.

Необходимо отметить, что в ряде случаев аппроксимация разности против потока может отсутствовать. Рассмотрим случаи разнонаправленности скоростей $w_{i-0,5}^{j+1}$ и $w_{i+0,5}^{j+1}$. Пусть первый вариант соответствует случаю $(w_{i-0,5}^{j+1} < 0; w_{i+0,5}^{j+1} > 0)$, второй вариант – $(w_{i-0,5}^{j+1} > 0; w_{i+0,5}^{j+1} < 0)$.

Для первого варианта можно записать:

$$\begin{aligned}
& \frac{(w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) \cdot f_{i+0,5[Up]}^{j+1} - (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \cdot f_{i-0,5[Up]}^{j+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{(w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) \cdot f_i^{j+1} - (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \cdot f_i^{j+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \\
& = \frac{[w_{i+1}^{j+1} - w_{i-1}^{j+1}] \cdot f_i^{j+1}}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} = \frac{\left[w_i^{j+1} + \alpha_i \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} - w_i^{j+1} + h_i \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2) \right] \cdot f_i^{j+1}}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} = \\
& = \frac{\left((1 + \alpha_i) \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2) \right) \cdot f_i^{j+1}}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} = f_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i) = \\
& = \left(\frac{\partial (w \cdot f)}{\partial x} \right)_i^{j+1} - w_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i) \neq \left(\frac{\partial (w \cdot f)}{\partial x} \right)_i^{j+1}.
\end{aligned}$$

Перейдем ко второму варианту:

$$\begin{aligned}
& \frac{(w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) \cdot f_{i+0,5[Up]}^{j+1} - (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \cdot f_{i-0,5[Up]}^{j+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{(w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) \cdot f_{i+1}^{j+1} - (w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}) \cdot f_{i-1}^{j+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \\
& = \frac{\left(2 \cdot w_i^{j+1} + \alpha_i \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2) \right) \cdot \left(f_i^{j+1} + \alpha_i \cdot h_i \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2) \right)}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} - \\
& - \frac{\left(2 \cdot w_i^{j+1} - h_i \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2) \right) \cdot \left(f_i^{j+1} - h_i \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2) \right)}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} = \\
& = \frac{2 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot h_i \cdot w_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^{j+1} + (1 + \alpha_i) \cdot h_i \cdot f_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i^2)}{(1 + \alpha_i) \cdot h_i} = \\
& = 2 \cdot w_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^{j+1} + f_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i) = \\
& = \left(\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial x} \right)_i^{j+1} + w_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^{j+1} + O(h_i) \neq \left(\frac{\partial(w \cdot f)}{\partial x} \right)_i^{j+1}.
\end{aligned}$$

Из представленных выкладок следует, что в обоих случаях разностный аналог не аппроксимирует исходного конвективного слагаемого. Несмотря на это, указанным недостатком здесь будем пренебрегать. Причина такого решения в следующем. Отсутствие аппроксимации наблюдается только для переходных процессов, когда меняется направление течения жидкости. Данное явление проявляется очень локально во времени и пространстве. Вытекающая из этого факта незначительность физического воздействия переходных процессов, описываемых рассматриваемыми слагаемыми, на общую картину течения дает возможность в первом приближении пренебречь их влиянием при моделировании.

Таким образом, показано, что используемая разностная схема с учетом принятого выше допущения имеет на неравномерной по времени и равномерной по пространству сетке первый порядок аппроксимации.

При численной реализации разностной схемы целесообразно использовать следующее пространственное разбиение канала (рис. 5.7).

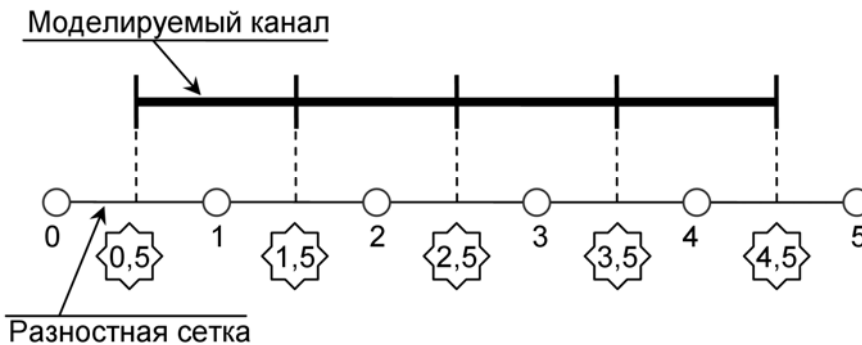


Рис. 5.7. Схематичное представление разностной сетки при использовании разностных схем с разностями против потока

Границы канала (граничные узлы) следует размещать в «полуцелых» узлах граничных ячеек разностной (расчетной) сетки. Внутренние узлы канала тогда будут соответствовать «полуцелым» узлам внутренних ячеек разностной сетки. На рис. 5.7 «целые» узлы разностной сетки обозначены кружками. Нумерация узлов приведена снизу изображения разностной сетки.

Пусть длина моделируемого канала равна L , количество ячеек, на которые следует «разбить» канал (для возможности численного решения системы дифференциальных уравнений в частных производных), равно $N_{cell, ch}$, $N_{cell, ch} \geq 1$. Тогда (см. рис. 5.7) длина пространственной ячейки (для равномерной пространственной сетки) будет равна:

$$\Delta x = L / N_{cell, ch}. \quad (5.152a)$$

Количество узлов сетки канала составляет:

$$N_{node, ch} = N_{cell, ch} + 1, \quad N_{node, ch} \geq 2; \quad (5.152б)$$

$$N_{cell, ch} = N_{node, ch} - 1. \quad (5.152в)$$

Количество ячеек и узлов разностной сетки можно рассчитать по формулам:

$$N_{cell, mesh} = N_{cell, ch} + 1 = N_{node, ch}, \quad N_{cell, mesh} \geq 2; \quad (5.152г)$$

$$N_{node, mesh} = N_{cell, ch} + 2 = N_{node, ch} + 1, \quad N_{node, mesh} \geq 3. \quad (5.152д)$$

Тогда координаты «целых» узлов разностной сетки можно найти по формуле:

$$x_0 = -0,5 \cdot \Delta x; \quad x_k = x_0 + \Delta x \cdot k, \quad k = \overline{1, N_{node, mesh} - 1}. \quad (5.153)$$

При визуализации результатов решения задачи рекомендуется использовать «полуцелые» узлы разностной сетки. При этом значения параметров следует вычислять по принципу разностей против потока, а именно:

$$w_{i+0,5}^{j+1} = 0,5 \cdot (w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}); \quad (5.154a)$$

$$\xi_{i+0,5[Up]}^{j+1} = \begin{cases} \xi_i^{j+1}, & \text{если } 0,5 \cdot (w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) > 0; \\ \xi_{i+1}^{j+1}, & \text{если } 0,5 \cdot (w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}) < 0; \\ 0,5 \cdot (\xi_i^{j+1} + \xi_{i+1}^{j+1}) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (5.154б)$$

где ξ – может быть параметрами f , Y_m , H и др.;

$$Q_{i+0,5}^{j+1} = w_{i+0,5}^{j+1} \cdot f_{i+0,5[Up]}^{j+1}, \quad (5.154в)$$

Q – объемный расход жидкости.

При численном анализе течения многокомпонентной жидкости по неразветвленному каналу для нахождения параметров во внутренних узлах разностной сетки можно применять разностную схему (5.146).

Обозначим граничный узел разностной сетки с помощью символа « L » (рис. 5.8). Соседний с ним внутренний узел – с помощью символа « M », символ « C » соответствует узлу разностной сетки, соседнему с узлом « M », но не совпадающему с узлом « L ». Рассмотрим способы реализации различных ГУ на введенной разностной сетке. **Представленные ниже способы направлены на обеспечение выполнения ГУ в узле « LM »**

(соответствует «получелому» узлу для граничной ячейки разностной сетки). *Это объясняется тем, что данный узел совпадает с границей канала* (см. рис. 5.7).

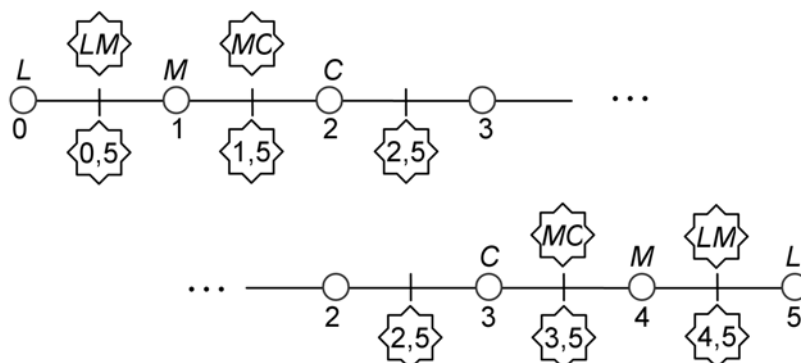


Рис. 5.8. Схематичное представление левой и правой границы разностной сетки для демонстрации расположения узлов с индексами «L», «M», «C», «LM» и «MC»

1. ГУ $w(x_b, t) = w_b(t)$ (см. (5.76б)). При задании в качестве ГУ скорости в виде зависимости $w_b(t)$ значение данного параметра в граничном узле разностной сетки следует находить, используя формулу (см. также (5.154а))¹:

$$w_{LM}^{j+1} = w_b(t^{j+1}) = 0,5 \cdot (w_L^{j+1} + w_M^{j+1}). \quad (5.155a)$$

Отсюда получаем (здесь w_M^{j+1} находится по формуле (5.146в)):

$$w_L^{j+1} = 2 \cdot w_b(t^{j+1}) - w_M^{j+1}. \quad (5.155b)$$

При задании этого ГУ площадь поперечного сечения и высоту свободной поверхности потока в узле «M» следует вычислять по разностной схеме (см. (5.146а, 5.146г)). В узле «L» высоту свободной поверхности предлагается находить с помощью экстраполяции:

$$y_L = 2 \cdot y_M - y_C, \quad (5.156)$$

где y принимает значение H ; площадь поперечного сечения определяется по (5.146г) при условии $i = L$.

2. ГУ $H(x_b, t) = H_b(t)$ (см. (5.76а)). Если *граница* является «входной», т.е. через нее жидкость «втекает» в канал, то значение высоты свободной поверхности в узле «L» следует задавать с использованием формулы (5.76а):

$$H_L^{j+1} = H_b(t^{j+1}). \quad (5.157a)$$

¹ Здесь и далее приведенное высказывание о том, что рассматриваемый параметр находится напрямую по некоторой формуле, не следует понимать буквально. Искомые параметры являются результатами решения системы нелинейных уравнений, поэтому прямого сопоставления конкретного параметра конкретному уравнению, как правило, не существует. В частности, воспользоваться формулой (5.155б) для вычисления w_L^{j+1} напрямую нельзя, т.к. изначально w_M^{j+1} неизвестно (при использовании итерационного метода решения значения w_M^{j+1} и w_L^{j+1} находятся одновременно).

Значения f_M^{j+1} и H_M^{j+1} в этом случае определяются по разностной схеме (см. (5.146а), (5.146г)). Величина f_L^{j+1} вычисляется по (5.146г), где $i = L$.

Если *граница* является «*выходной*», т.е. через нее жидкость «вытекает» из канала, то по формуле (5.76а) следует определять уже значение высоты свободной поверхности в узле «*M*»:

$$H_M^{j+1} = H_b(t^{j+1}). \quad (5.157б)$$

Параметр f_M^{j+1} находится по формуле (5.146г), где $i = M$. Значение H_L^{j+1} следует вычислять по экстраполяционной формуле (5.156), значение f_L^{j+1} – по (5.146г), где $i = L$.

Критерием того, что рассматриваемая граница является «входной», может служить выполнение условия:

$$0,5 \cdot (w_L^{j+1} + w_M^{j+1}) \cdot s = w_{LM}^{j+1} \cdot s \geq 0, \quad (5.158)$$

где

$$s = 1 \quad \text{для правой границы трубопровода, т.е. при } L = N_{node, mesh} - 1;$$

$$s = -1 \quad \text{для левой границы трубопровода, т.е. при } L = 0.$$

Отметим, что двойной способ вычисления параметров площади поперечного сечения и высоты свободной поверхности в узлах «*L*» и «*M*» определяется принципами построения разностной схемы против потока, а именно, данный способ обеспечивает равенство высоты свободной поверхности в узле «*LM*» значению $H_b(t)$ (при использовании для вычисления H_{LM} принципа «против потока» (5.143)).

Значение скорости в узле «*M*» следует вычислять по разностной схеме (см. (5.146в)). В узле «*L*» данный параметр предлагается определять по экстраполяционной формуле (5.156).

3. ГУ $f(x_b, t) = f_b(t)$ (см. (5.76д)). Если *граница* является «*входной*», то значение площади поперечного сечения в узле «*L*» следует задавать из формулы (5.76д):

$$f_L^{j+1} = f_b(t^{j+1}).$$

Значения f_M^{j+1} и H_M^{j+1} в этом случае определяются по разностной схеме (см. (5.146а), (5.146г)). Величина H_L^{j+1} вычисляется по (5.146г), где $i = L$.

Если *граница* является «*выходной*», то по формуле (5.76д) следует определять уже значение площади поперечного сечения в узле «*M*»:

$$f_M^{j+1} = f_b(t^{j+1}).$$

Параметр H_M^{j+1} находится по формуле (5.146г), где $i = M$. Значение H_L^{j+1} следует вычислять по экстраполяционной формуле (5.156), значение f_L^{j+1} – по (5.146г), где $i = L$.

Значение скорости в узле «*M*» следует вычислять по разностной схеме (см. (5.146в)). В узле «*L*» данный параметр предлагается определять по экстраполяционной формуле (5.156).

4. ГУ $Q(x_b, t) = Q_b(t) = w \cdot f$ (см. (5.76в)). Определение площади поперечного сече-

ния f и высоты свободной поверхности H в узлах « L » и « M » полностью аналогично ГУ $w(x_b, t) = w_b(t)$.

Значение скорости в узле « M » следует находить по разностной схеме (см. (5.146в)). Для нахождения скорости в граничном узле следует использовать формулу вычисления расхода, построенную по принципу «против потока» (см. уравнение неразрывности (5.146а)):

$$Q_b(t^{j+1}) = Q_{LM}^{j+1} = w_{LM}^{j+1} \cdot f_{LM[Up]}^{j+1} = \frac{w_L^{j+1} + w_M^{j+1}}{2} \cdot f_{LM[Up]}^{j+1}, \quad (5.159)$$

где $f_{LM[Up]}^{j+1}$ находится по принципу «против потока» (см. (5.143) для ячейки $[x_M, x_L]$):

$$f_{LM[Up]}^{j+1} = \begin{cases} f_M^{j+1}, & \text{если } 0,5 \cdot (w_L^{j+1} + w_M^{j+1}) \cdot s > 0; \\ f_L^{j+1}, & \text{если } 0,5 \cdot (w_L^{j+1} + w_M^{j+1}) \cdot s < 0; \\ 0,5 \cdot (f_M^{j+1} + f_L^{j+1}) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.160a)$$

Отсюда

$$w_L^{j+1} = \frac{2 \cdot Q_b(t^{j+1})}{f_{LM[Up]}^{j+1}} - w_M^{j+1}. \quad (5.160б)$$

5. ГУ $J(x_b, t) = J_b(t) = \rho \cdot w \cdot f$ (см. (5.76г)). Описание реализации данного ГУ полностью аналогично ГУ $Q(x_b, t) = Q_b(t) = w \cdot f$. Следует только заменить функцию $Q_b(t)$ на $J_b(t)/\rho$.

6. ГУ $Y_m(x_b, t) = Y_m^b(t)$, $m = \overline{1, N_s - 1}$ (см. (5.76е)). Способ задания массовой концентрации Y_m на границе канала полностью идентичен способу задания высоты свободной поверхности H при реализации ГУ $H(x_b, t) = H_b(t)$. В качестве разностного уравнения здесь выступает уравнение неразрывности компоненты (см. (5.146б)).

7. ГУ $\frac{\partial Y_m(x_b, t)}{\partial x} = \delta Y_m^b(t)$, $m = \overline{1, N_s - 1}$ (см. (5.76ж)). Значение массовой концентрации в узле « M » следует находить из уравнения неразрывности компоненты (см. (5.146б), (5.147б)). Для нахождения массовой концентрации в узле « L » следует использовать ГУ:

$$\delta Y_m^b(t^{j+1}) = \frac{\partial Y_m(x_b, t^{j+1})}{\partial x} = \frac{(Y_m)_L^{j+1} - (Y_m)_M^{j+1}}{x_L - x_M}.$$

Отсюда

$$(Y_m)_L^{j+1} = (Y_m)_M^{j+1} + \delta Y_m^b(t^{j+1}) \cdot (x_L - x_M). \quad (5.161)$$

Перейдем к описанию построения зависимостей площади поперечного сечения $f_i(H)$, смоченного периметра $\chi_i(H)$ и ширины свободной поверхности $B_i(H)$ от вы-

соты свободной поверхности для каждого узла пространственной расчетной сетки канала. Пусть по длине канала задана форма некоторых сечений русла (рис. 5.9). Данные сечения в общем случае могут не относиться к пространственным узлам расчетной сетки. Здесь предлагается для описания формы сечений использовать многоугольники. В этом случае каждое k -ое рассматриваемое сечение (назовем данные сечения «**базовыми**»), $k = \overline{1, K}$ ¹ будет характеризоваться координатой $x_{(k)}$ расположения по длине канала и набором координат вершин аппроксимирующего многоугольника $\left\{ \left(y_{(k)}^n, z_{(k)}^n \right), n = \overline{1, N_{(k)}} \right\}$, где $N_{(k)}$ – количество вершин многоугольника, аппроксимирующего k -ое базовое сечение; $z_{(k)}^n$ – координата соответствующей вершины многоугольника по оси Oz (вертикальной оси); $y_{(k)}^n$ – координата соответствующей вершины многоугольника по оси Oy (горизонтальная ось ортогонально направлению потока жидкости).

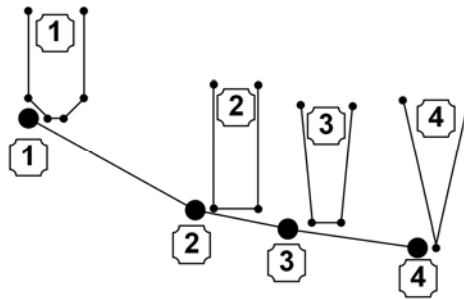


Рис. 5.9. Схематичное представление высотного профиля нижних точек дна канала, местоположения базовых сечений (жирные точки) и графический вид каждого базового сечения

Рассмотрим упрощенный способ построения зависимостей $f = f(H)$ для базовых сечений. Здесь предлагается для аппроксимации указанных зависимостей использовать табличное представление. Следует отметить, что указанный способ подходит только для многоугольников, являющихся «выпуклыми по горизонтали». Под этим термином понимаются многоугольники², у которых для любого горизонтального отрезка с вершинами, лежащими внутри многоугольника, все его (отрезка) точки находятся также внутри данного многоугольника. Пример многоугольника, не являющегося «выпуклым по горизонтали», представлен на рис. 5.10. Дополнительным условием, ограничивающим геометрию многоугольников, является:

$$z_{(k)}^n \neq z_{(k)}^{n+1}, n = \overline{1, N_{(k)} - 1}; z_{(k)}^1 \neq z_{(k)}^{N_{(k)}} \text{ за исключением, возможно, } n = p, \text{ где } p \in [1, N_{(k)} - 1]$$

$$\text{такого, что } z_{(k)}^p = \min_{n \in [1, N_{(k)}]} z_{(k)}^n, \left(z_{(k)}^p = z_{(k)}^{p+1}, p < N_{(k)} \right) \cup \left(z_{(k)}^p = z_{(k)}^{N_{(k)}}, p = 1 \right), \quad (5.162)$$

где $\cup$ – оператор объединения множеств. Условие (5.162) запрещает наличие горизонтальных отрезков, соединяющих две соседние вершины многоугольника, кроме, возможно, двух самых нижних вершин (соответствующих дну канала).

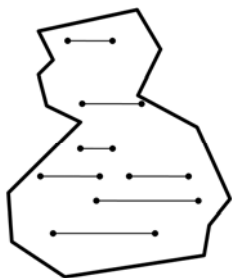
¹ Здесь K – количество базовых сечений.

² Здесь имеются в виду поперечные сечения каналов, описываемые многоугольниками.

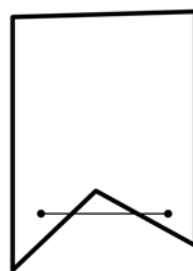
На первом этапе необходимо построить и отсортировать по возрастанию множество $Z = \{\tilde{z}^m, m = \overline{1, M}\}^1$ из значений всех координат вершин многоугольника по оси Oz (рис. 5.11). Количество M элементов множества Z всегда не больше числа $N_{(k)}$. Это объясняется тем, что данные координаты для некоторых вершин могут совпадать.

На втором этапе для полученных значений $\tilde{z}^m, m = \overline{1, M}$, следует определить y -ые координаты всех точек на ребрах многоугольника (дополнительно к вершинам многоугольника), имеющие данные координаты по оси Oz (на рис. 5.11 эти точки обозначены кружками). Характеристикой того, что ребро с вершинами (y^n, z^n) и (y^{n+1}, z^{n+1}) имеет внутреннюю точку с координатой $\tilde{z}^m$, является выполнение условия:

$$\begin{cases} z^n < \tilde{z}^m < z^{n+1}, & \text{если } z^n < z^{n+1}; \\ z^{n+1} < \tilde{z}^m < z^n, & \text{если } z^n > z^{n+1}. \end{cases} \quad (5.163)$$



а) «выпуклый по горизонтали»
многоугольник



б) «невыпуклый по горизонтали»
многоугольник

Рис. 5.10. Иллюстрация понятия «выпуклость многоугольников по горизонтали»

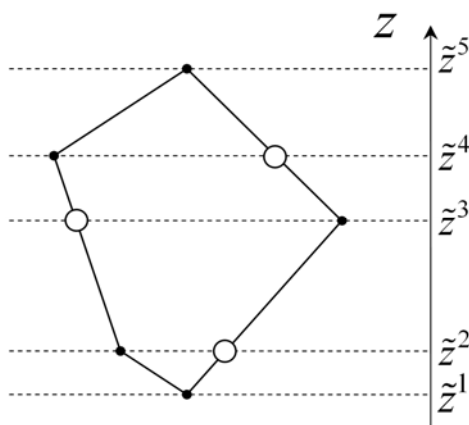


Рис. 5.11. Схематизация разделения многоугольника на ряд трапеций

¹ Нижний правый индекс (k) , характеризующий номер базового сечения, здесь опущен из-за не принципиальности его использования.

В этом случае y -ую координату данной точки можно вычислить по формуле:

$$y = y^n + \frac{y^{n+1} - y^n}{z^{n+1} - z^n} \cdot (\tilde{z}^m - z^n). \quad (5.164)$$

Введенные таким образом точки назовем **вспомогательными вершинами**. Как видно из рис. 5.11, с помощью вершин многоугольника и вспомогательных вершин рассматриваемый многоугольник «разделяется» на сегменты. Данные сегменты можно представить в виде трапеций с горизонтальными основаниями. Треугольники (см. рис. 5.11) также представимы в виде трапеций при дублировании соответствующей вершины¹.

Введенные в рассмотрение трапеции будем характеризовать координатами соответствующих вершин:

$$T^m = \left\{ (y^{[m],1}, z^{[m],1}), (y^{[m],2}, z^{[m],1}), (y^{[m],3}, z^{[m],2}), (y^{[m],4}, z^{[m],2}) \right\} \\ z^{[m],1} < z^{[m],2}, y^{[m],1} \leq y^{[m],2}, y^{[m],4} \leq y^{[m],3}; \text{ если } y^{[m],1} = y^{[m],2}, \text{ то } y^{[m],4} \neq y^{[m],3} \}, \\ m = \overline{1, M-1}, \quad (5.165)$$

где T^m – множество вершин, образующих m -ую трапецию; здесь в обычных скобках записаны координаты вершин m -ой трапеции. Характерное расположение вершин трапеции T^m и значения их координат представлены на рис. 5.12. Следует отметить, что первая пара узлов в записи (5.165) соответствует нижнему основанию m -ой трапеции, вторая пара – верхнему основанию. Неравенства в (5.165) определяют обход вершин трапеции против часовой стрелки, начиная с левой нижней вершины. С учетом записи (5.165) площадь каждой трапеции можно определить по формуле:

$$S^m = \frac{(y^{[m],2} - y^{[m],1}) + (y^{[m],3} - y^{[m],4})}{2} \cdot (z^{[m],2} - z^{[m],1}), \quad m = \overline{1, M-1}. \quad (5.166)$$

Исходя из приведенных рассуждений, зависимость $f = f(H)$ для рассматриваемого k -ого базового сечения можно представить в табличном виде:

$$H_{(k)}^1 = \tilde{z}_{(k)}^1, \quad f_{(k)}^1 = 0; \quad H_{(k)}^m = \tilde{z}_{(k)}^m, \quad f_{(k)}^m = \sum_{t=1}^{m-1} S_{(k)}^t, \quad m = \overline{2, M_{(k)}}. \quad (5.167a)$$

Аналогично можно построить таблицу для ширины потока $B = B(H)$ и смоченного периметра $\chi = \chi(H)$ применительно к набору аргументов (5.167a):

$$B_{(k)}^1 = y_{(k)}^{(1),2} - y_{(k)}^{(1),1}; \quad B_{(k)}^m = y_{(k)}^{[m-1],3} - y_{(k)}^{[m-1],4}, \quad m = \overline{2, M_{(k)}}; \quad (5.167b)$$

$$\chi_{(k)}^1 = B_{(k)}^1;$$

$$\chi_{(k)}^m = \chi_{(k)}^{m-1} + \sqrt{\left(y_{(k)}^{[m-1],4} - y_{(k)}^{[m-1],1}\right)^2 + \left(z_{(k)}^{[m-1],2} - z_{(k)}^{[m-1],1}\right)^2} + \\ + \sqrt{\left(y_{(k)}^{[m-1],3} - y_{(k)}^{[m-1],2}\right)^2 + \left(z_{(k)}^{[m-1],2} - z_{(k)}^{[m-1],1}\right)^2}, \quad m = \overline{2, M_{(k)}}. \quad (5.167b)$$

¹ При этом длина основания, границами которого являются указанные вершины, будет равна нулю.

При вычислении значений функций $B = B_{(k)}(H)$ и $\chi = \chi_{(k)}(H)$ для произвольного значения параметра $H \in [H_{(k)}^1, H_{(k)}^{M_{(k)}}]$ следует использовать кусочно-линейную интерполяцию. Так, например, если $H \in [H_{(k)}^m, H_{(k)}^{m+1}]$, $1 \leq m \leq M_{(k)} - 1$, то в этом случае справедливы формулы:

$$B_{(k)}(H) = B_{(k)}^m + \frac{B_{(k)}^{m+1} - B_{(k)}^m}{H_{(k)}^{m+1} - H_{(k)}^m} \cdot (H - H_{(k)}^m); \quad (5.168)$$

$$\chi_{(k)}(H) = \chi_{(k)}^m + \frac{\chi_{(k)}^{m+1} - \chi_{(k)}^m}{H_{(k)}^{m+1} - H_{(k)}^m} \cdot (H - H_{(k)}^m). \quad (5.169)$$

Поскольку площадь любой фигуры имеет нелинейную зависимость от линейных размеров ее ребер, использование кусочно-линейной интерполяции при вычислении $f = f(H)$ может давать существенные погрешности. Для получения адекватной формулы рассмотрим трапецию с высотой ΔH и длинами оснований l_1 и l_2 (рис. 5.12).

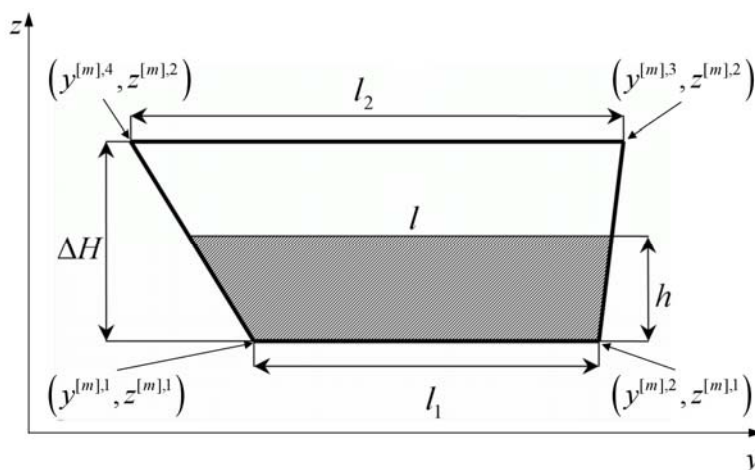


Рис. 5.12. Общий вид трапеции

Длина горизонтального отрезка l является линейной зависимостью от параметра h (см. рис. 5.12):

$$l(h) = l_1 + \frac{h}{\Delta H} \cdot (l_2 - l_1). \quad (5.170)$$

Отсюда для вычисления площади $f(h)$ справедлива формула:

$$f(h) = \frac{l + l_1}{2} \cdot h = \frac{2 \cdot l_1 + \frac{h}{\Delta H} \cdot (l_2 - l_1)}{2} \cdot h = \frac{l_2 - l_1}{2 \cdot \Delta H} \cdot h^2 + l_1 \cdot h. \quad (5.171)$$

Используя (5.171), для адекватного вычисления значения площади поперечного сечения от высоты свободной поверхности можно применять кусочно-квадратичную интерполяцию:

$$f_{(k)}(H) = f_{(k)}^m + \frac{B_{(k)}^{m+1} - B_{(k)}^m}{2 \cdot (H_{(k)}^{m+1} - H_{(k)}^m)} \cdot (H - H_{(k)}^m)^2 + B_{(k)}^m \cdot (H - H_{(k)}^m),$$

$$H \in [H_{(k)}^m, H_{(k)}^{m+1}], \quad 1 \leq m \leq M_{(k)} - 1. \quad (5.172)$$

Заметим, что зависимости $f = f(H)$ и $\chi = \chi(H)$ всегда возрастающие.

Перейдем к описанию способа построения зависимостей $f = f(H)$, $B = B(H)$ и $\chi = \chi(H)$ для пространственных узлов расчетной сетки. Рассмотрим сначала построение перечисленных табличных зависимостей для узлов расчетной сетки, располагающихся между базовыми сечениями (рис. 5.13).

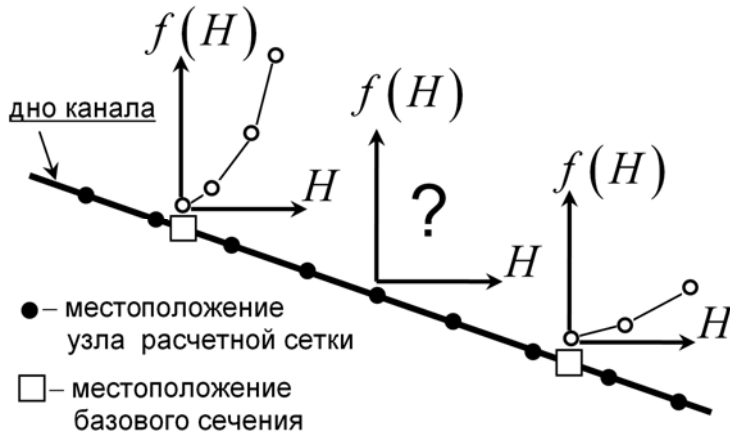


Рис. 5.13. Иллюстрация к построению зависимости площади поперечного сечения от высоты свободной поверхности для узла расчетной сетки

Пусть i -ый узел пространственной сетки располагается между k -ым и $(k+1)$ -ым базовыми сечениями, т.е.

$$x_{(k)} \leq x_i \leq x_{(k+1)}.$$

Постановка задачи в этом случае будет выглядеть следующим образом: **построить некоторую интерполяционную зависимость $f = f(H)$ для указанного узла (среднюю между зависимостями соседних базовых сечений), при этом влияние зависимости каждого соседнего базового сечения должно возрастать при приближении узла расчетной сетки к данному базовому сечению.**

Алгоритм построения интерполяционной зависимости предлагается организовать следующим образом. Обозначая количество строк табличного представления зависимости $f = f(H)$ k -го базового сечения через $M_{(k)}$ (см. выше), значение аргумента и функции m -ой строки через $H_{(k)}^m$ и $f_{(k)}^m$ соответственно, данное табличное представление для k -го и $(k+1)$ -го базового сечения формально можно записать в виде:

$$f_{(k)}(H): \left\{ \left(H_{(k)}^m, f_{(k)}^m \right), m = \overline{1, M_{(k)}} \right\}; \quad (5.173a)$$

$$f_{(k+1)}(H): \left\{ \left(H_{(k+1)}^m, f_{(k+1)}^m \right), m = \overline{1, M_{(k+1)}} \right\}. \quad (5.1736)$$

Построим эквивалентные функциям $f_{(k)}(H)$ и $f_{(k+1)}(H)$ зависимости $\bar{f}_{(k)}(h)$ и $\bar{f}_{(k+1)}(h)$ соответственно, «приведенные к нулевой отметке». Под этим термином понимается одинаковое смещение каждого узла конкретной табличной функции таким образом, чтобы аргумент первой строки таблицы был равен нулю (рис. 5.14).

Формально для введенных зависимостей можно записать:

$$\bar{f}_{(k)}(h) = f_{(k)}(H_{(k)}^1 + h): \left\{ \left(h_{(k)}^m = H_{(k)}^m - H_{(k)}^1, f_{(k)}^m \right), m = \overline{1, M_{(k)}} \right\}; \quad (5.174a)$$

$$\bar{f}_{(k+1)}(h) = f_{(k+1)}(H_{(k+1)}^1 + h): \left\{ \left(h_{(k+1)}^m = H_{(k+1)}^m - H_{(k+1)}^1, f_{(k+1)}^m \right), m = \overline{1, M_{(k+1)}} \right\}. \quad (5.1746)$$

Графически данный переход представлен на рис. 5.14.

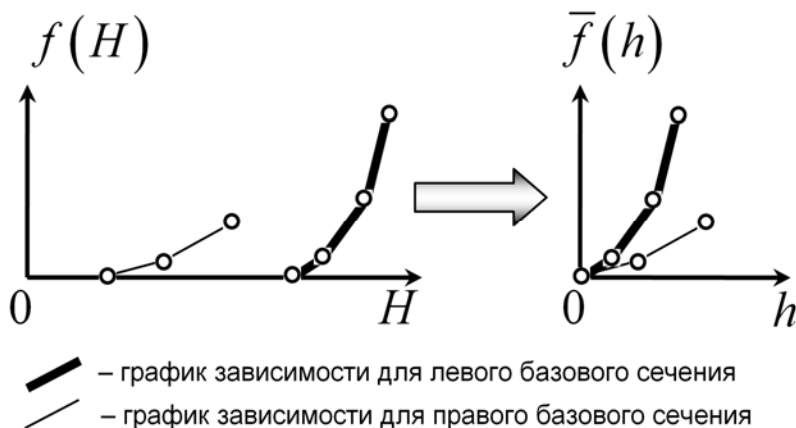


Рис. 5.14. Приведение зависимостей $f(H)$ для базовых сечений к нулевой отметке (см. также рис. 5.13)

На следующем этапе требуется построить множество h_All , являющееся объединением множеств аргументов табличных зависимостей $\bar{f}_{(k)}(h)$ и $\bar{f}_{(k+1)}(h)$:

$$h\_All = \left\{ h\_All_q, q = \overline{1, M_{All}} \right\} = \left\{ h_{(k)}^m, m = \overline{1, M_{(k)}} \right\} \cup \left\{ h_{(k+1)}^n, n = \overline{1, M_{(k+1)}} \right\}, \quad (5.175)$$

где $h\_All_q, q = \overline{1, M_{All}}$ – элементы множества h_All ; $M_{All} = M_{(k)} + M_{(k+1)}$ – размерность множества h_All . На рис. 5.15 элементы множества h_All графически обозначены квадратами.

Введем в рассмотрение следующий параметр:

$$h_{\max} = \min \left(h_{(k)}^{M_{(k)}}, h_{(k+1)}^{M_{(k+1)}} \right). \quad (5.176)$$

Поскольку общий диапазон определения зависимостей $\bar{f}_{(k)}(h)$ и $\bar{f}_{(k+1)}(h)$ находится в пределах $0 \leq h \leq h_{\max}$ (т.е. вне пределов данного диапазона, по крайней мере, одна из

указанных зависимостей не определена), то интерполяционную зависимость можно строить только в пределах этого диапазона. Назовем указанный диапазон «допустимым» (см. рис. 5.15).

Включим элементы множества h_All , не лежащие в пределах «допустимого» диапазона, во множество h_Imp :

$$h\_Imp = \{h\_Imp_s, s = \overline{1, M_{Imp}}\} = \{h\_All_q | h\_All_q > h_{\max}\}, \quad (5.177)$$

где M_{Imp} – размерность множества h_Imp . На рис. 5.15 элементы множества h_Imp соответствуют зачеркнутым квадратикам. Введем в рассмотрение также множество h_Pos с элементами множества h_All , лежащими в пределах «допустимого» диапазона. Множество h_Pos , по сути, является дополнением [89] множества h_Imp до множества h_All (т.е. его составляют элементы множества h_All , не содержащиеся во множестве h_Imp). Элементы множества h_Pos на рис. 5.15 соответствуют не зачеркнутым квадратикам.

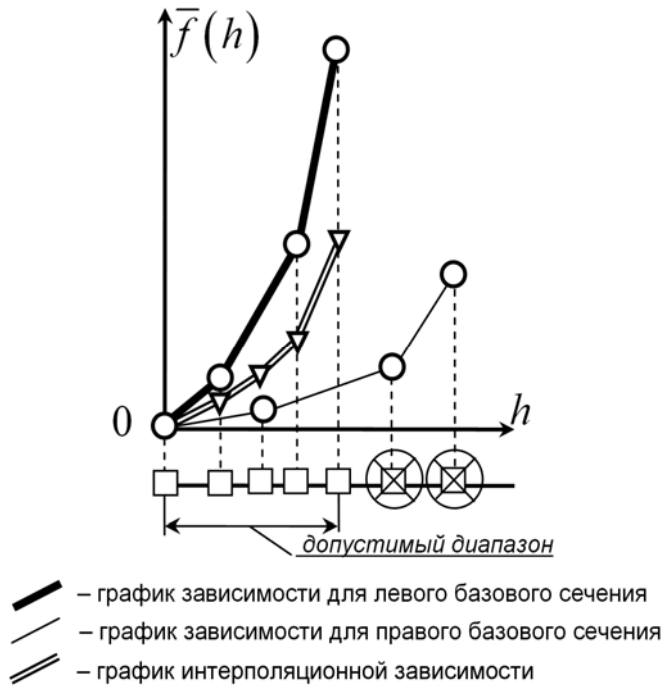


Рис. 5.15. Иллюстрация к построению интерполяционной зависимости (см. также рис. 5.13 и 5.14)

Введем в рассмотрение следующее множество:

$$h\_node = \overline{\overline{h\_Pos}} = \{h\_node_t, t = \overline{1, M_{h\_node}} | h\_node_{t+1} > h\_node_t\}, \quad (5.178)$$

где двойная черта означает оператор упорядочивания по возрастанию элементов множества и удаление дублирующихся элементов множества; M_{h_node} – размерность

множества h_node .

Коэффициенты влияния зависимостей $\bar{f}_{(k)}(h)$ и $\bar{f}_{(k+1)}(h)$ на зависимость $\bar{f}_i(h)$ выберем пропорционально удельному расстоянию от узла расчетной сетки до конкретного базового сечения:

$$\xi_{(k)}^i = \frac{X_i - X_{(k+1)}}{X_{(k+1)} - X_{(k)}}, \quad \xi_{(k+1)}^i = 1 - \xi_{(k)}^i. \quad (5.179)$$

В этом случае «приведенную к нулевой отметке» интерполяционную кривую для i -го узла пространственной расчетной сетки можно определить в виде:

$$\bar{f}_i(h): \left\{ \left(h_i^m, \bar{f}_i^m \right), m = \overline{1, M_i} \right\}, \quad (5.180a)$$

где $M_i = M_{h\_node}$ – размерность рассматриваемой табличной функции;

$$h_i^m = h\_node_m; \quad (5.180б)$$

$$\bar{f}_i^m = \xi_{(k)}^i \cdot \bar{f}_{(k)}(h_i^m) + \xi_{(k+1)}^i \cdot \bar{f}_{(k+1)}(h_i^m) \quad (5.180в)$$

или (с учетом (5.174))

$$\bar{f}_i^m = \xi_{(k)}^i \cdot f_{(k)}(h_i^m + H_{(k)}^1) + \xi_{(k+1)}^i \cdot f_{(k+1)}(h_i^m + H_{(k+1)}^1). \quad (5.180г)$$

Отметим, что для вычисления функций $f_{(k)}(h_i^m + H_{(k)}^1)$ и $f_{(k+1)}(h_i^m + H_{(k+1)}^1)$ следует использовать кусочно-квадратичную интерполяцию (5.172).

Для того чтобы перейти от «приведенной к нулевой отметке» интерполяционной зависимости $\bar{f}_i(h)$ к искомой зависимости $f_i(h)$, следует поднять ее (или опустить) на некоторую высоту H_i^1 . Для оценки данной величины, по аналогии с (5.180в), произведем интерполяцию нижнего значения высоты поверхности русла (т.е. дна) H_i^1 между аналогичными значениями соседних «базовых» сечений:

$$H_i^1 = \xi_{(k)}^i \cdot H_{(k)}^1 + \xi_{(k+1)}^i \cdot H_{(k+1)}^1. \quad (5.181)$$

С учетом этого окончательно можно записать:

$$f_i(H): \left\{ \left(H_i^m, f_i^m \right), m = \overline{1, M_i} \right\}, \quad (5.182a)$$

где

$$H_i^m = h\_node_m + H_i^1; \quad (5.182б)$$

$$f_i^m = \xi_{(k)}^i \cdot f_{(k)}(H_i^m - H_i^1 + H_{(k)}^1) + \xi_{(k+1)}^i \cdot f_{(k+1)}(H_i^m - H_i^1 + H_{(k+1)}^1). \quad (5.182в)$$

Интерполяционные зависимости $\chi_i(H)$ и $B_i(H)$ строятся аналогично. Отметим, что при вычислении данных функций для «базовых» сечений в точках $(H_i^m - H_i^1 + H_{(k)}^1)$ и $(H_i^m - H_i^1 + H_{(k+1)}^1)$ (см. для аналогии (5.182в)) следует использовать кусочно-линейную интерполяцию.

Применительно к рассматриваемому i -му пространственному узлу расчетной сетки для получения значений функций $\chi_i(H)$ и $B_i(H)$ в произвольной точке

$H \in [H_i^1, H_i^{M_i}]$ (в пределах «допустимого» диапазона) следует также использовать кусочно-линейную интерполяцию:

$$B_i(H) = B_i^m + \frac{B_i^{m+1} - B_i^m}{H_i^{m+1} - H_i^m} \cdot (H - H_i^m); \quad (5.183a)$$

$$\chi_i(H) = \chi_i^m + \frac{\chi_i^{m+1} - \chi_i^m}{H_i^{m+1} - H_i^m} \cdot (H - H_i^m) \quad (5.183б)$$

$$\text{при } H \in [H_i^m, H_i^{m+1}], \quad 1 \leq m \leq M_i - 1.$$

Для функции $f_i(H)$ необходимо применять кусочно-квадратичную интерполяцию (аналогично (5.172)):

$$f_i(H) = f_i^m + \frac{B_i^{m+1} - B_i^m}{2 \cdot (H_i^{m+1} - H_i^m)} \cdot (H - H_i^m)^2 + B_i^m \cdot (H - H_i^m) \quad \text{при } H \in [H_i^m, H_i^{m+1}], \quad (5.183в)$$

$$1 \leq m \leq M_i - 1.$$

Рассмотрим теперь внутренние пространственные узлы расчетной сетки, для которых пространственная координата либо меньше минимальной, либо больше максимальной координаты граничных «базовых» сечений. В этом случае табличные зависимости $f(H)$, $\chi(H)$ и $B(H)$ для указанных внутренних узлов расчетной сетки предлагается копировать из ближайшего «базового» сечения.

Поскольку граничный узел расчетной сетки находится вне участка моделируемого канала (см. выше), метод построения зависимостей $f(H)$, $\chi(H)$ и $B(H)$ для данного узла может отличаться от аналогичных методов для внутренних узлов. Это объясняется тем, что от указанного узла требуется лишь обеспечение некоторого влияния «приграничной» части канала.

При любом расположении «базовых» сечений (в том числе слева от левого граничного узла пространственной расчетной сетки, а также справа от правого граничного узла расчетной сетки) табличные зависимости $f(H)$, $\chi(H)$ и $B(H)$ предлагается «переносить» из ближайших внутренних узлов расчетной сетки с соответствующим «смещением» (экстраполяцией) аргументов. Для левого граничного узла:

$$f_0(H): \{(H_0^m, f_0^m), m = \overline{1, M_0}\}; \quad (5.184a)$$

$$B_0(H): \{(H_0^m, B_0^m), m = \overline{1, M_0}\}; \quad (5.184б)$$

$$\chi_0(H): \{(H_0^m, \chi_0^m), m = \overline{1, M_0}\}, \quad (5.184в)$$

где

$$M_0 = M_1; \quad H_0^m = H_1^m + (H_1^1 - H_2^1), \quad f_0^m = f_1^m, \quad B_0^m = B_1^m, \quad \chi_0^m = \chi_1^m, \quad m = \overline{1, M_0}. \quad (5.184г)$$

Обозначим номер правого граничного узла расчетной сетки символом R . С учетом обозначений, введенных ранее (см. рис.5.7),

$$R = N_{node, ch}. \quad (5.185)$$

С учетом данного обозначения характеристики рассматриваемых табличных функций для правого граничного узла можно записать в виде:

$$f_R(H): \{(H_R^m, f_R^m), m = \overline{1, M_R}\}; \quad (5.186a)$$

$$B_R(H): \{(H_R^m, B_R^m), m = \overline{1, M_R}\}; \quad (5.186б)$$

$$\chi_R(H): \{(H_R^m, \chi_R^m), m = \overline{1, M_R}\}, \quad (5.186в)$$

где

$$\begin{aligned} M_R &= M_{R-1}; \\ H_R^m &= H_{R-1}^m + (H_{R-1}^1 - H_{R-2}^1), \quad f_R^m = f_{R-1}^m, \quad B_R^m = B_{R-1}^m, \quad \chi_R^m = \chi_{R-1}^m, \quad m = \overline{1, M_R}. \end{aligned} \quad (5.186г)$$

5.6. Построение разностной модели сети разветвленных каналов с открытым руслом

Рассмотрим сначала основной принцип построения данной модели. Пусть для каждого канала задана равномерная пространственная сетка. Шаг по пространству для конкретного канала может быть произвольным. Предположим, что некоторое сочленение образуют N каналов. Граница каналов соответствует полущелым узлам «LM» расчетной сетки каждого канала. Следовательно, объединение узлов «LM» расчетных сеток каналов образует узел сочленения (стыковки) каналов (рис. 5.16).

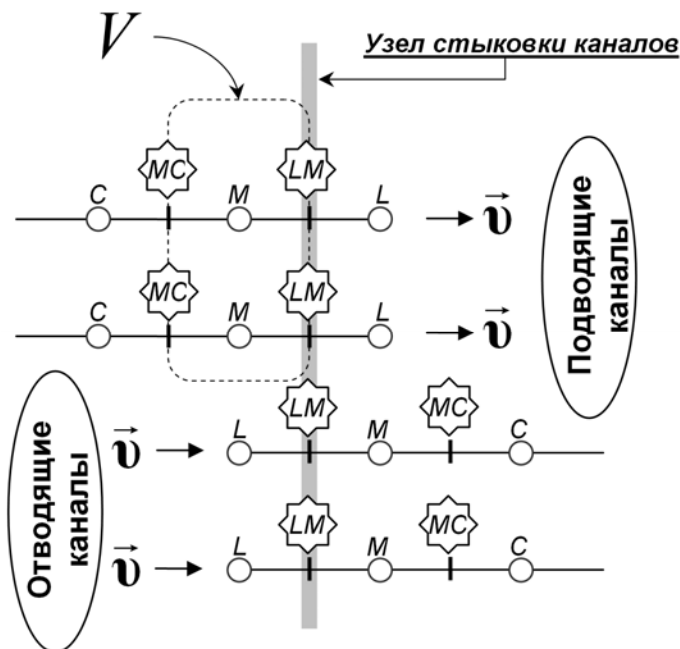


Рис. 5.16. Схематическое представление объема сочленения и узла стыковки каналов

Ранее были введены понятия «*входная граница канала*» и «*выходная граница кана-*

ла». Используя данные определения, можно ввести понятия «*подводящий*» канал и «*отводящий*» канал. Для «подводящего» канала его граница, участвующая в сочленении, является «выходной». Для «отводящего» канала – «входной». Другими словами из «подводящего» канала жидкость течет в сочленение. В «отводящий» канал жидкость втекает из сочленения (см. рис. 5.16). В общем случае в разные моменты времени канал может быть как «подводящим», так и «отводящим», т.е. с течением времени условное предназначение канала может меняться (при изменении направления скорости потока).

Критерием того, что канал является «подводящим», есть выполнение условия:

$$0,5 \cdot \left({}^{(n)}w_L^{j+1} + {}^{(n)}w_M^{j+1} \right) \cdot {}^{(n)}s = {}^{(n)}w_{LM}^{j+1} \cdot {}^{(n)}s \geq 0, \quad (5.187)$$

где заключенный в скобки левый верхний индекс n означает номер канала; ${}^{(n)}s$ – характеристика границы, которой канал примыкает к сочленению (см. (5.40)). Если рассматриваемая граница канала является левой (т.е. из двух границ канала координата данной границы является меньшей), то ${}^{(n)}s = -1$. Если рассматриваемая граница канала является правой, то ${}^{(n)}s = 1$.

Множество каналов сочленения, являющихся «подводящими», обозначим через $\mathbb{C}_{\text{IN}}$, при этом N_{IN} – размерность данного множества. Множество «отводящих» каналов сочленения запишем как $\mathbb{C}_{\text{OUT}}$, где N_{OUT} – размерность этого множества. Указанные множества также будем обозначать перечислением номеров каналов, заключая их в фигурные скобки. Например, пусть сочленение состоит из 10 каналов. «Подводящими» являются каналы с номерами 0, 2, 4, 8, 9. Список номеров «отводящих» каналов в этом случае имеет вид: 1, 3, 5, 6, 7. Тогда можно записать $\mathbb{C}_{\text{IN}} = \{0, 2, 4, 8, 9\}$ и $\mathbb{C}_{\text{OUT}} = \{1, 3, 5, 6, 7\}$.

Узел сочленения каналов соответствует узлам « LM » расчетных сеток каждого канала (см. рис. 5.16). Это дает возможность считать, что высоты свободной поверхности для таких узлов равны, то есть

$${}^{(n)}H_{LM} = {}^{(\xi)}H_{LM}, \text{ для любых } n, \xi. \quad (5.188)$$

С точки зрения описания разностей против потока, при определении ${}^{(n)}f_{LM}$ (в том числе как функции ${}^{(n)}H_{LM}$) данное значение берется из ближайшего целого узла, находящегося против течения жидкости (см., например, (5.146а), (5.143)). При разделении каналов, участвующих в сочленении, на «подводящие» и «отводящие», значение ${}^{(n)}f_{LM}$ должно определяться по значениям ${}^{(n)}f_M$ для «подводящих» каналов и по значениям ${}^{(n)}f_L$ для «отводящих» каналов (см. рис. 5.16). Таким образом,

$${}^{(n)}H_M = {}^{(\xi)}H_L, \text{ для любых } n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}, \xi \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}. \quad (5.189)$$

Из всех рассмотренных узлов (узлы « M » для подводящих и узлы « L » для отводящих каналов, см. (5.189)) полноценные ячейки разностных сеток, окружающие рассматриваемые «целые» узлы, существуют только у «подводящих» каналов (узлы « M »). К тому же, «половинные» ячейки разностной сетки каждого канала, окружающие «целые» узлы « L » «отводящих» каналов (ячейки с координатами $[L, LM]$), являются внешними по отношению к каналу, поскольку границы канала соответствуют полужелым узлам « LM » разностной сетки. По данным причинам в качестве объема сочленения V здесь будем рассматривать объединение участков «подводящих» каналов,

находящихся между «получелыми» узлами « LM » и « MC »¹ (см. рис. 5.16).

По аналогии с (5.74а), уравнение неразрывности для объема сочленения, являющегося объединением участков каналов, примыкающих к узлу стыковки, можно записать следующим образом (см. также (5.52)):

$$\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}}^{(n)} \left[\Delta X \cdot \frac{\partial f_c}{\partial t} + [(w \cdot f)_{LM} - (w \cdot f)_{MC}] \cdot s \right] = 0, \quad (5.190)$$

где правый нижний индекс « c » соответствует некоторому осреднению площади поперечного сечения $^{(n)}f$ на отрезке $^{(n)}\Delta X = [^{(n)}x_{MC}; ^{(n)}x_{LM}]$. Будем относить данное осреднение к узлу $^{(n)}f_M$. Для вычисления длины отрезка $^{(n)}\Delta X$ можно воспользоваться формулой:

$$^{(n)}\Delta X = |^{(n)}x_{LM} - ^{(n)}x_{MC}| = (^{(n)}x_{LM} - ^{(n)}x_{MC}) \cdot ^{(n)}s = (^{(n)}x_L - ^{(n)}x_M) \cdot ^{(n)}s. \quad (5.191)$$

Аппроксимируя производную по времени с помощью разности «назад» и относя разность потоков к верхнему слою по времени, получим:

$$\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}}^{(n)} \left[\Delta X \cdot \frac{f_M^{j+1} - f_M^j}{t_{j+1} - t_j} + \left(\frac{w_L^{j+1} + w_M^{j+1}}{2} \cdot f_M^{j+1} - \frac{w_M^{j+1} + w_C^{j+1}}{2} \cdot f_{MC[Up]}^{j+1} \right) \cdot s \right] = 0, \quad (5.192a)$$

где

$$f_{MC[Up]}^{j+1} = \begin{cases} f_C^{j+1}, & \text{если } 0,5 \cdot (w_M^{j+1} + w_C^{j+1}) \cdot s > 0; \\ f_M^{j+1}, & \text{если } 0,5 \cdot (w_M^{j+1} + w_C^{j+1}) \cdot s < 0; \\ \frac{f_C^{j+1} + f_M^{j+1}}{2} & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (5.193)$$

или

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}}^{(n)} \left[\Delta X \cdot \frac{^{(n)}f_M(H_M^{j+1}) - ^{(n)}f_M^j}{t_{j+1} - t_j} \right] + \\ & + \sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}}^{(n)} \left[\left(\frac{w_L^{j+1} + w_M^{j+1}}{2} \cdot f_M(H_M^{j+1}) - \frac{w_M^{j+1} + w_C^{j+1}}{2} \cdot f_{MC[Up]}^{j+1}(H_M^{j+1}, H_C^{j+1}) \right) \cdot s \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.192b)$$

Отметим, что в (5.192) в слагаемых $(0,5 \cdot [w_L^{j+1} + w_M^{j+1}] \cdot f_M^{j+1})$ вместо f_M^{j+1} должен стоять параметр $f_{LM[Up]}^{j+1}$. Однако, с учетом того, что рассматриваемые каналы являются «подводящими», на базе применяемого принципа «против потока» имеем $f_{LM[Up]}^{j+1} = f_M^{j+1}$.

Для вычисления скорости w_M^{j+1} на $(j+1)$ -ом слое по времени в узлах « M » сочленения следует решать разностные уравнения движения (5.146в).

Подчеркнем, что ячейки разностных сеток «отводящих» каналов, соответствующих узлам « M », не принадлежат объему сочленения. Поэтому скорости для узлов « M » и « L » находятся по аналогии с ГУ $H(x_b, t) = H_b(t)$, т.е. в узле « M » – по разностному уравнению движения (5.146в), в узле « L » – с помощью экстраполяционной формулы

¹ Полуцелый узел « MC » расположен на середине отрезка между «целыми» узлами « M » и « C ».

(5.156).

Разрабатываемая модель на данном этапе не обеспечивает гидродинамической связи «подводящих» каналов с «отводящими». Для решения указанной проблемы следует воспользоваться законом Кирхгофа для расходов жидкости. Применительно к рассматриваемому типу расчетной сетки и используемых разностей против потока это уравнение будет иметь вид:

$$\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} |w_{LM}^{j+1}| \cdot {}^{(n)} f_{LM[Up]}^{j+1} = \sum_{k \in \mathbb{C}_{OUT}} {}^{(k)} |w_{LM}^{j+1}| \cdot {}^{(k)} f_{LM[Up]}^{j+1} \quad (5.194a)$$

или

$$\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} \left| \frac{{}^{(n)} w_L^{j+1} + {}^{(n)} w_M^{j+1}}{2} \right| \cdot {}^{(n)} f_M^{j+1} = \sum_{k \in \mathbb{C}_{OUT}} \left| \frac{{}^{(k)} w_L^{j+1} + {}^{(k)} w_M^{j+1}}{2} \right| \cdot {}^{(k)} f_L^{j+1}. \quad (5.194б)$$

Данное соотношение является уравнением, позволяющим определить скорости в узлах «LM» «подводящих» каналов. Значения левой и правой части (5.194б), по сути, равны расходу жидкости, протекающей через узел сочленения. Обозначим такое значение через

$$Q_{All} = \sum_{k \in \mathbb{C}_{OUT}} \left| \frac{{}^{(k)} w_L^{j+1} + {}^{(k)} w_M^{j+1}}{2} \right| \cdot {}^{(k)} f_L^{j+1}. \quad (5.195)$$

Запишем расход жидкости в узле «LM» каждого «подводящего» канала:

$${}^{(n)} Q_{IN}^{j+1} = |{}^{(n)} Q_{LM}^{j+1}| = \left| \frac{{}^{(n)} w_L^{j+1} + {}^{(n)} w_M^{j+1}}{2} \right| \cdot {}^{(n)} f_M^{j+1} = \left(\frac{{}^{(n)} w_L^{j+1} + {}^{(n)} w_M^{j+1}}{2} \cdot f_M^{j+1} \cdot s \right), \quad n \in \mathbb{C}_{IN}, \quad (5.196)$$

где ${}^{(n)} Q_{LM}^{j+1}$ определяется по формуле (см. (5.159)):

$${}^{(n)} Q_{LM}^{j+1} = {}^{(n)} w_{LM}^{j+1} \cdot {}^{(n)} f_{LM[Up]}^{j+1} = \left(\frac{{}^{(n)} w_L^{j+1} + {}^{(n)} w_M^{j+1}}{2} \cdot f_{LM[Up]}^{j+1} \right).$$

В этом случае уравнение (5.194б) может удовлетвориться при выполнении соотношений:

$${}^{(n)} Q_{IN}^{j+1} = {}^{(n)} \zeta^{j+1} \cdot Q_{All}^{j+1}, \quad n \in \mathbb{C}_{IN}, \quad \sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} \zeta^{j+1} = 1. \quad (5.197)$$

Отметим, что существует некоторый произвол при вычислении параметров ${}^{(n)} \zeta^{j+1}$, $n \in \mathbb{C}_{IN}$. Это объясняется тем, что для данной цели довольно сложно подобрать соответствующие уравнения, содержащие физическую сущность.

В первом приближении можно предложить формулы, позволяющие удовлетворить уравнение неразрывности для ячеек (с базовым узлом «M») каждого «подводящего» канала применительно к установившемуся течению жидкости. Разностное уравнение неразрывности для неразветвленного канала (5.146a) в условиях установившегося течения жидкости преобразуется к виду:

$$w_{i+0,5}^{j+1} \cdot f_{i+0,5[Up]}^{j+1} = w_{i-0,5}^{j+1} \cdot f_{i-0,5[Up]}^{j+1}. \quad (5.198a)$$

Вводя в рассмотрение параметр, равный расходу жидкости через «получелый» узел (см. (5.154в))

$$Q_{i+0,5}^{j+1} = w_{i+0,5}^{j+1} \cdot f_{i+0,5[Up]}^{j+1}, \quad (5.199)$$

уравнение (5.198а) записывается так:

$$Q_{i+0,5}^{j+1} = Q_{i-0,5}^{j+1}. \quad (5.198б)$$

Оно выражает один из основных законов механики сплошных сред. Применительно к рассматриваемой задаче его можно интерпретировать следующим образом: при установившемся течении количество жидкости, протекающее через каждое поперечное сечение канала (реки), одинаково.

Найдем коэффициенты ${}^{(n)}\zeta^{j+1}$, $n \in \mathbb{C}_{IN}$, обеспечивающие выполнение подобного уравнения для «полуцелых» узлов «MC» и «LM» «подводящих» каналов. Для решения данной проблемы может быть использована формула:

$${}^{(n)}\zeta^{j+1} = \frac{{}^{(n)}|Q_{MC}^{j+1}|}{\sum_{k \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(k)}|Q_{MC}^{j+1}|} = \frac{{}^{(n)}\left|\frac{w_M^{j+1} + w_C^{j+1}}{2}\right| \cdot {}^{(n)}f_{MC[Up]}^{j+1}}{\sum_{k \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(k)}\left|\frac{w_M^{j+1} + w_C^{j+1}}{2}\right| \cdot {}^{(k)}f_{MC[Up]}^{j+1}}, \quad n \in \mathbb{C}_{IN}, \quad (5.199а)$$

где

$${}^{(n)}f_{MC[Up]}^{j+1} = \begin{cases} {}^{(n)}f_C^{j+1}, & \text{если } 0,5 \cdot ({}^{(n)}w_M^{j+1} + {}^{(n)}w_C^{j+1}) \cdot {}^{(n)}s > 0; \\ {}^{(n)}f_M^{j+1}, & \text{если } 0,5 \cdot ({}^{(n)}w_M^{j+1} + {}^{(n)}w_C^{j+1}) \cdot {}^{(n)}s < 0; \\ 0,5 \cdot ({}^{(n)}f_M^{j+1} + {}^{(n)}f_C^{j+1}), & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (5.199б)$$

$${}^{(n)}Q_{MC}^{j+1} = {}^{(n)}w_{MC}^{j+1} \cdot {}^{(n)}f_{MC[Up]}^{j+1} = {}^{(n)}\left(\frac{w_M^{j+1} + w_C^{j+1}}{2} \cdot f_{MC[Up]}^{j+1}\right).$$

Если знаменатель (5.199а) равен нулю, то для устойчивости алгоритма моделирования течения жидкости по разветвленной системе каналов с открытым руслом можно задавать параметры ${}^{(n)}\zeta^{j+1}$, $n \in \mathbb{C}_{IN}$ по формулам:

$${}^{(n)}\zeta^{j+1} = \frac{1}{N_{IN}}, \quad n \in \mathbb{C}_{IN}. \quad (5.199в)$$

По известным значениям ${}^{(n)}\zeta^{j+1}$, $n \in \mathbb{C}_{IN}$ для удовлетворения уравнения (5.197) требуется находить значение ${}^{(n)}w_L^{j+1}$ из уравнения (5.196).

$${}^{(n)}w_L^{j+1} = \frac{2 \cdot {}^{(n)}\zeta^{j+1} \cdot Q_{-All}^{j+1}}{{}^{(n)}f_M^{j+1} \cdot {}^{(n)}s} - {}^{(n)}w_M^{j+1}. \quad (5.200)$$

В наших рассуждениях остался открытым вопрос об алгоритме определения принадлежности того или иного канала, участвующего в сочленении, к множеству «подводящих» или «отводящих» каналов. В первом приближении для решения данной проблемы можно предложить следующий алгоритм.

1. Используя множества «подводящих» и «отводящих» каналов предыдущего (j -ого) слоя по времени, находится оценка высоты поверхности жидкости в сочленении по уравнению (5.192б). При этом для вычисления приближенных значений конвектив-

- ных слагаемых можно использовать гидродинамические величины с j -ого слоя по времени.
2. Оцениваются скорости течения жидкости в узлах « M » по разностному уравнению движения (5.146в). При этом для вычисления всех слагаемых, кроме разностной производной по времени, можно использовать приближенные значения, взятые с j -ого слоя по времени. Оценки скоростей в узлах « L » рассчитываются по экстраполяционной формуле (5.156).
 3. По критерию (5.187) оценивается для $(j+1)$ -го слоя по времени принадлежность каждого канала к множествам «подводящих» или «отводящих» каналов.
 4. Алгоритм завершен.

В качестве одного из вариантов решения задачи моделирования течения жидкости по разветвленной системе каналов можно предложить реализацию представленного алгоритма на каждой итерации численного решения рассмотренных разностных уравнений. В этом случае в качестве оценок параметров для $(j+1)$ -го слоя по времени можно брать их значения с предшествующей итерации.

Перейдем к построению разностного уравнения неразрывности компоненты для узла сочленения каналов. Рассмотрим случай течения жидкой смеси без учета диффузии. В этом случае для узлов « M » всех каналов, участвующих в сочленении, значения концентрации Y_m , $m = \overline{1, N_S}$, компонент следует определять из решения уравнения неразрывности компонент (5.146б). Для «подводящих» каналов значения концентрации компонент в узлах « L » предлагается находить по экстраполяционной формуле (5.156). Для узлов « L » «отводящих» каналов следует определять значения Y_m , $m = \overline{1, N_S}$, по закону Кирхгофа для потоков компонент (5.746**). В принятых обозначениях разностной схемы данное уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^{(k)}(Y_m)_L^{j+1} &= \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} \left[\frac{w_L^{j+1} + w_M^{j+1}}{2} \cdot f_M^{j+1} \cdot (Y_m)_M^{j+1} \right]}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} \left[\frac{w_L^{j+1} + w_M^{j+1}}{2} \cdot f_M^{j+1} \right]}, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \\ {}^{(k)}(Y_{N_S})_L^{j+1} &= 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} {}^{(k)}(Y_m)_L^{j+1}; \quad k \in \mathbb{C}_{OUT}. \end{aligned} \quad (5.201)$$

Перейдем к рассмотрению уравнения неразрывности компоненты с учетом диффузии. Дифференциальная форма данного уравнения имеет вид (см. (5.746)):

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)} \gamma \cdot \left(\frac{\partial(Y_m \cdot f)}{\partial t} + \frac{\partial(Y_m \cdot w \cdot f)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right) = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}; \quad {}^{(n)} Y_{N_S} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} {}^{(n)} Y_m. \quad (5.202)$$

Это уравнение, по сути, есть сумма уравнений неразрывности компонент для элементарного объема участка каждого канала (участвующего в сочленении) с весом ${}^{(n)} \gamma$, пропорциональным длине участка канала (см. выше). С учетом формулы

$$^{(n)}\gamma = \frac{^{(n)}|x_{LM} - x_{MC}|}{\Delta\bar{X}} = \frac{^{(n)}|x_L - x_M|}{\Delta\bar{X}} = \frac{^{(n)}(x_L - x_M) \cdot ^{(n)}s}{\Delta\bar{X}} = \frac{^{(n)}(x_M - x_C) \cdot ^{(n)}s}{\Delta\bar{X}}, \quad (5.203)$$

где $\Delta\bar{X}$ – произвольное значение, например, максимум или минимум из множества $\{^{(n)}\Delta X, n = \overline{1, N}\}$, просуммируем по аналогии разностные уравнения неразрывности для фрагментов «подводящих» каналов, участвующих в сочленении с учетом формулы (5.203):

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} ^{(n)} \left[\frac{f_M^{j+1} \cdot (Y_m)_M^{j+1} - f_M^j \cdot (Y_m)_M^j}{t_{j+1} - t_j} \cdot (x_L - x_M) \cdot s \right] + \\ & + 0,5 \cdot \sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} ^{(n)} \left[(w_L^{j+1} + w_M^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_M^{j+1} - (w_M^{j+1} + w_C^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_{MC[Up]}^{j+1} \right] \cdot ^{(n)}s = \\ & = \sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} ^{(n)} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)_{LM}^{j+1} \cdot ^{(n)}s - \sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} ^{(n)} \left(\frac{[(D_m \cdot f)_M^{j+1} + (D_m \cdot f)_C^{j+1}] \cdot [(Y_m)_M^{j+1} - (Y_m)_C^{j+1}]}{2 \cdot (x_M - x_C)} \cdot s \right). \end{aligned} \quad (5.204)$$

Рассмотрим уравнение Кирхгофа для диффузионных потоков (см. (5.67)). Применительно к используемой разностной сетке его можно переписать в виде:

$$\sum_{n=1}^N ^{(n)} \left(D_m \cdot f \cdot \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right)_{LM} \cdot ^{(n)}s = 0 \quad (5.205a)$$

или

$$\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} ^{(n)} \left(D_m \cdot f \cdot \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right)_{LM}^{j+1} \cdot ^{(n)}s = - \sum_{k \in \mathbb{C}_{OUT}} ^{(k)} \left(D_m \cdot f \cdot \left(\frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \right)_{LM}^{j+1} \cdot ^{(k)}s. \quad (5.205b)$$

Подставляя (5.205b) в (5.204), аппроксимируя слагаемые суммы в соответствии с принятыми выше принципами, окончательно получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} ^{(n)} \left[\frac{f_M^{j+1} \cdot (Y_m)_M^{j+1} - f_M^j \cdot (Y_m)_M^j}{t_{j+1} - t_j} \cdot (x_L - x_M) \cdot s \right] + \\ & + 0,5 \cdot \sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} ^{(n)} \left[(w_L^{j+1} + w_M^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_M^{j+1} - (w_M^{j+1} + w_C^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_{MC[Up]}^{j+1} \right] \cdot ^{(n)}s = \\ & = - \sum_{k \in \mathbb{C}_{OUT}} ^{(k)} \left(\frac{[(D_m \cdot f)_L^{j+1} + (D_m \cdot f)_M^{j+1}] \cdot [(Y_m)_L^{j+1} - (Y_m)_M^{j+1}]}{2 \cdot (x_L - x_M)} \cdot s \right) - \\ & - \sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} ^{(n)} \left(\frac{[(D_m \cdot f)_M^{j+1} + (D_m \cdot f)_C^{j+1}] \cdot [(Y_m)_M^{j+1} - (Y_m)_C^{j+1}]}{2 \cdot (x_M - x_C)} \cdot s \right), \\ & m = \overline{1, N_s - 1}; \quad ^{(n)}(Y_{N_s})_L^{j+1} = 1 - \sum_{m=1}^{N_s-1} ^{(n)}(Y_m)_L^{j+1}. \end{aligned} \quad (5.206)$$

Приведем сводку результатов. Система разностных уравнений, описывающая течение жидкой смеси (с учетом диффузии) через сочленение каналов с открытым руслом,

имеет вид:

$$\sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} \left[{}^{(n)}\Delta X \cdot \frac{{}^{(n)}f_M(H_M^{j+1}) - {}^{(n)}f_M^j}{t_{j+1} - t_j} \right] + \quad (5.207a)$$

$$+ \sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} \left[\left(\frac{w_L^{j+1} + w_M^{j+1}}{2} \cdot f_M(H_M^{j+1}) - \frac{w_M^{j+1} + w_C^{j+1}}{2} \cdot f_{MC[Up]}^{j+1}(H_M^{j+1}, H_C^{j+1}) \right) \cdot s \right] = 0;$$

$${}^{(n)}H_L^{j+1} = 2 \cdot {}^{(n)}H_M^{j+1} - {}^{(n)}H_C^{j+1}, \quad n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}; \quad (5.207б)$$

$${}^{(k)}H_L^{j+1} = {}^{(n)}H_M^{j+1} \text{ для любых } k \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}, n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}; \quad (5.207в)$$

$${}^{(k)} \left[\frac{f_M^{j+1} - f_M^j}{t_{j+1} - t_j} \right] + {}^{(k)} \left[\frac{(w_M^{j+1} + w_L^{j+1}) \cdot f_L^{j+1} - (w_M^{j+1} + w_C^{j+1}) \cdot f_{MC[Up]}^{j+1}}{x_L - x_C} \right] = 0, \quad k \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}; \quad (5.207г)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} \left[\frac{f_M^{j+1} \cdot (Y_m)_M^{j+1} - f_M^j \cdot (Y_m)_M^j}{t_{j+1} - t_j} \cdot (x_L - x_M) \cdot s \right] + \\ & + 0,5 \cdot \sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} \left[(w_L^{j+1} + w_M^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_M^{j+1} - (w_M^{j+1} + w_C^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_{MC[Up]}^{j+1} \right] \cdot {}^{(n)}s = \\ & = - \sum_{k \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}} \left(\frac{[(D_m \cdot f)_L^{j+1} + (D_m \cdot f)_M^{j+1}] \cdot [(Y_m)_L^{j+1} - (Y_m)_M^{j+1}]}{2 \cdot (x_L - x_M)} \cdot s \right) - \\ & - \sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} \left(\frac{[(D_m \cdot f)_M^{j+1} + (D_m \cdot f)_C^{j+1}] \cdot [(Y_m)_M^{j+1} - (Y_m)_C^{j+1}]}{2 \cdot (x_M - x_C)} \cdot s \right), \quad m = \overline{1, N_S - 1}, \end{aligned} \quad (5.207д)$$

$${}^{(n)}(Y_{N_S})_M^{j+1} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} {}^{(n)}(Y_m)_M^{j+1}, \quad n \in \mathbb{C}_{\text{IN}};$$

$${}^{(n)}(Y_m)_L^{j+1} = 2 \cdot {}^{(n)}(Y_m)_M^{j+1} - {}^{(n)}(Y_m)_C^{j+1}, \quad m = \overline{1, N_S}, \quad n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}; \quad (5.207е)$$

$${}^{(k)}(Y_m)_L^{j+1} = {}^{(n)}(Y_m)_M^{j+1}, \quad m = \overline{1, N_S}, \text{ для любых } k \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}, n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}; \quad (5.207ж)$$

$$\begin{aligned} & {}^{(k)} \left[\frac{f_M^{j+1} \cdot (Y_m)_M^{j+1} - f_M^j \cdot (Y_m)_M^j}{t_{j+1} - t_j} \right] + {}^{(k)} \left[\frac{(w_M^{j+1} + w_L^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_L^{j+1} - (w_M^{j+1} + w_C^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_{MC[Up]}^{j+1}}{2 \cdot (x_L - x_M)} \right] = \\ & = \left[\frac{[(D_m \cdot f)_L^{j+1} + (D_m \cdot f)_M^{j+1}] \cdot [(Y_m)_L^{j+1} - (Y_m)_M^{j+1}]}{2 \cdot (x_L - x_M)^2} \right] - \\ & - \left[\frac{[(D_m \cdot f)_M^{j+1} + (D_m \cdot f)_C^{j+1}] \cdot [(Y_m)_M^{j+1} - (Y_m)_C^{j+1}]}{2 \cdot (x_M - x_C)^2} \right], \quad m = \overline{1, N_S - 1}, \end{aligned}$$

$${}^{(k)}(Y_{N_S})_M^{j+1} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} {}^{(k)}(Y_m)_M^{j+1}, \quad k \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}; \quad (5.207з)$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{f_M^{j+1} \cdot w_M^{j+1} - f_M^j \cdot w_M^j}{t_{j+1} - t_j} \right] + \\
& + \left[\frac{(w_M^{j+1} + w_L^{j+1}) \cdot (f \cdot w)_M^{j+1} - (w_M^{j+1} + w_C^{j+1}) \cdot (f \cdot w)_{MC[Up]}^{j+1}}{(x_L - x_C)} \right] = \\
& = -g \cdot f_M^{j+1} \cdot \left(\frac{H_L^{j+1} - H_C^{j+1}}{x_L - x_C} + \frac{w_M^{j+1} \cdot |w_M^{j+1}|}{(C_M^{j+1})^2 \cdot r_M^{j+1}} \right), \quad n = \overline{1, N};
\end{aligned} \tag{5.207и}$$

$${}^{(k)}w_L^{j+1} = 2 \cdot {}^{(k)}w_M^{j+1} - {}^{(k)}w_C^{j+1}, \quad k \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}; \tag{5.207к}$$

$${}^{(n)}w_L^{j+1} = \frac{2 \cdot {}^{(n)}\zeta^{j+1} \cdot Q_{All}^{j+1}}{{}^{(n)}f_M^{j+1} \cdot {}^{(n)}s} - {}^{(n)}w_M^{j+1}, \quad n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}; \tag{5.207л}$$

$$Q_{All}^{j+1} = \sum_{k \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}} \left| \frac{{}^{(k)}w_L^{j+1} + {}^{(k)}w_M^{j+1}}{2} \right| \cdot {}^{(k)}f_L^{j+1}; \tag{5.207м}$$

$${}^{(n)}\zeta^{j+1} = \begin{cases} \frac{1}{N_{\text{IN}}}, & \text{если } \sum_{k \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} \left| \frac{w_M^{j+1} + w_C^{j+1}}{2} \right| \cdot {}^{(k)}f_{MC[Up]}^{j+1} = 0; \\ \frac{{}^{(n)} \left| \frac{w_M^{j+1} + w_C^{j+1}}{2} \right| \cdot {}^{(n)}f_{MC[Up]}^{j+1}}{\sum_{k \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} \left| \frac{w_M^{j+1} + w_C^{j+1}}{2} \right| \cdot {}^{(k)}f_{MC[Up]}^{j+1}}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{5.207н}$$

$$n \in \mathbb{C}_{\text{IN}};$$

$${}^{(n)}f_{MC[Up]}^{j+1} (H_M^{j+1}, H_C^{j+1}) = \begin{cases} {}^{(n)}f_C^{j+1}, & \text{если } 0,5 \cdot {}^{(n)}(w_M^{j+1} + w_C^{j+1}) \cdot {}^{(n)}s > 0; \\ {}^{(n)}f_M^{j+1}, & \text{если } 0,5 \cdot {}^{(n)}(w_M^{j+1} + w_C^{j+1}) \cdot {}^{(n)}s < 0; \\ \frac{{}^{(n)}f_C^{j+1} + {}^{(n)}f_M^{j+1}}{2}, & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{5.207о}$$

$${}^{(n)}f_i^{j+1} = {}^{(n)}f_i \left({}^{(n)}H_i^{j+1} \right), \quad i \in \{L, M, C\}, \quad n = \overline{1, N}; \tag{5.207п}$$

$${}^{(n)}r_M^{j+1} = {}^{(n)}f_M \left(H_M^{j+1} \right) / {}^{(n)}\chi_M \left(H_M^{j+1} \right), \quad n = \overline{1, N}; \tag{5.207р}$$

$${}^{(n)}C_M^{j+1} = C \left({}^{(n)}r_M^{j+1}, {}^{(n)}(n_{\text{ш}})_M \right), \quad n = \overline{1, N}; \tag{5.207с}$$

$$n \in \begin{cases} \mathbb{C}_{\text{IN}}, & \text{если } ({}^{(n)}w_L^{j+1} + {}^{(n)}w_M^{j+1}) \cdot {}^{(n)}s \geq 0; \\ \mathbb{C}_{\text{OUT}}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{5.207т}$$

$$n = \overline{1, N}.$$

Система уравнений, описывающая течения жидкой смеси через сочленение каналов с открытым руслом без учета диффузии, имеет существенные отличия по сравнению с

(5.207). Во-первых, следует приравнять к нулю параметры D_m . Во-вторых, некоторые уравнения системы будут иметь принципиально другой вид. Приведем отличающиеся уравнения системы (5.207), добавив к нумерации этих уравнений символ «*».

$$\begin{aligned} & \left[\frac{f_M^{j+1} \cdot (Y_m)_M^{j+1} - f_M^j \cdot (Y_m)_M^j}{t_{j+1} - t_j} \right] + \\ & + \left[\frac{(w_M^{j+1} + w_L^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_M^{j+1} - (w_M^{j+1} + w_C^{j+1}) \cdot (f \cdot Y_m)_{MC[Up]}^{j+1}}{2 \cdot (x_L - x_M)} \right] = 0, \quad m = \overline{1, N_S - 1}, \quad (5.207д^*) \end{aligned}$$

$${}^{(n)}(Y_{N_S})_M^{j+1} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} {}^{(n)}(Y_m)_M^{j+1}, \quad n \in \mathbb{C}_{IN};$$

$${}^{(k)}(Y_m)_L^{j+1} = \begin{cases} {}^{(k)}(Y_m)_L^j, & \text{если } \sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} \left[\frac{w_L^{j+1} + w_M^{j+1}}{2} \cdot f_M^{j+1} \right] = 0; \\ \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} \left[\frac{w_L^{j+1} + w_M^{j+1}}{2} \cdot f_M^{j+1} \cdot (Y_m)_M^{j+1} \right]}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} \left[\frac{w_L^{j+1} + w_M^{j+1}}{2} \cdot f_M^{j+1} \right]}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (5.207ж^*)$$

$$m = \overline{1, N_S - 1}, \quad {}^{(k)}(Y_{N_S})_L^{j+1} = 1 - \sum_{m=1}^{N_S-1} {}^{(k)}(Y_m)_L^{j+1}, \quad k \in \mathbb{C}_{OUT}.$$

Заметим, что при изучении представленной разностной модели течения жидкой смеси через сочленение каналов с открытым руслом, построенной на базе разностей против потока, может сложиться неверное впечатление о том, что разностная модель не соответствует исходной дифференциальной модели. Это объясняется тем, что объемы сочленения, на которых строились данные модели, различаются. Так, при построении дифференциальной модели в объеме сочленения участвовали участки всех каналов, примыкающих к узлу сочленения. При построении же разностного аналога в объеме сочленения рассматривались лишь участки «подводящих» каналов. Покажем, что разностная модель аппроксимирует исходную систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Рассмотрим для примера уравнение неразрывности. Сложим уравнение (5.207а), описывающее изменение высоты свободной поверхности в узлах «М» «подводящих» каналов¹, с уравнениями (5.207г) для каждого «отводящего» канала², умноженными на величину ${}^{(n)}\Delta X$:

$$\sum_{n=1}^N \left[{}^{(n)}\Delta X \cdot \frac{{}^{(n)}f_M^{j+1} - {}^{(n)}f_M^j}{t_{j+1} - t_j} \right] + \sum_{n=1}^N \left[\left(\frac{w_L^{j+1} + w_M^{j+1}}{2} \cdot f_{LM[Up]}^{j+1} - \frac{w_M^{j+1} + w_C^{j+1}}{2} \cdot f_{MC[Up]}^{j+1} \right) \cdot s \right] = 0. \quad (5.208)$$

Поделим (5.208) на $\bar{\Delta X}$ и учтем (5.203).

¹ Уравнение записано для объема сочленения каналов, представленного на рис. 5.16.

² Уравнения записаны для ячеек разностной сетки, соответствующих узлам «М».

$$\sum_{n=1}^N \left[{}^{(n)}\gamma \cdot \frac{{}^{(n)}f_M^{j+1} - {}^{(n)}f_M^j}{t_{j+1} - t_j} \right] + \sum_{n=1}^N \left[\frac{\gamma}{\Delta X} \cdot \left(\frac{w_L^{j+1} + w_M^{j+1}}{2} \cdot f_{LM[Up]}^{j+1} - \frac{w_M^{j+1} + w_C^{j+1}}{2} \cdot f_{MC[Up]}^{j+1} \right) \right] = 0. \quad (5.209)$$

Если провести исследование аппроксимации членов второй суммы, то можно показать, что их предел при стремлении ${}^{(n)}\Delta X$ к нулю равен (в данном случае (при рассмотрении разностной модели) границе канала соответствует узел «LM»):

$$\left[\frac{\gamma}{\Delta X} \cdot \left(\frac{w_L^{j+1} + w_M^{j+1}}{2} \cdot f_{LM[Up]}^{j+1} - \frac{w_M^{j+1} + w_C^{j+1}}{2} \cdot f_{MC[Up]}^{j+1} \right) \right] \xrightarrow{{}^{(n)}\Delta X \rightarrow 0} \left(\gamma \cdot \frac{\partial(f \cdot w)}{\partial x} \right)_{LM}^{j+1}. \quad (5.210a)$$

Предел членов первой суммы равен:

$${}^{(n)}\gamma \cdot \frac{{}^{(n)}f_M^{j+1} - {}^{(n)}f_M^j}{t_{j+1} - t_j} \xrightarrow[t_{j+1} - t_j \rightarrow 0, {}^{(n)}\Delta X \rightarrow 0]{} \left(\gamma \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{LM}^{j+1}. \quad (5.210б)$$

Подставляя (5.210) в (5.209), опуская символы «LM» и «j+1», получаем исходное дифференциальное уравнение неразрывности для элементарного объема сочленения (см. (5.74a)):

$$\sum_{n=1}^N {}^{(n)}\gamma \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(w \cdot f)}{\partial x} \right) = 0. \quad (5.211)$$

5.7. К вопросу исследования устойчивости разработанной разностной модели

Исследуем устойчивость разностной модели на примере системы уравнений (5.31), соответствующей течению однокомпонентной жидкости. Как известно, разностная схема обладает свойством сходимости, если она аппроксимирует исходную задачу и является устойчивой. Причем порядок точности (скорость сходимости) схемы определяется ее порядком аппроксимации [97].

Под устойчивостью здесь понимается непрерывная зависимость решения разностной задачи от входных данных [97]. Неустойчивость разностной схемы есть также проявление ее внутренних свойств, отражающих дискретный характер модели и заключающихся в том, что различные погрешности, неизбежно сопровождающие процесс вычисления решения, имеют тенденцию к неограниченному нарастанию [97].

В общем случае в настоящее время исследовать устойчивость разностных уравнений гидродинамики не удастся ввиду существенной нелинейности данных уравнений. Это обстоятельство вынуждает ограничиться рассмотрением их линейного приближения [97]. Таким образом, о сходимости разностной схемы судят по тому, как эта схема «работает» в частном случае, то есть насколько хорошо схема воспроизводит процесс распространения малых возмущений.

Обратимся к решению простейшей задачи о распространении в жидкости малых возмущений, которая может быть сформулирована так: *в потоке жидкости создаются малые возмущения скоростей и высоты свободной поверхности, причем возникающее вследствие этого движение является одномерным движением, зависящим лишь от координаты x и времени t ; требуется найти элементы возмущенного движения.*

Обозначим через w , h и f скорость, глубину потока (расстояние по вертикали от свободной поверхности до дна канала) и площадь поперечного сечения потока возмущенного движения; через w_0 , h_0 и f_0 – те же параметры в начальный момент времени, соответствующие установившемуся течению. Для малых возмущений введем обозначения w' , h' и f' . Другими словами, параметры потока представляются в виде:

$$h = h_0 + h'; \quad w = w_0 + w'; \quad f = f_0 + f'. \quad (5.212)$$

При этом будем предполагать, что глубина h_0 , скорость w_0 и площадь сечения потока f_0 являются постоянными величинами:

$$h_0 = \text{const}; \quad w_0 = \text{const}; \quad f_0 = \text{const}. \quad (5.213)$$

Из геометрических соображений (рис. 5.17) видно, что высота свободной поверхности жидкости H выражается через глубину потока h зависимостью:

$$H(x) = h(x) + a \cdot x, \quad (5.214)$$

где $a = \tan \varphi$ (φ – угол наклона дна канала к горизонтальной плоскости, здесь считаем $\varphi = \text{const}$).

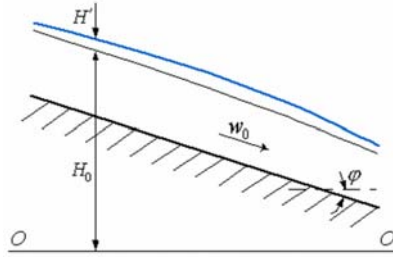


Рис. 5.17. Возмущение свободной поверхности

Площадь поперечного сечения потока можно представить как зависимость $f = f(h)$. Рассмотрим наиболее простой случай прямоугольного русла. Площадь поперечного сечения потока тогда будет определяться формулой:

$$f = b \cdot h, \quad (5.215)$$

где b – ширина канала. Учитывая (5.215), уравнение (5.31a) можно записать в виде:

$$b \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + b \cdot \frac{\partial (w \cdot h)}{\partial x} = 0. \quad (5.216)$$

Поскольку ширина канала не равна нулю, последнее уравнение следует упростить:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (w \cdot h)}{\partial x} = 0. \quad (5.217)$$

Аналогично можно упростить и второе уравнение системы (5.31), рассматривая скорость $w > 0$ и учитывая при этом уравнение (5.214):

$$b \cdot \left(\frac{\partial (w \cdot h)}{\partial t} + \frac{\partial (w^2 \cdot h)}{\partial x} \right) = -g \cdot b \cdot h \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} + a \right) - g \cdot b \cdot h \cdot \frac{w^2}{C^2 \cdot r} \quad (5.218a)$$

или

$$\frac{\partial(w \cdot h)}{\partial t} + \frac{\partial(w^2 \cdot h)}{\partial x} = -g \cdot h \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} + a \right) - g \cdot h \cdot \frac{w^2}{C^2 \cdot r}. \quad (5.218б)$$

Подставим (5.212) в уравнение (5.217) и (5.218б):

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\partial(w_0 \cdot h_0)}{\partial x} + \frac{\partial(w_0 \cdot h')}{\partial x} + \frac{\partial(w' \cdot h_0)}{\partial x} + \frac{\partial(w' \cdot h')}{\partial x} = 0; \quad (5.219)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(w_0 \cdot h_0)}{\partial t} + \frac{\partial(w_0 \cdot h')}{\partial t} + \frac{\partial(w' \cdot h_0)}{\partial t} + \frac{\partial(w' \cdot h')}{\partial t} + \\ & + \frac{\partial(w_0^2 \cdot h_0)}{\partial x} + \frac{\partial(w_0^2 \cdot h')}{\partial x} + \frac{\partial(2 \cdot w_0 \cdot w' \cdot h_0)}{\partial x} + \frac{\partial(2 \cdot w_0 \cdot w' \cdot h')}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial((w')^2 \cdot h_0)}{\partial x} + \frac{\partial((w')^2 \cdot h')}{\partial x} = -g \cdot h_0 \cdot \frac{\partial h_0}{\partial x} - g \cdot h' \cdot \frac{\partial h_0}{\partial x} - g \cdot h_0 \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} - \\ & - g \cdot h' \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} - g \cdot h_0 \cdot a - g \cdot h' \cdot a - g \cdot h_0 \cdot \frac{w_0^2}{C^2 \cdot r} - g \cdot h_0 \cdot \frac{2 \cdot w_0 \cdot w'}{C^2 \cdot r} - \\ & - g \cdot h_0 \cdot \frac{(w')^2}{C^2 \cdot r} - g \cdot h' \cdot \frac{w_0^2}{C^2 \cdot r} - g \cdot h' \cdot \frac{2 \cdot w_0 \cdot w'}{C^2 \cdot r} - g \cdot h' \cdot \frac{(w')^2}{C^2 \cdot r}. \end{aligned} \quad (5.220)$$

Из уравнений (5.219) и (5.220) вычтем уравнения (5.217) и (5.218б), записанные для начального момента времени, и отбросим произведения малых величин и их производных как малые высших порядков.

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\partial(w_0 \cdot h')}{\partial x} + \frac{\partial(w' \cdot h_0)}{\partial x} = 0; \\ & \frac{\partial(w_0 \cdot h')}{\partial t} + \frac{\partial(w' \cdot h_0)}{\partial t} + \frac{\partial(w_0^2 \cdot h')}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial(w_0 \cdot w' \cdot h_0)}{\partial x} = \\ & = -g \cdot h' \cdot \frac{\partial h_0}{\partial x} - g \cdot h_0 \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} - g \cdot h' \cdot a - 2 \cdot g \cdot h_0 \cdot \frac{w_0 \cdot w'}{C^2 \cdot r} - g \cdot h' \cdot \frac{w_0^2}{C^2 \cdot r}. \end{aligned} \right. \quad (5.221а)$$

Запишем полученные уравнения в нелинейной форме, учитывая при этом соотношения (5.213):

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial h'}{\partial t} + w_0 \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} + h_0 \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} = 0; \\ & w_0 \cdot \left(\frac{\partial h'}{\partial t} + w_0 \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} \right) + h_0 \cdot \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + 2 \cdot w_0 \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} \right) = \\ & = -g \cdot h_0 \cdot \frac{\partial h'}{\partial x} - g \cdot h' \cdot a - 2 \cdot g \cdot h_0 \cdot \frac{w_0 \cdot w'}{C^2 \cdot r} - g \cdot h' \cdot \frac{w_0^2}{C^2 \cdot r}. \end{aligned} \right. \quad (5.221б)$$

Вычтем из второго уравнения системы (5.221б) первое уравнение, умноженное на w_0 . Для наглядности штрихи у параметров возмущений опустим. В результате получим:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} + w_0 \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + h_0 \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \\ & h_0 \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w_0 \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) + g \cdot h_0 \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = -g \cdot h \cdot a - 2 \cdot g \cdot h_0 \cdot \frac{w_0 \cdot w}{C^2 \cdot r} - g \cdot h \cdot \frac{w_0^2}{C^2 \cdot r}. \end{aligned} \right. \quad (5.222)$$

Система (5.222) может быть названа линеаризованной по сравнению с нелинейной системой (5.31), так как она получена из нее путем линеаризации, заключающейся в игнорировании величин второго (и выше) порядка малости.

В области $G = \{-\infty < x < \infty, t > 0\}$ введем равномерную сетку $\omega = \omega_{\Delta t} \times \omega_{\Delta x}$,

$$\omega_{\Delta t} = \{t_j = j \cdot \Delta t, j = 0, 1, 2, \dots\},$$

$$\omega_{\Delta x} = \{x_i = i \cdot \Delta x, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Сеточные функции, аппроксимирующие решения h и w дифференциальной задачи и отнесенные к узлам (x_i, t_j) сетки, обозначим в виде: $h = h(x_i, t_j) = h_i^j$ и $w = w(x_i, t_j) = w_i^j$. Используя схему с разностями против потока, запишем разностные уравнения на равномерной пространственно-временной сетке, соответствующие дифференциальным уравнениям (5.222):

$$\begin{cases} \frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} + \frac{w_0 \cdot h_{i+0,5[Up]}^{j+1} - w_0 \cdot h_{i-0,5[Up]}^{j+1}}{\Delta x} + h_0 \cdot \frac{w_{i+1}^{j+1} - w_{i-1}^{j+1}}{2 \cdot \Delta x} = 0; \\ h_0 \cdot \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\Delta t} + h_0 \cdot \frac{w_0 \cdot w_{i+0,5[Up]}^{j+1} - w_0 \cdot w_{i-0,5[Up]}^{j+1}}{\Delta x} + g \cdot h_0 \cdot \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{2 \cdot \Delta x} = \\ = -g \cdot a \cdot h_i^{j+1} - 2 \cdot g \cdot h_0 \cdot \frac{w_0 \cdot w_i^{j+1}}{C^2 \cdot r} - g \cdot h_i^{j+1} \cdot \frac{w_0^2}{C^2 \cdot r}, \end{cases} \quad (5.223a)$$

где $\Delta t \equiv t_{j+1} - t_j$ – шаг по временной координате; $\Delta x = 0,5 \cdot (x_{i+1} - x_{i-1})$ – шаг по пространству;

$$h_{i+0,5[Up]}^{j+1} = \begin{cases} h_i^{j+1}, & \text{если } w_0 > 0; \\ h_{i+1}^{j+1}, & \text{если } w_0 < 0; \\ \frac{h_i^{j+1} + h_{i+1}^{j+1}}{2} & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad h_{i-0,5[Up]}^{j+1} = \begin{cases} h_{i-1}^{j+1}, & \text{если } w_0 > 0; \\ h_i^{j+1}, & \text{если } w_0 < 0; \\ \frac{h_i^{j+1} + h_{i-1}^{j+1}}{2} & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (5.223б)$$

$$w_{i+0,5[Up]}^{j+1} = \begin{cases} w_i^{j+1}, & \text{если } w_0 > 0; \\ w_{i+1}^{j+1}, & \text{если } w_0 < 0; \\ \frac{w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}}{2} & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad w_{i-0,5[Up]}^{j+1} = \begin{cases} w_{i-1}^{j+1}, & \text{если } w_0 > 0; \\ w_i^{j+1}, & \text{если } w_0 < 0; \\ \frac{w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}}{2} & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.223в)$$

Для оценки устойчивости (5.223) проанализируем устойчивость левой части уравнений данной системы:

$$\begin{cases} \frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{h_{i+0,5[Up]}^{j+1} - h_{i-0,5[Up]}^{j+1}}{\Delta x} + h_0 \cdot \frac{w_{i+1}^{j+1} - w_{i-1}^{j+1}}{2 \cdot \Delta x} = 0; \\ \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{w_{i+0,5[Up]}^{j+1} - w_{i-0,5[Up]}^{j+1}}{\Delta x} + g \cdot \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{2 \cdot \Delta x} = 0. \end{cases} \quad (5.224a)$$

Положим для определенности (при этом не нарушая общности рассуждений), что $w_0 > 0$, тогда система (5.224а) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{h_i^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{\Delta x} + h_0 \cdot \frac{w_{i+1}^{j+1} - w_{i-1}^{j+1}}{2 \cdot \Delta x} = 0; \\ \frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{w_i^{j+1} - w_{i-1}^{j+1}}{\Delta x} + g \cdot \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{2 \cdot \Delta x} = 0. \end{cases} \quad (5.224б)$$

Для исследования устойчивости будем использовать широко известный метод гармоник [97]¹. Согласно данному методу об устойчивости разностной схемы судят по поведению частных сеточных решений, имеющих вид разностных гармоник. Рассмотрим частные разностные решения вида (см. [97])

$$w_k^j = \tilde{w} \cdot e^{i \cdot k \cdot \varphi} \lambda^j; \quad h_k^j = \tilde{h} \cdot e^{i \cdot k \cdot \varphi} \lambda^j, \quad (5.225)$$

где $\tilde{w}$, $\tilde{h}$ – амплитуды гармоник; φ – некоторое действительное число; $\lambda = \lambda(\varphi)$ – комплексное число, подлежащее определению. Если при любых значениях φ имеем $|\lambda| \leq 1$, то все гармоники (5.225) ограничены. Поэтому условие $|\lambda| \leq 1$ – это необходимое условие устойчивости [97].

Подставим (5.225) в систему (5.224б):

$$\tilde{h} \cdot e^{i \cdot k \cdot \varphi} \frac{\lambda^{j+1} - \lambda^j}{\Delta t} + w_0 \cdot \tilde{h} \cdot \lambda^{j+1} \cdot \frac{e^{i \cdot k \cdot \varphi} - e^{i \cdot (k-1) \cdot \varphi}}{\Delta x} + h_0 \cdot \tilde{w} \cdot \lambda^{j+1} \cdot \frac{(e^{i \cdot (k+1) \cdot \varphi} - e^{i \cdot (k-1) \cdot \varphi})}{2 \cdot \Delta x} = 0; \quad (5.226а)$$

$$\tilde{w} \cdot e^{i \cdot k \cdot \varphi} \cdot \frac{\lambda^{j+1} - \lambda^j}{\Delta t} + w_0 \cdot \tilde{w} \cdot \lambda^{j+1} \cdot \frac{e^{i \cdot k \cdot \varphi} - e^{i \cdot (k-1) \cdot \varphi}}{\Delta x} + g \cdot \tilde{h} \cdot \lambda^{j+1} \cdot \frac{e^{i \cdot (k+1) \cdot \varphi} - e^{i \cdot (k-1) \cdot \varphi}}{2 \cdot \Delta x} = 0. \quad (5.226б)$$

Каждое уравнение системы (5.226) сократим на величину $(\lambda^{j+1} \cdot e^{i \cdot k \cdot \varphi})$ и преобразуем:

$$\frac{\tilde{h}}{\tilde{w}} = - \left(h_0 \cdot \frac{i \cdot \sin \varphi}{\Delta x} \right) \cdot \left(\frac{(1 - \lambda^{-1})}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{1 - e^{-i \cdot \varphi}}{\Delta x} \right)^{-1}; \quad (5.227а)$$

$$\frac{\tilde{h}}{\tilde{w}} = - \left(\frac{(1 - \lambda^{-1})}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{(1 - e^{-i \cdot \varphi})}{\Delta x} \right) \cdot \left(g \cdot \frac{i \cdot \sin \varphi}{\Delta x} \right)^{-1}. \quad (5.227б)$$

Приравняем первое и второе уравнения из (5.227):

$$h_0 \cdot g \cdot \left(\frac{i \cdot \sin \varphi}{\Delta x} \right)^2 = \left(\frac{1 - \lambda^{-1}}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{1 - e^{-i \cdot \varphi}}{\Delta x} \right)^2. \quad (5.228)$$

Преобразуем последнее уравнение:

$$\sqrt{g \cdot h_0} \cdot \left(\frac{i \cdot \sin \varphi}{\Delta x} \right) = \pm \left(\frac{1 - \lambda^{-1}}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{1 - e^{-i \cdot \varphi}}{\Delta x} \right). \quad (5.229)$$

В результате имеем:

¹ При исследовании устойчивости в данном Разделе нижний индекс у сеточных функций будем обозначать через k , оставив символ i для обозначения мнимой единицы.

$$\frac{1 - \lambda^{-1}}{\Delta t} = -w_0 \cdot \frac{(1 - \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)}{\Delta x} \pm \sqrt{g \cdot h_0} \cdot \frac{i \cdot \sin \varphi}{\Delta x} \quad (5.230)$$

или

$$\lambda^{-1} = 1 + \frac{w_0 \cdot (1 - \cos \varphi) \cdot \Delta t}{\Delta x} + i \cdot \frac{(w_0 \pm \sqrt{g \cdot h_0}) \cdot \sin \varphi \cdot \Delta t}{\Delta x}. \quad (5.231)$$

Тогда

$$|\lambda^{-1}| = \sqrt{\left(1 + w_0 \cdot (1 - \cos \varphi) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 + \left((w_0 \pm \sqrt{g \cdot h_0}) \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2}. \quad (5.232)$$

Из полученного выражения видно, что при исходном условии $w_0 > 0$ выполняется неравенство $|\lambda| \leq 1$ и, следовательно, схема (5.224) является безусловно устойчивой. Аналогично рассматриваются случаи $w_0 < 0$ и $w_0 = 0$. Таким образом, есть основания полагать, что консервативная двухслойная схема с разностями против потока (5.146) также теоретически безусловно устойчива.

5.8. О методе решения построенных разностных уравнений

Перейдем к рассмотрению одного из наиболее наглядных методов решения системы предложенных разностных уравнений на примере (5.146). Описываемый метод идеологически близок к известным методам простой итерации и Зейделя для решения систем линейных алгебраических уравнений. Обозначим символом k номер итерации метода решения. Для произвольного искомого параметра y_i^{j+1} приближение на k -ой итерации обозначим как y_i^k . Тогда при известных распределениях параметров на k -ой итерации очередное $(k+1)$ -ое приближение можно явно рассчитать по уравнениям:

$$\frac{f_i^{k+1} - f_i^j}{t_{j+1} - t_j} + \frac{(w_i^k + w_{i+1}^k) \cdot f_{i+0,5[Up]}^k - (w_i^k + w_{i-1}^k) \cdot f_{i-0,5[Up]}^k}{x_{i+1} - x_{i-1}} = 0; \quad (5.233a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{f_i^{k+1} \cdot w_i^{k+1} - f_i^j \cdot w_i^j}{t_{j+1} - t_j} + \frac{(w_i^k + w_{i+1}^k) \cdot f_{i+0,5[Up]}^{k+1} \cdot w_{i+0,5[Up]}^k - (w_i^k + w_{i-1}^k) \cdot f_{i-0,5[Up]}^{k+1} \cdot w_{i-0,5[Up]}^k}{(x_{i+1} - x_{i-1})} = \\ & = -g \cdot f_i^{j+1} \cdot \left(\frac{H_{i+1}^{k+1} - H_{i-1}^{k+1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + \frac{w_i^k \cdot |w_i^k|}{(C_i^{k+1})^2 \cdot r_i^{k+1}} \right); \end{aligned} \quad (5.233б)$$

$$\begin{aligned} & \frac{f_i^{k+1} \cdot (Y_m)_i^{k+1} - f_i^j \cdot (Y_m)_i^j}{t_{j+1} - t_j} + \\ & + \frac{(w_i^{k+1} + w_{i+1}^{k+1}) \cdot f_{i+0,5[Up]}^{k+1} \cdot (Y_m)_{i+0,5[Up]}^k - (w_i^{k+1} + w_{i-1}^{k+1}) \cdot f_{i-0,5[Up]}^{k+1} \cdot (Y_m)_{i-0,5[Up]}^k}{(x_{i+1} - x_{i-1})} = \\ & = \frac{[(D_m \cdot f)_{i+1}^{k+1} + (D_m \cdot f)_i^{k+1}] \cdot [(Y_m)_{i+1}^k - (Y_m)_i^k]}{2 \cdot (x_{i+1} - x_i)^2} - \frac{[(D_m \cdot f)_i^{k+1} + (D_m \cdot f)_{i-1}^{k+1}] \cdot [(Y_m)_i^k - (Y_m)_{i-1}^k]}{2 \cdot (x_i - x_{i-1})^2}, \end{aligned} \quad (5.233в)$$

$$H_i^{k+1} = H_i(f_i^{k+1}); \quad (5.233r)$$

$$r_i^{k+1} = f_i^{k+1} / \chi_i(H_i^{k+1}); \quad (5.233д)$$

$$C_i^{k+1} = C(r_i^{k+1}, n_{III}). \quad (5.233е)$$

Алгоритм решения (5.233) на каждой итерации метода кратко можно сформулировать следующим образом: на первом этапе находятся параметры f_i^{k+1} для всех узлов пространственной сетки по (5.233а); на втором этапе вычисляются параметры w_i^{k+1} по (5.233б) для всех узлов сетки; наконец, для всех узлов сетки определяются параметры $(Y_m)_i^{k+1}$. Очевидно, что при условии устойчивости предложенного алгоритма (при $k \rightarrow \infty$) решение (5.233) будет сходиться к решению разностной системы уравнений (5.146), т.е. для произвольной функции y справедлива запись:

$$y_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_i^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y_i^{j+1}. \quad (5.234)$$

Оценим устойчивость данного алгоритма решения. В общем случае исследовать устойчивость не представляется возможным из-за нелинейности уравнений. Так же, как и при изучении устойчивости разностных схем, ограничимся рассмотрением некоторой упрощенной оценки.

Применив к системе (5.224) предложенный итерационный метод решения, получим:

$$\frac{h_i^{k+1} - h_i^j}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{h_{i+0,5}^k[U_p] - h_{i-0,5}^k[U_p]}{\Delta x} + h_0 \cdot \frac{w_{i+1}^k - w_{i-1}^k}{2 \cdot \Delta x} = 0; \quad (5.235a)$$

$$\frac{w_i^{k+1} - w_i^j}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{w_{i+0,5}^k[U_p] - w_{i-0,5}^k[U_p]}{\Delta x} + g \cdot \frac{h_{i+1}^k - h_{i-1}^k}{2 \cdot \Delta x} = 0 \quad (5.235б)$$

или, с учетом положительного значения w_0 ,

$$\frac{h_i^{k+1} - h_i^j}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{h_i^k - h_{i-1}^k}{\Delta x} + h_0 \cdot \frac{w_{i+1}^k - w_{i-1}^k}{2 \cdot \Delta x} = 0; \quad (5.236a)$$

$$\frac{w_i^{k+1} - w_i^j}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{w_i^k - w_{i-1}^k}{\Delta x} + g \cdot \frac{h_{i+1}^k - h_{i-1}^k}{2 \cdot \Delta x} = 0. \quad (5.236б)$$

Введем обозначения:

$$\Delta w_i^k = w_i^k - w_i^{j+1}; \quad (5.237a)$$

$$\Delta h_i^k = h_i^k - h_i^{j+1}. \quad (5.237б)$$

Вычтем из уравнений (5.236) соответствующие уравнения (5.224б). С учетом обозначений (5.237) получим:

$$\frac{\Delta h_i^{k+1}}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{\Delta h_i^k - \Delta h_{i-1}^k}{\Delta x} + h_0 \cdot \frac{\Delta w_{i+1}^k - \Delta w_{i-1}^k}{2 \cdot \Delta x} = 0; \quad (5.238a)$$

$$\frac{\Delta w_i^{k+1}}{\Delta t} + w_0 \cdot \frac{\Delta w_i^k - \Delta w_{i-1}^k}{\Delta x} + g \cdot \frac{\Delta h_{i+1}^k - \Delta h_{i-1}^k}{2 \cdot \Delta x} = 0. \quad (5.238б)$$

Следует отметить, что в уравнениях (5.238) индекс i соответствует узлу пространственной сетки. Для определенности дальнейших выкладок обозначим этот индекс символом n . Для исследования устойчивости рассматриваемого итерационного процесса воспользуемся методом гармоник. Решение задачи представим в виде:

$$\Delta w_n^k = \tilde{w} \cdot \lambda^k \cdot e^{i\varphi \cdot n}; \quad (5.239a)$$

$$\Delta h_n^k = \tilde{h} \cdot \lambda^k \cdot e^{i\varphi \cdot n}, \quad (5.239b)$$

где i – мнимая единица; n – номер узла пространственной сетки; $\tilde{w}$, $\tilde{h}$ – амплитуды гармоник. Подставим (5.239) в (5.238) и сократим на $(\lambda^k \cdot e^{i\varphi \cdot n})$. В результате получим:

$$\tilde{h} \cdot \frac{\lambda}{\Delta t} + \tilde{h} \cdot w_0 \cdot \frac{1 - e^{-i\varphi}}{\Delta x} + h_0 \cdot \tilde{w} \cdot \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2 \cdot \Delta x} = 0; \quad (5.240a)$$

$$\tilde{w} \cdot \frac{\lambda}{\Delta t} + w_0 \cdot \tilde{w} \cdot \frac{1 - e^{-i\varphi}}{\Delta x} + g \cdot \tilde{h} \cdot \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2 \cdot \Delta x} = 0. \quad (5.240b)$$

Преобразуем последние уравнения так, чтобы в их левых частях в явной форме стояло отношение $\tilde{w}/\tilde{h}$. Тогда, приравняв соответствующие правые части уравнений, получим:

$$\left(\frac{\lambda}{\Delta t} + \frac{w_0 \cdot (1 - \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)}{\Delta x} \right)^2 = g \cdot h_0 \cdot \left(\frac{i \cdot \sin \varphi}{\Delta x} \right)^2. \quad (5.241)$$

Необходимое условие устойчивости метода имеет вид: $|\lambda| \leq 1$. Учитывая это условие, (5.241) записывается следующим образом:

$$\sqrt{\left(w_0 \cdot (1 - \cos \varphi) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 + \left(\left(w_0 \pm \sqrt{g \cdot h_0} \right) \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2} \leq 1. \quad (5.242)$$

Откуда, заменяя тригонометрические функции их оценками сверху $[(1 - \cos \varphi) \rightarrow 2; \sin \varphi \rightarrow 1]$, преобразуем неравенство (5.242) к виду:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{3 \cdot w_0^2 + 2 \cdot |w_0| \cdot \sqrt{g \cdot h_0} + g \cdot h_0}}. \quad (5.243)$$

Оценкой сверху для шага по времени может выступать неравенство:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{3 \cdot w_0^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot |w_0| \cdot \sqrt{g \cdot h_0} + g \cdot h_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{3} \cdot |w_0| + \sqrt{g \cdot h_0}}. \quad (5.244)$$

Отметим, что предложенный метод решения разностной схемы по своим принципам аналогичен явным разностным схемам. По данной причине методы исследования устойчивости предложенного метода полностью совпадают с методами исследования устойчивости явных разностных схем. Более подробно такую информацию можно найти в работах [96, 97].

Особое внимание уделим методу решения уравнения неразрывности для объема сочленения (5.207a). Сложность решения данного уравнения предложенным выше методом (т.е. по аналогии с (5.233)) заключается в том, что в общем случае из (5.207a) невозможно выделить искомый параметр решения H_M^{j+1} , тем самым привести уравнение к виду, где параметр H_M^{k+1} стоял бы в явном виде. Для решения возникшей проблемы

можно предложить на каждой итерации рассматриваемого метода (при его распространении на случай разветвленных систем каналов с открытым руслом) решать уравнение (5.207a) методом Ньютона (или его модификации) относительно переменной H_M^{k+1} ¹:

$$\sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}}^{(n)} \left[\Delta X \cdot \frac{f_M(H_M^{k+1}) - f_M^j}{t_{j+1} - t_j} \right] + \sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}}^{(n)} \left[\left(\frac{w_L^k + w_M^k}{2} \cdot f_M(H_M^{k+1}) - \frac{w_M^k + w_C^k}{2} \cdot f_{MC[up]}(H_M^{k+1}, H_C^k) \right) \cdot s \right] = 0. \quad (5.245)$$

Если обозначить номер итерации Ньютона через θ , то формализовать данный процесс можно с помощью следующих формул:

$$H_M^{\theta+1} = H_M^\theta - \frac{Fun(H_M^\theta)}{dFun(H_M^\theta)}; \quad (5.246a)$$

$$Fun(H_M) = \sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}}^{(n)} \left[\Delta X \cdot \frac{f_M(H_M) - f_M^j}{t_{j+1} - t_j} \right] + \sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}}^{(n)} \left[\left(\frac{w_L^k + w_M^k}{2} \cdot f_M(H_M) - \frac{w_M^k + w_C^k}{2} \cdot f_{MC[up]}(H_M, H_C^k) \right) \cdot s \right] = 0; \quad (5.246б)$$

$$dFun(H_M) = \frac{d}{dH_M} (Fun(H_M)) = \sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}}^{(n)} \left[\Delta X \cdot \frac{df_M(H_M)/dH_M}{t_{j+1} - t_j} \right] + \sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}}^{(n)} \left[\left(\frac{w_L^k + w_M^k}{2} \cdot \frac{df_M(H_M)}{dH} - \frac{w_M^k + w_C^k}{2} \cdot \frac{\partial [f_{MC[up]}(H_M, H_C^k)]}{\partial H_M} \right) \cdot s \right] = 0; \quad (5.246в)$$

$$\frac{\partial [f_{MC[up]}(H_M, H_C^k)]}{\partial H_M} = \begin{cases} \frac{df_M(H_M)}{dH_M}, & \text{если } \left(\frac{w_M^k + w_C^k}{2} \cdot s \right) < 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.246г)$$

5.9. Об одном подходе к моделированию транспортирования многокомпонентных жидкостей (метод «лагранжевых» частиц)

Как известно, одним из отрицательных качеств разностных схем является «размазывание» фронтов физических процессов. Данное явление объясняется наличием так называемой схемной вязкости [97]. Рассмотрим уравнение неразрывности для неразветвленного канала (5.146a). Разлагая разностное уравнение неразрывности в ряд

¹ Напомним, что данная переменная является общей для всех «подводящих» каналов.

Тейлора, можно показать, что оно аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение с погрешностью $O(\Delta x, \Delta t)$. В частности, доля погрешности аппроксимации уравнения неразрывности, определяемая параметром Δx , выражается в виде¹:

$$O(\Delta x) = -0,5 \cdot \Delta x \cdot \left(w_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i^{j+1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i^{j+1} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i^{j+1} \right) + O(\Delta x^2). \quad (5.247)$$

Из (5.247) следует, что значение площади поперечного сечения при решении разностного уравнения будет меняться во времени не только за счет слагаемого $\partial(f \cdot w)/\partial x$, имеющего физическую сущность, но и за счет слагаемых чисто разностной природы. В частности, величина $O(\Delta x)$ пропорциональна как градиентам функций $(\partial f/\partial x$ и $\partial w/\partial x)$, так и значению второй производной $\partial^2 f/\partial x^2$.

Другими словами, при построении разностного аналога появляется погрешность (5.247) (по сравнению с исходным дифференциальным уравнением), включающая вторую производную от искомой функции. Как и в реальных гидравлических процессах при численном решении системы уравнений гидродинамики влияние вторых пространственных производных от искомых функций, как правило, направлено на уменьшение (по модулю) значений указанных производных. Т.е. появившиеся дополнительные пространственные производные (при этом имеющие чисто разностную природу) приводят к дополнительному («нефизичному») размазыванию искомых распределений параметров. Это свойство численного решения называется «схемной» вязкостью, которая снижает точность получаемого решения [70].

Данная проблема крайне актуальна при решении уравнения неразрывности компонент. В этом случае могут задаваться сбросы загрязняющих веществ, локализованные по пространству. Использование разностной схемы против потока может приводить к существенному размазыванию фронтов. Поскольку предложенная выше разностная схема является консервативной, общее количество сброшенных веществ в канале с течением времени меняться не будет. Однако значения концентраций загрязняющих веществ могут необоснованно уменьшаться, при этом флюид данных веществ будет нефизично «расползаться» по длине канала.

Для решения указанной проблемы без существенного измельчения расчетной сетки по пространству С.Н. Пряловым был предложен новый метод [266]. Его идея основана на известном факте, заключающемся в том, что если выделить малую частицу среды, то уравнение неразрывности компоненты, фактически, будет описывать перемещение данной частицы (с некоторым набором компонент) с потоком жидкости. Исходя из этого, решать уравнение неразрывности компонент предлагается за счет анализа перемещения некоторого набора частиц, следующих в потоке жидкости. Параметры потока при этом могут определяться любым методом, позволяющим моделировать течение однокомпонентной жидкости, например, методом конечных разностей (см. выше). В силу способа введения данных частиц назовем их «лагранжевыми», а предложенный метод – методом «лагранжевых» частиц.

Покажем справедливость идеи, положенной в основу рассматриваемого здесь метода. Рассмотрим уравнение неразрывности компонент (см. (5.38б)) сначала без учета диффузионного слагаемого:

$$\frac{\partial}{\partial t} (f \cdot Y_m) + \frac{\partial}{\partial x} (w \cdot f \cdot Y_m) = 0, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (5.248)$$

¹ Уравнение разлагалось в ряд Тейлора с учетом положительного направления скорости течения жидкости.

Взяв производные в (5.248) по правилу дифференцирования произведения функций, получаем:

$$Y_m \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial t} + Y_m \cdot \frac{\partial(w \cdot f)}{\partial x} + w \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} = 0, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (5.249)$$

Сумма первого и третьего слагаемого, согласно уравнению неразрывности (5.38а), равна нулю. С учетом этого уравнение неразрывности компонент примет вид:

$$\frac{\partial Y_m}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} = 0, \quad m = \overline{1, N_s}, \quad (5.250a)$$

или

$$\frac{DY_m}{Dt} = 0, \quad m = \overline{1, N_s}, \quad (5.250б)$$

где $D(\dots)/Dt = \partial(\dots)/\partial t + w \cdot \partial(\dots)/\partial x$ – субстанциональная производная.

Исходя из (5.250б), уравнение неразрывности компонент можно интерпретировать следующим образом: любая частица сплошной среды с некоторыми концентрациями компонент $\{Y_m | m = \overline{1, N_s}\}$ движется по каналу с потоком жидкости, сохраняя свой компонентный состав.

Отметим, что предложенный в методе «лагранжевых» частиц подход к анализу уравнения неразрывности компонент фактически базируется на широко известном методе характеристик. Покажем это.

Уравнение неразрывности компонент (5.250а) (без учета диффузии) или

$$\frac{\partial Y_m}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right), \quad m = \overline{1, N_s}, \quad (5.250в)$$

(при учете диффузии) являются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных¹. Запишем эти уравнения в классическом виде (для большей наглядности рассмотрим одну из компонент смеси) [267]:

$$a \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial t} + b \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} = c,$$

где

$$a(x, t) = 1; \quad b(x, t) = w(x, t);$$

$$c(x, t, Y_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } D_m(x, t) = 0 \text{ (т.е. диффузией пренебрегается);} \\ \frac{1}{f(x, t)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m(x, t) \cdot f(x, t) \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как известно [267], для линейного дифференциального уравнения в частных производных уравнение направления характеристик будет иметь вид:

$$b \cdot dt - a \cdot dx = 0,$$

а дифференциальное соотношение на характеристиках записывается так:

$$c \cdot dt - a \cdot dY_m = 0.$$

¹ Уравнения линейны, т.к. они линейны относительно неизвестной функции и ее производных.

Подставив выражения для параметров a и b , получим, что семейство кривых, являющихся характеристиками уравнений (5.250а) и (5.250в), описывается соотношением:

$$\frac{dx}{dt} = w(x, t).$$

Построение характеристических кривых, т.е. формирование набора зависимостей $x = x(t, x_0)$ (x_0 – пространственная координата характеристики в начальный момент времени), описывающих данные кривые, фактически равносильно анализу перемещения «лагранжевых» частиц. В этом случае функции $x = x(t, x_0)$ описывают координаты местоположения каждой частицы, имеющей в начальный момент времени пространственную координату x_0 . Другими словами контролирование положения «лагранжевых» частиц имеет смысл построения характеристик.

При подстановке выражений для параметров a и c в соотношение на характеристиках получается, что в каждой точке характеристической кривой выполняются уравнения:

$$0 \cdot dt - dY_m = 0 \text{ без учета диффузии}$$

или

$$\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \cdot dt - dY_m = 0 \text{ с учетом диффузии.}$$

Анализ данных уравнений показывает, что на характеристиках справедливы соотношения:

$$\frac{dY_m}{dt} = 0 \text{ без учета диффузии}$$

или

$$\frac{dY_m}{dt} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \text{ с учетом диффузии.}$$

Из способа построения характеристик следует, что полная производная dY_m/dt , описывающая изменение параметра Y_m на данных кривых, является субстанциональной производной. Другими словами, на характеристиках должны выполняться уравнения (5.250б) без учета диффузии или (см. (5.250в))

$$\frac{DY_m}{Dt} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)$$

с учетом диффузии.

Таким образом, решение уравнений (5.250б) или (5.250в) для каждой «лагранжевой» частицы фактически означает решение дифференциального уравнения, справедливое на характеристической кривой. Что и требовалось доказать.

Вернемся к описанию метода «лагранжевых» частиц. Обозначим шаг по времени на каждом временном слое как

$$\Delta t_{j+1} = t_{j+1} - t_j. \quad (5.251)$$

Тогда алгоритм анализа уравнения неразрывности компонент для неразветвленного канала, по предложению С.Н. Прялова, будет иметь следующий вид.

1. В начальный момент времени по длине канала «размещается» упорядоченный по

возрастанию координат набор частиц (условно назовем их «*лагранжевыми*») на расстоянии друг от друга порядка длины пространственной ячейки разностной сетки. Обязательным условием является то, что первая и последняя частицы в наборе «лежат» на левой (с координатой $x = 0$) и правой (с координатой $x = Length$, где $Length$ – длина канала) границах канала соответственно. Концентрации компонент для данных частиц задаются в результате аппроксимации начальных условий.

2. Рассчитываются гидродинамические параметры течения жидкости на следующем временном слое t_{j+1} (по разностным уравнениям (5.146а, 5.146в)).
3. Для каждой «лагранжевой» частицы для нового момента времени t_{j+1} определяется новая координата по формуле:

$${}_{(p)}x^{j+1} = {}_{(p)}x^j + {}_{(p)}\Delta x^{j+1} = {}_{(p)}x^j + w({}_{(p)}x^j, t_j) \cdot \Delta t_{j+1}, \quad (5.252)$$

где p – номер рассматриваемой «лагранжевой» частицы, ${}_{(p)}x^j$ – координата p -ой частицы в момент времени t_j ; $w({}_{(p)}x^j, t_j)$ – интерполяция (например, линейная) функции скорости в точке ${}_{(p)}x^j$ для распределения, соответствующего моменту времени t_j .

4. «Лажранжевы» частицы, покинувшие канал, уничтожаются. При этом на соответствующей «выходной» границе создается новая частица со значениями концентраций компонент $\{Y_m | m = \overline{1, N_s}\}$, равными интерполированным значениям по ближайшим к границе частицам: внутри канала и вне канала (последняя частица для канала является уничтоженной).
5. Для входной границы создается новая «лагранжева» частица со значениями концентраций компонент $\{Y_m | m = \overline{1, N_s}\}$, соответствующими ГУ. На следующем временном шаге, если расстояние между данной частицей и следующей за ней (по потоку жидкости) меньше заданного расстояния (порядка длины пространственной ячейки), то данная частица удаляется.
6. Если величина t_{j+1} достигла предельного значения, то расчет завершается. В противном случае полагается $j \leftarrow j+1$ и осуществляется переход к шагу 2.

Покажем, что представленный алгоритм позволяет решать задачу моделирования течения многокомпонентной жидкости (5.250) (без учета влияния диффузионных потоков). Поскольку используемые при решении разностные уравнения неразрывности и движения соответствуют исходным дифференциальным уравнениям, рассмотрим уравнение неразрывности компонент.

Исходя из (5.252), имеем:

$$Y_m({}_{(p)}x^{j+1}, t_{j+1}) = Y_m({}_{(p)}x^j, t_j)$$

или

$$Y_m({}_{(p)}x^j + {}_{(p)}\Delta x^{j+1}, t_{j+1}) = Y_m({}_{(p)}x^j, t_j).$$

Вычтем из обеих частей значение $Y_m({}_{(p)}x^j, t_{j+1})$:

$$Y_m({}_{(p)}x^j + {}_{(p)}\Delta x^{j+1}, t_{j+1}) - Y_m({}_{(p)}x^j, t_{j+1}) = Y_m({}_{(p)}x^j, t_j) - Y_m({}_{(p)}x^j, t_{j+1}). \quad (5.253)$$

С другой стороны, из (5.252) следует:

$$\frac{1}{w_{(p)}(x^j, t_j)} \cdot {}_{(p)}\Delta x^{j+1} = \Delta t_{j+1}. \quad (5.254)$$

Поделим левую и правую части (5.253) на левую и правую части (5.254) соответственно.

$$w_{(p)}(x^j, t_j) \cdot \frac{Y_m({}_{(p)}x^j + {}_{(p)}\Delta x^{j+1}, t_{j+1}) - Y_m({}_{(p)}x^j, t_{j+1})}{{}_{(p)}\Delta x^{j+1}} = \frac{Y_m({}_{(p)}x^j, t_j) - Y_m({}_{(p)}x^j, t_{j+1})}{\Delta t_{j+1}}. \quad (5.255)$$

Устремляя ${}_{(p)}\Delta x^{j+1}, \Delta t_{j+1} \rightarrow 0$, получаем исходное уравнение (5.250а). Таким образом, показано, что применение описанного алгоритма позволяет численно решать уравнение неразрывности компонент. При этом предложенный способ решения избавлен от действия схемной вязкости, поскольку изменение концентрации компонент в любой точке пространства происходит только за счет процессов, имеющих физический смысл, а именно, притоков «новых» частиц (с «новыми» концентрациями).

При анализе параметров течения жидкой смеси через сочленение каналов (рек) без учета диффузии применяется математическая модель (5.74*). Здесь символ «*» указывает на то, что в модели (5.74) следует использовать уравнения, обозначенные символом «*» и символом «**».

С учетом описанного материала, «свободный» от «нефизичного» размазывания фронтов у функций $Y_m, m = \overline{1, N_s}$, алгоритм анализа параметров течения многокомпонентной жидкой смеси по разветвленным системам каналов можно записать в виде:

1. В начальный момент времени по длине каждого канала «размещается» упорядоченный по возрастанию координат набор «лагранжевых» частиц на расстоянии друг от друга порядка длины пространственной ячейки расчетной сетки. Обязательным условием является то, что первая и последняя частицы в наборе «лежат» на левой (с координатой $x = 0$) и правой (с координатой $x = {}^{(n)}Length$, где ${}^{(n)}Length$ – длина n -го канала) границах канала соответственно. Концентрации компонент для данных частиц задаются в результате аппроксимации начальных условий.
2. Рассчитываются гидродинамические параметры течения жидкости на следующем временном слое t_{j+1} (по разностным уравнениям (5.146а, 5.146в), а также (5.207а – 5.207г, 5.207и – 5.207л)).
3. Для каждой p -ой «лагранжевой» частицы каждого n -го канала для нового момента времени t_{j+1} определяется новая координата по формуле:

$${}^{(n)}x^{j+1} = {}^{(n)}x^j + {}^{(n)}\Delta x^{j+1} = {}^{(n)}x^j + {}^{(n)}w\left({}_{(p)}x^j, t_j\right) \cdot \Delta t_{j+1}.$$

4. Для каждого канала уничтожаются «лагранжевы» частицы, покинувшие канал. При этом на соответствующей «выходной» границе создается новая частица со значениями концентраций компонент $\{Y_m | m = \overline{1, N_s}\}$, равными интерполированным значениям по ближайшим к границе частицам: внутри канала и вне канала (последняя частица для канала является уничтоженной).
5. Для каждого узла сочленения каналов рассчитываются новые значения концентрации компонент по формуле (5.207ж*).

6. Для входной границы каждого канала создается новая «лагранжева» частица со значениями концентраций компонент $\{Y_m | m = \overline{1, N_s}\}$, соответствующими ГУ (если граница является входной для рассматриваемой системы каналов) или равными значениям концентрации узла сочленения каналов (если граница примыкает к сочленению). На следующем временном шаге, если расстояние между данной частицей и следующей за ней (по потоку жидкости) меньше заданного расстояния (порядка длины пространственной ячейки), то данная частица удаляется.
7. Если величина t_{j+1} достигла предельного значения, то расчет завершается. В противном случае полагается $j \leftarrow j + 1$ и осуществляется переход к шагу 2.

Рассмотрим возможность моделирования влияния диффузии на концентрации компонент смеси. Проводя преобразования, аналогичные (5.248 – 5.250), но с учетом диффузии, можно получить дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial Y_m}{\partial t} + w \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right), \quad m = \overline{1, N_s}, \quad (5.256a)$$

или

$$\frac{DY_m}{Dt} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right), \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (5.256b)$$

Исходя из (5.256b), уравнение неразрывности компонент можно интерпретировать следующим образом: любая частица сплошной среды с некоторыми концентрациями компонент $\{Y_m | m = \overline{1, N_s}\}$ движется по каналу с потоком жидкости, изменяя свой компонентный состав только за счет процессов диффузии.

В первом приближении для получения разностного аналога (5.256b) можно проинтегрировать данное уравнение на отрезке Δt_{j+1} для p -ой частицы:

$${}_{(p)}(Y_m)^{j+1} - {}_{(p)}(Y_m)^j = \Delta t_{j+1} \cdot \overline{\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)}, \quad m = \overline{1, N_s}, \quad (5.257a)$$

или

$${}_{(p)}(Y_m)^{j+1} = {}_{(p)}(Y_m)^j + \Delta t_{j+1} \cdot \overline{\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)}, \quad m = \overline{1, N_s}, \quad (5.257b)$$

где черта над слагаемым в уравнении означает осреднение данного слагаемого на отрезке Δt_{j+1} . Для описания действия диффузионного слагаемого предлагается модифицировать представленный выше алгоритм (здесь рассматривается неразветвленный канал). Как и в указанном алгоритме, на первом этапе будем перемещать «лагранжевы» частицы по потоку жидкости, считая, что действие диффузии отсутствует. На следующем шаге алгоритма учтем действие диффузии на рассматриваемом промежутке времени. Будем считать, что на временном отрезке Δt_{j+1} слагаемое, стоящее в правой части (5.257a), близко к константе. В этом случае

$$\overline{\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_m \cdot f \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right)} \approx \frac{1}{f({}_{(p)}x^{j+1}, t_{j+1})} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)_{(p+0,5)}^{j+1} - \left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)_{(p-0,5)}^{j+1}}{0,5 \cdot \left({}_{(p+1)}x^{j+1} - {}_{(p-1)}x^{j+1} \right)} = \frac{1}{f \left({}_{(p)}x^{j+1}, t_{j+1} \right)} \cdot \frac{2}{\left({}_{(p+1)}x^{j+1} - {}_{(p-1)}x^{j+1} \right)} \times \\
& \times \left[\tilde{D}_m \left({}_{(p+0,5)}x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot f \left({}_{(p+0,5)}x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot \frac{\left(\tilde{Y}_m \right)_{(p+1)}^{j+1} - \left(\tilde{Y}_m \right)_{(p)}^{j+1}}{{}_{(p+1)}x^{j+1} - {}_{(p)}x^{j+1}} - \right. \\
& \left. - \tilde{D}_m \left({}_{(p-0,5)}x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot f \left({}_{(p-0,5)}x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot \frac{\left(\tilde{Y}_m \right)_{(p)}^{j+1} - \left(\tilde{Y}_m \right)_{(p-1)}^{j+1}}{{}_{(p)}x^{j+1} - {}_{(p-1)}x^{j+1}} \right]. \quad (5.258a)
\end{aligned}$$

При построении (5.258a) полагалось, что

$${}_{(p+0,5)}x^{j+1} \approx 0,5 \cdot \left({}_{(p)}x^{j+1} + {}_{(p+1)}x^{j+1} \right); \quad (5.258б)$$

$${}_{(p-0,5)}x^{j+1} \approx 0,5 \cdot \left({}_{(p-1)}x^{j+1} + {}_{(p)}x^{j+1} \right). \quad (5.258в)$$

Запись $\left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)_{(p+0,5)}^{j+1}$ означает аппроксимацию (для момента времени t_{j+1}) выражения, стоящего в скобках, для некоторой «лагранжевой» частицы (обозначим ее с помощью индекса $(p+0,5)$), располагающейся между p -ой и $(p+1)$ -ой «лагранжевыми» частицами. Волна над символами Y_m и D_m говорит о том, что используются распределения, получившиеся после первого шага алгоритма. Записи $f(\dots, \dots)$ и $D_m(\dots, \dots)$ выражают функциональные зависимости (интерполяцию) от соответствующих переменных. Для слагаемых, соответствующих «лагранжевой» частице $(p-0,5)$, применяются аналогичные обозначения.

К сожалению, разностное уравнение (5.257, 5.258) не является консервативным. Для доказательства этого факта введем величину:

$${}_{(p)}V(t) = \int_{[{}_{(p-0,5)}x(t)]}^{[{}_{(p+0,5)}x(t)]} f(x, t) dx, \quad (5.259)$$

где ${}_{(p \pm 0,5)}x(t)$ – координаты «лагранжевых» частиц $(p \pm 0,5)$ для момента времени t . По условию построения набора «лагранжевых» частиц с целыми номерами (см. выше), выполняется неравенство:

$${}_{(p-0,5)}x(t) < {}_{(p+0,5)}x(t). \quad (5.260)$$

Величина ${}_{(p)}V(t)$, по сути, является объемом жидкости, ограниченным поверхностью русла, свободной поверхностью потока и поперечными сечениями потока, соответствующими частицам $(p-0,5)$ и $(p+0,5)$. С физической точки зрения, значение ${}_{(p)}V(t)$ не меняется во времени. Это объясняется тем, что отсутствует поток жидкости через границы данного объема. Данное утверждение формально можно доказать, рассмотрев производную по времени от функции ${}_{(p)}V(t)$. Используя правило дифференцирования интеграла по параметру [89], имеем:

$$\frac{d \left[{}_{(p)}V(t) \right]}{dt} = \int_{[{}_{(p-0,5)}x(t)]}^{[{}_{(p+0,5)}x(t)]} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx + \\ + f \left({}_{(p+0,5)}x(t), t \right) \cdot \frac{d \left[{}_{(p+0,5)}x(t) \right]}{dt} - f \left({}_{(p-0,5)}x(t), t \right) \cdot \frac{d \left[{}_{(p-0,5)}x(t) \right]}{dt}. \quad (5.261a)$$

Учитывая, что частицы $(p-0,5)$ и $(p+0,5)$ – «лагранжевы» (двигаются с потоком жидкости), последнее уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{d \left[{}_{(p)}V(t) \right]}{dt} = \int_{[{}_{(p-0,5)}x(t)]}^{[{}_{(p+0,5)}x(t)]} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx + Q \left({}_{(p+0,5)}x(t), t \right) - Q \left({}_{(p-0,5)}x(t), t \right), \quad (5.261b)$$

где $Q = f \cdot w$ – объемный расход. Анализ (5.261b) показывает, что правая часть данного уравнения является законом сохранения массы (5.38a), проинтегрированным по отрезку $[{}_{(p-0,5)}x(t), {}_{(p+0,5)}x(t)]$. Отсюда следует искомое утверждение:

$$\frac{d \left[{}_{(p)}V(t) \right]}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad {}_{(p)}V(t) = \text{const}. \quad (5.262)$$

Вернемся к анализу консервативности разностного уравнения (5.257, 5.258). Представленный выше алгоритм учета диффузии при моделировании течения жидкости по каналам с открытым руслом можно характеризовать следующими шагами.

Шаг 1. Расчет параметров течения, определяемого только конвекцией. На этом шаге, фактически, проводится анализ перемещения каждого объема ${}_{(p)}V$. Данный анализ базируется на контроле перемещения граничных поперечных сечений объема (соответствующих «лагранжевым» частицам $(p-0,5)$ и $(p+0,5)$)¹, а также базового сечения этого объема (соответствующего p -ой «лагранжевой» частице). На этом шаге, по условию постановки задачи, концентрации компонент в каждом рассмотренном сечении не меняются (см. выше).

Шаг 2. Учет диффузии. Здесь рассматривается так называемый «замороженный» поток. При этом считается, что движение жидкости отсутствует, распределение высоты свободной поверхности потока по длине канала является фиксированным и соответствующим шагу 1. По распределению концентраций, полученному на шаге 1, проводится расчет диффузионных потоков через поперечные сечения $(p-0,5)$ и $(p+0,5)$. Далее, предполагая, что расстояние между данными поперечными сечениями и диффузионные потоки через эти сечения за временной шаг Δt_{j+1} изменились незначительно, проводится анализ изменения за счет диффузии средних по объему концентраций компонент.

Проведем анализ дифференциального уравнения (5.256б). Умножим его на $(\rho \cdot f)$ и проинтегрируем на отрезке $[{}_{(p-0,5)}x(t), {}_{(p+0,5)}x(t)]$:

¹ Далее будем обозначать данные поперечные сечения номерами соответствующих им лагранжевых частиц.

$$\int_{[(p-0,5)x(t_{j+1})]^{[(p+0,5)x(t_{j+1})]}} \rho \cdot f(x, t_{j+1}) \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial t} dx = \int_{[(p-0,5)x(t_{j+1})]^{[(p+0,5)x(t_{j+1})]}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot \tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right) dx, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (5.263)$$

Поскольку на данном шаге рассматривается «замороженный» поток, в (5.263) присутствует частная производная $\partial Y_m / \partial t$ вместо субстанциональной производной DY_m / Dt , а над параметрами Y_m и D_m в правой части соотношения поставлен символ «~». Учитывая то, что все параметры в (5.263), кроме концентраций компонент, не зависят от времени (т.е. на текущем шаге алгоритма не изменяются), распишем левый интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{[(p-0,5)x(t_{j+1})]^{[(p+0,5)x(t_{j+1})]}} \rho \cdot f(x, t_{j+1}) \cdot \frac{\partial Y_m}{\partial t} dx &= \int_{[(p-0,5)x(t_{j+1})]^{[(p+0,5)x(t_{j+1})]}} \frac{\partial (\rho \cdot Y_m \cdot f(x, t_{j+1}))}{\partial t} dx = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{[(p-0,5)x(t_{j+1})]^{[(p+0,5)x(t_{j+1})]}} \rho \cdot Y_m \cdot f(x, t_{j+1}) dx \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{[(p-0,5)x(t_{j+1})]^{[(p+0,5)x(t_{j+1})]}} \rho_m \cdot f(x, t_{j+1}) dx \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{[(p-0,5)x(t_{j+1})]^{[(p+0,5)x(t_{j+1})]}} \rho_m(x, t_{j+1}) dV(x) \right) = \frac{\partial [(p)M_m(t_{j+1})]}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5.264)$$

где $\rho_m = \rho \cdot Y_m$ (см. (5.32)) – средняя по поперечному сечению приведенная плотность m -ой компоненты (масса m -ой компоненты в единице объема); $dV(x) = f(x, t_{j+1}) \cdot dx$ – элементарный объем жидкости, ограниченный поперечными сечениями потока на расстоянии dx , поверхностью русла канала и свободной поверхностью жидкости; $(p)M_m(t)$ – масса m -ой компоненты в объеме $(p)V$:

$$(p)M_m(t) = \int_{[(p-0,5)x(t)]^{[(p+0,5)x(t)]}} \rho_m(x, t) dV(x) = \int_{[(p-0,5)x(t)]^{[(p+0,5)x(t)]}} \rho \cdot Y_m \cdot f(x, t) dx. \quad (5.265)$$

Подставляя (5.264) в (5.263) и беря интеграл в правой части (5.263), получим:

$$\frac{\partial [(p)M_m]^{j+1}}{\partial t} = \left(\rho \cdot \tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)_{(p+0,5)}^{j+1} - \left(\rho \cdot \tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)_{(p-0,5)}^{j+1}, \quad (5.266)$$

где правый верхний индекс у производной по времени указывает на то, что данная производная относится к моменту времени t_{j+1} . Уравнение (5.266) позволяет отразить физическую сущность шага 2. Оно характеризует один из законов сохранения (закона сохранения массы m -ой компоненты). При рассмотрении «замороженного» потока масса m -ой компоненты в объеме $(p)V$ должна меняться только за счет диффузионных потоков данной компоненты через границы объема.

Для корректного построения разностного аналога (5.266) введем средние значения по объему $(p)V$ площади поперечного сечения $(v_p)\bar{f}(t)$ и концентрации m -ой компоненты $(v_p)\bar{Y}_m(t)$:

$${}_{(vp)}\bar{f}(t) = \frac{{}_{(p)}V}{({}_{p+0,5})x(t) - ({}_{p-0,5})x(t)}; \quad (5.267a)$$

$${}_{(vp)}\bar{Y}_m(t) = \frac{{}_{(p)}M_m(t)}{\rho \cdot {}_{(p)}V} = \frac{\int_{[({}_{p-0,5})x(t)]}^{[({}_{p+0,5})x(t)]} Y_m \cdot f(x, t) dx}{\int_{[({}_{p-0,5})x(t)]}^{[({}_{p+0,5})x(t)]} f(x, t) dx} = {}_{(p)}Y_m(t). \quad (5.267б)$$

Будем относить среднее по объему ${}_{(p)}V$ значение концентрации m -ой компоненты ${}_{(vp)}\bar{Y}_m(t)$ к p -ой «лагранжевой» частице. С учетом введенных параметров, а также формулы $({}_{(p)}M_m(t) = {}_{(p)}V \cdot {}_{(p)}\rho_m(t) = {}_{(p)}V \cdot {}_{(p)}Y_m(t) \cdot \rho)$ (см. (5.267б)), уравнение (5.266) представимо в виде:

$${}_{(p)}V \cdot \frac{\partial [{}_{(p)}Y_m]^{j+1}}{\partial t} = \left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)_{(p+0,5)}^{j+1} - \left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)_{(p-0,5)}^{j+1}. \quad (5.268)$$

Проинтегрируем данное уравнение на отрезке Δt_{j+1} :

$${}_{(p)}V \cdot [{}_{(p)}Y_m(t_{j+1}) - {}_{(p)}Y_m(t_j)] = \Delta t_{j+1} \cdot \left[\left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)_{(p+0,5)}^{j+1} - \left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)_{(p-0,5)}^{j+1} \right]. \quad (5.269)$$

Среднее значение интеграла от правой части (5.268) будем относить к распределению параметров на $(j+1)$ -ом слое по времени, соответствующему окончанию первого шага алгоритма.

При условии «дивергентной» аппроксимации диффузионных потоков¹, консервативный аналог уравнения (5.257, 5.258) будет выглядеть следующим образом:

$${}_{(p)}(Y_m)^{j+1} = {}_{(p)}(Y_m)^j + \frac{\Delta t_{j+1}}{({}_{(p)}V)} \cdot \left[\left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)_{(p+0,5)}^{j+1} - \left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)_{(p-0,5)}^{j+1} \right], \quad m = \overline{1, N_s}, \quad (5.270a)$$

или

$${}_{(p)}(Y_m)^{j+1} = {}_{(p)}(Y_m)^j + \frac{\Delta t_{j+1}}{({}_{(p)}\bar{f}(t_{j+1}))} \cdot \frac{\left[\left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)_{(p+0,5)}^{j+1} - \left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)_{(p-0,5)}^{j+1} \right]}{({}_{p+0,5})x^{j+1} - ({}_{p-0,5})x^{j+1}}, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (5.270б)$$

Сравнение уравнений (5.270б) и (5.257, 5.258) показывает, что уравнение (5.257, 5.258) может быть консервативным, если:

- 1) аппроксимация (5.258б, 5.258в) совпадет с реальными координатами «лагранжевых» частиц $(p-0,5)$ и $(p+0,5)$;
- 2) аппроксимация среднего на отрезке $[({}_{p-0,5})x(t), ({}_{p+0,5})x(t)]$ значения величины $1/f$ будет равна значению $1/[(p)\bar{f}(t)]$, другими словами (см. (5.258а)) – в случае выполнения равенства $f({}_{(p)}x^{j+1}, t_{j+1}) = (p)\bar{f}(t_{j+1})$.

¹ Их аппроксимация должна совпадать на общих границах соседних ячеек разностной сетки

В противном случае аппроксимация объема ${}_{(p)}V$ будет не равна его точному значению. Строго говоря, данная аппроксимация

$${}_{(p)}\tilde{V}^{j+1} = f\left({}_{(p)}x^{j+1}, t_{j+1}\right) \cdot \frac{{}_{(p+1)}x^{j+1} - {}_{(p-1)}x^{j+1}}{2} \neq {}_{(p)}\bar{f}^{j+1} \cdot \left({}_{(p+0,5)}x^{j+1} - {}_{(p-0,5)}x^{j+1}\right) = {}_{(p)}V \quad (5.271)$$

будет отличаться от точного значения на величину, имеющую порядок погрешности аппроксимации разностной схемы. Перепишем (5.257б) для m -ой компоненты с учетом (5.258а):

$${}_{(p)}(Y_m)^{j+1} = {}_{(p)}(Y_m)^j + \frac{\Delta t_{j+1}}{f\left({}_{(p)}x^{j+1}, t_{j+1}\right)} \cdot \frac{\left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x}\right)^{j+1}_{(p+0,5)} - \left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x}\right)^{j+1}_{(p-0,5)}}{0,5 \cdot \left({}_{(p+1)}x^{j+1} - {}_{(p-1)}x^{j+1}\right)} \quad (5.272a)$$

или (см. (5.271))

$${}_{(p)}(Y_m)^{j+1} = {}_{(p)}(Y_m)^j + \frac{\Delta t_{j+1}}{{}_{(p)}\tilde{V}^{j+1}} \cdot \left[\left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x}\right)^{j+1}_{(p+0,5)} - \left(\tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x}\right)^{j+1}_{(p-0,5)} \right]. \quad (5.272б)$$

Умножим (5.272б) на $\left(\rho \cdot {}_{(p)}V / \Delta t_{j+1}\right)$, применяя формулу (5.267б):

$$\frac{{}_{(p)}M_m^{j+1} - {}_{(p)}M_m^j}{\Delta t_{j+1}} = \frac{{}_{(p)}V}{{}_{(p)}\tilde{V}^{j+1}} \cdot \left[\left(\rho \cdot \tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x}\right)^{j+1}_{(p+0,5)} - \left(\rho \cdot \tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x}\right)^{j+1}_{(p-0,5)} \right] \quad (5.273)$$

или

$$\frac{{}_{(p)}M_m^{j+1} - {}_{(p)}M_m^j}{\Delta t_{j+1}} = \left[\left(\rho \cdot \tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x}\right)^{j+1}_{(p+0,5)} - \left(\rho \cdot \tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x}\right)^{j+1}_{(p-0,5)} \right] + \Delta, \quad (5.274a)$$

где

$$\Delta = \frac{{}_{(p)}V - {}_{(p)}\tilde{V}^{j+1}}{{}_{(p)}\tilde{V}^{j+1}} \cdot \left[\left(\rho \cdot \tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x}\right)^{j+1}_{(p+0,5)} - \left(\rho \cdot \tilde{D}_m \cdot f \cdot \frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x}\right)^{j+1}_{(p-0,5)} \right]. \quad (5.274б)$$

Анализ (5.274) показал, что использование (5.257б, 5.258) приводит к следующему: масса m -ой компоненты в объеме ${}_{(p)}V$ меняется не только за счет диффузионных потоков через границы объема, но и за счет «нефизичного» слагаемого Δ , имеющего чисто разностную природу¹. Таким образом, показано, что **разностное уравнение (5.257б, 5.258) в общем случае не консервативно**.

Для решения возникшей проблемы с консервативностью предлагается при моделировании заменить уравнение (5.257, 5.258а) на уравнение (5.270б). В этом случае потребуется дополнительное введение частиц с полуцелыми индексами (такие «лагранжевы» частицы будут обозначаться термином «вспомогательные»). «Лагранжевы» частицы с целыми индексами назовем «базовыми». Также дополнительно потребуется однократный расчет значения каждого объема ${}_{(p)}V$, содержащего p -ую базовую «ла-

¹ Другими словами, объем здесь является переменным. Он изменяется только за счет слагаемых чисто разностной природы. В связи с этим приток массы, обусловленной диффузией, осредняется по объему, не соответствующему исходному состоянию. Поэтому результирующие значения концентраций будут отличаться от значений, соответствующих консервативному аналогу.

гранжеву» частицу. При этом для обеспечения консервативности несущественно, по какой аппроксимационной формуле проводить данный расчет. Например, для подобной цели может служить формула:

$$({}_p)V = f\left({}_pX^{j=0}, t_{j=0}\right) \cdot \frac{\left({}_{(p+1)}X^{j=0} - {}_{(p-1)}X^{j=0}\right)}{2}. \quad (5.275)$$

Аппроксимация значения $({}_p)V$ может быть произвольной. Главное, чтобы одно и то же значение $({}_p)V$ присутствовало на всех временных слоях. Соответствующий формуле (5.275) однократный выбор вспомогательных «лагранжевых» частиц может быть произведен при использовании формулы:

$$({}_{p\pm 0,5})X^{j=0} = 0,5 \cdot \left({}_pX^{j=0} + {}_{(p\pm 1)}X^{j=0}\right). \quad (5.276)$$

Отметим, что вспомогательные «лагранжевы» частицы (в отличие от базовых «лагранжевых» частиц) необходимы лишь для того, чтобы следить за перемещениями границ объема $({}_p)V$. По данной причине, кроме координат местоположения данных «лагранжевых» частиц, никаких параметров в соответствующих им поперечных сечениях знать не требуется.

Окончательно, рассчитав на первом шаге алгоритма местоположение базовых и вспомогательных «лагранжевых» частиц, вычислить на втором шаге алгоритма концентрацию каждой m -ой компоненты для каждой p -ой «лагранжевой» частицы (равна среднему значению концентрации для объема $({}_p)V$) можно по формуле:

$$\begin{aligned} ({}_p)(Y_m)^{j+1} = & ({}_p)(\tilde{Y}_m)^{j+1} + \frac{\Delta t_{j+1}}{({}_{(Vp)})\bar{f}^{j+1} \cdot \left({}_{(p+0,5)}X^{j+1} - {}_{(p-0,5)}X^{j+1}\right)} \times \\ & \times \left[\tilde{D}_m\left({}_{(p+0,5)}X^{j+1}, t_{j+1}\right) \cdot f\left({}_{(p+0,5)}X^{j+1}, t_{j+1}\right) \cdot \frac{({}_{(p+1)}\tilde{Y}_m)^{j+1} - ({}_p)\tilde{Y}_m^{j+1}}{({}_{(p+1)}X^{j+1} - ({}_p)X^{j+1}} - \right. \\ & \left. - \tilde{D}_m\left({}_{(p-0,5)}X^{j+1}, t_{j+1}\right) \cdot f\left({}_{(p-0,5)}X^{j+1}, t_{j+1}\right) \cdot \frac{({}_{(p)}\tilde{Y}_m)^{j+1} - ({}_{(p-1)})\tilde{Y}_m^{j+1}}{({}_{(p)}X^{j+1} - ({}_{(p-1)})X^{j+1}} \right], \quad m = \overline{1, N_s}, \end{aligned} \quad (5.277)$$

где (см. (5.267a))

$$({}_{(Vp)})\bar{f}^{j+1} = \frac{({}_p)V}{\left({}_{(p+0,5)}X^{j+1} - {}_{(p-0,5)}X^{j+1}\right)}. \quad (5.278)$$

Заметим, что по условию выполнения первого шага алгоритма $({}_p)(\tilde{Y}_m)^{j+1} = ({}_p)(Y_m)^j$. С учетом этого формулу (5.277) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} ({}_p)(Y_m)^{j+1} = & ({}_p)(Y_m)^j + \frac{\Delta t_{j+1}}{({}_{(Vp)})\bar{f}^{j+1} \cdot \left({}_{(p+0,5)}X^{j+1} - {}_{(p-0,5)}X^{j+1}\right)} \times \\ & \times \left[\tilde{D}_m\left({}_{(p+0,5)}X^{j+1}, t_{j+1}\right) \cdot f\left({}_{(p+0,5)}X^{j+1}, t_{j+1}\right) \cdot \frac{({}_{(p+1)}Y_m)^j - ({}_p)Y_m^j}{({}_{(p+1)}X^{j+1} - ({}_p)X^{j+1}} - \right. \\ & \left. - \tilde{D}_m\left({}_{(p-0,5)}X^{j+1}, t_{j+1}\right) \cdot f\left({}_{(p-0,5)}X^{j+1}, t_{j+1}\right) \cdot \frac{({}_{(p)}Y_m)^j - ({}_{(p-1)})Y_m^j}{({}_{(p)}X^{j+1} - ({}_{(p-1)})X^{j+1}} \right], \quad m = \overline{1, N_s}. \end{aligned} \quad (5.279)$$

При анализе параметров течения жидкой смеси через сочленение каналов (рек) применяется математическая модель (5.74).

Получим формулы, позволяющие решать уравнения неразрывности компонент для узла сочленения с учетом диффузии, используя метод «лагранжевых» частиц. Трехмерное уравнение неразрывности компоненты имеет вид (см. (5.46)):

$$\frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\hat{Y}_m \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\hat{D}_m \cdot \vec{\nabla} \hat{Y}_m) = 0, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (5.280)$$

Для каждого элементарного приращения по времени dt элементарное приращение по удельной массовой концентрации можно представить в виде:

$$d\hat{Y}_m = d\hat{Y}_m^{\text{конвекция}} + d\hat{Y}_m^{\text{диффузия}}, \quad (5.281a)$$

где

$$d\hat{Y}_m^{\text{конвекция}} = -\vec{\nabla} \cdot (\hat{Y}_m \cdot \vec{v}) \cdot dt; \quad d\hat{Y}_m^{\text{диффузия}} = \vec{\nabla} \cdot (\hat{D}_m \cdot \vec{\nabla} \hat{Y}_m) \cdot dt. \quad (5.281b)$$

Ранее было показано, что для решения уравнения неразрывности компонент без учета диффузии достаточно перемещать «лагранжевы» частицы с потоком жидкости. Для малых промежутков по времени Δt процессы диффузии и конвекции можно условно считать независимыми. Алгоритм расчета значений концентрации компонент в узле сочленения разобьем на два шага.

1. **«Конвективный» шаг.** На данном шаге будем определять значение концентрации компонент в узле сочленения (объеме ${}^{(0)}V$) по модели течения смеси без учета диффузии (см. (5.73в)).

$${}^{(k)}(\tilde{Y}_m) = {}^{(0)}(\tilde{Y}_m) = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} \binom{(n)}{(\tilde{Y}_m)} \cdot \binom{(n)}{|w|} \cdot \binom{(n)}{f}}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}} \binom{(n)}{|w|} \cdot \binom{(n)}{f}} \quad \text{для любых } k \in \mathbb{C}_{\text{OUT}}, \quad m = \overline{1, N_s}, \quad (5.282)$$

где $\binom{(n)}{(\tilde{Y}_m)}$, $n \in \mathbb{C}_{\text{IN}}$ – значения концентрации m -ой компоненты в примыкающих к объему ${}^{(0)}V$ сечениях «подводящих» каналов. Значения указанной концентрации рассчитываются с использованием уравнения неразрывности компонент без учета диффузии (т.е. получаются по алгоритму с учетом перемещения «лагранжевых» частиц). На данном этапе считается, что смесь в объеме ${}^{(0)}V$ мгновенно перемешивается (в (5.282) концентрация m -ой компоненты в объеме обозначена через ${}^{(0)}\tilde{Y}_m$). Однако в «подводящих» каналах концентрация компонент зависит от параметров потока по данным каналам и не равна значению ${}^{(0)}\tilde{Y}_m$. Это объясняется тем (см. выше), что, согласно используемой на данном этапе модели, вещество переносится только конвективным потоком, следовательно, из объема ${}^{(0)}V$ смесь на концентрацию компонент «подводящих» каналов влиять не может. Если в (5.281) переходить от элементарных приращений по времени dt к конечным приращениям по времени Δt_{j+1} , то, перенося идеологию (5.281) на конечные приращения искомых параметров, можно считать, что данный этап соответствует этапу определения величины $(\Delta Y_m^{\text{конвекция}})^{j+1}$. Таким образом, величину ${}^{(0)}(\tilde{Y}_m)^{j+1}$ можно выразить в виде:

$$^{(0)}(\tilde{Y}_m)^{j+1} = ^{(0)}(Y_m)^j + (\Delta Y_m^{\text{конвекция}})^{j+1}, \quad m = \overline{1, N_s}. \quad (5.283)$$

2. **«Диффузионный» шаг.** На данном шаге происходит учет влияния на концентрацию компонент диффузионных потоков. Пусть для каждого канала ближайшая к сочленению базовая «лагранжева» частица¹ имеет индекс L . Пусть ближайшая к ней внутренняя базовая частица имеет индекс M . Таким образом, их координаты на $(j+1)$ -ом слое по времени в каждом n -ом канале будут обозначаться в виде: $^{(n)}_{(L)}x^{j+1}$ и $^{(n)}_{(M)}x^{j+1}$ соответственно. Отсюда вспомогательная «лагранжева» частица, располагающаяся между базовыми частицами L и M , имеет индекс, равный $0,5 \cdot [L + M]$. Выделим объем смеси V , ограниченный стенками русла, свободной поверхностью потока и поперечными сечениями каналов, соответствующими координатам $^{(n)}_{(0,5[L+M])}x^{j+1}$, $n = \overline{1, N}$. Обозначим поверхность объема V через S . Значение объема V можно рассчитать по следующей формуле:

$$V = \sum_{n=1}^N {}^{(n)}_{(L)}V, \quad (5.284)$$

где $^{(n)}_{(L)}V$ – объем жидкости, соответствующий L -ой базовой частице. Данный объем образуется жидкостью, ограниченной руслом канала, свободной поверхностью жидкости и поперечными сечениями, проходящими через вспомогательные «лагранжевы» частицы, соседние с базовой. Поскольку L -ая базовая частица «лежит» на границе канала, одна из соседних вспомогательных частиц (внешняя по отношению к каналу) имеет координату, равную $^{(n)}_{(L)}x^{j+1}$ (см. ниже). Это объясняется используемым алгоритмом решения.

Проинтегрируем второе уравнение (5.281б) по данному объему. С учетом отсутствия диффузионных потоков через свободную поверхность и стенки русла канала, указанное уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta Y_m^{\text{диффузия}} \cdot \iiint_V dV &= \Delta t \cdot \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\hat{D}_m \cdot \vec{\nabla} \hat{Y}_m) dV = \Delta t \cdot \iint_S \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial n} dS = \\ &= -\Delta t \cdot \sum_{n=1}^N \left(\iint_{f\left({}^{(n)}_{(0,5 \cdot [L+M])}x^{j+1}, t_{j+1}\right)} \hat{D}_m \cdot \frac{\partial \hat{Y}_m}{\partial x} \cdot s df \right) = \\ &= -\Delta t \cdot \sum_{n=1}^N \left(\left({}^{(n)}_{(0,5[L+M])}(\tilde{D}_m)^{j+1} \cdot {}^{(n)}_{(0,5[L+M])} \left(\frac{\partial \tilde{Y}_m}{\partial x} \right)^{j+1} \cdot {}^{(n)}_{(0,5[L+M])} f^{j+1} \cdot s \right) \right) = \\ &= -\Delta t \cdot \sum_{n=1}^N \left[\tilde{D}_m \left({}^{(n)}_{(0,5[L+M])}x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot \frac{{}^{(L)}_{(L)}(\tilde{Y}_m)^{j+1} - {}^{(M)}_{(M)}(\tilde{Y}_m)^{j+1}}{{}^{(L)}_{(L)}x^{j+1} - {}^{(M)}_{(M)}x^{j+1}} \cdot f \left({}^{(n)}_{(0,5[L+M])}x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot s \right], \end{aligned} \quad (5.285)$$

где $\Delta Y_m^{\text{диффузия}}$ – изменение средней по объему V концентрации m -ой компоненты, вы-

¹ Данные частицы, в соответствии с применяемым алгоритмом, лежат на примыкающих к сочленению границах каналов.

званное процессом, соответствующим второй формуле (5.281б). По аналогии с (5.283) данный шаг алгоритма можно выразить в виде:

$$^{(0)}(Y_m)^{j+1} = ^{(0)}(\tilde{Y}_m)^{j+1} + (\Delta Y_m^{\text{диффузия}})^{j+1} = ^{(0)}(Y_m)^j + (\Delta Y_m^{\text{конвекция}})^{j+1} + (\Delta Y_m^{\text{диффузия}})^{j+1}. \quad (5.286)$$

Таким образом, получен «свободный» от нефизичного «размазывания» фронтов волновых процессов алгоритм численного анализа уравнения неразрывности компонент с учетом диффузии для узла сочленения каналов.

Отметим, что предложенный способ учета диффузии в окрестности узла сочленения (по аналогии с первым способом для неразветвленного канала (см. выше)), обладает недостатком, связанным с отсутствием консервативности. Однако из-за малого размера объема V по сравнению с размерами каналов, примыкающих к узлу сочленения, здесь будем пренебрегать погрешностью, вызванной данной некорректностью.

Общий алгоритм моделирования течения с учетом диффузии многокомпонентной жидкости по разветвленным каналам с открытым руслом с использованием метода «лагранжевых» частиц можно представить в следующем виде (по С.Н. Прялову).

1. В начальный момент времени по длине каждого n -го канала ($n = \overline{1, N}$) «размещается» упорядоченный по возрастанию координат набор базовых «лагранжевых» частиц (с нумерацией $p = \overline{1, {}^{(n)}N_{\text{Lagr}}}$) количеством ${}^{(n)}N_{\text{Lagr}}$ на расстоянии друг от друга порядка длины пространственной ячейки расчетной сетки. Обязательным условием является то, что базовые «лагранжевы» частицы с номерами $p = 1$ и $p = {}^{(n)}N_{\text{Lagr}}$ «лежат» на левой (с координатой $x = 0$) и правой (с координатой $x = {}^{(n)}Length$, где ${}^{(n)}Length$ – длина n -го канала) границах канала соответственно. Концентрации компонент для базовых частиц задаются в результате аппроксимации начальных условий. В соответствии с размещением базовых «лагранжевых» частиц «размещается» набор вспомогательных «лагранжевых» частиц с координатами:

$${}_{(p+0,5)}^{(n)}x^{j=0} = 0,5 \cdot \left({}_{(p)}^{(n)}x^{j=0} + {}_{(p+1)}^{(n)}x^{j=0} \right), \quad p = \overline{1, {}^{(n)}N_{\text{Lagr}} - 1}, \quad (5.287)$$

где ${}_{(p)}^{(n)}x^j$ – координата p -ой базовой «лагранжевой» частицы, принадлежащей n -му каналу, для j -го момента времени; ${}_{(p+0,5)}^{(n)}x^j$ – координата вспомогательной «лагранжевой» частицы $(p+0,5)$, принадлежащей n -му каналу, для j -го момента времени. Левая вспомогательная «лагранжева» частица (с индексом 0,5) вводится согласно формуле:

$${}_{(0,5)}^{(n)}x^{j=0} = {}_{(0)}^{(n)}x^{j=0} = 0. \quad (5.288a)$$

Для правой вспомогательной «лагранжевой» частицы (с координатой $({}^{(n)}N_{\text{Lagr}} + 0,5)$) аналогичная формула имеет вид:

$${}_{(p+0,5)}^{(n)}x^{j=0} = {}_{(p)}^{(n)}x^{j=0} = {}^{(n)}Length, \quad p = {}^{(n)}N_{\text{Lagr}}. \quad (5.288б)$$

Левая и правая вспомогательные «лагранжевы» частицы фактически являются внешними по отношению к каналу. Аналогично вводятся объемы жидкости, соответствующие каждой p -ой базовой «лагранжевой» частице:

$${}^{(n)}_{(p)}V = {}^{(n)}f\left({}^{(n)}_{(p)}x^{j=0}, t_{j=0}\right) \cdot \left({}^{(n)}_{(p+0,5)}x^{j=0} - {}^{(n)}_{(p-0,5)}x^{j=0}\right). \quad (5.289)$$

2. Рассчитываются гидродинамические параметры течения жидкости на следующем временном слое t_{j+1} (по разностным уравнениям (5.146а, 5.146в), (5.207а – 5.207г, 5.207и – 5.207л)).
3. Для каждой p -ой базовой «лагранжевой» частицы каждого n -го канала для нового момента времени t_{j+1} определяется новая координата по формуле:

$${}^{(n)}_{(p)}x^{j+1} = {}^{(n)}_{(p)}x^j + {}^{(n)}_{(p)}\Delta x^{j+1} = {}^{(n)}_{(p)}x^j + {}^{(n)}w\left({}^{(n)}_{(p)}x^j, t_j\right) \cdot \Delta t_{j+1}. \quad (5.290а)$$

Аналогичная формула для вспомогательной «лагранжевой» частицы имеет вид:

$${}^{(n)}_{(p+0,5)}x^{j+1} = {}^{(n)}_{(p+0,5)}x^j + {}^{(n)}_{(p+0,5)}\Delta x^{j+1} = {}^{(n)}_{(p+0,5)}x^j + {}^{(n)}w\left({}^{(n)}_{(p+0,5)}x^j, t_j\right) \cdot \Delta t_{j+1}. \quad (5.290б)$$

Концентрации компонент базовых «лагранжевых» частиц на данном этапе обозначим через $\{\tilde{Y}_m | m = \overline{1, N_s}\}$.

4. Для каждого канала уничтожаются базовые «лагранжевы» частицы, покинувшие канал, и соответствующие им объемы ${}^{(n)}_{(p)}V$. Также уничтожаются вспомогательные «лагранжевы» частицы, соседние с ликвидированной базовой «лагранжевой» частицей. При этом на соответствующей «выходной» границе создается новая базовая частица со значениями концентраций компонент $\{\tilde{Y}_m | m = \overline{1, N_s}\}$, равными интерполированным значениям по ближайшим к границе «базовым» частицам: внутри канала и вне канала (вторая базовая частица для канала является уничтоженной). Пусть созданная базовая частица имеет номер L . Пусть также ближайшая к ней базовая «лагранжева» частица внутри канала имеет номер M . Создается внутренняя вспомогательная «лагранжева» частица с координатой:

$${}^{(n)}_{(0,5[L+M])}x^{j+1} = 0,5 \cdot \left({}^{(n)}_{(L)}x^{j+1} + {}^{(n)}_{(M)}x^{j+1}\right), \quad (5.291а)$$

а также внешняя вспомогательная «лагранжева» частица (см. для аналогии (5.288)), согласно формуле:

$${}^{(n)}_{(2 \cdot L - 0,5[L+M])}x^{j+1} = {}^{(n)}_{(L)}x^{j+1}. \quad (5.291б)$$

Значения индекса $(2 \cdot L - 0,5[L+M])$ равно 0,5 для левой границы (соответствует внешней «вспомогательной» частице для левой границы канала: $L = 1$; $M = 2$). Значение данного индекса равно $(L + 0,5)$ для правой границы (соответствует внешней «вспомогательной» частице для правой границы канала: $L = M + 1$). Для L -ой и M -ой частиц рассчитываются соответствующие значения объемов ${}^{(n)}_{(L)}V$ и ${}^{(n)}_{(M)}V$ по формуле:

$${}^{(n)}_{(p)}V = {}^{(n)}f\left({}^{(n)}_{(p)}x^{j+1}, t_{j+1}\right) \cdot \left({}^{(n)}_{(p+0,5)}x^{j+1} - {}^{(n)}_{(p-0,5)}x^{j+1}\right). \quad (5.292)$$

5. Для каждого узла сочленения каналов рассчитываются значения концентрации ком-

понент по формулам (см. (5.285, 5.286)).

$${}^{(0)}(\tilde{Y}_m)^{j+1} = \frac{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} \left({}_{(L)}(\tilde{Y}_m)^{j+1} \cdot |w_{LM}^{j+1}| \cdot f_{LM[U_p]}^{j+1} \right)}{\sum_{n \in \mathbb{C}_{IN}} {}^{(n)} \left(|w_{LM}^{j+1}| \cdot f_{LM[U_p]}^{j+1} \right)}, \quad m = \overline{1, N_S}; \quad (5.293a)$$

$$\begin{aligned} {}^{(0)}(Y_m)^{j+1} &= {}^{(0)}(\tilde{Y}_m)^{j+1} - \Delta t_{j+1} \times \\ &\times \sum_{n=1}^N {}^{(n)} \left[\tilde{D}_m \left({}_{(0,5[L+M])} x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot \frac{{}_{(L)}(\tilde{Y}_m)^{j+1} - {}_{(M)}(\tilde{Y}_m)^{j+1}}{{}_{(L)}x^{j+1} - {}_{(M)}x^{j+1}} \cdot f \left({}_{(0,5[L+M])} x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot s \right], \quad m = \overline{1, N_S}. \end{aligned} \quad (5.293b)$$

6. Для частиц, лежащих на границах сети каналов, значение ${}_{(p)}(Y_m)^{j+1}$ определяется по ГУ, если на данной границе задано ГУ (5.76е). Если на границе задано ГУ (5.76ж), то значение ${}_{(p)}(Y_m)^{j+1}$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} {}_{(L)}(Y_m)^{j+1} &= {}_{(L)}(\tilde{Y}_m)^{j+1} + \Delta t_{j+1} \cdot \frac{1}{{}_{(L)}\bar{f}^{j+1} \cdot \left({}_{(L)}x^{j+1} - {}_{(0,5[L+M])}x^{j+1} \right)} \times \left[\left(\tilde{D}_m \right)_L^{j+1} \cdot f_L^{j+1} \cdot \delta Y_m^b(t_{j+1}) - \right. \\ &\left. - \tilde{D}_m \left({}_{(0,5[L+M])} x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot f \left({}_{(0,5[L+M])} x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot \frac{{}_{(L)}(\tilde{Y}_m)^{j+1} - {}_{(M)}(\tilde{Y}_m)^{j+1}}{{}_{(L)}x^{j+1} - {}_{(M)}x^{j+1}} \right], \quad m = \overline{1, N_S}. \end{aligned} \quad (5.294)$$

7. Для всех базовых «лагранжевых» частиц, являющихся «внутренними» для каналов, корректируются значения удельных массовых концентраций по формуле (см. (5.277)):

$$\begin{aligned} {}_{(p)}(Y_m)^{j+1} &= {}_{(p)}(\tilde{Y}_m)^{j+1} + \Delta t_{j+1} \cdot \frac{1}{({}_{(vp)})\bar{f}^{j+1} \cdot \left(({}_{(p+0,5)})x^{j+1} - ({}_{(p-0,5)})x^{j+1} \right)} \times \\ &\times \left[\tilde{D}_m \left(({}_{(p+0,5)})x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot f \left(({}_{(p+0,5)})x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot \frac{{}_{(p+1)}(\tilde{Y}_m)^{j+1} - {}_{(p)}(\tilde{Y}_m)^{j+1}}{{}_{(p+1)}x^{j+1} - {}_{(p)}x^{j+1}} - \right. \\ &\left. - \tilde{D}_m \left(({}_{(p-0,5)})x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot f \left(({}_{(p-0,5)})x^{j+1}, t_{j+1} \right) \cdot \frac{{}_{(p)}(\tilde{Y}_m)^{j+1} - {}_{(p-1)}(\tilde{Y}_m)^{j+1}}{{}_{(p)}x^{j+1} - {}_{(p-1)}x^{j+1}} \right], \quad m = \overline{1, N_S}, \end{aligned} \quad (5.295a)$$

где

$$({}_{(vp)})\bar{f}^{j+1} = \frac{{}_{(p)}V}{\left(({}_{(p+0,5)})x^{j+1} - ({}_{(p-0,5)})x^{j+1} \right)}. \quad (5.295b)$$

8. Для каждой входной границы каждого канала создается новая базовая «лагранжева» частица со значениями концентраций компонент $\{Y_m | m = \overline{1, N_S}\}$, соответствующими

ГУ¹ (если граница является входной для рассматриваемой системы каналов) или равными значениям концентраций компонент узла сочленения каналов (если граница примыкает к сочленению). На следующем временном шаге, если расстояние между данной частицей и следующей за ней (по потоку жидкости) меньше заданного расстояния (порядка длины пространственной ячейки), то данная частица удаляется вместе с соседними вспомогательными «лагранжевыми» частицами. На текущем временном шаге дополнительно (после описанного удаления частиц) создаются две вспомогательные «лагранжевы» частицы, соседние с вновь созданной базовой частицей. Координаты данных частиц рассчитываются по формулам (5.291). Для созданной базовой «лагранжевой» и соседней с ней (внутренней для канала) базовой частиц рассчитываются соответствующие им значения объемов по формуле (5.292).

9. Для «лагранжевых» частиц, лежащих на «выходных» границах «подводящих» каналов (применительно к сочленениям), значения удельных массовых концентраций компонент задаются по значениям $\left\{ {}^{(0)}(Y_m)^{j+1}, m = \overline{1, N_s} \right\}$ соответствующего сочленения.
10. Если величина t_{j+1} достигла предельного значения, то расчет завершается. В противном случае полагается $j \leftarrow j + 1$ и осуществляется переход к шагу 2.

Рассмотрим применение метода «лагранжевых» частиц при моделировании течения многокомпонентных сред. Для сравнения ниже будут приведены аналогичные результаты, полученные с использованием схем с центральными и противопоточными разностями для решения уравнения неразрывности компонент.

В задаче рассматривалось движение двухкомпонентной смеси: вода (основная компонента) и примесь. При этом анализировалось распространение по потоку жидкости объема смеси с пониженным содержанием примеси. Длина канала задавалась равной 5000 м. Расчетная зависимость скорости течения смеси от координаты представлена на рис. 5.18.

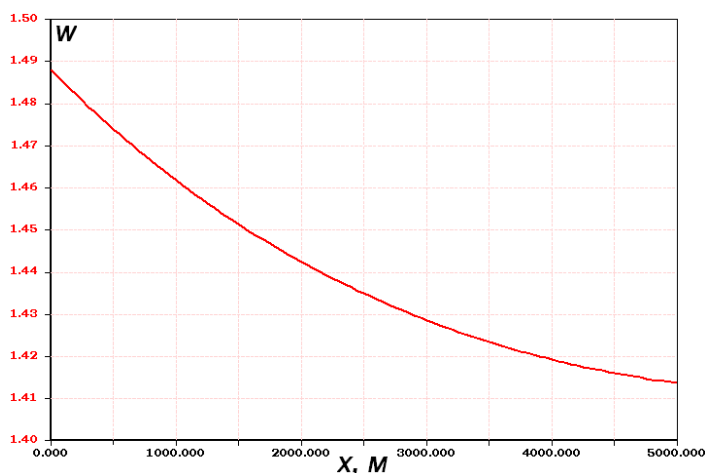


Рис. 5.18. Распределение скорости по длине канала, м/с

¹ Считается, что на данных границах могут задаваться только ГУ (5.76e).

В качестве ГУ задавалось изменение во времени массовой концентрации воды, показанное на рис. 5.19.

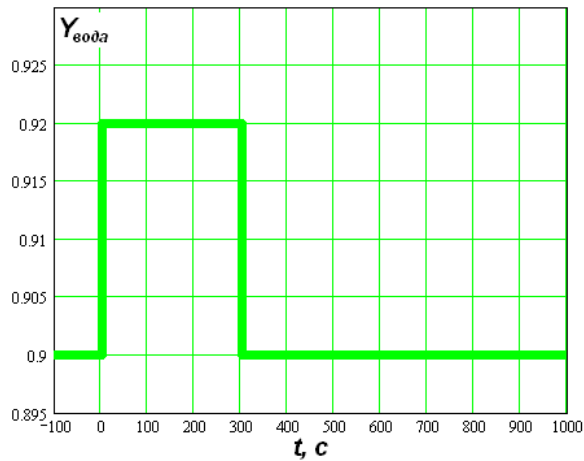
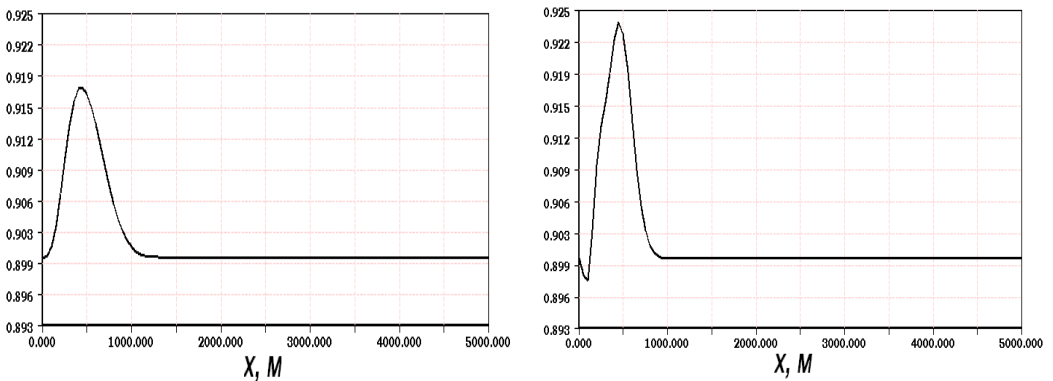


Рис. 5.19. Зависимость массовой концентрации воды от времени на входе канала (граничное условие)

Задача решалась на пространственной сетке с шагом 50 м без учета диффузии. В данной постановке задачи фронты, отделяющие участок с пониженным¹ содержанием примеси, должны распространяться по каналу без изменения (без размазывания). При этом концентрация смеси в пределах участка не должна меняться с течением времени. Результаты решения задачи с использованием схемы с разностями против потока и схемы с центральными разностями приведены на рис. 5.20 – 5.22.

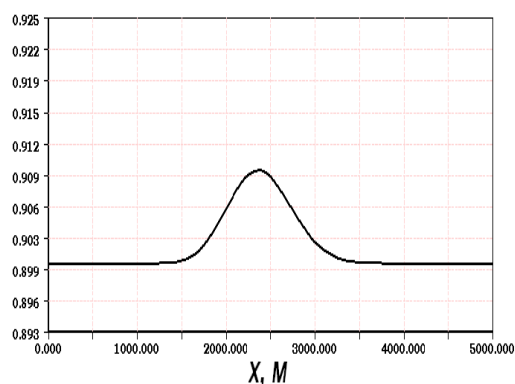


а) схема с разностями против потока

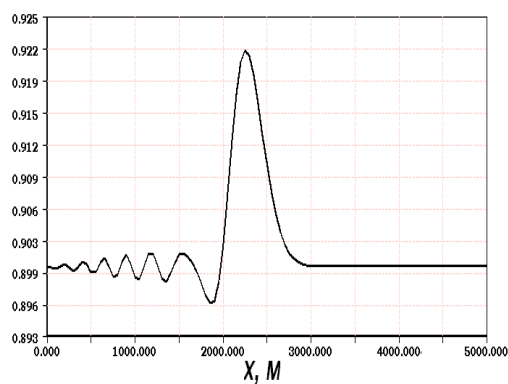
б) схема с центральными разностями

Рис. 5.20. Распределение массовой концентрации воды по длине канала на момент времени 454 с

¹ По сравнению с основным потоком.

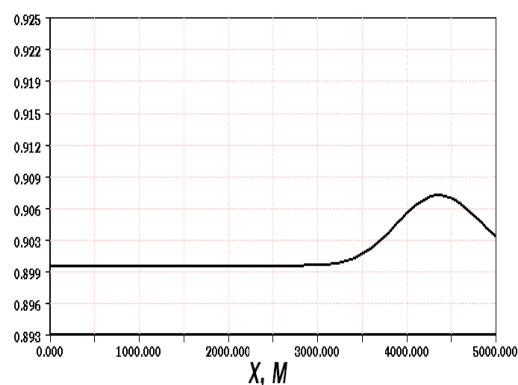


а) схема с разностями против потока

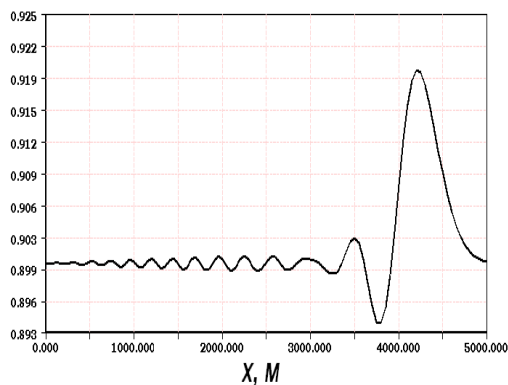


б) схема с центральными разностями

Рис. 5.21. Распределение массовой концентрации воды по длине канала на момент времени 1750 с



а) схема с разностями против потока



б) схема с центральными разностями

Рис. 5.22. Распределение массовой концентрации воды по длине канала на момент времени 3150 с

Анализ представленных рисунков показывает, что используемые схемы адекватно описывают скорость распространения рассматриваемого участка. В частности, максимальные значения концентрации для анализируемых графиков соответствуют центру объема смеси с пониженным содержанием примеси.

Однако результаты расчета продемонстрировали, что используемые схемы обладают «схемной» вязкостью, что привело к размазыванию фронтов и уменьшению расчетных значений концентрации воды. При этом схема против потока показала повышенное действие «схемной» вязкости. Это объясняется тем, что схема обладает первым порядком аппроксимации. Схема с центральными разностями обладает вторым порядком аппроксимации (по пространству), что позволило получить более точные расчетные значения искомых параметров (схема обладает меньшим действием «схемной» вязкости). Однако, как известно, схемам выше первого порядка аппроксимации присуще свойство немонотонности (см., например, [95]), что вызвало осцилляции чисто разностной природы за рассматриваемым участком смеси.

На рис. 5.23 приведены аналогичные результаты, полученные с применением метода «лагранжевых» частиц. Как видно из данных графиков, предложенный метод «свободен» от действия схемной вязкости, что позволяет получать расчетные оценки повышенной точности.

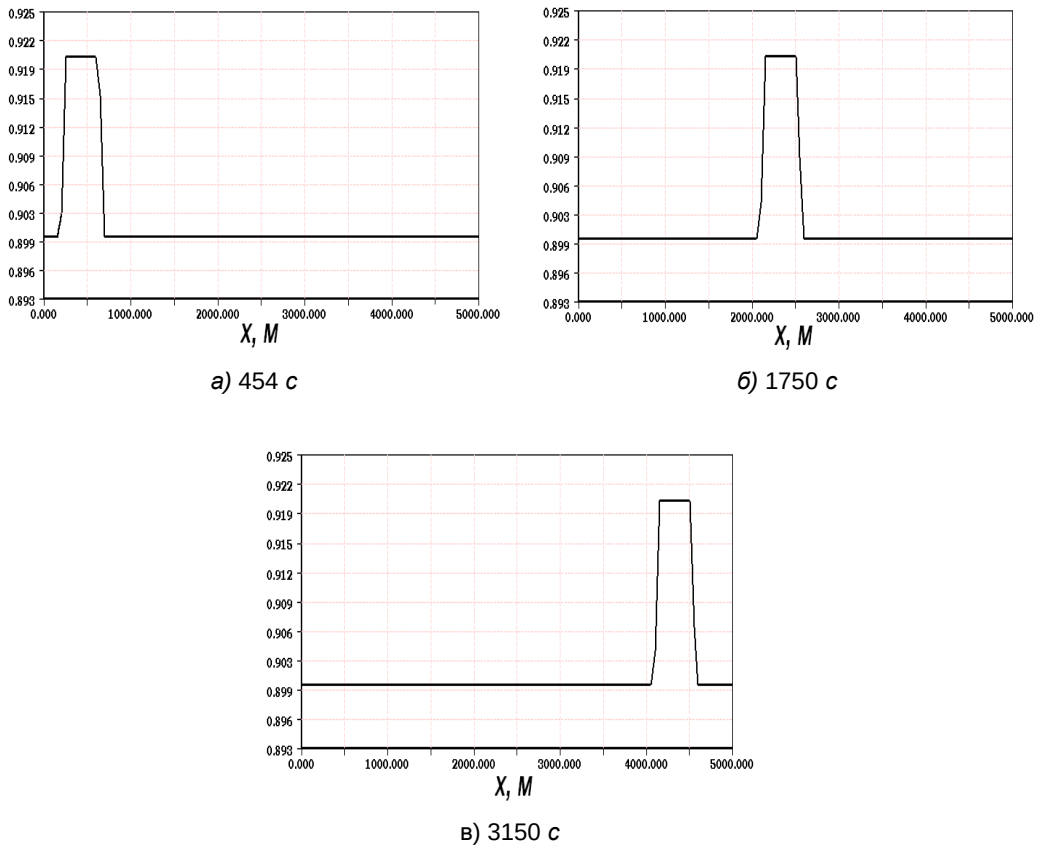


Рис. 5.23. Распределения массовой концентрации воды по длине канала, рассчитанные по методу «лагранжевых» частиц (интерполяция в узлах расчетной сетки)

В заключение Раздела сделаем небольшое отступление. Несмотря на то, что метод «лагранжевых» частиц базируется на подходе, используемом в методе характеристик, его нельзя считать модификацией метода характеристик. Это можно объяснить следующими положениями. Во-первых, подходом метода характеристик решается не вся система уравнений гидродинамики, а лишь уравнения неразрывности компонент. Информация для анализа перемещения «лагранжевых» частиц (скорость течения смеси) заимствуется из результатов решения другим (численным) методом (в данном Разделе использован МКР). Во-вторых, уравнение неразрывности компонент решается не аналитически, а численно. Шаг по времени численного интегрирования уравнения неразрывности компоненты в описанных алгоритмах соответствует шагу численного решения уравнения гидродинамики. Таким образом, метод «лагранжевых» частиц имеет особенности, не позволяющие, по мнению авторов настоящей монографии, отнести его к модификации классического метода характеристик.

5.10. О практической реализации построенных математических моделей и алгоритмов

Описанные выше математические модели транспортирования жидкостей по малым и средним рекам (по сети каналов с открытым руслом) и соответствующие разностные схемы нашли свое применение в подсистеме «Alfargus/RiverFlow» на базе КАИ «Alfargus» (см. Раздел 1.6). Переход на применение (при практических расчетах) разностных схем высокого порядка аппроксимации можно осуществить, используя подходы, описанные в Главе 2. Для моделирования распространения загрязнений в крупных реках и мелких водоемах целесообразно использовать модели, подробно изложенные в работах [268–270]. В указанных публикациях, помимо математических моделей, детально описаны методы их численного анализа, в основе которых лежат МКЭ и МКР, дополненные элементами метода крупных частиц [271]. Пример моделирования распространения жидких загрязняющих веществ по рекам представлен на рис. 5.24.

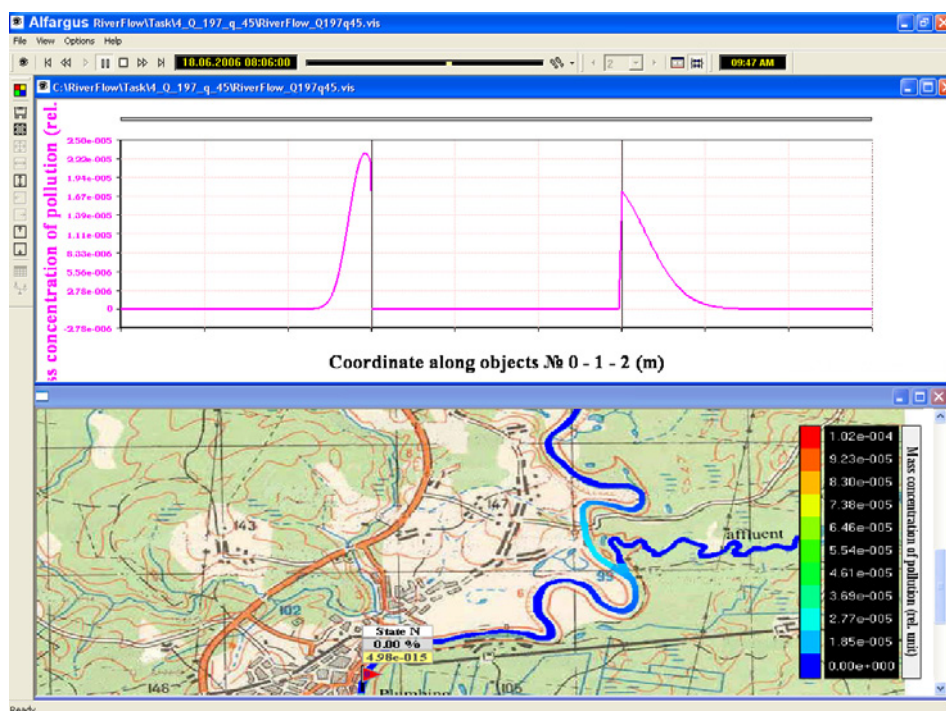


Рис. 5.24. Пример моделирования распространения жидких загрязнений по рекам

5.11. О построении гидравлических симуляторов систем каналов с открытым руслом

Построение компьютерных симуляторов функционирования систем каналов с открытым руслом производится по аналогии с построением ГДС (см. Главу 2) в соответствии с расширенной концепцией моделирования трубопроводных сетей и систем каналов с открытым руслом (см. Раздел 1.7).

Заключение

В данной монографии изложена расширенная концепция численного моделирования **магистральных** трубопроводных и канальных систем, а также представлены результаты ее практической реализации в виде методов математического моделирования и обобщенных вычислительных технологий. Содержание монографии ориентировано на научно обоснованное решение производственных задач специалистами ТЭК с учетом имеющейся в их распоряжении вычислительной техники. В книгу были включены только те методы моделирования, которые в последнее десятилетие нашли практическое применение при решении производственных задач, подтвердили свою высокую эффективность, надежность и имеют хорошие перспективы дальнейшего совершенствования. Они прошли многолетнюю проверку и успешно выдержали многочисленные обсуждения, проводимые авторами настоящей монографии с ведущими представителями российской и зарубежной научно-технической общественности.

В связи с вышесказанным авторы монографии выражают глубокую признательность и искреннюю благодарность кандидату технических наук А.Л. Бойченко, кандидату технических наук В.В. Киселеву, кандидату технических наук В.В. Кобыякову, кандидату технических наук В.В. Мотлохову, А.С. Комиссарову, А.В. Юлину за совместную плодотворную работу по созданию специализированных программно-математических комплексов, компьютерных симуляторов, тренажеров и аналитических систем в рамках проектов «CorNet», «PipEst», «AMADEUS» и «Alfargus», предназначенных для повышения безопасности и эффективности объектов ТЭК. Теоретический фундамент ранних версий перечисленных продуктов составил основу этой монографии.

Авторы искренне благодарят за внимание к своей работе и плодотворные дискуссии академика РАН Р.И. Ильяева, Л.Д. Рябева, академика РАН В.Н. Михайлова, академика РАН А.А. Самарского, член-корреспондента РАН А.И. Гриценко, академика Словацкой академии наук А. Двуреченского (Словакия), академика Чешской академии наук Я. Немеца (Чехия), доктора технических наук профессора В.Г. Асмолова, доктора физико-математических наук А.К. Чернышева, доктора физико-математических наук С.В. Боговалова, доктора технических наук профессора Н.И. Тимошенко, доктора технических наук профессора В.Г. Свиридова, доктора технических наук профессора А.С. Седлова, доктора технических наук М.В. Лисанова, доктора технических наук профессора В.М. Есина, доктора технических наук профессора С.В. Пузача, доктора технических наук профессора А.Н. Баратова, доктора технических наук профессора Ю.А. Полякова, доктора технических наук профессора Ю.А. Кошмарова, доктора технических наук профессора И.С. Молчадского, доктора технических наук Ю.П. Зезина, профессора Р. Хайоши (Словакия), доктора К. Немогу (Словакия), доктора М. Кухту (Словакия), доктора Т. Жачека (Словакия), инженера И. Титку (Словакия), инженера Я. Януса (Словакия), инженера Я. Марко (Словакия), инженера П. Билика (Словакия), инженера Т. Кршака (Словакия), инженера М. Тирпака (Словакия), инженера М. Ильяша (Словакия), профессора М. Кренинга (Германия), доктора Э. Пределя (Германия), доктора Г. Добмана (Германия), профессора Д. Чоклова (Германия), доктора О.А. Барбиана (Германия), доктора Ф. Пола (США), доктора Р. Картера (США), доктора П. Паскуаля (США), доктора Дж. Свенсона (США), доктора П. Конке (США), доктора Дж. Холквиста (США), профессора К. Коловротского (Польша), профессора Дж. Грума (Словения) и др. Эти обсуждения в значительной степени способствовали формированию у авторов общего видения подхода к решению проблем, рассматриваемых в данной книге.

Представленные в настоящей монографии математические модели, методы их численного анализа и расчетные алгоритмы дают возможность пользователям, знакомым с вычислительной механикой в объеме программы технического вуза, построить собственное программно-математическое обеспечение для решения достаточно широкого класса производственных задач отраслей промышленности ТЭК. Их подробное описание позволяет модифицировать предложенные модели, методы, технологии и алгоритмы для решения практических проблем, стоящих перед специалистами ТЭК и соответствующих надзорных организаций. Для достижения достоверных результатов решения производственных задач авторы монографии настоятельно рекомендуют при осуществлении указанных модификаций следовать положениям расширенной концепции численного моделирования **магистральных** трубопроводных и канальных систем.

Список литературы

1. **Селезнев В.Е., Алешин В.В., Клишин Г.С.** Методы и технологии численного моделирования газопроводных систем / Под ред. В.Е. Селезнева. Изд. 2-е, перераб. М.: КомКнига, 2005. 328 с.
2. **Численный анализ и оптимизация газодинамических режимов транспорта природного газа** / Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н. и др. // Под ред. В.Е. Селезнева. М.: Едиториал УРСС, 2003. 224 с.
3. **Численный анализ прочности подземных трубопроводов** / Алешин В.В., Селезнев В.Е., Кобяков В.В. и др. // Под ред. В.В. Алешина и В.Е. Селезнева. М.: Едиториал УРСС, 2003. 320 с.
4. **Численный анализ пожарной опасности магистральных газопроводов** / Селезнев В.Е., Алешин В.В., Клишин Г.С. и др. // Под ред. В.Е. Селезнева. М.: Едиториал УРСС, 2004. 328 с.
5. **Numerical simulation of gas pipeline networks: theory, computational implementation, and industrial applications** / Seleznev V.E., Aleshin V.V., Il'kaev R.I., et al. // Ed. by V.E. Seleznev. Moscow: KomKniga, 2005. 720 p.
6. **Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н.** Основы численного моделирования магистральных трубопроводов / Под ред. В.Е. Селезнева. М.: КомКнига, 2005. 496 с.
7. **Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н.** Современные компьютерные тренажеры в трубопроводном транспорте: математические модели и практическое применение / Под ред. В.Е. Селезнева. М.: МАКС Пресс, 2007. 200 с.
8. **Сарданашвили С.А.** Расчетные методы и алгоритмы (трубопроводный транспорт газа). М.: ФГУП Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2005. 577 с.
9. **Харионовский В.В.** Надежность и ресурс конструкций газопроводов. М.: ОАО «Изд-во «Недра», 2000. 467 с.
10. **Карпов В.Л.** Пожарная опасность аварийных выбросов горючих газов: Автореферат дис. ... д-ра техн. наук. М.: ФГУ ВНИИПО МЧС России, 2004. 48 с.
11. **Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте-, и газоснабжения** / Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др. Новосибирск: ВО «Наука», Сибирская издательская фирма, 1992. 407 с.
12. **Сеннова Е.В., Сидлер В.Г.** Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем. Новосибирск: Наука, 1987. 221 с.
13. **Декомпозиционно-топологический метод математического моделирования потоков распределения в транспортных гидравлических системах с переменной структурой** / Кутепов А.М., Мешалкин В.П., Панов М.Я., Квасов И.С. // ДАН. 1996. Т.350. №4. С. 506–508.
14. **Балышев О.А., Коганович Б.М., Меренков А.П.** Трубопроводные системы тепло- и водоснабжения как динамические модели гидравлических цепей // Известия РАН: Энергетика. 1996. №2. С. 96–104.
15. **Меренков А.П., Хасилев В.Я.** Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985. 279 с.
16. **Seleznev V.E., Aleshin V.V., Klishin G.S.** Implementation of Numerical Simulation Techniques in Express-Analysis of Accidents in Complex Technological System / High Consequence Operations Safety Symposium II (July 1997, USA) // Publication of Reports SAND98-1557. Sandia National Laboratories, USA, 1998. P. 353–356.
17. **Селезнев В.Е., Алешин В.В., Клишин Г.С.** Методы и технологии численного моделирования газопроводных систем. М.: Едиториал УРСС, 2002. 448 с.
18. **Сухарев М.Г., Карасевич А.М.** Технологический расчет и обеспечение надежности газо- и нефтепроводов. М.: ГУП Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2000.

272 с.

19. *Трубопроводные системы энергетики: модели, приложения, информационные технологии* / Атавин А.А., Карасевич А.М., Сухарев М.Г. и др. // Под общ. ред. М.Г. Сухарева. М.: ГУП Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2000. 320 с.
20. *Трубопроводные системы энергетики: управление развитием и функционированием* / Новицкий Н.Н., Сеннова М.Г., Сухарев М.Г. и др. // Под общ. ред. А.Д. Тевяшева. Новосибирск: Наука, 2004. 461 с.
21. *Метод конечных элементов в задачах газонефтепромысловой механики* / Аликин В.Н., Литвин И.Е., Щербаков С.М. и др. М.: Недра, 1992. 288 с.
22. *Методы оценки состояния трубопроводов по результатам диагностики* / Селезнев В.Е., Алешин В.В., Гриценко А.И. и др. // Газовая промышленность. 1998. №8. С. 58–60.
23. *Практическая технология комплексной оценки состояния трубопроводов* / Селезнев В.Е., Алешин В.В., Клишин Г.С. и др. // САПР и графика. 1999. №7. С. 58–62.
24. *Селезнев В.Е., Бойченко А.Л.* Метод автоматической настройки компьютерных газодинамических симуляторов на реальные параметры конкретного газотранспортного предприятия // Транспорт и подземное хранение газов: Науч.-тех. сб. (Приложение к журналу «Наука и техника в газовой промышленности»). №1. М.: ООО «ИРЦ Газпром», 2005. С. 20–27.
25. *Селезнев В.Е.* Высокоточные компьютерные симуляторы для снижения затрат на безопасный транспорт газов по газопроводным сетям ТЭК // Энергосбережение и водоподготовка. 2004. №3. С. 51–53.
26. *Experiences with real time systems and their contribution to safe and efficient control of gas transport system* / Seleznev V.E., Pryalov S.N., Marko J, et al. // Proceeding of the 35 Annual Meeting of the Pipeline Simulation Interest Group (PSIG–2003) (October 2003, Switzerland). Paper № PSIG-0312. PSIG, USA, 2003. 8 p.
27. *Seleznev V.E., Zelenskaya O.I., Pryalov S.N.* Numerical analysis of transient pollutant spread through the industrial sewer and rivers / Proceeding of the European Safety and Reliability Conference (ESREL–2005) // Ed. by K. Kolowrocki. Vol. II. Taylor & Francis Group, London, 2005. P.1777–1784.
28. *Dikarev K.I., Aleshin V.V., Seleznev V.E.* Numerical analysis for underwater passage of main pipeline located in fluid flow // Monograph «Safety and Reliability International Conference KONBiN–2003». Vol. 3. Paper B10.1. Warszawa: Wydawnictwo Instytutu Technicznego Wojsk Lotniczych, 2003. P. 199–206.
29. *Aleshin V.V.* Numerical structural analysis of industrial pipelines for enhancing their safety // Journal of KONBiN (Journal of safety and Reliability). 2006. Vol. I. №1. P. 105–110.
30. *Киселев В.В.* Некоторые результаты оптимизации неустановившихся режимов транспортирования природного газа // Транспорт и подземное хранение газов: Науч.-тех. сб. – (Приложение к журналу «Наука и техника в газовой промышленности»). №1. М.: ООО «ИРЦ Газпром», 2005. С. 3–9.
31. *Seleznev V.E., Aleshin V.V., Boychenko A.L.* Automatic fit of parameters under identification of mathematical models to the real failures / Proceeding of the European Safety and Reliability Conference (ESREL–2005) // Ed. by K. Kolowrocki. Vol. II. Taylor & Francis Group, London, 2005. P.1785–1788.
32. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
33. *Демьянов В.Ф. Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 295 с.
34. *Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач* / Под ред. В.Ф. Демьянова и В.Н. Малоземова. Л.: ЛГУ, 1977. 212 с.
35. *Селезнев В.Е., Бойченко А.Л., Прялов С.Н.* Оперативное обнаружение разрывов магистральных газопроводов // Математическое моделирование. 2006. Т. 18. № 2. С. 101–112.
36. *Комплекс моделирования и оптимизации режимов работы ГТС* / Панкратов В.С., Герке В.Г., Сарданашвили С.А. и др. // Обз. информ. Сер. Автоматизация, телемеханизация и связь в газовой промышленности. М.: ООО «ИРЦ Газпром», 2002. 56 с.

37. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений на C++; Пер. с англ. Изд. 2-е. М.: «Изд-во Бином», СПб.: «Невский диалект», 2000. 560 с.
38. Страуструп Б. Язык программирования C++; Пер. с англ. Изд. 3-е. М.: «Изд-во Бином», СПб.: «Невский диалект», 1999. 991 с.
39. Селезнев В.Е. Некоторые аспекты построения компьютерных тренажеров для специалистов газотранспортных предприятий // Безопасность труда в промышленности. 2007. №1. С.24–27.
40. Seleznev V.E., Klishin G.S., Mukashev A.A. Development of an Accident Scenario with the Help of a Complex Numerical Analysis Using as an Example an Accident at the Shop of a Compressor Gas Transfer Station / High Consequence Operations Safety Symposium II (July 1997, USA) // Publication of Reports SAND98-1557. Sandia National Laboratories, USA, 1998. P. 111–118.
41. Kinsman P., Lewis J. Report on a study of international pipeline accidents // Prepared by Mech-physic Scientific Consultants for the Health and Safety Executive. Contract Research Report 294/2000. HSE, UK, 2000. 128 p.
42. Seleznev V.E., Nemoga K., Marco J. Fast and Highly Accurate Algorithms in AMADEUS Software // Proceedings of 6th World Symposium on Information and Communication Technology in Gas Industry (April 2002, Czech Republic). CzPS, Czech Republic, 2002. 4 p.
43. Алешин В.В. Практическая технология численного прочностного анализа промышленных трубопроводов // Безопасность труда в промышленности. 2004. №7. С. 29–33.
44. СНиП 2.05.06-85. Магистральные трубопроводы. М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. 52 с.
45. Seleznev V.E., Skiteva I.A. Numerical analysis of methane-air pollution // Journal of safety and Reliability of KONBiN. 2006. Vol. I. №1. P. 85–92.
46. Seleznev V.E., Aleshin V.V. Numerical analysis of fire risk at pipeline systems of industrial power facilities // Int. J. Pressure Vessels and Piping, Vol. 83, Issue 4, April 2006. P. 299–303.
47. Неразрушающий контроль и диагностика: Справочник / Клюев В.В., Соснин Ф.Р., Филинов В.Н. и др. // Под ред. В.В. Клюева. М.: Машиностроение, 1995. 488 с.
48. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element method. In three volumes, fifth edition. Oxford: Butterworth–Heinemann, 2000. 3 Vols.
49. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
50. Численное моделирование для совершенствования дефектоскопии / Селезнев В.Е., Алешин В.В., Седых А.Д. и др. // Газовая промышленность. 1999. №7. С. 44–45.
51. ANSYS as a resource for in-line inspection perfection / Aleshin V.V., Seleznev V.E., Yatsevich S.V., et al. // Papers Book of 17 CAD-FEM Users' Meeting (October 1999, Germany). Paper II.1.6. CAD-FEM, Germany, 1999. 7 p.
52. Численный анализ чувствительности внутритрубных магнитных снарядов-дефектоскопов / Яцевич С.В., Селезнев В.Е., Алешин В.В. и др. // Техника машиностроения. 2000. №6. С. 62–68.
53. Aleshin V., Kobayakov V., Seleznev V. Numerical analysis of corroded pipeline segments revealed by In-Line Inspection tools // Int. J. Microstructure and Materials Properties, Vol. 1, Nos. 3/4, 2006. P. 397–408.
54. Селезнев В.Е., Мотлохов В.В., Прялов С.Н. Численный анализ организованных и аварийных выбросов на компрессорных и газораспределительных станциях // Безопасность труда в промышленности. 2006. №6. С. 41–46.
55. Селезнев В.Е., Дикарев К.И., Скитева И.А. Численный анализ параметров выбросов природного газа на открытой местности // Газовая промышленность. 2006. №2. С. 41–45.
56. Селезнев В.Е., Алешин В.В., Пузач С.В. Анализ пожарной опасности газопроводов промышленных энергетических систем // Известия РАН: Энергетика. 2006. №4. С. 64–76.
57. Seleznev V.E., Skiteva I.A. Numerical analysis of fire risk at industrial gas pipelines // Journal of safety and Reliability of KONBiN. 2006. Vol. I. №1. P. 187–196.

58. **Алешин В.В., Кобяков В.В.** Анализ прочности трубопроводов при тепловом воздействии пожара // Безопасность труда в промышленности. 2006. №2. С. 19–25.
59. **Селезнев В.Е., Киселев В.В.** Гибридный метод высокоточной оптимизации сети компрессорных станций // Наука и техника в газовой промышленности. 2003. №1. С. 13–16.
60. **Селезнев В.Е.** Об одном методе оптимизации неустановившихся режимов транспорта газа // Наука и техника в газовой промышленности. 2004. №3–4. С. 105–108.
61. **Seleznev V., Aleshin V.** Computation technology for safety and risk assessment of gas pipeline systems // Proceedings of the Asian International Workshop on Advanced Reliability Modeling (AIWARM'2004). World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London, UK, 2004. P. 443–450.
62. **Seleznev V.E., Klishin G.S.** AMADEUS Software and PipEst Technology for Integrated Estimation of Industrial Gas Pipeline States // INFOPLANER Journal, Germany. 2003. №2. P. 36.
63. **Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х томах. Т.1: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 384 с.
64. **Варгафтик Н.Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
65. **Альфиц А.Д.** Гидравлические сопротивления. М.: Недра, 1970. 216 с.
66. **Идельчик И. Е.** Справочник по гидравлическим сопротивлениям / Под ред. М. О. Штейнберга. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1992. 672 с.
67. **Рид Р., Шервуд Т.** Свойства газов и жидкостей: Пер. с англ. Л.: Химия, 1971. 366 с.
68. **Базаров И.П.** Термодинамика. М.: Высшая школа, 1991. 376 с.
69. **Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2000. 316 с.
70. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
71. **Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 608 с.
72. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
73. **Высокоточное моделирование газотранспортных сетей с помощью программно-математического комплекса «AMADEUS»** / Селезнев В.Е., Янус Я., Немога К. и др. // Наука и техника в газовой промышленности. 2003. №1. С. 6–12.
74. **Селезнев В.Е., Пузач С.В.** Численное моделирование транспортирования природного газа по трубопроводам энергетических систем // Известия РАН: Энергетика. 2006. №6. С. 31–41.
75. **Васильев О.Ф., Воеводин А.Ф.** О газодинамическом расчете потоков в простых и сложных трубопроводах (постановка задачи) // Известия СО АН СССР: Технические науки. 1968. №13. Вып. 3. С. 53–62.
76. **Сложные трубопроводные системы** / Грачев В.В., Гусейнзаде М.А., Яковлев Е.И. и др. М.: Недра, 1982. 410 с.
77. **Гидродинамические процессы в сложных трубопроводных системах** / Гусейнзаде М.А., Дугина Л.И., Петрова О.Н. и др. М.: Недра, 1991. 164 с.
78. **Миркин А.З., Усиныш В.В.** Трубопроводные системы: Справочное издание. М.: Химия, 1991. 286 с.
79. **Низматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. В 2-х томах М.: Наука, 1987. 2 т.
80. **Александров А.А., Григорьев Б.А.** Таблицы теплофизических свойств воды и водяного пара: Справочник. ГСССД Р-776-98. М.: Издательство МЭИ, 1999. 168 с.
81. **Лабунцов Д.А., Ягов В.В.** Механика двухфазных систем. М.: Изд-во МЭИ, 2000. 374 с.
82. **Одишария Г.Э., Точигин А.А.** Прикладная гидродинамика газожидкостных смесей. М.: Изд-во ВНИИГАЗ, Иваново: Изд-во ИГЭУ, 1998. 400 с.
83. **Дейч М.Е., Филиппов Г.А.** Газодинамика двухфазных сред. М.: Энергия, 1968. 424 с.
84. **Седов Л.И.** Механика сплошной среды. В 2 т. 6-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань»,

2004. 2 т.
85. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
 86. *Гиргидов А.Д.* Техническая механика жидкости и газа: Учебник для вузов. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. 395 с.
 87. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. М.: Энергоиздат, 1981. 417 с.
 88. *Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д.* Нефтяная гидромеханика. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 480 с.
 89. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ. М.: Наука, 1984. 832 с.
 90. *Seleznev V.* Numerical simulation of a gas pipeline network using computational fluid dynamics simulators // Journal of Zhejiang University SCIENCE A. Vol. 8. No. 5. 2007. P. 755–765.
 91. *Неизотермическое течение газа в трубах* // Под ред. В.В. Васильева. Новосибирск: Наука, 1978. 184 с.
 92. *Роуч П.* Вычислительная гидромеханика: Пер. с англ. М. Мир, 1980. 616 с.
 93. *Ши Д.* Численные методы в задачах теплообмена: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 544 с.
 94. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. №3. С. 1529–1532.
 95. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции – диффузии. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 248 с.
 96. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
 97. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1980. 352 с.
 98. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений: Пер. с англ. М.: Наука, 1986. 342 с.
 99. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. 424 с.
 100. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 480 с.
 101. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
 102. *Прялов С.Н., Юлин А.В.* Применение полностью консервативных сплайн-схем для повышения точности моделирования процессов транспортирования газа // Сборник тезисов докладов III Международной научно-технической конференции «Компьютерные технологии поддержки принятия решений в диспетчерском управлении газотранспортными и газодобывающими системами (DISCOM 2007)» (апрель 2007, г. Москва). М.: ВНИИГАЗ, 2007. С. 30.
 103. *Русаков С.В.* Разностные сплайн-схемы для задач тепло- и массопереноса. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 125 с.
 104. *Русаков С.В.* Методы сплайн-функций в вычислительной гидродинамике: Учебное пособие по спецкурсу. Пермь: Изд-во Пермского ун-та, 1987. 88 с.
 105. *Гуревич Д. Ф.* Основы расчета трубопроводной арматуры. Л. 1956. 230 с.
 106. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. В 2-х частях. М.: Наука, 1991. 2 т.
 107. *Дулов В.Г., Лукьянов Г.А.* Газодинамика процессов истечения. Новосибирск: Наука, 1984. 235 с.
 108. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 5-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 736 с.
 109. *Грачев В.В., Щербаков С.Г., Яковлев Е.И.* Динамика трубопроводных систем. М.: Наука, 1987. 467 с.
 110. *Основы расчета и проектирования теплообменников воздушного охлаждения: Справочник* / Бессонный А.Н., Дрейцер Г.А., Кунтыш В.Б. и др. // Под общ. ред. В.Б. Кунтыша, А.Н.

- Бессонного. СПб.: Недра, 1996. 512 с.
111. *Альбом характеристик центробежных нагнетателей природного газа*. М.: Мингазпром, 1985. 105 с.
112. *Степанов А.И.* Центробежные и осевые компрессоры, воздуходувки и вентиляторы. Теория, конструкция и применение: Пер. с. англ. М.: Машгиз, 1960. 348 с.
113. *Михайлов А.К., Малюшенко В.В.* Конструкция и расчет центробежных насосов высокого давления. М.: Машиностроение, 1971. 304 с.
114. *Малюшенко В.В., Михайлов А.К.* Энергетические насосы: справочное пособие. М.: Энергоиздат, 1981. 200 с.
115. *Seleznev V.E., Klishin G.S., Chuchko V.F.* Implementation of the Non-Liner Programming Techniques for Solving the Optimization and Surety Problems of the Gas Transfer Compressor Station / High Consequence Operations Safety Symposium II (July 1997, USA) // Publication of Reports SAND98-1557. Sandia National Laboratories, USA, 1998. P. 367–375.
116. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 440 с.
117. *Селезнев В.Е.* Разработка и применение компьютерных симуляторов промышленных трубопроводных систем / Прикладная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления / Под ред. Ю.Г. Евтушенко, М.К. Керимова, В.А. Гаранжи // Тр. Всерос. конф. (Москва, июнь – июль 2004). М.: ВЦ РАН, 2004. Т.2. С.165–176.
118. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1987. 399 с.
119. *Селезнев В.Е.* Оптимизации транспорта природного газа с применением компьютерных газодинамических симуляторов // Транспорт и подземное хранение газов: Науч.-тех. сб.: Приложение к журналу «Наука и техника в газовой промышленности». №1. М.: ООО «ИРЦ Газпром», 2007. С. 3–14.
120. *Юхно Л.Ф.* Об одной модификации методов типа сопряженных направлений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т.46. №1. С. 7–11.
121. *Комиссаров А.С.* Применение метода поиска внутренних точек допустимого множества для поиска безопасного и экономичного нестационарного режима работы газотранспортной сети // Сборник тезисов докладов IV научно-технической конференции (ноябрь 2005, г.Саров). Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2005. С. 20.
122. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 320 с.
123. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
124. *Касаткин Б.С., Мусияченко В.Ф.* Низколегированные стали высокой прочности для сварных конструкций. Киев.: Техніка, 1970. 188 с.
125. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 408 с.
126. *Голованенко С.А., Матросов Ю.И.* Высокопрочные стали для магистральных газопроводных труб // Металловедение и термическая обработка металлов. №10, 1977. С. 29–35.
127. *Bathe K.-J.* Finite Element Procedures. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996. 1037 p.
128. *Crisfield M. A.* Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. In two volumes. John Wiley & Sons, Chichester, 2000. 2 Vols.
129. *Encyclopedia of Computational Mechanics* // Ed. by E. Stain, R. de Borst, T.J.R. Hughes. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2004. 3 Vols.
130. *Theory Reference for ANSYS and ANSYS Workbench, Release 11.0: Documentation for ANSYS*. ANSYS, Inc., USA, 2007. 1462 p.
131. *Hallquist J.O.* LS-DYNA Theory Manual. Livermore Software Technology Corporation, USA, 2006. 680 p.
132. *MSC.NASTRAN 2004 Reference Manual*. MSC.Software Corporation, USA, 2004. 888 p.
133. *ABAQUS Theory Manual*. ABAQUS Version 6.5 Documentation. ABAQUS, Inc., USA, 2004. 13

Vols.

134. *MSC.MARC Theory and User Information. Version 2003*. MSC Software Corporation, USA, 2003. 5 Vols.
135. **Победра Б.Е.** О критериях разрушения структурно-неоднородных материалов // В сб.: «Пластичность и разрушение твердых тел», серия: Прочность и вязкоупругопластичность, АН СССР. М.: Наука, 1988. С. 170–174.
136. **Гольденблат И.И., Коннов В.А.** Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
137. *Справочник по проектированию магистральных трубопроводов* / Под ред. А.К. Дерцакяна. Л.: Недра, 1977. 519 с.
138. **Айнбиндер А.Б., Камерштейн А.Г.** Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. М.: Недра, 1982. 341 с.
139. **Алешин В.В., Селезнев В.Е.** Методы нелинейного численного анализа прочности подземных магистральных трубопроводов // Прикладная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления / Под ред. Ю.Г. Евтушенко, М.К. Керимова, В.А. Гаранжи // Тр. Всерос. конф. (Москва, июнь – июль 2004). М.: ВЦ РАН, 2004. Т.2. С. 177–187.
140. *ASCE Guidelines for the Seismic Design of Oil and Gas Pipeline Systems* // American Society of Civil Engineers, 1984. 56 p.
141. *Specifications for Seismic Design of High Pressure Gas Pipelines* // Japan Gas Association, 1982. 124 p.
142. **O'Rourke M.J., Liu X.** Response of Buried Pipelines Subject to Earthquake Effects // MCEER Monograph No. 3, Buffalo, USA, 1999. 250 p.
143. **Бородавкин П.П.** Механика грунтов в трубопроводном строительстве. М.: Недра, 1986. 224 с.
144. **Бородавкин П.П.** Механика грунтов. М.: Недра, 2003. 349 с.
145. **Aleshin V., Seleznev V.** Simulation of soil in ANSYS // Conference Proceedings of 20 CAD–FEM Users' Meeting 2002 – International Congress of FEM Technology (October 2002, Friedrichshafen, Germany). Vol.1. Paper 1.5.7. CAD–FEM GmbH, Germany, 2002. 7 p.
146. *Прочность и деформируемость горных пород* / Под общ. ред. А.Б. Фадеева. М.: Недра, 1979. 269 с.
147. *Определяющие законы механики грунтов* // Сб. статей серии «Механика: Новое в зарубежной науке» / Под ред. А.Ю. Ишлинского и Г.Г. Черного. Выпуск №2. М.: Мир, 1975. **231 с.**
148. **Цитович Н.А.** Механика грунтов. М.: Высшая школа, 1983. 288 с.
149. *Механика грунтов, основания, фундаменты* / Под ред. С. Б. Ухова. М.: Высшая школа, 2002. 566 с.
150. **Друккер Д., Прагер В.** Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование: Пер. с англ. / В сб.: «Определяющие законы механики грунтов» // Под ред. В.Н. Николаевского. М.: Мир, 1975. С. 166–177.
151. **Клюшников В.Д.** Математическая теория пластичности. М.: Издательство МГУ, 1979. 208 с.
152. **Chen W.F., Han D. J.** Plasticity for Structural Engineers. Springer–Verlag, New York, 1988. 606 p.
153. **Малинин Н.Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
154. **Menétrey Ph., William K. J.** Triaxial Failure Criterion for Concrete and its Generalization // ACI Structural Journal, 92, May/June, 1995. P. 311–318.
155. **Баум М.Р.** Разрыв сосуда под давлением. Предварительные рекомендации по расчету скорости фрагментов и протяженности зоны поражения // Современное машиностроение: серия Б. 1989. №2. С. 40–48.
156. *Физика взрыва* / Под ред. Л.П. Орленко. В 2 т. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 2 т.
157. *Оценочный анализ осколочного поражения на газопроводах* / Селезнев В.Е., Худов А.Н.,

- Алешин В.В. и др. // Газовая промышленность. 2000. №10. С. 52–53.
158. **Селезнев В.Е., Алешин В.В., Кобяков В.В.** Численное моделирование процесса образования и разлета осколков при авариях на газопроводах // Наука и техника в газовой промышленности. 2002. №3. С. 3–5.
159. **Взрывные явления. Оценка и последствия:** в 2-х кн.: Пер. с англ. / Бейкер У., Кокс П., Уэстайн П. и др. М.: Мир, 1986. 2 т.
160. **Баратов А.Н., Пчелинцев В.А.** Пожарная безопасность. М.: Издательство АСВ, 1997. 171 с.
161. **Баратов А.Н.** Горение – Пожар – Взрыв – Безопасность. М.: ФГУ ВНИИПО МЧС России, 2003. 364 с.
162. **Моделирование пожаров и взрывов** / Астахова И.Ф., Есин В.М., Ильин В.В. и др. // Под ред. Н.Н. Брушлинского и А.Я. Корольченко. М.: Пожнаука, 2000. 492 с.
163. **Белоцерковский О.М., Андрущенко В.А., Шевелев Ю.Д.** Динамика пространственных вихревых течений в неоднородной атмосфере. Вычислительный эксперимент. М.: Янус-К, 2000. 345 с.
164. **Шевелев Ю.Д.** Пространственные задачи вычислительной аэрогидродинамики. М.: Наука, 1988. 334 с.
165. **Physical Properties of Natural Gases.** N. V. Nederlandse Gasunie, Groningen, The Netherlands, 1980. 495 p.
166. **Фрик П.Г.** Турбулентность: подходы и модели. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 292 с.
167. **Favre A.** Equatijns des Gaz Turbulents Compressibles: Formes Generales. Journal Mecanique. 1965. V. 4. P. 361–390.
168. **Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.** Теоретическая гидромеханика: Часть вторая. М.: Гос. издат. физ.-мат. лит.-ры, 1963. 713 с.
169. **Прандтль Л.** Гидроаэродинамика: Пер. с немец. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 572 с.
170. **Laundrer B.E., Spalding D.B.** The numerical computation of turbulent flow. Comp. Meth. In Appl. Mech. & Eng. 1974. №3. 269 p.
171. **Махвиладзе Г.М., Робертс Дж.П., Якуш С.Е.** Огненный шар при горении выбросов углеводородного топлива. I. Структура и динамика подъема // Физика горения и взрыва. Т. 35. 1999. №3. С. 7–19.
172. **Шец Дж.** Турбулентное течение. Процессы вдува и перемешивания: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 276 с.
173. **Пейре Р., Тейлор Т.Д.** Вычислительные методы в задачах механики жидкости: Пер. с англ. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. 322 с.
174. **Поляков А.Ф.** Об экспериментальных данных и прикладных моделях турбулентного переноса теплоты в пристенных течениях // Инженерно–физический журнал. Т. 64. 1993. №6. С.689–697.
175. **Application of Reynolds stress modelling to gas build-up and external dispersion** // Prepared by WS Atkins Science & Technology for HSE. Contract Research Report 223/1999, HSE, UK, 1999. 61 p.
176. **Савельев А.Д.** Расчеты течений вязкого газа на основе (q - v)-модели турбулентности // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т.43. 2003. №4. С. 589–600.
177. **Wilcox D.C.** Comparison of two-equation turbulence models for boundary layers with pressure gradient // AIAA Jorنال. V.26. 1988. №11. P.1299–1310.
178. **Wilcox D.C.** Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models // AIAA Jorنال. Vol.31. 1993. №8. P.1414–1421.
179. **Экспериментальные и численные исследования сверхзвуковых турбулентных отрывных течений в окрестности двумерных препятствий** / Борисов А.В., Желтоводов А.А., Максимов А.И. и др. // Известия РАН: Механика жидкости и газа. 1999. №2. С. 26–37.

180. **Coakley T.J.** Turbulence modeling method for the compressible Navier–Stokes equations // AIAA Paperl. 1983. №83. 9 p.
181. **Варнацк Ю., Маас У., Диббл Р.** Горение. Физические и химические аспекты, моделирование, эксперименты, образование загрязняющих веществ: Пер. с англ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 352 с.
182. **Gant S.E., Ivings M.J.** CFD Modelling of Low Pressure Jets for Area Classification // HSL/2005/11, Fire & Explosion Group, HSE, 2005. 21 p.
183. **Johnson A.D., Shirvill L.C., Üngüt A.** CFD Calculation of Impinging Gas Jet Flames // Offshore Technology Report. OTO 1999 011, HSE, 2000. 102 p.
184. **Правила устройства электроустановок.** М.: Энергоатомиздат, 1985. 640 с.
185. **Математическая теория горения и взрыва** / Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Махвиладзе Г.М. и др. М.: Наука, 1980. 479 с.
186. **Bradford M., Whitehead M.L.** The application of computational fluid dynamics to hazardous area classification // Prepared by ERA Technology Ltd. for the Health and Safety Executive. Contract Research Report 190/1998, HSE, UK, 1998. 80 p.
187. **Lea C.J.** Guidance for Nsd inspectors on the Assessment of CFD Simulations in Safety Cases // FS/97/8, Health and Safety Laboratory, HSE, 1997. 26 p.
188. **Бойченко А.Л., Селезнев В.Е.** Об одном из методов обнаружения и локализации разрывов магистральных газопроводов с использованием компьютерных газодинамических симуляторов // Безопасность труда в промышленности. 2004. №6. С. 29–32.
189. **User's Guide for the Industrial Source Complex (ISC3) dispersion models.** Vol. II. Description of Model Algorithms, 2000. 347 p.
190. **Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д.** Численные методы прогноза погоды. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 376 с.
191. **Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен** / Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р. и др. В 2-х книгах: Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 2 Т.
192. **Гандин Л.С., Казан Р.Л.** Статистические методы интерпретации метеорологических данных. Л. Гидрометеиздат, 1976. 359 с.
193. **Komarov V.S. Popov Yu.B. Suvorov S.S., and Kurakov V.A.** Dynamic-stochastic methods with their application to meteorology / Edited by G.G. Matvienko. Tomsk: Publishing House of the Institute of Atmosphere Optics SB RAS, 2004. 236 p.
194. **Сейдж Э.П., Мэлса Дж.Л.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 496 с.
195. **Ажогин В.В., Згуревич М.З., Корбич Ю.С.** Методы фильтрации и управления стохастическими процессами с распределенными параметрами. Киев: Высшая школа, 1988. 488 с.
196. **Environmental modeling and management: theory, practice, and future directions** / Edited by C.C. Chine, M.F. Medina, Jr., G.F. Pinder, et al. Published by Today Media, Inc. USA. 2002. 276p.
197. **Гордин В.А.** Математические задачи гидродинамического прогноза погоды. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 264 с.
198. **Динамико-стохастические методы и их применение в прикладной метеорологии** / Комаров В.С., Попов Ю.Б., Суворов С.С. и др. // Под общ. ред. Г.Г. Матвиенко. Томск: Изд-во ИОА СО РАН, 2004. 236 с.
199. **Построение математической модели распространения загрязнений в атмосфере.** / Самарская Е.А. и др. // Математическое моделирование. Т. 9. 1997. №11. С. 17–25.
200. **Андрющенко В.А.** Численное моделирование подъема приповерхностных термиков // Известия АН СССР: Механика жидкостей и газов. 1989. №2. С. 129–135.
201. **Андрющенко В.А.** Дрейф крупномасштабных горячих термиков в стратифицированных воздушных потоках // Известия АН СССР: Механика жидкостей и газов. 1984. №6. С. 173–176.
202. **Сумской С.И.** Комментарии к статье «Численный анализ организованных и аварийных вы-

- бросов на компрессорных и газораспределительных станциях» // Безопасность труда в промышленности. 2006. №6. С. 46.
203. **ГОСТ 12.3.047-98 ССБТ.** Пожарная безопасность технологических процессов. Общие требования. Методы контроля. М.: Госстандарт, 2000. 89 с.
204. **Маршалл В.** Основные опасности химических производств: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 679с.
205. **Kays W.M., Crawford M.E.** Convective Heat and Mass Transfer. 3rd ed. McGraw-Hill, Inc., 1993. 601 p.
206. **Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М.** Теория тепло- и массообмена: Пер. с англ. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1961. 423 с.
207. **Махвиладзе Г.М., Робертс Дж.П., Якуш С.Е.** Огненный шар при горении выбросов углеводородного топлива. II. Тепловое излучение // Физика горения и взрыва. Т. 35. 1999. №4. С.12–23.
208. **Сполдинг Д.Б.** Горение и массообмен: Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1985. 240 с.
209. **Ксандопуло Г.И., Дубинин В.В.** Химия газофазного горения. М.: Химия, 1987. 240 с.
210. **Горение в сверхзвуковом потоке** / Баев В.К., Головичев В.И., Третьяков П.К. и др. Новосибирск: Наука, 1984. 304 с.
211. **Williams G.G., Hottel H.C., Morgan A.C.** The combustion of methane in a jet mixed reactor // In: 12th Symp. Combust. Pittsburgh: 1969. P. 245–254.
212. **Льюис Б., Эльбе Г.** Горение, пламя и взрывы в газах. М.: Мир, 1968. 592 с.
213. **Кондратьев В.Н.** Кинетика химических газовых реакций. М.: Издательства АН СССР, 1958. 688 с.
214. **Star-CD version 3.26: Methodology.** CD adapco, UK, 2005. 318 p.
215. **ANSYS CFX-Solver, Release 10.0: Theory.** ANSYS Inc., 2005. 265 p.
216. **Üngüt A.** CFD Simulation and detailed chemical modelling of alkane autoignition near a heated metal surface // Prepared by Shell Global Solutions for the Health and Safety Executive. Contract Research Report 352/2001, HSE, UK, 2001. 54 p.
217. **Сполдинг Б.** Основы теории горения: Пер. с англ. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1959. 320 с.
218. **Ловачев Л.А.** Кинетика образования NO_x в метановоздушных пламенах // Химическая физика. 1983. №8. С. 1085–1091.
219. **Левин В.А., Смехов Г.Д., Хмелевский А.Д.** Численное моделирование образования окиси азота при горении метановоздушных смесей // Физика горения и взрыва. Т.33. 1997. №1. С.12–23.
220. **Волков Д.В., Зайцев С.А., Гольцев В.Ф.** Параметрическое исследование образования оксида азота при горении однородной метановоздушной смеси // Физика горения и взрыва. Т. 35. 1999. №2. С. 9–15.
221. **Бочков М.В., Захаров А.Ю., Хависевич С.Н.** Образование NO_x при горении метановоздушных смесей в условиях совместного протекания процессов химической кинетики и молекулярной диффузии // Математическое моделирование. Т. 9. 1997. №3. С. 13–28.
222. **Старик А.М., Титова Н.С.** О возможности инициирования горения смесей CH₄–O₂ (воздух) при возбуждении молекул O₂ лазерным излучением // Физика горения и взрыва. Т 40. 2004. №5. С. 3–15.
223. **Smooke M.D.** (ed). Reduced kinetic mechanisms and asymptotic approximations for methane-air flames // Lecture notes in physics. Springer, N.Y., 1999. 384 p.
224. **Селезнев В.Е.** Использование компьютерных газодинамических симуляторов для повышения безопасности // Безопасность труда в промышленности. 2004. №7. С. 48–53.
225. **Рубцов Н.А., Тимофеев А.М., Саввинова Н.А.** Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2003. 198 с.
226. **Метод Монте-Карло в атмосферной оптике** / Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др. Новосибирск: Наука, 1976. 284 с.

227. *Метод Монте-Карло в проблеме переноса излучений* / Под ред. Г.И. Марчука. М.: Атомиздат, 1967. 256 с.
228. *Hottel H.C., Sarofim A.F.* Radiative Transfer. New York: McGraw-Hill, 1967. 372 p.
229. *Степанов С.П., Битюгов В.К.* Прямые дифференциальные методы в теории радиационного и радиационно-кондуктивного теплообмена // Теплофизика высоких температур. Т. 17. 1979. №2. С. 417–428.
230. *Олф С.* Модификация дифференциального приближения уравнения лучистого переноса // Ракетная техника и космонавтика. Т.5. 1967. С. 37–40.
231. *Пономарев Н.Н.* О решении задачи переноса лучистой энергии модифицированным методом средних потоков // Известия СО АН СССР. Серия технических наук. Вып.3. 1979. №13. С.64–68.
232. *Горбань И.А., Липовец Д.В.* Конечно-разностное решение нестационарных краевых задач лучисто-кондуктивного теплообмена и оценка точности двухпотокового приближения для конденсированных сред // Известия СО АН СССР. Серия технических наук. Вып. 3. 1978. №13. С. 51–59.
233. *Адрианов В.Н., Поляк Г.Л.* Дифференциальный метод исследования теплообмена излучением // Инженерно-физический журнал. 1964. №4. С. 74–80.
234. *Четверушкин Б.Н.* Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985. 304 с.
235. *Рубцов Н.А.* Теплообмен излучением в сплошных средах / Под ред. С.С. Кутателадзе. Новосибирск: Наука, 1984. 277 с.
236. *Оцисик М.Н.* Сложный теплообмен: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 616 с.
237. *Сушкевич Т.А.* Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 661 с.
238. *Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжов Л.Н.* Теплообмен излучением: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 432 с.
239. *Селезнев В.Е.* Анализ зон теплового поражения при авариях на газопроводах методами прямого моделирования // Наука и техника в газовой промышленности. 2005. №1. С.61–66.
240. *Roberts T. A., Medonos S., Shirvill L.C.* Review of the Response of Pressurised Process Vessels and Equipment to Fire Attack // Offshore Technology Report. ОТО 2000 051, HSE, 2000. 108 p.
241. *Бучнев О.А., Шабалов И.П.* Эффективное партнерство – учет экономических интересов // Газовая промышленность. 2007. №1. С. 12–15.
242. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
243. *Работнов Ю.Н., Милейко С.Т.* Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970. 224 с.
244. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1986. 360 с.
245. *Чадек Й.* Ползучесть металлических материалов. М.: Мир, 1987. 304 с.
246. *Коллинз Дж.* Повреждение материалов в конструкциях. М.: Мир, 1984. 634 с.
247. *Драйздейл Д.* Введение в динамику пожаров: Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1990. 421 с.
248. *Методика расчета взрывоустойчивости зданий при внутреннем дефлаграционном взрыве газопаровоздушных смесей* / Мишуев А.В., Казеннов В.В., Комаров А.А. и др. М.: НТЦ «Взрывоустойчивость» МГСУ, 2003. 43 с.
249. *Блинов В.И., Худяков Г.Н.* Диффузионное горение жидкостей. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 207 с.
250. *НПБ 105-03 «Нормы пожарной безопасности. Определение категорий помещений, зданий и наружных установок по взрывопожарной и пожарной опасности».* М.: Отдел 1.4 ФГУ ВНИИПО МЧС России, 2003. Электронное издание.
251. *Михеев М.А., Михеева И.М.* Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1973. 320 с.

252. *Seleznev V.E., Dikarev K.I., Aleshin V.V.* Risk analysis of fire at main gas pipelines // Conference Proceedings of 22 CAD–FEM Users' Meeting 2004. – International Congress of FEM Technology (November 2004, Dresden, Germany). Paper 2.6.41. CAD–FEM GmbH., Germany, 2004. 8 p.
253. *Щелкачев В.Н., Лапук Б.Б.* Подземная гидравлика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 736 с.
254. *Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д.* Нефтегазовая гидромеханика: Учебное пособие для вузов. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 544 с.
255. *Математические модели фильтрации и их приложения* // Сборник научных трудов. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, 1999. 204 с.
256. *Нигматулин Р.С., Соловьев А.А.* Физическая гидромеханика: Учебное пособие. М.: ГЭОТАР, 2005. 512 с.
257. *Белоцерковская М.С., Опарин А.М., Четверушкин Б.Н.* Использование вложенных сеток для моделирования процесса фильтрации // Математическое моделирование. Т. 16. 2004. №12. С. 3–10.
258. *Кампсти Н.* Аэродинамика компрессоров: Пер с англ. М.: Мир, 2000. 688 с.
259. *Казакевич В.В., Родов А.Б.* Системы автоматической оптимизации. М.: Энергия, 1977. 205с.
260. *Казакевич В.В.* Автоколебания (помпаж) в компрессорах. Изд. 2-е, перераб. М.: Машиностроение, 1974. 192 с.
261. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 403 с.
262. *Бояришинов М.Г., Киселев Д.Ю., Козлинских А.Е.* Движение жидкости по системе каналов городского коллектора // Математическое моделирование. Т. 10. 1998. №5. С. 10–20.
263. *Абдураимов М, Музафаров Х.А., Путтиев А.А.* Движение вод в открытых руслах (уравнения Сен-Венана) // Математическое моделирование. Т. 10. 1998. № 6. С. 97–106.
264. *Чертоусов М.Д.* Гидравлика. Специальный курс. Л.: Государственное энергетическое изд-во, 1957. 640 с.
265. *Физические величины: Справочник* / Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др. // Под ред. И.С. Григорьева и Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 445 с.
266. *Прялов С.Н.* Метод «лагранжевых» частиц для моделирования процессов транспортирования многокомпонентных газовых смесей по трубопроводным системам // Сборник тезисов докладов III Международной научно–технической конференции «Компьютерные технологии поддержки принятия решений в диспетчерском управлении газотранспортными и газодобывающими системами (DISCOM 2007)» (апрель 2007, г. Москва). М.: ВНИИГАЗ, 2007. С.24.
267. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Том 2. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. 620 с.
268. *Иваненко С.А., Корявов П.П.* Динамика вод и распространение загрязняющих веществ в водохранилище // Математическое моделирование. Т. 14. 2002. №6. С. 105–118.
269. *Васильев В.С., Сухинов А.И.* Прецизионные двумерные модели мелких водоемов // Математическое моделирование. Т. 15. 2003. №10. С. 17–34.
270. *Николаев И.А.* Математические модели гидрофизики водоемов // Математическое моделирование. Т. 9. 1997. №2. С. 46–52.
271. *Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 387 с.
272. *Современное состояние и перспективы развития трубной промышленности Российской Федерации* // Тематический сборник научных трудов ОАО «РосНИТИ» «Материалы XII межотраслевой научно-технической конференции (21–23 сентября 2004 г.)». Челябинск – Екатеринбург: АМБ, 2005. 2 т.
273. *Masamura K., Nagahama Y.* Manufacturing Processes and Products of Steel Pipes and Tubes in JFE Steel // JFE Technical Report. January 2006. № 7. P. 1–6.
274. *Development of high strength material and pipe production technology for grade X120 line pipe /*

- Hillenbrand H.-G., Liessem A., Biermann K., et al. // Proc. of the Int. Pipeline Conference IPC 2004 (October 2004, Canada). Paper IPC04-0224. 9 p.
275. **Шевакин Ю.Ф., Коликов А.П., Райков Ю.Н.** Производство труб. М.: Интермет Инжиниринг, 2005. 568 с.
276. **Технология трубного производства** // Данченко В.Н., Коликов А.П., Романцев Б.А. и др. М.: Интермет Инжиниринг, 2003. 640 с.
277. **Avitzur B.** Handbook of Metal-forming Processes. John Wiley & Sons, Ltd., 1983. 1020 p.
278. **Development of Ultra-high-strength Linepipe, X120** / Asahi H., Tsuru E., Ohkita S., et al. // Nippon Steel Technical Report. July 2004. № 90. P. 82–87.
279. **Derichs W., Genser B.**, New Technologies for the Economical & Flexible Production of Large Diameter Pipes // Proc. of Int. Conference «New Technologies for Tube & Pipe Production» (October 2005, Czech Republic). Paper 0517. 6 p.
280. **Sukhomlinov L.G., Engelsberg V.K., Davydov V.N.** A finite element membrane model for the analysis of axisymmetric sheet metal forming processes // Int. J. of Mechanical Sciences, Vol. 34. 1992. № 3. P. 179–193.
281. **Koc M., Altan T.** Application of two dimensional (2D) FEA for the tube hydroforming process // Int. J. of Machine Tools and Manufacture. Vol. 42. 2002. № 11. P. 1285–1295.
282. **Houcque D., Difant M.** Numerical Simulation of the Tube Forming Process: U and O Shapes // Proceedings of the ABAQUS Users Conference, (June 1994, USA). P.307–316.
283. **Shah S., Aue-u-lan Y., Altan T.** Using finite element analysis to roll-form tubes // The Tube and Pipe J. October 9, 2003. P. 28–30.
284. **Tsuru E., Asahi H.** Collapse Pressure Prediction and Measurement Methodology of UOE Pipe // Int. J. of Offshore and Polar Engineering. Vol. 14. March 2004. № 1. P. 226–234.
285. **Pennington J.H.** Software module simulates tube welding // Modern Metals, May 2004. P.78–79.
286. **Development of line pipe for deepwater applications** / Hillenbrand H.G., Graef, M.K., Groß-Weege J., et al. // Proc. of the 12th International Offshore and Polar Engineering Conference & Exhibition (ISOPE–2002) (May 2002, Japan). 12 p.
287. **Chen X.M., Palanisamy K., Zhu X.H.** Process Parameter Sensitivity Study on Tube Hydroforming // Proc. of the 7th Int. LS-DYNA Users Conference (Dearborn, MI, USA, 2002). Paper № 15–4. 9 p.
288. **HOTPIP JI PROJECT – Experimental Test and FE Analysis** / Vitali L., et al. // OMAE Proc. of the 24th Int. Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (Halkidiki, Greece, 2005). Paper № 67526. 17 p.
289. **Adeeb S., Zhou J., Horsley D.** Investigating the Effect of UOE Forming Process on the Buckling of Line Pipes Using Finite Element Modeling // Proc. of the Int. Pipeline Conference IPC2006 (September 2006, Canada). Paper IPC2006-10175. 7 p.
290. **Sedlmaier A.** Finite Element Analysis of the Forming & Welding Process making Longitudinal Welded Tubes // Proc. of Int. Conference «Welding Technologies for Manufacturing and Processing Auto, Energy and Structural Tubulars» (February 2005, India). Paper 0507. 9 p.
291. **Качанов Л.М.** Основы теории пластичности. М.: Гос. изд-во научно-технической литературы, 1956. 324 с.
292. **Писаренко Г.С. Лебедев А.А.** Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наукова Думка, 1976. 415 с.
293. **Tabert S., Avitzur B.** Elementary Mechanics of Plastic Flow in Metal Forming. John Wiley & Sons, 1996. 400 p.
294. **Технологические инструкции ТИ 153-ТР.ТС-40-96, Редакция 3, Раздел 31 «Калибрование корпуса трубы».** ОАО «ВМЗ», Выкса, 2005. 9 с.
295. **Плескач Б.В.** Анализ прочности оборудования и процессов формообразования трубных заготовок // Сб. трудов Третьей конференции пользователей программного обеспечения CAD-FEM GmbH / Под ред. А.С. Шадского. М: Полигон-пресс, 2003. С. 335–339.
296. **Mechanical expander for JSC Chelyabinsk.** Press Release of SMS Meer GmbH, SMS group. (Au-

- gust 2005, Germany). 2 p.
297. *JSC Vyksa Steel Works modernizes large-diameter pipe mill with technology from SMS Meer.* – Press Release of SMS Meer GmbH, SMS group. (March 2004, Germany). 4 p.
298. *New order for SMS Meer New large-diameter pipe mill for ZAO Izhorsky Trubny Zavod.* Press Release of SMS Meer GmbH, SMS group. (February 2004, Germany). 3 p.
299. *Müsgen B., Kaiser H.J.* Auswirkungen des Bauschinger-Effektes auf das Bauteilverhalten hochfester Stähle. Thyssen Technische Berichte, № 2/84, Düsseldorf, BRD, 1984. 16 S.
300. *Chung W.J., Cho J.W., Belytschko T.* On the dynamic effects of explicit FEM in sheet metal forming analysis // Engineering Computations. Vol.15. 1998. № 6–7. P. 750–770.
301. *Васин Р.А., Ленский В.С., Ленский Э.В.* Динамические зависимости между напряжениями и деформациями // В сб.: «Проблемы динамики упругопластических сред». М.: Мир, 1975. С.7–38.
302. *Вавакин А.С., Викторов В.В., Мохель А.Н.* Временные эффекты при пластическом деформировании металлов // В сб.: «Пластичность и разрушение твердых тел», серия: Прочность и вязкоупругопластичность, АН СССР. М.: Наука, 1988. С. 29–40.
303. *Perzyna P.* Fundamental problems in viscoplasticity // Advances in Applied Mechanics. Vol. 9. New York: Academic Press, 1968. P. 313–377.
304. *Peirce D., Shih C.F., Needleman A.* A tangent modulus method for rate dependent solids // Computers & Structures. Vol. 18. 1984. P. 888–975.
305. *Cao H.-L.* Numerical simulation of multi-operation sheet forming processes // J. of Materials Processing Technology. Vol. 45. 1994. № 1 – 4. P. 237–241.
306. *Galbraith P.C., Hallquist J.O.* Shell-element formulations in LS-DYNA3D: their use in the modelling of sheet-metal forming // J. of Materials Processing Technology. Vol. 50. 1995. № 1 – 4. P.158–167.
307. *Kothe D.B.* Computational Manufacturing: Toward Simulating Metal Casting and Welding Processes // LANL Technical Report LA-UR-02-7233, Computer and Computational Science Division of Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM, USA, 2003. 88 p.
308. *Computer Modeling of Heat Flow in Welds* / Goldak J.A., Bibby M., Moore J., et al. // Metallurgical Trans. B. Vol. 17B. 1986. P. 587–600.
309. *Lindgren L.-E.* Modelling for Residual Stresses and Deformations due to Welding / Ed. by H. Cerjak. // In «Mathematical Modelling of Weld Phenomena». Vol. 6. 2002. P. 491–518.
310. *Precision and Efficiency Sensitivity of Some Key Techniques in Thermo-mechanical Simulation of Welding Process* / Shi Q.-Y., Lu A., Zhao H., et al. // Proc. of the 6th Int. Conference on Trends in Welding Research (April 2002, USA). P. 867–872.
311. *Spille-Kohoff A.* Process Simulation of Arc Welding // ANSYS Solution. Vol.7. Issue 1, 2006. P.27–29.
312. *API Recommended Practice 1111 Design Construction, Operation and Maintenance of Offshore Hydrocarbon Pipelines (Limit State Design)*, American Petroleum Institute, 1999. 64 p.
313. *DNV OS-F101 Submarine Pipeline Systems*, Det Norske Veritas, Norway, 2000. 166 p.
314. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов. В 2-х томах. М.: Наука, 1965. 2 т.
315. *Мансуров М.Н., Черный В.П.* Методы расчета морских трубопроводов на прочность и устойчивость // Газовая промышленность. 2005. №2. С. 47–51.
316. *Харионовский В.В., Черный В.П.* Газопровод «Голубой поток»: научно-методическое обеспечение // Газовая промышленность. 2005. №11. С. 15–19.
317. *Fluhrer J.* DEFORM 3D Version 5.03 User's Manual. Scientific Forming Technology Corporation, USA, 2004. 286 p.
318. *eta/DYNAFORM User's Manual, Version 5.2.* Engineering Technology Associates, Inc., 2004. 344 p.
319. *Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент: Справочник* / Аметистов Е.В., Григорьев В.А., Емцев Б.Т. и др. // Под общей ред. В.А. Григорьева и В.М. Зорина. М.: Энер-

- гоиздат, 1982. 512 с.
320. **Киселев П.Г.** Гидравлика. Основы механики жидкости. М. –Л.: Госэнергоиздат, 1963. 424 с.
321. **Гейгер В.Г., Дулин В.С., Заря А.Н.** Гидравлика и гидропривод. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Недра, 1991. 336 с.
322. **Кострюков В.А.** Основы гидравлики и аэродинамики / Под ред. С.В. Каплинского. М.: «Высшая школа», 1975. 220 с.
323. **Трубопроводный транспорт нефти и газа** / Алиев Р.А., Белоусов В.Д., Немудров А.Г. и др. 2-е изд., перераб. и доп. М.:Недра, 1988. 368 с.
324. **Бишоп А.У.** Параметры прочности при сдвиге ненарушенных и перемятых образцов грунта: Пер. с англ. / В сб: «Определяющие законы механики грунтов» // Под ред. В.Н. Николаевского. М.: Мир, 1975. С. 7–75.
325. **Новожилов В.В., Кадашев Ю.И.** Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.
326. **Киселев П.Г.** Гидравлика. Основы механики жидкости. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1963. 424 с.
327. **Гейгер В.Г., Дулин В.С., Заря А.Н.** Гидравлика и гидропривод. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Недра, 1991. 336 с.
328. **Гидравлика, водоснабжение и канализация** / В.И. Калицун, В.С. Кедров, Ю.М., Ласков. Изд. 4-е изд. Перераб. и доп. М.: ОАО «Издательство «Стройиздат», 2004. 397 с.
329. **Дейнеко В.В.** Математические модели динамики вязкой жидкости и теплообмена. Новосибирск, 1996. 360 с.

Приложение 1

Численный анализ влияния остаточного напряженно-деформированного состояния труб на прочность магистральных трубопроводов

Алешин В.В.

Подсистема «Alfargus/PipeManufacture» предназначена для численного анализа влияния остаточного НДС и технологических дефектов, возникающих в процессе изготовления труб, на прочность магистральных трубопроводов при их последующей эксплуатации.

Как отмечалось в Главах 1 и 3, для получения наиболее объективных и точных оценок при анализе безопасности МТ необходимо учитывать все факторы, влияющие на эволюцию сложного нелинейного НДС трубопроводных конструкций на протяжении всего жизненного цикла транспортной системы. В частности, одним из таких важных факторов является начальное НДС, неизбежно имеющееся в каждой трубе вследствие технологических процессов ее производства. По объективным причинам до недавнего времени оценке влияния начального НДС труб при анализе прочности МТ не уделялось должного внимания.

Для систематизации изложения материала данного Приложения целесообразно сделать краткий обзор основных технологических процессов производства труб для МТ. В настоящее время как в Российской Федерации, так и за рубежом, большинство труб, используемых для строительства новых и реконструкции действующих МТ большого диаметра, являются электросварными прямошовными трубами. Основная часть этих труб изготавливаются на трубоэлектросварочных агрегатах (ТЭСА) из листового проката (штрипса) по так называемой UOE-технологии [272–279]. Аббревиатура «UOE» означает три основные операции в технологической цепочке производства труб:

- 1) предварительная формовка трубной заготовки (придание стальному листу U-образной формы);
- 2) окончательная формовка (придание трубной заготовке O-образной формы);
- 3) раздача или экспандирование¹ сформованной и сваренной трубы до требуемого диаметра с помощью гидравлических прессов-расширителей или механических (гидромеханических) экспандеров.

Безусловно, количество производственных операций при изготовлении труб по UOE-технологии (также как и при любом другом известном способе производства труб большого диаметра [273, 275–277]) далеко не ограничивается тремя вышеуказанными процессами. Здесь мы не будем подробно рассматривать всю цепочку операций изготовления трубы на ТЭСА, так как она хорошо известна и описана в специализированной литературе [275–277]. Важно лишь отметить то, что практически каждая из операций этой технологической цепочки (от правки исходного листа до гидроиспытаний готовой трубы) связана с необходимостью упруго-пластического деформирования трубных заготовок в холодном состоянии (рис. П1.1). Кроме того, при выполнении продольных сварных швов локальные зоны стенки трубы также подвергаются существенному тепловому воздействию.

Другие распространенные технологии производства электросварных прямошовных труб большого диаметра отличаются от UOE-технологии только методом холодной

¹ От английского слова «expander» – расширитель.

формовки листа (валковый, пошаговый, JCOE и др.) и/или способом изготовления трубы (двухшовные трубы, сваренные из двух полуцилиндрических заготовок). Заметим также, что широко распространенная в прошлом технология производства труб со спиральным сварным швом [275, 276] в настоящее время применяется, в основном, для выпуска труб сверхбольших диаметров (до 4020 мм) или длин (до 36 м) [273]. Среди труб диаметром от 820 мм до 1420 мм и длиной от 10 м до 18 м¹ прямошовные трубы имеют более высокую конкурентоспособность, чем спиральношовные трубы.



Рис. П1.1. Холодная формовка штрипса на U-прессе

Таким образом, при любом способе изготовления каждая готовая труба для магистрального трубопровода, получаемая на выходе ТЭСА, имеет некоторое начальное НДС. Величина и распределение характеристик НДС в стенках трубы существенным образом зависят от многих факторов: технологии производства, способа формовки, режима сварки, метода экспандирования и т.п. Естественно, что это обстоятельство известно уже достаточно давно как производителям, так и потребителям труб большого диаметра [275–277]. Причем известно оно больше в виде качественной особенности и некоторых инструментально контролируемых геометрических параметров продукции трубных заводов², чем в виде конкретных количественных показателей и, тем более, трехмерных картин распределения характеристик остаточного сложного НДС в стенках выпускаемых труб.

В действующих нормах [44] к качеству и параметрам труб предъявляются достаточно жесткие требования. Для более наглядного представления приводимых далее результатов расчетных примеров перечислим некоторые требуемые параметры, которые прямым или косвенным образом связаны с остаточным НДС выпускаемых труб. Так, согласно Разделу 13 норм [44], поставляемые для строительства МТ трубы должны иметь следующие параметры и показатели качества:

- 1) отклонения от номинальных размеров наружных диаметров торцов труб на длине не менее 200 мм для труб диаметром свыше 800 мм не должны превышать ± 2 мм;
- 2) овальность концов труб $\chi = (D_{\text{макс}} - D_{\text{мин}}) / D$ (отношение разности между наибольшим и наименьшим наружными диаметрами в одном поперечном сечении к номинальному диаметру) не должна превышать 1%, овальность концов труб с толщиной стенок 20 мм и более не должна превышать 0,8 %;
- 3) кривизна труб не должна превышать 1,5 мм на 1 м длины, а общая кривизна – не бо-

¹ Эти сортаменты соответствует абсолютному большинству труб строящихся и действующих МТ.

² Например, степени «овальности» поперечного сечения трубы [44, 294].

лее 0,2 % длины трубы;

- 4) пластическая деформация металла в процессе производства труб (экспандирования) должна быть не более 1,2%;
- 5) в металле труб не допускается наличие трещин, плен, рванин, закатов, а также расслоений длиной более 80 мм в любом направлении, и др.

Из перечисленных выше пяти требований только последнее напрямую связано с заботой о прочности строящегося трубопровода при эксплуатационных нагрузках. При соблюдении всех правил производства труб по УОЕ-технологии нарушение этого требования, скорее всего (но не обязательно – см. ниже), будет следствием подачи на вход ТЭСА некачественного штрипсового проката (с дефектами), а не технологических операций. В то же время, нарушение любого из первых четырех вышеперечисленных требований является прямым следствием проведения технологических операций процесса производства трубы. Однако даже одновременное нарушение всех четырех требований отнюдь не означает появления остаточного НДС стенок трубы, снижающего запасы прочности трубопровода при эксплуатационных нагрузках. Так же как и выполнение этих требований не свидетельствует об обратном.

Требования по предельным отклонениям геометрической формы труб были заложены в нормы [44], в первую очередь, исходя из соображений технологичности и удобства строительства МТ (выполнение стыковых сварных швов, расположение труб в траншее или на опорах, и т.д.), а не обеспечения прочностных характеристик трубопроводной конструкции. Таким образом, *соблюдение перечисленных выше пяти условий (так же как и всех других требований норм [44]) еще не является гарантией того, что остаточным НДС произведенных на заводе труб можно пренебрегать при расчетах запасов прочности сооруженной из них конструкции магистрального трубопровода.*

В действующих нормах [44] содержится также требование к проведению гидроиспытаний каждой трубы на заводе-изготовителе. Такие гидроиспытания, наряду с основной своей задачей по выявлению не обнаруженных при неразрушающем контроле дефектов стенок труб, до недавнего времени были также практически единственным (хотя и косвенным) подтверждением того, что остаточное НДС труб находится в допустимых пределах. Только начиная с середины 90-х годов XX века¹, для анализа сложного НДС стального листа в процессе производства труб стало активно применяться численное моделирование. Причем большинство практических задач в области численного моделирования технологических операций производства электросварных труб решались (и решаются) в плоской или осесимметричной постановке [272, 274, 280–284]. В последнее время опубликованы также примеры трехмерного численного моделирования изменения сложного нелинейного НДС листа на отдельных операциях трубного производства, выполненные с дополнительными упрощениями в постановках задач [285–290].

Таким образом, современный уровень развития методов и средств численного решения нелинейных задач МДТТ позволяет (при надлежащем и корректном их применении) широкому кругу специалистов, детально знакомых с предметной областью [84, 123, 125, 151, 153, 275–277, 279, 291–293], получать практически значимые результаты, не достижимые ранее. Результаты численного моделирования помогают при совершенствовании и оптимизации технологических процессов производства труб, что ведет к повышению качества выпускаемой продукции. Они также нужны при анализе прочности и безопасности построенных (или реконструированных) с использованием этих труб участков

¹ К этому времени был достигнут требуемый уровень развития методов вычислительной механики и производительности широкодоступной компьютерной техники, а также реализованы необходимые возможности численного решения высоконелинейных задач МДТТ (и сопряженных термомеханических задач) в коммерческих универсальных и специализированных программно-математических комплексах [130, 131, 133, 280, 285, 300, 305–311, 317, 318].

МТ. Более того, *две отмеченные выше глобальные задачи – повышение качества продукции трубных заводов и обеспечение требуемого уровня безопасности магистральных трубопроводов – тесно взаимосвязаны и должны решаться совместно.*

Для иллюстрации приведем несколько примеров численного моделирования¹ процессов калибрования и последующего гидроиспытания корпуса труб на гидропрессе-расширителе модели П 9046 [294]. Данные примеры были выбраны, во-первых, ввиду повышенной технологической сложности операции экспандирования труб, в частности, на гидравлических прессах. Во-вторых, эта операция существенно влияет на итоговую форму и остаточное НДС произведенных на заводе труб, а следовательно, на их потребительские качества (конкуренентоспособность) и на промышленную безопасность сооруженных из них участков МТ. Так, в нормативных требованиях по предельно допустимой величине пластической деформации из всех технологических операций производства труб для МТ выделен только процесс экспандирования [44]. Здесь будем условно считать, что на операцию калибрования труба приходит без начального НДС (модельная задача)².

В настоящее время, вследствие резкого обострения конкуренции (как среди заводов-производителей труб большого диаметра, так и среди компаний-поставщиков оборудования для трубного производства [279, 295–298]) появилась третья причина повышенного внимания именно к операции калибрования корпуса труб. Этой причиной является необходимость выбора и обоснования наиболее рационального из двух способов экспандирования: механического или гидравлического. Ниже мы рассмотрим некоторые аспекты этого и других актуальных вопросов трубного производства, но сначала изложим основные модели, алгоритмы и результаты проведенного моделирования.

В общей постановке математическая задача определения сложного нелинейного НДС трубы как пространственной конструкции на любой операции производства по УОЕ-технологии, за исключением сварки трубных заготовок³, является краевой задачей МДТТ [84, 123]. Причем скорости перемещений конструкций при выполнении этих операций таковы, что инерционными эффектами можно пренебречь. Тогда задача сводится к решению системы уравнений равновесия конструкции (листа, трубы) в трехмерной квазистатической постановке, замыкаемой физическими уравнениями, описывающими нелинейное поведение материала, при соответствующих граничных условиях. То есть в данном случае общий вид системы решаемых уравнений полностью совпадает с видом системы, используемой для анализа сложного НДС трубопроводных конструкций (подробнее см. Главу 3, а также [1, 5, 6]).

При производстве труб по УОЕ-технологии на каждой из механических операций скорости деформаций невелики, деформирование происходит при нормальной температуре, а пластическая деформация металла не превышает нескольких процентов [44, 275–277, 294, 296–298]. Поэтому для математического моделирования физически нелинейного поведения трубных стале́й на этих операциях можно, как и при анализе трубопроводных конструкций (см. Главу 3), воспользоваться основными соотношениями теории течения упруго-пластического упрочняющегося материала с классическим критерием пластичности в форме Губера – Мизеса (3.22). Только в данном случае необходимо моделировать трубную сталь как упруго-пластический материал с кинематическим или комбинированным (смещение и расширение поверхности текуче-

¹ Здесь представлены результаты работы по численному анализу процессов производства электросварных труб большого диаметра, выполненной В.В. Алешиным совместно с В.Е. Селезевым в 2006 году.

² Такая постановка задачи была принята для демонстрации общих (характерных для всех механических операций УОЕ-технологии) закономерностей влияния остаточного НДС труб на запасы прочности конструкций МТ.

³ Подходы к моделированию сварки труб будут рассмотрены ниже.

сти при активном нагружении) законом упрочнения¹, что позволит учитывать эффект Баушингера [123]. Для низколегированных высокопрочных трубных сталей при характерных для механических операций UOE-технологии повторяемых циклах «нагрузка – разгрузка» заметное проявление эффекта Баушингера подтверждено экспериментально [284, 286, 288, 299].

Применение данного подхода для моделирования нелинейного поведения металла на механических операциях трубного производства позволяет даже при минимальном наборе исходных данных получить удовлетворительные (в первом приближении) результаты. Например, чтобы построить билинейную зависимость «напряжение – деформация» для упруго-пластического материала с кинематическим законом упрочнения, достаточно знать стандартные характеристики физико-механических свойств трубной стали и одну ненормативную характеристику ε_s – предельную деформацию, соответствующую условному пределу прочности на диаграмме одноосного растяжения образца. Тогда значения напряжений при одноосном растяжении за пределами упругости могут быть рассчитаны по формуле:

$$\sigma = \sigma_T + \frac{E \cdot E_T}{E - E_T} \cdot \varepsilon^p, \quad (\text{П1.1})$$

где $E_T = (\sigma_s'' - \sigma_T) / (\varepsilon_s'' - \sigma_T / E - 0,002)$ – касательный модуль билинейной диаграммы одноосного растяжения; $\sigma_s'' = \sigma_s \cdot (1 + \varepsilon_s)$ – истинный предел прочности; $\varepsilon_s'' = \ln(1 + \varepsilon_s)$ – истинная (логарифмическая) предельная деформация.

В то же время, ввиду особой важности анализа поведения трубной стали за пределами упругого деформирования при холодном деформировании листового штрипса, для достижения более точных результатов моделирования необходимо иметь более полный набор исходных данных. Так, например, для построения мультилинейной зависимости «напряжение – деформация» требуются диаграммы одноосного растяжения, а для включения в модель комбинированного упрочнения дополнительно нужны и диаграммы циклов «растяжение – сжатие» образцов трубной стали.

Обработка и подготовка для численного моделирования большого количества эмпирических данных, снимаемых с машинных диаграмм испытаний образцов, являются достаточно трудоемкими процессами, сопряженными с возможностями внесения ошибок. Поэтому здесь удобно использовать модели упруго-пластического материала, где зависимость «напряжение – деформация» аппроксимируется (для всей кривой или только ее части) гладкой нелинейной функцией, определяемой несколькими материальными параметрами. В последнее время такой подход находит широкое применение при численном моделировании процессов обработки металлов давлением. В частности, одним из наиболее простых (но в то же время эффективных и часто применяемых при моделировании операций холодной формовки стальных листов и трубных заготовок [283]) законов нелинейного упрочнения материала является двухпараметрическая степенная аппроксимация пластического участка диаграммы одноосного растяжения образцов (см., например, [153]):

$$\sigma = k \cdot (\varepsilon_0 + \varepsilon_p)^n, \quad (\text{П1.2})$$

где k , n – материальные параметры; ε_0 – начальная деформация; ε_p – эффективная (логарифмическая) пластическая деформация.

¹ Для анализа НДС трубопроводных конструкций обычно используются модели упруго-пластического материала с изотропным законом упрочнения (см. Главу 3).

В формуле (П1.2) за начальную деформацию ε_0 обычно (но не обязательно) принимается величина некоторой условно упругой деформации, которая определяет начало пластического течения материала. Так, если известен модуль Юнга E или условный предел текучести σ_T (стандартные справочные характеристики конструкционных сталей), то ε_0 определяется через любую из этих характеристик с помощью очевидных соотношений:

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{E}{k} \right)^{\frac{1}{n-1}}; \quad \varepsilon_0 = \left(\frac{\sigma_T}{k} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{П1.3})$$

Другой широко используемой на практике нелинейной функцией, описывающей участок упрочнения на диаграмме упруго-пластического деформирования металлических материалов, является трехпараметрическая аппроксимационная формула [129]:

$$\sigma = \sigma_0 + R_0 \cdot \varepsilon_p + R_\infty \cdot \left[1 - \exp(-b \cdot \varepsilon_p) \right], \quad (\text{П1.4})$$

где σ_0 – предельное упругое напряжение; R_0 , R_∞ , b – материалыные параметры.

Использование для аппроксимации экспериментальных диаграмм одноосного растяжения образцов выражения (П1.4) позволяет получить не только непрерывную, как в случае аппроксимаций (П1.1, П1.2), но и гладкую на всем протяжении кривую упруго-пластического деформирования материала. Причем построить такую кривую можно даже при минимальном наборе исходных данных (например, с использованием параметров, определяющих билинейную диаграмму деформирования (см. выше), и предела пропорциональности $\sigma_{m\pi}$). Тогда, если в (П1.4) положить $\sigma_0 = \sigma_{m\pi}$, то параметр $R_0 = E_T$. Оставшиеся два параметра R_∞ , b в (П1.4) определяются в результате решения системы нелинейных уравнений, получаемых из условия непрерывности производной кривой упруго-пластического деформирования в точке, соответствующей $\sigma_{m\pi}$, и выбранной скорости приближения этой кривой к наклонной прямой асимптоте (тангенс угла наклона равен касательному модулю упрочнения E_T).

Еще одной характерной особенностью многих процессов обработки металлов давлением является зависимость характеристик пластических свойств материала от скорости деформации (вязкопластичность), проявляющаяся при высоких скоростях деформации [127–129, 136, 300]. Результаты одноосных испытаний образцов показывают, что для большинства конструкционных материалов влияние скорости испытаний на диаграмму деформирования возникает, начиная с некоторого уровня скоростей деформации, называемого порогом динамической чувствительности материала [301]. В частности, для широкого класса металлов и сплавов, в том числе и трубных сталей, при нормальных температурах порог динамической чувствительности составляет $10^{-4} \div 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ [301]. При повышении температуры значение порога динамической чувствительности металлов существенно снижается. Поэтому упруго-вязкопластические модели материала применяются, в основном, при численном анализе высокотемпературных и/или высокоскоростных процессов обработки металлов давлением –ковки, прокатки, горячей формовки, штамповки, высадки и т.п.

В то же время, производительность современных ТЭСА такова [273, 275–278, 294–298], что на многих механических операциях технологической цепочки производства труб скорости деформаций достигают (а на некоторых и превосходят) порог динамической чувствительности трубных сталей. Например, при гидравлическом калибровании корпуса трубы время подъема внутреннего избыточного давления до величины давления

раздачи составляет около 30 с, допустимая при этом нормативная величина пластической деформации равна 1,2% [44, 294], следовательно, средняя скорость деформации равна $4 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. При механическом экспандировании трубы скорости деформаций выше на порядок.

При таких (все еще сравнительно низких) скоростях деформаций, вязкопластические эффекты только начинают проявляться и, возможно, они не вносят существенного вклада в остаточное НДС готовой трубы. Однако активные исследования в области изучения вязкопластических свойств конструкционных сталей и сплавов продолжаются. Так, в работе [302] экспериментально доказано, что влияние скорости испытания на диаграмму деформирования у некоторых конструкционных сталей начинает проявляться уже при скоростях деформаций $10^{-6} \div 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Кроме того, разработчики оборудования для трубного производства постоянно совершенствуют свою продукцию с целью повышения ее производительности [279, 295–298]. Это неизбежно приводит к повышению скоростей деформации на всех операциях УОЕ-технологии, а следовательно, и к усилению влияния вязкопластических эффектов на остаточное НДС производимых для МТ труб. Поэтому для получения высокоточных результатов численного анализа этих операций нужно применять модели материалов, позволяющих, в случае необходимости, учитывать вязкопластические свойства трубной стали.

В практических расчетах для учета влияния скорости деформации кривая пластического участка диаграммы одноосного растяжения металлического материала при нормальных температурах описывается произведением двух функций [130, 131, 133]:

$$\bar{\sigma} = f_1(\dot{\varepsilon}_p) \cdot f_2(\varepsilon_p), \quad (\text{П1.5})$$

где $\dot{\varepsilon}_p$ – скорость пластической деформации.

В уравнении (П1.5) функция $f_2(\varepsilon_p)$ описывает пластический участок диаграммы растяжения при статическом характере испытаний ($\dot{\varepsilon}_p < 10^{-6} \text{ с}^{-1}$), например, в виде выражений (П1.2) или (П1.4). Масштабирующая функция $f_1(\dot{\varepsilon})$ в (П1.5) может быть выбрана в одном из двух, наиболее распространенных в настоящее время, видов (в зависимости от того, какое выражение лучше аппроксимирует экспериментальные данные) [303, 304]:

$$f_1(\dot{\varepsilon}_p) = 1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}_p}{C} \right)^{\frac{1}{P}} \quad (\text{П1.6a})$$

или

$$f_1(\dot{\varepsilon}_p) = \left[1 + \frac{\dot{\varepsilon}_p}{C} \right]^{\frac{1}{P}}, \quad (\text{П1.6б})$$

где C, P – материальные параметры.

Представленные выше модели материалов, с одной стороны, достаточно просты и не требуют для своей реализации большого количества экспериментальных данных. Значения нескольких материальных параметров, входящих в уравнения (П1.1 – П1.6), могут быть определены с требуемой точностью для каждой марки трубной стали на стандартном экспериментальном оборудовании. С другой стороны, эти модели можно эффективно использовать при численном анализе эволюции сложного НДС трубных заготовок на всех механических операциях производства электросварных труб большого диаметра.

Здесь следует привести еще одно замечание. В настоящее время предложены, формализованы и реализованы в универсальных программно-математических комплексах [130, 131, 133] более сложные математические модели поведения конструкционных материалов при деформировании, позволяющие, например, учитывать неоднородность структуры (анизотропию физико-механических свойств), термовязкопластичность (тепловые эффекты при деформациях), разупрочнение, различное сопротивление сжимающим и растягивающим нагрузкам, накопление повреждений, вязкоупругость (наследственные эффекты), упругий гистерезис (включая так называемые «эффекты памяти формы») и многие другие специфические свойства. Однако необходимо помнить, что практически каждая новая модель разрабатывалась вначале для сугубо конкретных (часто очень специфических) условий, а иногда и только для конкретного материала. В рассматриваемой здесь достаточно узкой области металлообработки¹ большинство из вышеперечисленных специфических свойств материалов пока не выявлено, а эффект других выражен крайне слабо. Единственная особенность, которую следует (при наличии достоверных и полных экспериментальных данных) дополнительно включить в модель материала трубных сталей, – это ортотропия характеристик физико-механических свойств штрипсового проката (см. Раздел 3.1).

Таким образом, вопрос о дальнейшем усложнении математических моделей, даже в виде использования известных многопараметрических моделей упруго-вязкопластического материала, необходимо решать в контексте каждой конкретной задачи моделирования остаточного НДС труб, поставляемых для строительства МТ. Здесь следует учитывать, что наполнение многопараметрических моделей достоверными материальными константами является достаточно продолжительным и существенно затратным процессом. При этом уточнение результатов численного моделирования, полученных с применением указанных моделей, может быть незначительным, а следовательно, с практической точки зрения, бесполезным.

Наиболее подходящим методом численного решения трехмерных нелинейных задач МДТТ является метод конечных элементов (МКЭ) (более подробно см. в Главе 3), с помощью которого получены представленные ниже результаты. В настоящее время все наиболее известные в мире универсальные программы МКЭ-анализа (например, [130, 131, 133]) обладают функциональными возможностями, необходимыми для решения большинства производственных задач, связанных с анализом эволюции сложного нелинейного НДС штрипса в процессе изготовления труб. Эти программы можно использовать в качестве средств численного моделирования при решении задач совершенствования технологических процессов производства труб.

Однако следует особо подчеркнуть, что *ввиду существенных нелинейностей рассматриваемых задач, для получения практически значимых (и даже просто корректных) результатов, разработкой технологий и алгоритмов применения универсальных МКЭ-программ в целях анализа остаточного НДС труб и оптимизации технологических операций трубного производства должны заниматься, прежде всего, специалисты в области МДТТ и методов вычислительной механики*. Такие специалисты могут дополнить отсутствующие возможности универсальных программ, квалифицированно и корректно исправить имеющиеся в них ошибки (к сожалению, такая необходимость встречается достаточно часто), автоматизировать процессы подготовки исходных данных, настройки «решателей», обработки и интерпретации результатов. По сути, они должны разработать компьютерный симулятор технологических процессов трубного производства, которым сможет эффективно пользоваться широкий круг специалистов трубных заводов. Более подробную информацию по вопросам при-

¹ Имеются в виду только процессы холодной формовки листов из высокопрочных низколегированных сталей и калибрования изготовленных из них труб.

менения универсальных программно-математических комплексов и разработки компьютерных симуляторов можно найти в [3, 6, 7].

Перейдем теперь к изложению результатов численного анализа НДС корпуса трубы при калибровании на гидравлическом прессе-расширителе. В процессе анализа моделировались трубы с исходным (до экспандирования) наружным диаметром 1010 мм, толщиной стенки 10 мм и 20 мм, длиной 11,7 м, изготовленные из стали марки 10Г2ФБЮ (паспортные характеристики: предел текучести $\sigma_T = 490,5 \text{ МПа}$, условный предел прочности $\sigma_s = 608 \text{ МПа}$). Требуемый наружный диаметр трубы после экспандирования составляет $D = 1020 \text{ мм}$. Номинальное значение диаметра рабочей (внутренней) поверхности вкладышей штампа, согласно [294], равно 1022 мм. При этом допускается отклонение величины диаметра от номинального значения в пределах $\pm 2 \text{ мм}$. Величина давления раздачи на гидропрессе корпусов труб с вышеуказанными параметрами регламентируется инструкциями [294] и составляет: $9,3 \div 14,4 \text{ МПа}$ для труб с толщиной стенки 10 мм; $19,0 \div 29,1 \text{ МПа}$ для труб с толщиной стенки 20 мм. Требования к максимальным допустимым отклонениям контролируемых геометрических параметров трубы после экспандирования, приведенные в [294], полностью идентичны требованиям норм [44].

Для адекватного отражения эволюции сложного НДС численный анализ операций экспандирования и гидроиспытания корпуса трубы на прессе-расширителе разбивался на последовательно выполняемые этапы моделирования, представляющие историю нагружения конструкции (изменение нагрузок и/или граничных условий):

- калибрование концов трубы (раздача механическим экспандером стенок трубы в радиальном направлении до требуемого диаметра на участках длиной не менее 200 мм, измеряемой от каждого из ее торцов [275]);
- извлечение механического экспандера (упругая разгрузка¹ концов трубы);
- надвигание головок пресса на концы трубы и заполнение трубы водой (контакт концов трубы с поверхностью головок, действие веса трубы и воды);
- подъем гидравлического давления до заданного максимального значения (включает несколько подэтапов повышения давления до уровней, соответствующих: появлению пластических деформаций на внутренней поверхности стенки трубы; распространению пластических деформаций на все сечение стенки трубы; касанию наружной поверхности корпуса трубы внутренней поверхности штампа, и т.д.);
- гидравлическое испытание трубы (снижение гидравлического давления до уровня $p_u = 0,95 \cdot \frac{2 \cdot \delta \cdot \sigma_T}{D_{\text{вн}}}$ [44], где δ – толщина стенки; $D_{\text{вн}}$ – внутренний диаметр трубы);
- сброс избыточного гидравлического давления до нуля (упругая разгрузка стенок трубы);
- слив воды и извлечение трубы из пресса (снятие нагрузки от веса воды).

После завершения вышеуказанных этапов выполнялся дополнительный этап численного анализа – нагружение трубы эксплуатационными нагрузками (внутреннее избыточное давление $p = 7,5 \text{ МПа}$), что позволяло оценить влияние начального НДС на запасы прочности трубопроводной конструкции.

¹ В современной русскоязычной литературе по обработке металлов давлением для обозначения процесса уменьшения упругих деформаций при снятии нагрузки часто применяются термины «пружинение», «распружинивание» и т.п., появившиеся в результате дословного перевода широко распространенного англоязычного термина «springback». Здесь мы будем придерживаться традиционных определений, принятых в МДТТ.

Опираясь на имеющийся набор исходных данных, нелинейное поведение трубной стали моделировалось с помощью билинейной модели изотропного упруго-пластического материала с комбинированным законом упрочнения. Эффекты вязкопластичности не учитывались. Анализ выполнялся с использованием оболочечных и объемных конечно-элементных моделей (КЭ-моделей) труб. Ввиду симметрии рассматриваемой конструкции, граничных условий и нагрузок моделировалась только $\frac{1}{4}$ части корпуса трубы. Влияние отброшенных частей учитывалось с помощью задания соответствующих граничных условий.

Общие закономерности изменения сложного НДС труб на этапах нагружения можно проследить на примере результатов численного анализа, полученных с использованием оболочечных КЭ-моделей трубы с толщиной стенки 10 мм. На рис. П1.2 представлено распределение интенсивности напряжений в стенках трубы после механического калибрования концов. Из рисунка видно (масштаб деформаций на всех рисунках, представленных далее в настоящем Приложении, увеличен для наглядности), что максимальные значения характеристик остаточного НДС сосредоточены в узкой кольцевой зоне перехода от калиброванного конца к средней части некалиброванного корпуса трубы. На последующих этапах нагружения, вследствие упруго-пластического деформирования металла, величина и распределение характеристик сложного НДС в стенках трубы изменяются, но расположение наиболее нагруженной зоны остается прежним. Например, на рис. П1.3 приведено поле интенсивности напряжений в стенках трубы на одном из этапов повышения гидравлического давления, соответствующего $p = 0,85 \cdot p_{ex}$, где p_{ex} – выбранное значение давления раздачи.

Окончательная (после калибрования и гидроиспытаний) форма корпуса трубы представлена на рис. П1.4 в виде поля расчетных значений радиальных перемещений u_r ее стенок в связанной с трубой цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Максимальные отклонения от цилиндрической формы наблюдаются, как и ранее, в переходной зоне (сопряжение участков, подвергшихся механическому и гидравлическому калиброванию).

Качественный анализ расчетных характеристик остаточного НДС показывает, что для высокоточной расчетной оценки окончательной формы корпуса трубы необходимо при моделировании максимально полно учитывать все действующие нагрузки и особенности конструкций. Например, даже действие веса воды, находящейся в трубе при раздаче и гидроиспытании, приводит к некоторому (достаточно малому) искажению круглой формы поперечного сечения в средней части трубы (см. рис. П1.4). С другой стороны, заданное значение давления гидравлической раздачи может существенно повлиять на остаточное НДС готовой трубы. Поэтому оптимальная величина данного давления должна подбираться для труб каждого конкретного типоразмера и материала.

Количественные оценки остаточного НДС экспандированных труб, а также влияния этого НДС на запасы прочности трубопроводных конструкций, можно сделать по результатам численного анализа трехмерных КЭ-моделей. На рис. П1.5 и рис. П1.6 представлены картины распределения двух основных характеристик остаточного (после калибрования и гидроиспытаний) НДС в продольном сечении стенки наиболее нагруженной области (переходная зона) трубы (толщина стенки 20 мм). Анализ полученных результатов показывает, что в рассматриваемом случае разность максимального и минимального диаметров трубы составляет 2,8 мм (см. рис. П1.5), что в несколько раз меньше допускаемого предела. Кроме того, максимальное и минимальное значения диаметра труба имеет в разных поперечных сечениях переходной зоны (не концевых), а требования к геометрии данных сечений в нормах [44] не предъявляются.

Следует отметить, что характерной особенностью всех экспандированных на гидро-

прессах труб является локальное искривление образующей трубы в переходной зоне (см. рис. П1.2 – П1.6), которое невозможно полностью устранить даже при повышении гидравлического давления раздачи до максимального значения, допускаемого для труб соответствующих типоразмера и материала (см. также рис. П1.11 – П1.13).

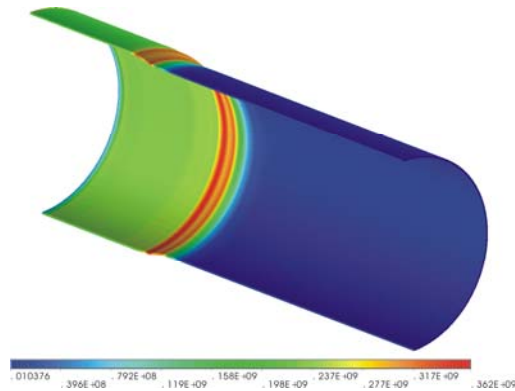


Рис. П1.2. Интенсивность напряжений [Па] в стенках трубы после калибрования концов (фрагмент)

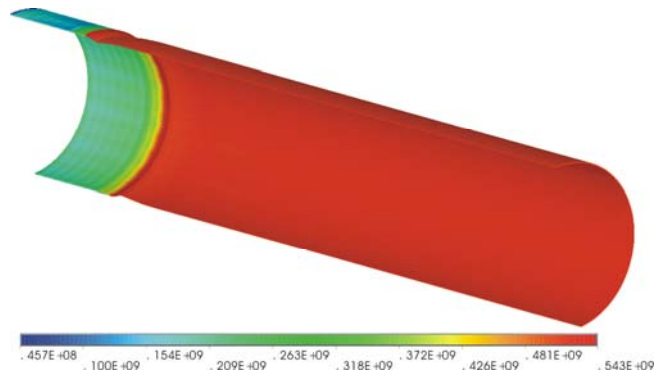


Рис. П1.3. Интенсивность напряжений [Па] в стенках трубы (1/4 часть) при гидравлическом давлении 11МПа

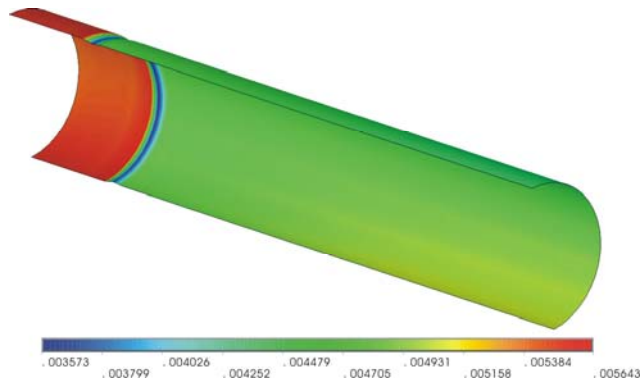


Рис. П1.4. Радиальные перемещения [м] корпуса трубы (1/4 часть) после калибрования и гидроиспытаний

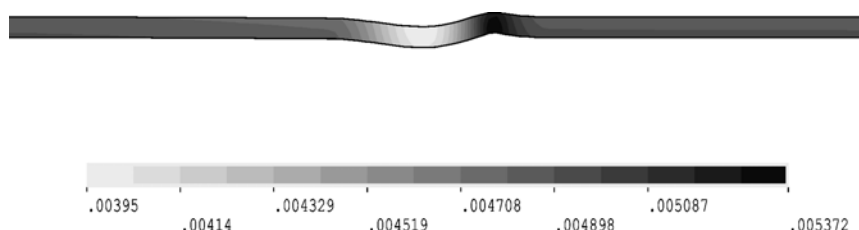


Рис. П1.5. Радиальные перемещения [м] корпуса трубы после калибрования и гидроиспытаний (фрагмент)

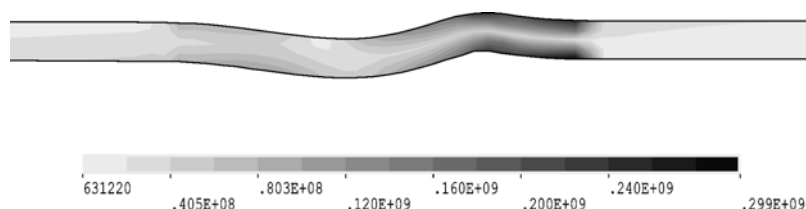


Рис. П1.6. Интенсивность напряжений [Па] в стенке трубы после калибрования и гидроиспытаний (фрагмент)

Однако при соблюдении требований на инструментальные допуски и технологические режимы работы оборудования [275, 276, 294] это искривление не превосходит установленные нормативные пределы [44]. То же самое можно отметить и для остаточных пластических деформаций. Анализируя регламентируемую процедуру измерения остаточной деформации трубы после калибрования корпуса [275, 294], можно установить, что нормативное ограничение распространяется только на одну компоненту тензора деформаций – ε_φ в связанной с трубой цилиндрической системе координат (точнее – на среднее по периметру трубы значение этой компоненты). Во всех рассмотренных случаях численного анализа НДС экспандированных труб значение компоненты тензора остаточных деформаций ε_φ^p не превышало требуемого предела 1,2%. Расчетные значения инвариантных параметров тензора пластических деформаций, характеризующих уровень сложно-деформированного состояния труб после экспандирования, также находятся на достаточно низком уровне. В частности, для рассмотренного выше случая трубы с толщиной стенки 20 мм максимальные значения интенсивностей и наибольших касательных пластических деформаций, возникающих только в очень малой области переходной зоны, составляют соответственно $\varepsilon_i^p = 1,7\%$ и $\max|\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p| = 2,8\%$, где ε_1^p , ε_3^p – наибольшая и наименьшая главные пластические деформации.

В то же время, расчетные значения характеристик остаточных напряжений в локальных областях переходной зоны достигают значений, соизмеримых с уровнем напряжений, возникающих на участках труб, не имеющих начального НДС, при действии эксплуатационных нагрузок МТ (см. рис. П1.6). Результаты численного моделирования сложного НДС МТ при действии основной эксплуатационной нагрузки – внутреннего избыточного давления $p = 7,5 \text{ МПа}$, а также с учетом начального НДС экспандированных на гидравлическом прессе труб, представлены на рис. П1.7 и рис. П1.8.

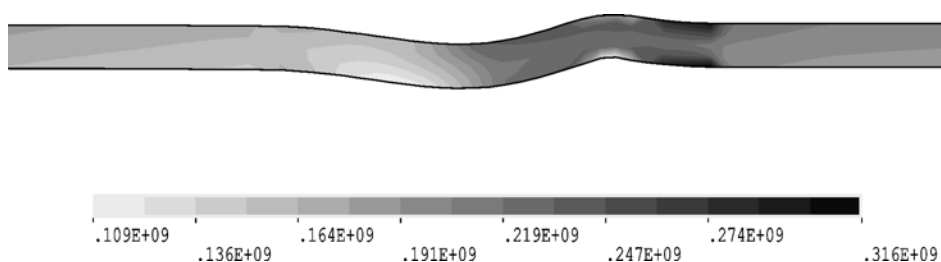


Рис. П1.7. Интенсивность напряжений [Па] в стенке трубы при действии внутреннего избыточного давления 7,5МПа (фрагмент)

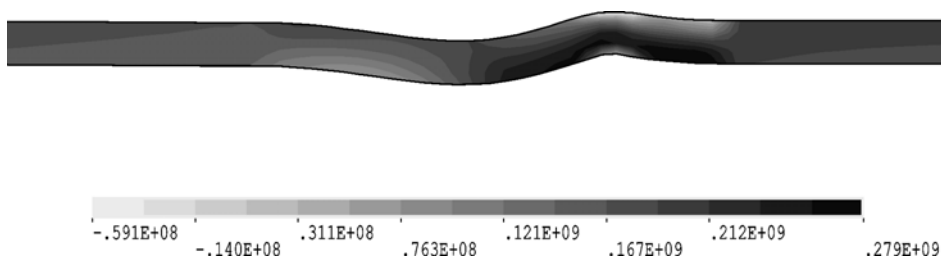


Рис. П1.8. Кольцевые напряжения [Па] в стенке трубы при действии внутреннего избыточного давления 7,5МПа (фрагмент)

Наглядный способ оценки степени влияния начального НДС экспандированных труб на запасы прочности сооруженного из них МТ заключается в сравнении значений кольцевых напряжений в стенке трубы, представленных на рис. П1.8, с традиционно рассчитываемыми по проектировочной формуле [44], в предположении отсутствия начального НДС труб:

$$\sigma_{\kappa} = \frac{p \cdot D_{\text{вн}}}{2 \cdot \delta}. \quad (\text{П1.7})$$

Подставляя в (П1.7) значения параметров, использованных при численном анализе ($p = 7,5 \text{ МПа}$, $D_{\text{вн}} = 980 \text{ мм}$, $\delta = 20 \text{ мм}$), получаем проектное расчетное значение для кольцевых напряжений $\sigma_{\kappa} = 183,75 \text{ МПа}$. Как видно из рис. П1.8, применение формулы (П1.7) позволяет найти достаточно близкие к результатам численного моделирования значения на всех участках трубы за исключением переходной зоны, где максимальные значения кольцевых напряжений более чем в 1,5 раза выше получаемых по формуле (П1.7).

Таким образом, представленный выше пример показывает, что начальное НДС труб может быть существенным фактором, влияющим на запасы прочности и, следовательно, на уровень безопасности МТ. В приведенном модельном примере оценивалось влияние только одной операции (гидравлического экспандирования) и только при номинальных (идеальных) размерах трубных заготовок и инструмента. Для объективного анализа уровня остаточного НДС труб и запасов прочности МТ необходимо последовательное проведение численного моделирования всех операций технологической цепочки для каждого из способов производства электросварных труб большого диаметра с учетом технологических допусков на геометрию трубных заготовок и рабочих поверхностей инструмента, а также степени износа механических узлов оборудования. То есть требу-

ется разработка соответствующих вычислительных технологий и компьютерных симуляторов.

Практическая реализация подсистемы «Alfargus/PipeManufacture» на базе КАИ «Alfargus» позволяет впервые получить программно-аналитическое средство для непрерывного мониторинга НДС труб МТ на всем протяжении их жизненного цикла:

- изготовление труб (появление начальных напряжений, деформаций, технологических дефектов и т.п.);
- строительство трубопровода (холодное гнутье труб, появление монтажных напряжений и строительных дефектов);
- эксплуатация трубопроводной сети (изменение НДС при длительном воздействии рабочих и аварийных нагрузок, агрессивное влияние окружающей среды, появление и развитие эксплуатационных дефектов);
- достижение НДС участка трубопровода предельного состояния (включая разрушение трубопроводной конструкции);
- замена и ремонт опасных участков (изменение НДС трубопроводов во время экскавации, ремонта и т.п.);
- дальнейшая эксплуатация отремонтированного участка (изменение НДС трубопроводной конструкции после ремонта, появление дефектов вследствие ремонтных работ, обратной засыпки и т.п.).

С другой стороны, компьютерные симуляторы технологических процессов производства труб могут эффективно использоваться непосредственно специалистами производственных предприятий для повышения качества и расширения номенклатуры выпускаемой продукции.

Сейчас во всем мире активизируются работы по сооружению транс- и межконтинентальных МТ, многие участки которых прокладываются в районах с особо сложными условиями строительства и эксплуатации. Поэтому требования к качеству¹ и номенклатуре² труб, поставляемых для таких трубопроводов, постоянно возрастают [272–274, 279, 286].

В связи с вышесказанным особо следует рассмотреть ситуацию, сложившуюся сейчас в секторе производства труб большого диаметра российской трубной промышленности. Большинство участков крупных МТ, строящихся и планирующихся к строительству на территории Российской Федерации и граничащих с ней зарубежных стран, прокладываются в особо сложных условиях (например, Северо-Европейский газопровод, газопровод «Ямал – Европа», нефтепровод «Восточная Сибирь – Тихий Океан», проект «Сахалин-2» и др.). Известно [241], что немалая часть поставляемых для строительства этих участков труб импортируется. В то же время, соответствующие мощности российских трубных заводов, в среднем, загружены всего на 50÷70% [272, 241].

Главными препятствиями для перехода к использованию только отечественной продукции при строительстве и реконструкции всех участков российских систем МТ, включая наиболее ответственные, являются низкое качество предлагаемых труб и отсутствие требуемого сортамента в номенклатуре производимой продукции. Например,

¹ Это, прежде всего, относится к требованиям, касающимся геометрической формы, допускаемым дефектам стенок и уровню остаточного НДС труб.

² Имеются в виду толстостенные трубы для глубоководных трубопроводов, трубы из сверхпрочных марок стали и т.п.

ОАО «Газпром» уже достаточно давно приняло в качестве базового сортамента для строительства новых и реконструкции действующих МГ трубу со следующими основными параметрами: прямошовная (предпочтительнее – одношовная) труба диаметром 1420 мм, с толщиной стенки до 40 мм и длиной до 18 м. До сих пор ни один российский завод не выпускает трубы, полностью соответствующие этим требованиям [272, 275].

Конечно, все указанные проблемы хорошо известны российским производителям труб [272]. Более того, формально, решить задачу расширения номенклатуры выпускаемой продукции несложно – необходимо закупить и пустить в эксплуатацию соответствующее (как правило, импортное) оборудование, чем и занимаются последние несколько лет российские предприятия трубной промышленности [272, 296–298]. Таким образом, можно ожидать, что в ближайшем будущем отечественные производители смогут предложить весь требуемый для строительства и реконструкции МГ сортамент труб в достаточном для насыщения рынка объеме.

В то же время, при расширении номенклатуры и увеличении объема продукции российских трубных заводов задача полного обеспечения российского ТЭК отечественными трубами большого диаметра будет решена только формально потому, что необходимо еще обеспечить и высокое качество поставляемой продукции. Причем, в перспективе, производимые на российских предприятиях трубы по качеству должны не только не уступать, но и превосходить импортные аналоги. Эта задача уже существенно сложнее, и ее решение требует более длительного времени. Как показывает мировая практика [274, 279, 281–290, 300, 305–311], решение данной задачи практически невозможно без активного и целенаправленного применения современных методов и средств численного моделирования. Приведем только два наиболее показательных примера.

Экономическая эффективность использования труб из сверхпрочных марок сталей (X100, X110, X120 по классификации API/5L) для строительства сухопутных МГ доказана и сомнений не вызывает. В то же время, предложение (и потребление) таких труб на рынке сейчас практически отсутствует¹. Такое положение является, в немалой степени, и следствием того, что в течение достаточно длительного времени предпринимались многочисленные и, как правило, безуспешные попытки экспериментальной отработки технологии производства сверхпрочных труб на оборудовании, традиционно применяемом для изготовления электросварных труб большого диаметра [275–277], в том числе из высокопрочных марок сталей (X65, X70, X80). Например, одна из основных проблем возникла вследствие большого количества упругой энергии, запасаемой в заготовке при холодной формовке сверхпрочного стального листа. Последующая, после операции формовки, упругая разгрузка металла приводила к недопустимым искажениям формы трубной заготовки. Последние исследования ведущих мировых металлургических компаний и научно-производственных организаций («Europipe GmbH» совместно с «Salzgitter Mannesmann Forschung GmbH» и «AG der Dillinger Hüttenwerke» в Германии, «JFE Steel Corporation» и «Nippon Steel Corporation» в Японии, «United States Steel Corporation» совместно с «ETA, Inc.» и «LSTC» в США, и др.) в этой области проводятся уже с привлечением конечно-элементного моделирования технологических операций [273, 274, 278, 282, 283, 287, 289, 290]. Результаты такого моделирования помогают значительно ускорить разработку эффективной технологии изготовления сверхпрочных труб, снижающей брак до допустимых пределов, а также рационально модернизировать существующее и, при необходимости, создать новое оборудование для массового производства.

Следующим, очень перспективным, направлением развития трубной промышленно-

¹ Небольшие партии, производимые несколькими заводами в мире, используются пока только в исследовательских и экспериментальных целях [274, 286].

сти, включающим указанную выше проблему освоения массового выпуска сверхпрочных труб большого диаметра как частную задачу, является производство труб для глубоководных участков МТ, прокладываемых по дну морей и океанов. Самым известным в нашей стране примером такого трубопровода может служить проходящий по дну Черного моря участок МГ «Россия – Турция» («Голубой поток»), спроектированный и построенный по заказу ОАО «Газпром» компанией «Saipem S.p.A.» (Италия) из труб и материалов, импортированных из Японии, Великобритании и Малайзии. В современном мире поставка энергоносителей по морским трубопроводам, часто существенно сокращающим протяженность транспортных трубопроводных магистралей, а главное – исключая участие в транспортировании посредников, становится все более привлекательной как для газовых и нефтяных компаний, так и для органов государственного управления во многих странах. Однако в развитии этого направления есть свои, пока еще существенные, трудности.

Помимо повышенной коррозионной активности окружающей среды основной проблемой при строительстве глубоководных участков МТ является гидростатическое давление воды, линейно (если пренебречь влиянием сжимаемости и изменения температуры) возрастающее с увеличением глубины. Например, в наиболее глубоком месте пролегания газопровода «Голубой поток» (2150 м) наружное гидростатическое давление составляет около 22 МПа, а у самого глубоководного в настоящее время магистрального трубопровода «Иран – Индия» (~ 3500 м) это давление достигает 36 МПа [286]. Чтобы обеспечить необходимые запасы прочности глубоководных участков¹ (а также сопряженных «неглубоководных» участков²) трубопроводов, для их строительства используются трубы из высокопрочных марок сталей (Х65, Х70, Х80) с увеличенной толщиной стенок.

Не рассматривая здесь все правила проектирования и строительства МТ, имеющих глубоководные участки, равно как и технологические особенности производства толстостенных труб (это выходит за рамки излагаемого материала), отметим только два обстоятельства. Устойчивость цилиндрической оболочки при действии внешнего давления зависит от отношения δ/D . Чем больше максимальная глубина подводного участка, тем трубы с более высоким значением параметра δ/D (при одинаковой марке трубной стали) необходимо применять для его строительства в целях обеспечения устойчивости трубопроводной конструкции. С другой стороны, на современном уровне развития трубного производства увеличение толщины стенки ведет к существенному снижению диаметра выпускаемых труб (при фиксированных требованиях к допустимым искажениям их цилиндрической формы). Поэтому все глубоководные МТ сооружаются из толстостенных труб сравнительно небольшого диаметра. Так, например, две нитки морского участка МГ «Голубой поток» построены из труб с наружным диаметром 610 мм и толщиной стенки 31,8 мм, изготовленных из стали марки Х65 специального назначения³, обладающей повышенной стойкостью к водородному растрескиванию в сероводородной (H_2S) среде. Трубы самого глубоководного трубопровода «Иран – Индия» имеют типоразмер 736×50, материал – сталь марок Х70/Х80. Среди всех

¹ При отсутствии в них высокого внутреннего давления транспортируемой среды.

² Проектное внутреннее рабочее давление протяженных глубоководных участков МТ, как правило, сравнимо по величине с максимальным внешним гидростатическим давлением.

³ От стандартной марки Х65 данная сталь отличается: химическим составом (низкое содержание серы (S), добавление кальция (Ca) и др.); способом обработки при изготовлении (вакуумная дегазация); более высоким значением минимального предела текучести $\sigma_T = 490$ МПа [286, 313].

эксплуатирующихся, строящихся и спроектированных в настоящее время глубоководных МТ в мире, трубы максимального¹ наружного диаметра 812 мм имеет подводный переход «Ливия – Сицилия» (максимальная глубина около 800 м, толщина стенок труб 30 мм, материал – сталь марки Х65) [286].

Увеличение диаметра труб (и, следовательно, пропускной способности) глубоководных МТ является одной из наиболее актуальных задач, стоящей перед компаниями трубопроводного транспорта всего мира. Очевидно, что решение данной задачи возможно только после появления на рынке соответствующей качественной продукции трубных заводов, обоснованно гарантирующей требуемый уровень безопасности подводной трубопроводной конструкции.

Эта цель может быть достигнута двумя, наиболее очевидными, путями. Первый путь заключается в увеличении диаметра с соответствующим увеличением толщины стенки труб, производимых сейчас из высокопрочных марок сталей. В данном случае быстро достигаются пределы конструктивных возможностей современного оборудования для производства труб большого диаметра (всеми известными сегодня способами [275–277]). Так, типоразмеры труб, использованных при проектировании и строительстве указанных выше подводных переходов, находятся, по-видимому, уже на грани максимально достижимых на этом пути пределов.

Другим, более перспективным, направлением является изготовление электросварных прямошовных труб большого диаметра традиционными способами, например по УОЕ-технологии, но с использованием штрипсового проката из сверхпрочных марок сталей. В этом случае толщину стального листа можно снизить до стандартных (для таких способов) величин и отработать технологические операции производства труб, не модернизируя существенно ни прессовое, ни сварочное оборудование имеющихся ТЭСА. Следует отметить, что проблема отработки технологии производства качественных труб большого диаметра из сверхпрочных марок сталей для глубоководных участков МТ сложнее рассмотренной в первом примере проблемы выпуска таких труб для сухопутных участков. Причем настолько сложнее, что решением ее с недавнего времени начали заниматься межкорпоративные и даже международные творческие коллективы, финансируемые крупнейшими компаниями и государственными организациями своих стран. Например, широкомасштабные исследования в области разработки требований к показателям качества и эффективным технологиям производства труб большого диаметра для глубоководных МТ проводит группа ученых и специалистов, в состав которой входят представители компаний «Europipe GmbH» (Германия), «Mannesmann Forschungsinstitut GmbH» (Германия), «C-FER Technologies, Inc.» (Канада), «BP EPT – Offshore Systems» (Великобритания) [274, 286]. Активные работы в этом направлении ведутся также в США, Норвегии, Японии, Италии и других странах [284, 288, 289, 312, 313].

Причина такого особого внимания к ординарной, как кажется на первый взгляд, технической проблеме заключается в уникальности условий эксплуатации глубоководных участков трубопроводов. В отличие от всех других участков трубопроводных конструкций, а также и большинства других строительных конструкций, максимальный уровень НДС в глубоководных трубопроводах возникает не вследствие эксплуатационных нагрузок, а при отсутствии таковых (отключение нитки). Причем, основной нагрузкой в нерабочем режиме (монтаж, отключение, снижение рабочего давления и т.п.) является внешнее избыточное давление, под действием которого может произойти потеря устойчивости, смятие поперечного сечения трубопровода и дальнейшее глобальное

¹ Некоторые трубопроводы собирающих коллекторов морских буровых платформ, имеющие наружный диаметр до 1220 мм, проложены по дну шельфа в зонах сравнительно небольших глубин и в рассматриваемом здесь контексте к глубоководным участкам не относятся.

сплющивание глубоководного участка. Критическое значение внешнего давления в значительной мере зависит от степени отклонения поперечного сечения трубы от идеальной круговой формы. Даже при малом искажении круговой формы любого поперечного сечения (допустимом для всех других участков МТ) возникает угроза смятия глубоководного трубопровода вследствие потери устойчивости. С уменьшением отношения δ/D (снижением жесткости оболочки) и/или ростом внешнего давления (увеличением глубины) эта угроза возрастает.

Большинство действующих в настоящее время норм расчета на прочность и устойчивость конструкций глубоководных МТ предписывают определять расчетное значение критического внешнего давления для трубы с идеально круговой формой поперечного сечения по выражениям, полученным из формулы теории сопротивления материалов для тонкостенной линейно-упругой цилиндрической оболочки [314]:

$$P_{кр} = -\frac{2 \cdot E \cdot \delta^3}{(1 - \nu^2) \cdot D^3}, \quad (\text{П1.8})$$

где ν – коэффициент Пуассона материала трубы; знак «–» означает, что действие внешнего давления приводит к появлению сжимающих (отрицательных) кольцевых напряжений в стенках трубы.

При действии на трубопровод нагрузки только от внешнего давления область применения формулы (П1.8) ограничена значением давления, соответствующего достижению кольцевыми напряжениями в стенках трубы предела текучести материала на сжатие σ_T^c :

$$P_T = 2 \cdot \sigma_T^c \cdot \frac{\delta}{D}. \quad (\text{П1.9})$$

Анализ устойчивости поперечного сечения трубопровода за пределами упругой области в проектировочных расчетах, как правило, не проводится ввиду того, что ни в одной из действующих норм не допускается уровня нагрузок, приводящих к достижению кольцевыми напряжениями предела текучести материала трубы (как при растяжении, так и при сжатии).

Таким образом, при действии нагрузки только от внешнего давления в конструкции глубоководного трубопровода с идеально круговой формой поперечного сечения возможно наступление двух предельных состояний – либо потеря поперечной устойчивости (смятие сечения), либо достижение кольцевыми напряжениями предела текучести материала на сжатие. Из (П1.8, П1.9) следует, что возникновение одного из двух предельных состояний для трубопровода конкретных типоразмеров зависит от параметра χ , определяемого из условия $P_{кр} = P_T$:

$$\chi = \sqrt{\frac{\sigma_T^c \cdot (\nu^2 - 1)}{E}}. \quad (\text{П1.10})$$

Для трубопровода с $\delta/D < \chi$ величина внешнего давления потери устойчивости всегда меньше давления, соответствующего достижению кольцевыми напряжениями предела текучести материала, а для трубопровода с $\delta/D > \chi$, соответственно, наоборот. Последнее условие соблюдается только при проектировании трубопроводов, прокладываемых на больших глубинах.

Например, для сооружения глубоководных участков МТ наиболее часто применяют электросварные трубы, изготовленные по UOE-технологии из высокопрочной стали марки Х65. Согласно [286, 313], снижение вследствие эффекта Баушингера абсолютного

значения предела текучести на сжатие у таких труб составляет, в среднем, 15%: $\sigma_T^c = -381 \text{ МПа}$ (при нормативном минимальном значении $\sigma_T = 448 \text{ МПа}$) для стандартной стали марки Х65; $\sigma_T^c = -425 \text{ МПа}$ (при нормативном минимальном значении $\sigma_T = 490 \text{ МПа}$) для стали марки Х65 специального назначения (см. выше). В соответствии с критерием (П1.10), для исключения возможности аварийной ситуации, связанной с потерей устойчивости в упругой области и смятием поперечного сечения, типоразмер труб из стали марки Х65 должен удовлетворять условиям: $\delta/D > 0,0410$ при прокладке МТ в обычной морской воде; $\delta/D > 0,0433$ при прокладке МТ в морской воде с повышенным содержанием H_2S . Так, типоразмер труб глубоководного участка МГ «Голубой поток», сооруженного из труб стали марки Х65 специального назначения, удовлетворяет этому условию ($\delta/D = 0,052$). Для сравнения заметим, что если бы, например, проектировщики МГ «Голубой поток» захотели увеличить диаметр труб глубоководного участка хотя бы до 1020 мм (небольшой размер для сухопутного МТ), то только для удовлетворения указанного выше условия толщина стенок труб такого участка должна быть не менее 45 мм.

С другой стороны, типоразмер труб подводного перехода «Ливия – Сицилия», сооруженного из труб стандартной стали марки Х65 (см. выше), проложенного на сравнительно небольшой глубине, формально не удовлетворяет указанному выше условию ($\delta/D = 0,037$). Однако это не ошибка, а наглядная демонстрация особенностей проектирования и расчета на прочность конструкций глубоководных МТ. Везде в мире данные конструкции проектируются с увеличенными (по сравнению с проектами сухопутных участков) запасами прочности по напряжениям, возникающим вследствие действия внутреннего или наружного избыточного давления. Из трех рассмотренных выше глубоководных трубопроводов именно конструкция перехода «Ливия – Сицилия» имеет самый высокий коэффициент запаса прочности по нагрузке от наружного давления $n = 4,43$, если рассчитывать максимальные кольцевые напряжения по формуле для толстостенной цилиндрической оболочки [153, 314]:

$$\sigma_\varphi = \frac{(D^2 + D_{вн}^2) \cdot p_{вн} + 2 \cdot D^2 \cdot p_{нар}}{D^2 - D_{вн}^2}, \quad (\text{П1.11})$$

где $p_{вн}$ – внутреннее давление (положительное); $p_{нар}$ – наружное давление (отрицательное).

Для сравнения, коэффициент запаса прочности по аналогичной нагрузке у глубоководного участка МГ «Голубой поток» составляет $n = 2,51$. В то же время, несмотря на существенные различия в конструктивных особенностях, условиях функционирования и даже запасах прочности, обе глубоководные конструкции имеют примерно одинаковые коэффициенты запаса по устойчивости поперечного сечения труб при действии внешнего давления: $m = 2,84$ у перехода «Ливия – Сицилия»; $m = 2,96$ у МГ «Голубой поток».

Конечно, все представленные выше оценки носят иллюстративный характер и являются достаточно условными, так как получены для трубопровода с идеально круговой формой поперечного сечения при действии единственной нагрузки – внешнего избыточного давления. Как известно, изготовить «идеальные» трубы на заводе технически не возможно. Кроме того, конструкция глубоководного МТ на протяжении своего жизненного цикла находится под действием многофакторного нагружения.

Учитывая повышенную опасность последствий аварий на глубоководных участках

МТ, при разработке нормативных документов, регламентирующих проектирование таких участков (начиная с 80-х годов XX века), особое внимание всегда уделялось обоснованию требований к допустимым искажениям формы труб, а также вопросам оценки влияния этих искажений на прочность и устойчивость трубопроводных конструкций в различных режимах монтажа и эксплуатации. На рубеже XXI века две ведущие в области разработки нормативно-технической документации для газовой и нефтяной промышленности организации выпустили обновленные версии соответствующих нормативных документов [312, 313]. В этих документах обобщались накопленные к тому времени результаты теоретических и экспериментальных исследований, а также устранялись многие существенные недостатки предшествующих версий. Руководство [313] является сейчас наиболее проработанным и распространенным в мире нормативным документом по расчету на прочность и устойчивость глубоководных МТ. Причем этот документ продолжает интенсивно совершенствоваться – новые редакции выходят ежегодно. Особый интерес к Руководству [313] объясняется еще и тем, что именно организация «Det Norske Veritas» в свое время осуществляла технический надзор на стадиях проектирования, строительства и сдачи в эксплуатацию морского участка российского МГ «Голубой поток», а также выполняла его сертификацию. К сожалению, отечественная нормативно-техническая база проектирования глубоководных МТ до сих пор практически отсутствует. Отдельные попытки разработки соответствующих документов пока сводятся, в основном, к неполным компиляциям и собственным интерпретациям (иногда не совсем корректным) расчетных методов, заимствованных из зарубежных норм¹ (см. например, [9, 315, 316]), или ограничиваются некоторыми дополнительными экспериментальными исследованиями.

Обратим внимание на одну из основных проблем обеспечения безопасности проектируемых глубоководных участков МТ, которая не решается традиционными методами усиления строительных конструкций, а также напрямую касается обсуждаемого здесь вопроса качества продукции трубных заводов. Речь идет об устойчивости глубоководных МТ с «несовершенством» круговой формы поперечного сечения труб.

Итак, во всех современных нормах «несовершенство» круговой формы поперечного сечения трубы учитывается только с помощью одного параметра – овальности χ (см. выше). Параметр χ на самом деле не определяет какую-то конкретную геометрию сечения. Рекомендуемые в [312, 313] приближенные формулы для расчета критического давления при действии наружного избыточного давления и изгибающих моментов практически идентичны, так как почти полностью заимствованы из норм Британского Института Стандартов (BSI) «BS 8010 Code of Practice for Pipelines, Part 3, Pipelines Subsea: Design, Construction and Installation». В последнем документе расчетные формулы выведены на базе модификации решения С.П. Тимошенко задачи о потери устойчивости тонкостенной трубы с эллиптической формой поперечного сечения [314].

В связи с вышесказанным заметим, что приведенные ранее результаты численного анализа свидетельствуют – изготовленные по UOE-технологии трубы имеют нерегулярную форму поперечного сечения, которая может существенно отличаться от эллиптической. Причем эта форма изменяется также по длине трубы (см. рис. П1.4). Кроме того, имеются заметные искажения и продольного сечения труб (см. рис. П1.5, П1.6).

Таким образом, можно еще раз констатировать, что всесторонний и адекватный анализ прочности и устойчивости конструкций глубоководных трубопроводов с учетом

¹ Использование в национальных стандартах расчетных методик, заимствованных из иностранной нормативно-технической документации, является распространенной в мире практикой. Это только помогает разработать современный нормативный документ, но при условии полноты изложения и надлежащей проверки всех положений и формул.

остаточного НДС труб для всех режимов эксплуатации возможен только в результате применения численного моделирования в соответствии с общим подходом, методами и алгоритмами, представленными в настоящей монографии и реализованными в **Компьютерном Аналитическом инструментарии** «Alfargus» для сухопутных участков МТ. В свою очередь, накопленные результаты такого моделирования, дополненные данными натурных экспериментов, позволят научно обосновать необходимые требования к качеству и параметрам толстостенных труб большого диаметра, поставляемых для строительства подводных участков МТ на любой глубине.

Нельзя все же не отметить и новую прогрессивную тенденцию, наметившуюся в области подготовки нормативных документов. Осознавая большое количество упрощений, положенных в основу предлагаемых расчетных выражений, а также повышенную потенциальную опасность глубоководных МТ, для детальной верификации полученных формул разработчики современных нормативных документов наряду с натурными экспериментами активно используют численное моделирование. Наиболее продвинутым в этом направлении следует признать подход международного коллектива ученых, разработавших и сопровождающих Руководство [313]. Так, применять приближенные расчетные выражения в [313] рекомендуется только в области, где их работоспособность подтверждена натурными экспериментами и результатами численного моделирования. Во всех других случаях авторы [313] рекомендуют непосредственно использовать МКЭ-анализ. Причем корректность применяемых моделей и алгоритмов МКЭ-анализа должна быть полностью обоснована в сопровождающем проект документе. Такой подход авторы настоящей монографии предложили еще в 1997 году и продолжают активно развивать сегодня [1, 3–7, 22].

Несомненно, расширение круга задач, решаемых с помощью численного моделирования, а также создание вычислительных технологий анализа непрерывного процесса производства поможет существенно продвинуться на пути создания нормативной и технической баз для проектирования производительных и безопасных глубоководных МТ.

Вернемся, например, к проблеме экспандирования труб, изготавливаемых по UOE-технологии. Как видно из представленных выше результатов МКЭ-анализа, задача на гидравлических прессах-расширителях приводит к искажению формы труб в переходной зоне (см. рис. П1.3 – П1.6). Поэтому в последнее время крупнейшие российские производители труб большого диаметра переходят на применение механического способа калибрования труб с использованием гидромеханических экспандеров компании «SMS MEER GmbH» (Германия) [296–298]. В то же время, вследствие конструктивного исполнения этих экспандеров, при калибровании трубы контакт рабочих поверхностей сегментов расширяющего механизма происходит не по всей внутренней поверхности стенки трубы – всегда остаются некоторые зазоры (рис. П1.9). Это обстоятельство, а также неравномерность контактного давления из-за разной кривизны контактирующих поверхностей приводит к тому, что после извлечения экспандера и упругой разгрузки стенок трубы поперечные сечения по всей длине трубы имеют форму, подобную представленной на рис. П1.10 для трубы с типоразмером 1020×10 (для толстостенных труб характерная картина деформаций не изменится).

На рис. П1.9 и П1.10 представлены результаты решения модельной задачи (здесь не учитывались нагрузки от веса деталей, допуски на размеры и форму рабочих поверхностей, диапазоны изменения давлений, и т.п.). Для количественной оценки степени искажений поперечного сечения после калибрования конкретной трубы конкретным гидромеханическим экспандером учесть влияние этих воздействий при численном моделировании не составляет принципиальных трудностей. Здесь рассмотрим только характерную качественную картину деформаций, которая сохранится при учете всех технологических особенностей.

Представленная на рис. П1.10 форма поперечного сечения трубы, при удовле-

нии нормативных требований по овальности χ и остаточному НДС, совершенно безопасна для сухопутного трубопровода, так как основная нагрузка – внутреннее избыточное давление – приведет к выравниванию профиля поперечного сечения труб и более равномерному распределению характеристик НДС по сечению. Ситуация меняется при использовании труб с такой формой поперечного сечения¹ для глубоководного участка МТ. В этом случае, даже небольшие «вогнутости» наружной поверхности трубопровода, не учитываемые в проектировочных расчетах (см. выше), могут привести к потере устойчивости трубопровода на большой глубине.

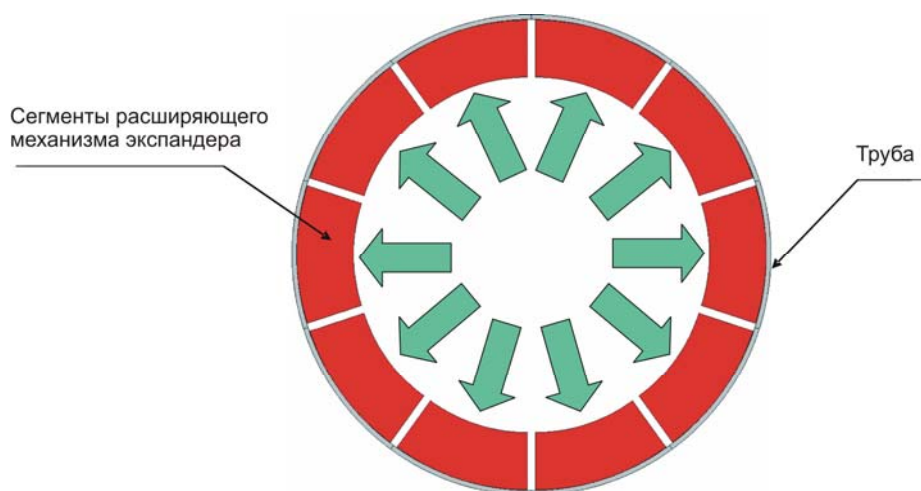


Рис. П1.9. Схема нагружения при калибровке корпуса трубы гидромеханическим экспандером (поперечное сечение)

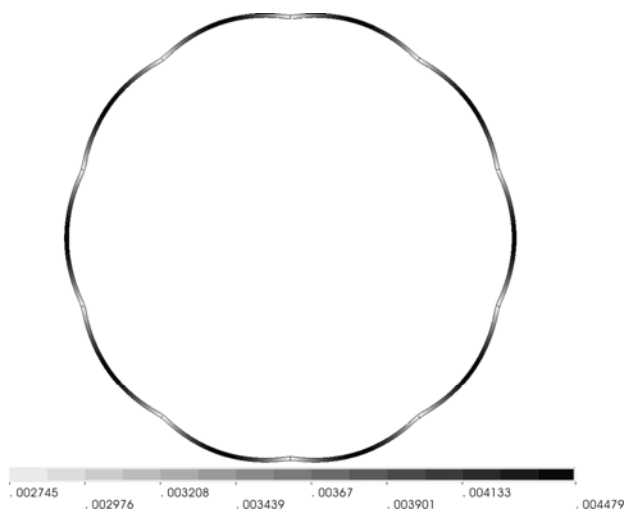


Рис. П1.10. Форма трубы 1020×10 после калибровки гидромеханическим экспандером, радиальные смещения [м] стенок (поперечное сечение)

¹ Сравнительно низкое давление заводских гидроиспытаний не способно существенно повлиять на форму трубы.

Кроме того, еще одним осложняющим обстоятельством являются дополнительные нерегулярные искажения формы трубы вследствие всех указанных выше реальных технологических особенностей. В результате поперечное сечение трубы приобретает форму, которую «овальной» (точнее – эллиптической) можно назвать только с большой степенью условности. Остается добавить, что все приведенные выше заключения, сделанные на основании результатов численного моделирования, полностью подтверждаются данными точных измерений, выполненных международным коллективом специалистов при экспериментальных исследованиях реальных толстостенных труб, произведенных по UOE-технологии и предназначенных для глубоководных трубопроводов [286].

При гидравлическом экспандировании труб давление воды по внутренней стенке трубы распределено равномерно, и проблем с «волнистостью» профиля поперечного сечения корпуса трубы не возникает. Однако, как было показано выше, там существуют свои трудности, с которыми сталкиваются трубные заводы на пути к выпуску продукции широкого ассортимента и высокого качества. Рассмотрим ряд других примеров, демонстрирующих эффективность применения численного моделирования для отработки оптимальных технологических процессов трубного производства, ограничившись, как и ранее, только операциями экспандирования и гидравлических испытаний.

Одной из актуальных задач для специалистов трубных заводов является подбор при переналадке пресса-расширителя или переходе на новый типоразмер (материал) труб оптимальной величины гидравлического давления раздачи с учетом технологических допусков на силовые элементы оборудования и степень износа калибрующих поверхностей. В соответствующих инструкциях [294] указан только достаточно широкий диапазон значений допускаемого давления. О широте предлагаемого выбора можно судить по тому факту, что при задании давления раздачи, равного нижней границе этого диапазона, труба не только не будет откалибрована до требуемого диаметра, но даже не перейдет в пластическое состояние. Очевидно, что и назначение во всех случаях максимального давления из допускаемого диапазона не рационально, так как приводит к быстрому изнашиванию силового оборудования и инструмента, а также может стать причиной снижения качества выпускаемых труб (см. ниже).

Обычно подбор давления раздачи выполняется в серии экспериментов на трубах-«разведчиках» [294]. Помимо того, что это длительный и достаточно затратный процесс, нет никаких гарантий, что подобранная таким образом величина давления раздачи оптимальна для текущих параметров оборудования. При использовании специально разработанного и настроенного на конкретное прессовое оборудование высокоточного компьютерного симулятора оптимальные значения размеров штампа и давления раздачи можно определить в течение нескольких часов, экономя время и материальные затраты, а также существенно продлевая срок службы инструмента и оборудования в целом.

Рассмотрим, например, представленные на рис. П1.5 – П1.8 результаты численного анализа НДС трубы типоразмера 1020×20 при калибровании, гидроиспытании и рабочей нагрузке. Эти результаты получены при задании гидравлического давления раздачи $p_{ex} = 26,0 \text{ МПа}$. На рис. П1.11 – П1.13 приведены результаты численного анализа НДС той же самой трубы, на тех же этапах нагружения, но при повышении давления раздачи до максимального, допускаемого для такого типоразмера и материала, значения $p_{ex} = 29,1 \text{ МПа}$. Сравнение представленных на этих рисунках результатов численного моделирования показывает, что увеличивать в данном случае давление раздачи до максимального значения не целесообразно.

Увеличение давления раздачи не приводит к исчезновению (и даже к сколько-нибудь заметному «выравниванию») продольной кривизны трубы в переходной зоне, а разность максимального и минимального диаметров (это не «овальность», т.к. сечения разные)

трубы снижается всего на 0,2 мм (см. рис. П1.5, П1.11). Также можно видеть, что картины распределения в стенках трубы и максимальные значения как остаточных (см. рис. П1.6, П1.12), так и эксплуатационных (см. рис. П1.7, П1.13) напряжений практически не изменяются с повышением давления раздачи. Однако это не является еще свидетельством того, что труба полностью сохраняет все свои прочностные качества.

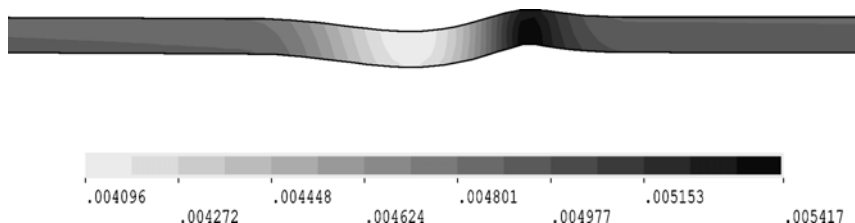


Рис. П1.11. Радиальные перемещения [м] корпуса трубы после калибрования с максимальным давлением раздачи и гидроиспытаний (фрагмент)

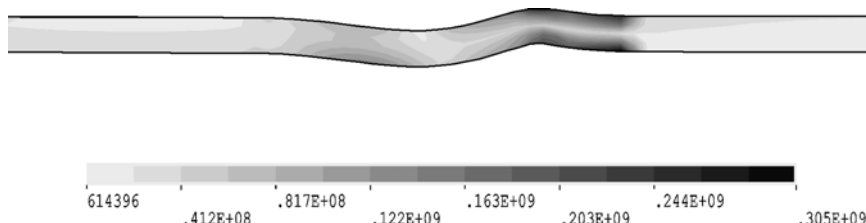


Рис. П1.12. Интенсивность напряжений [Па] в стенках трубы после калибрования с максимальным давлением раздачи и гидроиспытаний (фрагмент)

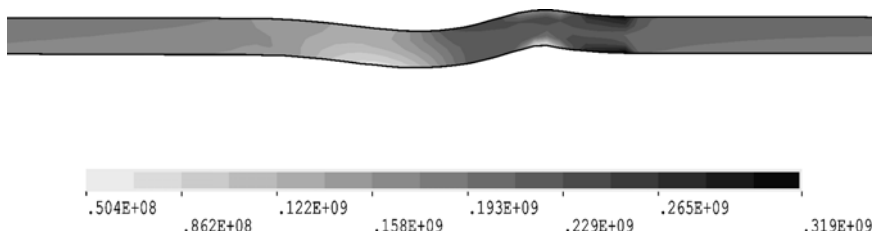


Рис. П1.13. Интенсивность напряжений [Па] в стенках трубы, калиброванной с максимальным давлением раздачи, при действии внутреннего избыточного давления 7,5 МПа (фрагмент)

При гидравлическом способе экспандирования величина внутреннего давления, при котором материал стенки трубы полностью переходит в пластическое состояние¹, сравнительно мала. После этого жесткость конструкции трубы снижается на порядки, и для касания наружной поверхностью трубы внутренней (калибрующей) поверхности штампа требуется лишь небольшое приращение давления. Например, в рассмотренном выше

¹ Здесь, как и ранее, используется традиционная терминология, принятая в МДТТ. На самом деле, материал трубы переходит в «упруго-пластическое» состояние, в отличие от чисто упругого состояния при величине напряжений, меньшей σ_T . В случае сложного НДС материала с упрочнением увеличение только пластических деформаций при определенных способах нагружения теоретически возможно, но на практике не реализуемо. Поэтому в реальных конструкциях при увеличении нагрузки возрастают и пластические, и упругие деформации.

случае трубы из стали марки 10Г2ФБЮ с типоразмером до калибрования 1010×20 пластические деформации на внутренней поверхности трубы появляются при гидравлическом давлении $19,81 \text{ МПа}$ (точное значение этого давления можно также рассчитать по аналитической формуле для толстостенного цилиндра [153, 314]). При давлении $19,96 \text{ МПа}$ пластическая зона распространяется на все сечение трубы, а давление $20,37 \text{ МПа}$ приводит к касанию наружной поверхности трубы и калибрующей поверхности, имеющей номинальный диаметр 1022 мм .

Последующая процедура повышения гидравлического давления протекает уже при постоянном контакте трубы со штампом и направлена на выравнивание глобальных отклонений корпуса трубы от цилиндрической (условно) формы. Причем, как было показано выше на результатах численного моделирования, а также хорошо известно из опыта трубного производства [275, 276, 294], на корпусе трубы могут быть локальные дефекты геометрии, не устраняющиеся полностью, а в некоторых случаях и не уменьшающиеся существенно, даже при максимальном допускаемом давлении. В этом случае энергия сжатой воды расходуется, в основном, на увеличение радиальных деформаций ε_r в стенках трубы, что, в свою очередь, приводит к чрезмерному росту контактного давления на наружной поверхности стенки трубы, повышая опасность образования и развития микродефектов на обеих контактирующих поверхностях.

Результаты проведенного численного моделирования показывают также, что величину гидравлического давления раздачи можно существенно снизить (при выполнении всех нормативных требований к форме экспандированной трубы), увеличивая диаметр калибра в широких пределах и тем самым управляя величиной упругой разгрузки, после которой труба получит точные номинальные размеры. Также, по причине накапливаемой в трубе при калибровании упругой энергии, приводящей к последующей разгрузке, не следует выполнять предписания некоторых инструкций, допускающих снижение диаметра калибра до номинального диаметра калибруемой трубы [294].

Другой актуальной проблемой трубного производства, решение которой невозможно без применения численного моделирования, является оценка степени влияния технологических допусков (а также износа инструмента и оборудования) на показатели качества выпускаемых труб. На рис. П1.14 представлен один из примеров решения таких проблем – результаты численного анализа последствий выполнения операции гидравлического экспандирования трубы на прессе-расширителе с дефектами. В данном случае результаты моделирования помогают оперативно установить и определить пути устранения дефектов производственного оборудования, а также наглядно показать, что после устранения дефектов качество продукции будет удовлетворять самым жестким требованиям.

Есть и еще одна, достаточно актуальная в настоящее время, сфера применения численного моделирования на предприятиях трубного производства. Как уже отмечалось выше, в последние годы происходило (и в ближайшее время будет продолжаться) активное переоснащение российских трубных заводов в целях выпуска наиболее востребованной на российском же рынке продукции, в частности, труб большого диаметра соответствующих параметров и качества (см. выше). Не секрет, что переоснащение это идет, в основном, за счет закупки, наладки и пуска в производство импортного оборудования. При имеющемся сейчас широком выборе поставщиков оборудования для производства труб компании-производители склонны (в рекламных целях) несколько завышать как технические характеристики, так и производственные возможности своей продукции, что, в общем, является распространенной мировой практикой. Например, у известного в Российской Федерации поставщика оборудования для производства электросварных труб большого диаметра «SMS MEER GmbH» имеются расхождения в заявляемых возможностях одного и того же вида производимой им продукции даже в собственных пресс-релизах [296–298].

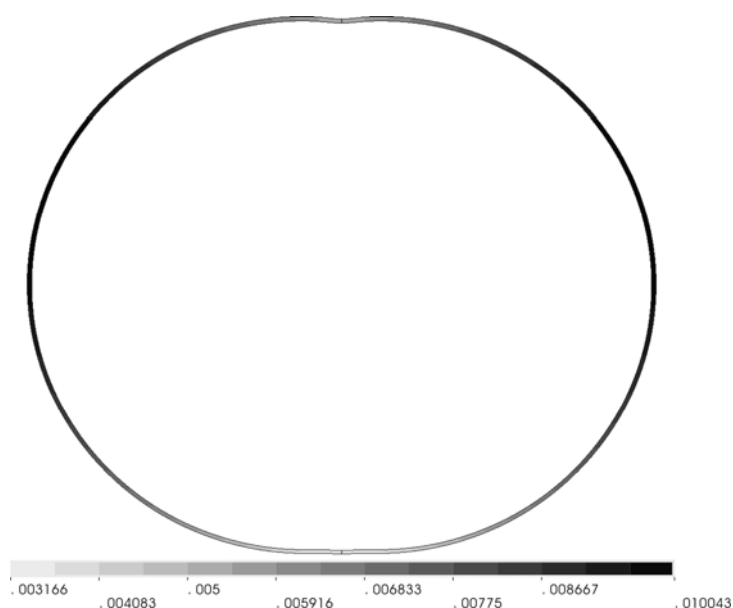


Рис. П1.14. Форма поперечного сечения трубы 1020×10 после калибрования на дефектном прессе-расширителе (радиальные смещения [м] стенок)

Применение численного моделирования для оперативной оценки заявляемых поставщиком возможностей технологического оборудования, а также уровня остаточного НДС произведенных с его использованием труб, поможет наиболее рационально и максимально эффективно перевооружить российские предприятия трубного производства. Причем только проведение адекватного численного моделирования может дать уникальную возможность оценить также и перспективные возможности закупаемого оборудования (например, производство труб из высокопрочных марок сталей, толсто-стенных труб большого диаметра и т.п.). Все это позволит исключить возможность влияния корпоративных и/или конъюнктурных интересов иностранного производителя на конкурентоспособность предприятий российской трубной промышленности.

В завершение данного Приложения кратко рассмотрим еще несколько важных вопросов, без решения которых все представленные выше методы и примеры численного моделирования носят характер либо решения частных задач, либо анализа разрывных технологических цепочек. Для построения законченной вычислительной технологии, позволяющей анализировать влияние операций всей технологической цепочки производства труб на их остаточное НДС и запасы прочности сооружаемых из них МТ, необходимо выбрать математические модели, а также построить алгоритмы численного моделирования нестационарных термомеханических процессов при сварке трубных заготовок.

Математическое моделирование процессов сварки металлических материалов является достаточно новым направлением вычислительной механики, а также сопряженных вопросов термодинамики и электродинамики. Согласно работе [307], активные исследования в этой области начались около 15 лет назад. Большинство математических моделей взаимосвязанных процессов, составляющих сложный механизм сварочной технологии, находятся еще в стадии разработки и экспериментальной проверки в ведущих научно-исследовательских организациях и национальных лабораториях мира [285, 290, 307–311]. Например, один только перечень моделей из разных разделов математической физики, которые необходимо совместно использовать для наиболее полного описания

всех явлений и эффектов, встречающихся при распространенной в трубном производстве электродуговой сварке, выглядит следующим образом [307, 311]:

- нестационарное конвективное течение многофазных многокомпонентных сред в сварочной ванне с учетом магнитной (лоренцевой) турбулентности, плавучести, сил поверхностного натяжения и испарения;
- реология насыщенных и ненасыщенных пористых сред (затвердевание расплава);
- индукционный, кондуктивный, конвективный и радиационный теплообмен между материалами (во всех фазовых состояниях) и с окружающей средой;
- законы изменения характеристик теплофизических и физико-механических свойств материалов при высоких температурах и изменении фазового состояния;
- эволюция нелинейного НДС металлических материалов при температурах, близких к температуре плавления, с учетом вязкопластичности и кратковременной ползучести;
- влияние электромагнитного поля на конвективные течения расплавов (магнитная гидродинамика) и НДС деформируемых твердых тел (магнитострикция);
- электромагнитные и теплофизические свойства электрической дуги;
- микромеханика материалов, рост зерен, образование и развитие микроповреждений, и др.

Очевидно, что слияние всех или даже нескольких моделей перечисленных выше процессов в одну обобщенную математическую модель проблематично. Кроме того, большинство из предложенных математических моделей этих процессов пока предназначаются для исследовательских целей и нуждаются в уточнении. В то же время, некоторые из моделей (с обоснованными упрощениями и допущениями) уже сейчас могут эффективно применяться (и применяются) в практическом численном анализе сварных конструкций.

В частности, в специализированном компьютерном симуляторе, предназначенном для последовательного численного анализа всех операций технологической цепочки производства труб на ТЭСА, процесс моделирования выполнения сварных швов может быть ограничен решением только нестационарной термомеханической задачи, что позволяет получить общую картину распределения характеристик сложного нелинейного НДС в корпусе трубы с учетом влияния тепловых деформаций. Такой подход реализован сейчас в большинстве специализированных программно-математических комплексов (например, [285]). Дополнительно, применяя предложенный В.В. Алешиным алгоритм поэтапного анализа трубопроводных конструкций (более подробно см. Главу 3 и Раздел 4.4.4), можно определить также детальное нестационарное распределение поля температур, а также полей напряжений и деформаций в зоне термического влияния сварного шва. Для моделирования распределения объемной плотности тепловыделения в окрестности сварочной ванны при сварке трубы можно использовать достаточно простую, но за последние десятилетия проверенную в практических расчетах и применяющуюся сейчас повсеместно (например, см. [131]), модель Голдака [308], записанную в цилиндрической системе координат и модифицированную с учетом равномерного движения источника тепла (сварочного аппарата) вдоль образующей трубы:

$$\dot{q}'''(r, \varphi, z, t) = \frac{6 \cdot \sqrt{3} \cdot f \cdot Q}{\pi \cdot \sqrt{\pi} \cdot a \cdot b \cdot c} \cdot \exp\left(-\frac{3 \cdot r^2 \cdot \cos^2 \varphi}{a^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{3 \cdot r^2 \cdot \sin^2 \varphi}{b^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{3 \cdot (z + v \cdot t)^2}{c^2}\right), \quad (\text{П1.12})$$

где r, φ, z – координаты точки стенки трубы в связанной с трубой цилиндрической сис-

теме координат, ось Oz которой направлена в сторону движения источника тепла; t – время; f – функция распределения, зависящая от расположения точки трубы относительно текущего положения источника тепла; Q – полезная (с учетом потерь) мощность источника тепла; a, b, c – экспериментальные параметры, определяющие размеры сварочной ванны с учетом текущего положения источника тепла; v – скорость движения источника тепла вдоль образующей трубы.

Для решения сопряженной термомеханической задачи о поведении конструкции при сварке трубных заготовок целесообразно также использовать подходы к численному моделированию теплообмена излучением, предложенные В.Е. Селезневим, и модели и алгоритмы численного анализа трубопроводных конструкций с учетом кратковременной ползучести трубной стали, разработанные В.В. Алешиним (см. Раздел 4.4.4).

Ведущие универсальные коммерческие программы МКЭ-анализа [130, 131, 133] обладают возможностями, необходимыми для проведения моделирования задач в такой постановке. Остается добавить, что выполнение численного моделирования более сложных задач, связанных с процессами сварки трубных заготовок, например, конвективного течения многофазных многокомпонентных сред в сварочной ванне с учетом всех факторов (см. выше), в настоящее время также возможно. Однако, скорее всего, это потребует разработки специализированных программно-математических комплексов или существенных расширений функциональных возможностей универсальных МКЭ-программ с помощью специально разработанных дополнительных модулей.

Еще одной важной производственной задачей, с которой постоянно приходится сталкиваться специалистам трубной промышленности, является расчетная оценка степени износа инструмента. В настоящее время широко известны только полуэмпирические модели процесса износа. В частности, для операций формовки листовых заготовок наиболее часто применяется следующая модель абразивного износа [317]:

$$Z_{abr} = \int_{t_0}^{t_1} K \cdot \frac{p^a \cdot v^b}{H^c} dt, \quad (\text{П1.13})$$

где Z_{abr} – глубина абразивного износа; p – давление на контакте с заготовкой; v – скорость скольжения; H – твердость материала инструмента (константа или функция температуры); a, b, c, K – экспериментальные константы, обычно для стального инструмента $a = b = 1, c = 2, K = 50$ (в этом случае значение H берется по шкале Роквелла).

Приложение 2

К вопросу о расчетных оценках гидравлических сопротивлений трения в трубопроводах

Прялов С.Н., Селезнев В.Е.

Актуальность получения *адекватных непрерывных* зависимостей для вычисления коэффициента гидравлического сопротивления трения во *всех диапазонах чисел Рейнольдса и относительных шероховатостей* можно объяснить, используя цитату из монографии [65]: «условия работы технических трубопроводов (водопроводы, газопроводы, нефтепроводы, трубопроводы отопления, продуктопроводы и др.) большей частью соответствуют так называемой переходной области (область смешанного трения). В технических трубопроводах протяженность переходной зоны примерно в 10 раз больше, чем в трубопроводах с шероховатостью И. Никурадзе¹, и она охватывает всю практически важную для работы трубопроводов область. Поэтому пользование квадратичными формулами для расчетов технических трубопроводов, как правило, нельзя рекомендовать. С другой стороны, при больших шероховатостях области гладких труб вообще может не быть».

Наиболее подробные описания зависимостей гидравлического сопротивления трения, возникающего при транспортировании газов и жидкостей по трубопроводам в различных режимах течения и при разных видах шероховатостей стенок труб, приведены в справочнике [66]. Однако, к сожалению, этот справочник не лишен некоторых недостатков, связанных с отсутствием полноты описаний указанных зависимостей и результатов анализа их применимости для широких диапазонов шероховатостей стенок труб и значений чисел Рейнольдса. Так, например, для разных диапазонов шероховатостей труб и чисел Рейнольдса в нем приводятся зависимости, которые могут быть не согласованными друг с другом. В то же время, разные зависимости, введенные для одних и тех же диапазонов, могут давать существенно различные значения для одинаковых параметров течений и труб. Все вышеперечисленное затрудняет использование расчетных зависимостей [66] для оценок гидравлического сопротивления трения в трубах при решении производственных задач ТЭК.

Основная проблема в применении данных зависимостей при численном анализе параметров течения газов или жидкостей по трубопроводам заключается в том, что они не являются непрерывными. Разрывы зависимостей при смене расчетных формул для разных интервалов чисел Рейнольдса могут приводить к ухудшению сходимости методов моделирования течений по трубопроводам в целом. Это обстоятельство потребовало проведения детального анализа применимости расчетных формул [66] и выделения из них наиболее подходящих зависимостей для решения практических задач ТЭК. В процессе анализа для так называемой «сшивки» зависимостей были изменены рекомендуемые границы их применимости, а также предложены новые модификации расчетных формул.

Перейдем к анализу представленных в [66] зависимостей для вычисления гидравлического сопротивления трения.

Как известно, потери давления по длине прямой трубы (канала) постоянного поперечного сечения (линейные потери или потери на трение) вычисляются по формуле Дарси – Вейсбаха [66, 319]:

¹ Равномерно-зернистая шероховатость (комментарий авторов монографии).

$$\Delta p_{mp} = \lambda \cdot \frac{l}{D_r} \cdot \frac{\rho \cdot w^2}{2}, \quad (\text{П2.1})$$

где λ – коэффициент гидравлического сопротивления трения единицы относительной длины (длины в один диаметр сечения); l – длина рассматриваемого участка трубы (канала); $D_r = 4 \cdot f / \chi$ – гидравлический диаметр трубы (канала); для круглого поперечного сечения $D_r = D$ (D – диаметр поперечного сечения); f – площадь поперечного сечения трубы (канала); χ – смоченный периметр; ρ – плотность газа (жидкости); w – средняя по сечению трубы (канала) скорость потока.

Трубы и каналы могут быть как гладкими, так и шероховатыми. При этом шероховатость может быть равномерной (равномерно зернистой) и неравномерной. Оба вида шероховатости различают по форме выступов, их размерам, промежуткам между ними и т.д. **Большинство технических труб характеризуется неравномерной шероховатостью** [65, 66]. По данной причине здесь будем рассматривать зависимости $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ при стабилизированном течении только для труб с неравномерной шероховатостью.

Согласно [66], среднюю высоту Δ выступов шероховатости, выраженную в единицах длины, называют абсолютной шероховатостью. Отношение средней высоты выступов к гидравлическому диаметру трубы, т. е., $\bar{\Delta} = \Delta / D_r$, называют относительной шероховатостью.

В справочнике [66] указано, что для описания зависимости $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ можно условно рассматривать три режима течения: ламинарный, переходной и квадратичный.

Согласно [66], первый (ламинарный) режим относится к малым значениям чисел Re (до $\text{Re} \approx 2000$) и характеризуется тем, что шероховатость не оказывает никакого влияния на величину λ . По закону Гагена – Пуазейля (рис. П2.1):

$$\lambda = 64 / \text{Re}. \quad (\text{П2.2})$$

Третий режим, называемый квадратичным, соответствует области значений числа Re , для которых графическое представление зависимости $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta} = \text{const})$ ¹ близко к горизонтальной прямой. Согласно [65, 66], для квадратичного режима параметр λ можно вычислить по формуле Л. Прандтля:

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \cdot \lg \frac{3,7}{\bar{\Delta}}\right)^2}. \quad (\text{П2.3})$$

Перейдем к рассмотрению второго (так называемого переходного) режима. Здесь необходимо отметить, что в работе [66] при описании зависимостей $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ сразу делается разграничение труб на гидравлически гладкие трубы (с гидравлически (технически) гладкими стенками) и технические трубы (с неравномерной шероховатостью стенок). Способы вычисления параметра λ для данных труб описываются независимо друг от друга, из-за чего остается открытым вопрос о правилах перехода от одного способа к другому. Иначе говоря, в этом случае наблюдается проблема «сшивки» зависимостей.

¹ Запись $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta} = \text{const})$ означает, что рассматривается поведение параметра λ при изменении числа Re для некоторого фиксированного значения $\bar{\Delta}$.

Рассмотрим способы вычисления параметра λ в случае гидравлически гладкой трубы.

Для критической области стабилизированного течения ($Re \in [2000, 4000]$) коэффициент сопротивления трения λ для труб круглого сечения с гидравлически (технически) гладкими стенками в [66] предлагается находить только по рис. П2.2.

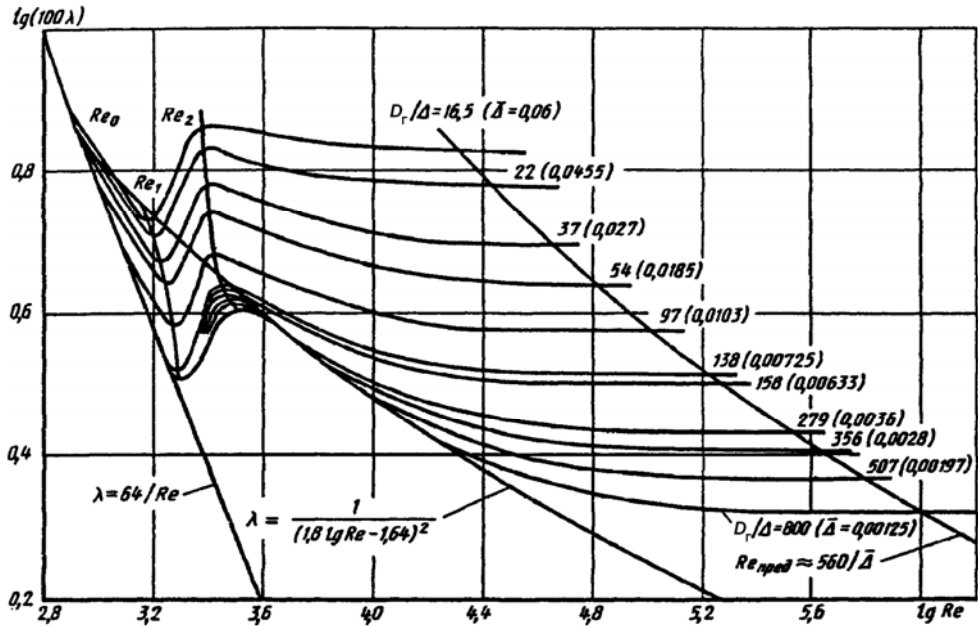


Рис. П2.1. Зависимость коэффициента сопротивления трения λ от числа Рейнольдса и относительной шероховатости $\bar{\Delta}$ при неравномерной шероховатости¹

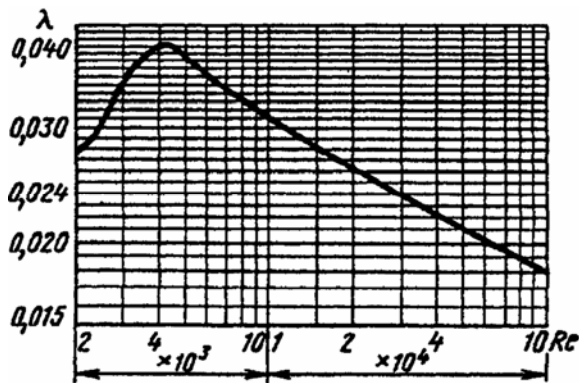


Рис. П2.2. Зависимость [66] коэффициента сопротивления трения λ в области $Re \in [2 \cdot 10^3, 10^5]$ для гидравлически гладких труб²

¹ Рисунок заимствован из справочника [66].

² Рисунок заимствован из справочника [66].

Согласно [66], для области чисто турбулентного стабилизированного течения ($Re > 4000$) коэффициент сопротивления трения λ труб круглого сечения с гидравлически (технически) гладкими стенками *аналитически* можно вычислять по эмпирической формуле Филоненко – Альтшуля (зависимости Филоненко – Альтшуля (ЗФА)):

$$\lambda = \frac{1}{(1,8 \cdot \lg Re - 1,64)^2}. \quad (\text{П2.4})$$

Проанализируем рекомендации работы [66] по способам вычисления параметра λ при *переходном* режиме для гидравлически (технически) гладких труб.

Представленное в справочнике [66] изложение способов расчета параметра λ для гидравлически (технически) гладких труб достаточно противоречиво. Наряду с указанной выше проблемой отсутствия аналитической зависимости $\lambda = \lambda(Re)$ на участке $Re \in [2000, 4000]$, разные табличные и графические зависимости (соответствующие этому участку) не согласуются друг с другом¹. Так, например, на диаграмме 2-1,а [66], построенной по формуле (П2.2), и в таблицах диаграммы 2-1 [66] значению $Re = 2 \cdot 10^3$ соответствует величина $\lambda = 0,032$. Для того же значения числа Re диаграмма 2-1,б [66] (см. рис. П2.2) дает значение $\lambda = 0,028$. Данная невязка (13%) оставляет вопросы о применимости предложенных в [66] зависимостей при высокоточном моделировании течений в трубопроводных системах (по крайней мере, к графическому и табличному представлениям).

Для аналитического вычисления значений $\lambda(Re)$ на участке $Re \in [2000, 4000]$ целесообразно использовать следующий упрощенный подход. В качестве расчетной зависимости можно взять прямую, проходящую через заданные точки ($Re = 2000, \lambda = 0,028$) и ($Re = 4000, \lambda = 0,040$) (см. рис. П2.2):

$$\lambda(Re) = 0,016 + 6 \cdot 10^{-6} \cdot Re. \quad (\text{П2.5})$$

В этом случае аналитически можно получить координату пересечения зависимостей (П2.2) и (П2.5): $Re = 2194,335$.

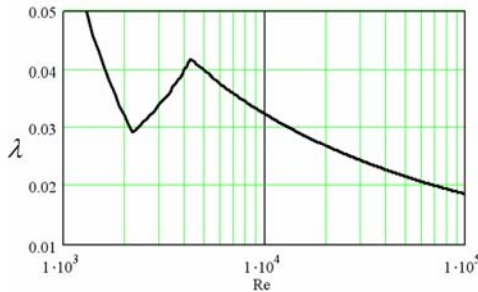
Для «сшивки» зависимостей (П2.5) и (П2.4) (предложенной в [66] для области $Re > 4000$) можно численно получить координату их пересечения: $Re = 4282,984$.

Графическое представление предложенной модификации зависимости $\lambda(Re)$ для труб с гидравлически гладкими стенками в переходной зоне приведено на рис. П2.3а. Для сравнения на рис. П2.3б и рис. П2.3в представлены аналогичные графики, взятые из [66]. К сожалению, информация диаграммы 2-1 [66] для $Re > 4000$ также противоречива. На рис. П2.3г приведено относительное отклонение табличного представления данной функции диаграммы 2-1 [66] от зависимости (П2.4):

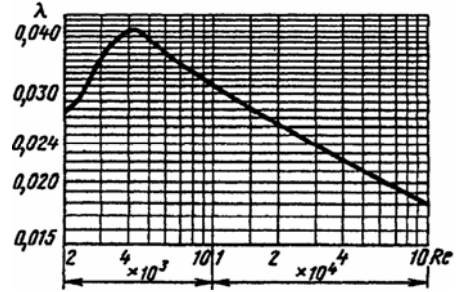
$$\phi(Re) = \frac{\lambda_{з\Phi A}(Re) - \lambda_{табл}(Re)}{\lambda_{з\Phi A}(Re)} \cdot 100\%, \quad (\text{П2.6})$$

¹ В справочнике [66] информация о способах вычисления коэффициента гидравлического сопротивления трения приведена в трех формах представления: аналитическое (с помощью формул), графическое и табличное представления.

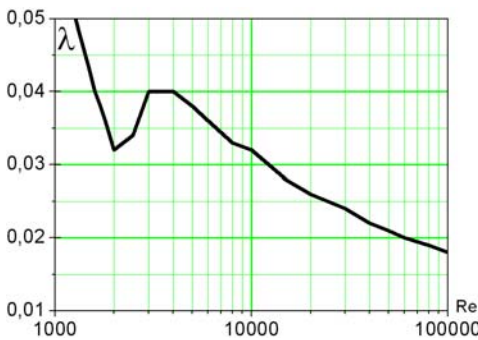
где $\lambda_{3\Phi A}(\text{Re})$ соответствует ЗФА (П2.4), а $\lambda_{\text{табл}}(\text{Re})$ – табличному представлению данной зависимости из диаграммы 2-1 [66]. Как видно из графика (рис. П2.3г), отклонение превышает $\pm 5\%$.



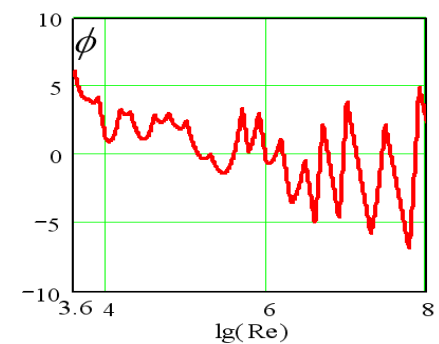
а) предложенная модификация



б) график из работы [66]



в) кусочно-линейная интерполяция табличной зависимости (из работы [66])



г) относительное отклонение табличной функции диаграммы 2-1 [66] от ЗФА (П2.4), [%]

Рис. П2.3. Зависимость $\lambda(\text{Re})$ для труб круглого сечения с гидравлически гладкими стенками при стабилизированном течении в переходном режиме

Рассмотрим теперь критерий перехода между формулами для гидравлически гладких труб и труб с неравномерной шероховатостью стенок (в области $\text{Re} > 4000$).

Согласно [66], коэффициенты гидравлического сопротивления трения λ всех технических труб¹ (с неравномерной шероховатостью стенок) круглого сечения, кроме специальных, для которых значения λ даны отдельно, можно определить по формуле Кольбука – Уайта (зависимости Кольбука – Уайта (ЗКУ)):

$$\lambda = \frac{1}{\left[2 \cdot \lg \left(\frac{2,51}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{\bar{\Delta}}{3,7} \right) \right]^2}. \quad (\text{П2.7})$$

¹ Включая также стальные, бетонные и железобетонные напорные водоводы.

Достоинством ЗКУ (П2.7) является то, что она получила теоретическое обоснование и была подтверждена многочисленными натурными экспериментами [65]. В [66] предлагается оценка значения числа Re , по которому можно переходить от применения ЗФА (П2.4) к ЗКУ (П2.7) и обратно. Согласно [66], предельное число Рейнольдса, при котором технические трубы перестают быть гидравлически гладкими, равно (с точностью до $3 \div 4\%$)

$$Re'_{пред} \approx \frac{15}{\Delta}. \quad (П2.8)$$

Введем понятие «*разрывность*» как скачок параметра λ при переходе между применением разных расчетных зависимостей.

Графический вид множества точек пересечения ЗФА (П2.4) и ЗКУ (П2.7) представлен на рис. П2.4а.

Рассмотрим разрывность функции $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ при переходе между использованием ЗФА (П2.4) и ЗКУ (П2.7), если в качестве точек перехода брать $Re = Re'_{пред}$. Вид зависимости $Re = Re'_{пред}(\bar{\Delta})$ представлен на рис. П2.4а. Рассматриваемое свойство разрывности можно формализовать в виде:

$$\xi'_{пред}(\bar{\Delta}) = \frac{\lambda_{ЗФА}(Re'_{пред}(\bar{\Delta})) - \lambda_{ЗКУ}(Re'_{пред}(\bar{\Delta}), \bar{\Delta})}{0,5 \cdot (\lambda_{ЗФА}(Re'_{пред}(\bar{\Delta})) + \lambda_{ЗКУ}(Re'_{пред}(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}))} \cdot 100\%, \quad (П2.9)$$

где $\lambda_{ЗКУ}(Re, \bar{\Delta})$ соответствует (П2.7). Функция (П2.9) имеет графический вид, представленный на рис. П2.4б. Из данного рисунка видно, что скачок параметра λ на множестве точек $Re'_{пред}(\bar{\Delta})$ превышает $\pm 2\%$.

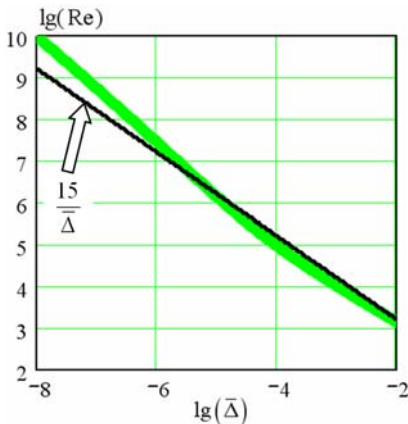


Рис. П2.4а. Множество точек пересечения ЗФА (П2.4) и ЗКУ (П2.7) (жирная светлая линия), а также его аппроксимация с помощью $Re'_{пред}(\bar{\Delta})$ (П2.8) (тонкая темная линия)

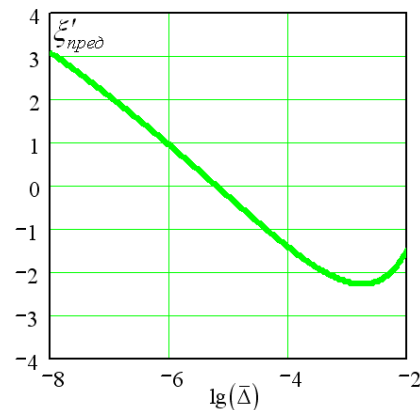


Рис. П2.4б. Разрывность функции $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ на множестве точек $Re'_{пред}(\bar{\Delta})$ при переходе между использованием ЗФА (П2.4) и ЗКУ (П2.7), [%]

Для уменьшения разрывности функции $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ при переходе между использовани-

ем ЗФА (П2.4) и ЗКУ (П2.7) предлагается применять следующие формулы для вычисления точек перехода:

$$\overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta}) = \begin{cases} 2 \cdot 10^5 - \frac{9,4}{\bar{\Delta}} + \frac{1,17}{\bar{\Delta}^{1,25}} - \frac{0,0017}{\bar{\Delta}^{1,5}}, & \text{если } \bar{\Delta} \in [10^{-8}, 10^{-5}]; \\ \frac{20,8}{\bar{\Delta}} - \frac{3,7}{\bar{\Delta}^{1,25}} + \frac{0,501}{\bar{\Delta}^{1,5}} - \frac{0,0678}{\bar{\Delta}^{1,65}} + \frac{0,0002}{\bar{\Delta}^2}, & \text{если } \bar{\Delta} \in [10^{-5}, 10^{-2}]. \end{cases} \quad (\text{П2.10})$$

Формализуем свойство разрывности функции $\lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ при переходе между использованием формул (П2.4) и (П2.7) на множестве точек $\overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta})$ в виде:

$$\bar{\xi}_3(\bar{\Delta}) = \frac{\lambda_{\text{ЗКУ}}(\overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) - \lambda_{\text{ЗФА}}(\overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta}))}{0,5 \cdot (\lambda_{\text{ЗФА}}(\overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta})) + \lambda_{\text{ЗКУ}}(\overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}))} \cdot 100\%. \quad (\text{П2.11})$$

Графическое представление данного свойства приведено на рис. П2.5. Далее будет показано, что рабочий диапазон применения формулы (П2.10) сверху ограничен величиной $\bar{\Delta} = 0,002789 \approx 10^{-2,55}$. Как видно из рис. П2.5, разрывность функции $\lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ на множестве точек $\overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta})$ (в диапазоне $\bar{\Delta} \in [10^{-8}; 0,002789]$) при переходе между использованием формул (П2.4) и (П2.7) не превышает $\pm 0,1\%$.

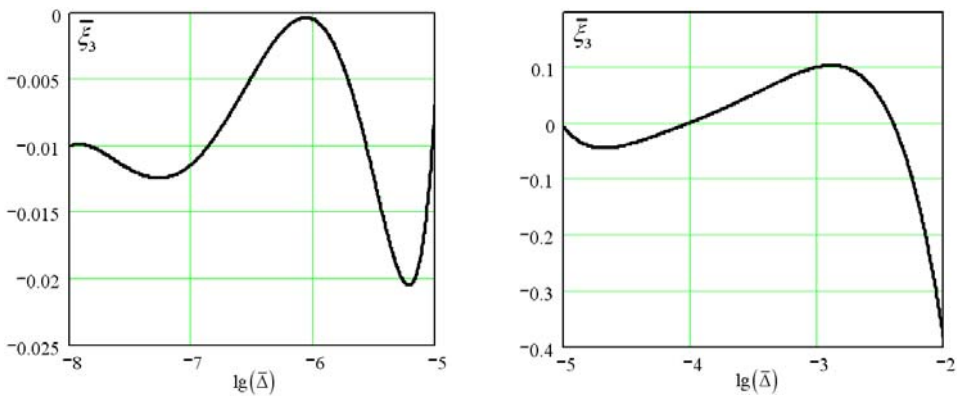


Рис. П2.5. Разрывность функции $\lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ на множестве точек $\overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta})$ при переходе между использованием ЗФА (П2.4) и ЗКУ (П2.7), [%]

Теперь рассмотрим зависимости для вычисления коэффициента гидравлического сопротивления трения при стабилизированном течении в переходном режиме для **технических труб** (с неравномерной шероховатостью стенок). Для определения значений параметра λ при данном режиме течения в справочнике [66] предлагается несколько способов расчета. Познакомимся с одним из них.

Согласно [66], кривые, соответствующие зависимостям гидравлического сопротивления трения технических труб с относительной шероховатостью $\bar{\Delta} > 0,007$, при некотором значении Re отклоняются от закона Гагена – Пуазейля в сторону увеличения λ , и чем больше относительная шероховатость, тем раньше наступает это отклонение (см. рис. П2.1). Число Рейнольдса, соответствующее началу отклонения, согласно [66], мож-

но определить по формуле, предложенной Л.А. Самойленко:

$$Re_0 = 754 \cdot \exp\left(\frac{0,0065}{\bar{\Delta}}\right). \quad (П2.12)$$

В области от Re_1 до Re_2 каждому значению $\bar{\Delta}$ соответствует переходная кривая (см. рис. П2.1). Для труб с $\bar{\Delta} > 0,007$ в работе [66] предлагается следующая оценка значения Re_1 :

$$Re_1 = 1160 \cdot \left(\frac{1}{\bar{\Delta}}\right)^{0,11}, \quad (П2.13)$$

т.е. величина Re_1 уменьшается с увеличением относительной шероховатости $\bar{\Delta}$.

Согласно [66], число Рейнольдса, определяющее границу Re_2 для труб с любой шероховатостью, равно

$$Re_2 = 2090 \cdot \left(\frac{1}{\bar{\Delta}}\right)^{0,0635}. \quad (П2.14)$$

В справочнике [66] вводится следующее определение: *участок переходного режима между ламинарным и турбулентным течениями называется критической зоной, или зоной смены режимов течения.*

Для вычисления параметра λ в зоне смены режимов течения в [66] предлагается несколько вариантов формул. Как было указано выше, здесь рассматривается один из них. В данной критической зоне значения λ можно определять по формулам, предложенным Л.А. Самойленко [66]:

при $Re_0 < Re < Re_1$ и $\bar{\Delta} > 0,007$

$$\lambda = 4,4 \cdot Re^{-0,595} \cdot \exp\left(-\frac{0,00275}{\bar{\Delta}}\right); \quad (П2.15)$$

при $Re_1 < Re < Re_2$

$$\lambda = (\lambda_2 - \lambda^*) \cdot \exp\left\{-\left[0,0017 \cdot (Re_2 - Re)\right]^2\right\} + \lambda^*, \quad (П2.16)$$

где при $\bar{\Delta} \leq 0,007$

$$\lambda^* = \lambda_1;$$

при $\bar{\Delta} > 0,007$

$$\lambda^* = \lambda_1 - 0,0017.$$

Коэффициенты λ_1 и λ_2 , соответствующие границам Re_1 и Re_2 находятся так [66]:

при $\bar{\Delta} \leq 0,007$

$$\lambda_1 \approx 0,032,$$

$$\lambda_2 = 7,244 \cdot (Re_2)^{-0,643};$$

при $\bar{\Delta} > 0,007$

$$\lambda_1 = 0,0775 - \frac{0,0109}{\bar{\Delta}^{0,286}},$$

$$\lambda_2 = \frac{0,145}{\bar{\Delta}^{-0,244}}.$$

Перейдем к анализу представленной информации. Согласно [66] (см. выше), для $\bar{\Delta} > 0,007$ при «переходе» через значение Re_0 зависимость (П2.2) сменяется зависимо-

стью (П2.15). При этом для вычисления параметра Re_0 предлагается формула $Re_0 = 754 \cdot \exp(0,0065/\bar{\Delta})$ (см. (П2.12)). Однако аналитически можно показать, что координата пересечения данных функций равна:

$$\overline{Re_0} = 742,9 \cdot \exp\left(\frac{0,00679}{\bar{\Delta}}\right). \quad (\text{П2.17})$$

Использование формулы (П2.12) для вычисления Re_0 дает скачок величины λ в пределах 1,4% ($-0,2\% \div 1,2\%$). Для доказательства этого обозначим зависимость (П2.2) через $\lambda_{\text{Гагена-Пуазейля}}(Re)$, зависимость (П2.15) – через $\lambda_{\text{Самойленко}}(Re, \bar{\Delta})$.

Характеристику разрывности функции $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ при переходе между использованием зависимостей (П2.2) и (П2.15) можно формализовать в виде:

$$\xi(\bar{\Delta}) = \frac{\lambda_{\text{Гагена-Пуазейля}}(Re_0(\bar{\Delta})) - \lambda_{\text{Самойленко}}(Re_0(\bar{\Delta}), \bar{\Delta})}{0,5 \cdot (\lambda_{\text{Самойленко}}(Re_0(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) + \lambda_{\text{Гагена-Пуазейля}}(Re_0(\bar{\Delta})))} \cdot 100\%. \quad (\text{П2.18})$$

Графическое представление данной функции приведено на рис. П2.6. Из этого рисунка следует указанное выше значение разрывности.

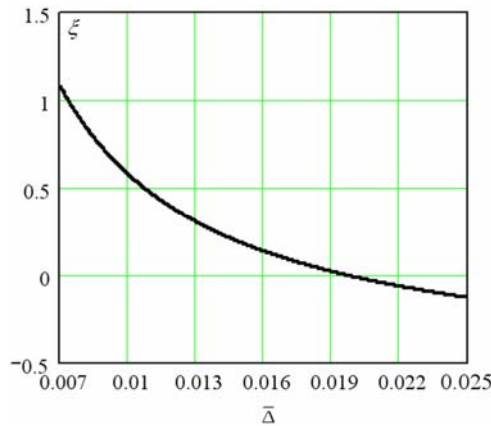


Рис. П2.6. Разрывности функции $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ на множестве точек $Re_0(\bar{\Delta})$ ($\bar{\Delta} > 0,007$), [%]

Рассмотрим теперь диапазон $[Re_0, Re_1]$ для оставшихся (т.е. нерассмотренных ранее) значений относительной шероховатости $\bar{\Delta}$ ($\bar{\Delta} \leq 0,007$). К сожалению, формулы для вычисления величины $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ применительно к техническим трубам в области $Re \in [Re_0, Re_1]$ (как и формул для вычисления Re_0 и Re_1) для $\bar{\Delta} \leq 0,007$ в справочнике [66] не представлены. Вероятно, это объясняется тем, что (см. рис. П2.1) интервал $[Re_0, Re_1]$ для такой шероховатости мал и им можно пренебречь. В этом случае можно положить $Re_0(\bar{\Delta}) \approx Re_1(\bar{\Delta})$. Для удобства дальнейшего изложения материала обозначим данную границу через $Re_{0,1}(\bar{\Delta})$. Тогда, с учетом введенного обозначения, зависимость

(П2.2) должна сменяться формулой (П2.16).

Формулы для вычисления параметра $Re_{0,1}(\bar{\Delta})$, к сожалению, в [66] также отсутствуют. Графический вид зависимости $Re_{0,1}(\bar{\Delta})$ представлен на рис. П2.7. Для данной функции можно предложить линейную аппроксимацию (см. рис. П2.7):

$$\overline{Re}_{0,1}(\bar{\Delta}) = 2002,2 - 8889 \cdot \bar{\Delta}. \quad (\text{П2.19})$$

Скачок параметра λ при «переходе» через границу $Re = \overline{Re}_{0,1}(\bar{\Delta})$ (в процессе смены формулы (П2.2) на (П2.16)) не превышает $\pm 0,1\%$. Для демонстрации этого формализуем разрывность функции $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ на рассматриваемом множестве точек через

$$\xi_{0,1}(\bar{\Delta}) = \frac{\lambda_{\text{Самойленко},2}(\overline{Re}_{0,1}(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) - \lambda_{\text{Гагена-Пуазейля}}(\overline{Re}_{0,1}(\bar{\Delta}))}{0,5 \cdot (\lambda_{\text{Самойленко},2}(\overline{Re}_{0,1}(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) + \lambda_{\text{Гагена-Пуазейля}}(\overline{Re}_{0,1}(\bar{\Delta})))} \cdot 100\%, \quad (\text{П2.20})$$

где $\lambda_{\text{Самойленко},2}(Re, \bar{\Delta})$ – зависимость (П2.16). Графический вид данной зависимости приведен на рис. П2.8, который иллюстрирует представленное выше утверждение.

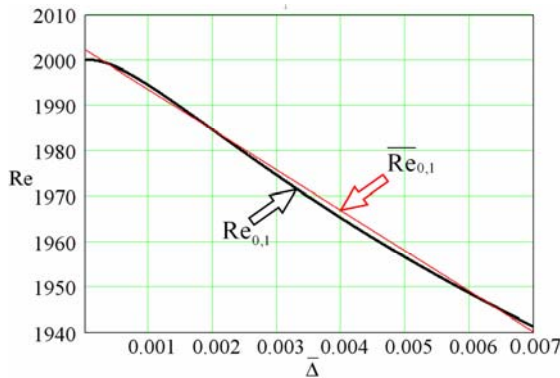


Рис. П2.7. Зависимость $Re_{0,1}(\bar{\Delta})$ и ее аппроксимация $\overline{Re}_{0,1}(\bar{\Delta})$ ($\bar{\Delta} \leq 0,007$)

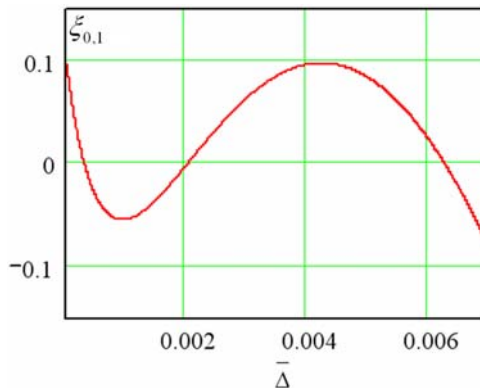


Рис. П2.8. Разрывности функции $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ на множестве точек $\overline{Re}_{0,1}(\bar{\Delta})$ ($\bar{\Delta} \leq 0,007$), [%]

Рассмотрим скачок параметра λ в процессе смены формул (П2.15) и (П2.16). Графический вид множества точек пересечения (П2.15) и (П2.16) представлен на рис. П2.9. Для аппроксимации данной кривой в [66] предложена формула $Re_1 = 1160 \cdot (1/\bar{\Delta})^{0,11}$ (см. (П2.13)). Для сравнения она показана также на рис. П2.9.

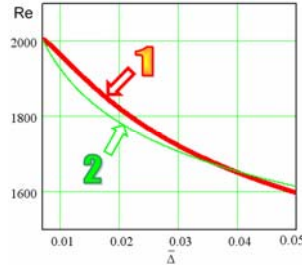


Рис. П2.9. Множество точек пересечения зависимостей (П2.15) и (П2.16) (обозначено символом «1»), а также его аппроксимация с помощью (П2.13) (обозначена символом «2»), $\bar{\Delta} > 0,007$

Проанализируем скачок параметра λ на множестве точек $Re_1(\bar{\Delta})$. Данную характеристику при переходе между использованием зависимостей (П2.15) и (П2.16) формализуем в виде:

$$\xi_1(\bar{\Delta}) = \frac{\lambda_{\text{Самойленко}}(Re_1(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) - \lambda_{\text{Самойленко,2}}(Re_1(\bar{\Delta}), \bar{\Delta})}{0,5 \cdot (\lambda_{\text{Самойленко}}(Re_1(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) + \lambda_{\text{Самойленко,2}}(Re_1(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}))} \cdot 100\%. \quad (\text{П2.21})$$

Ее графический вид представлен на рис. П2.10. Как видно из данного рисунка, разрывность функции $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ на множестве точек $Re_1(\bar{\Delta})$ находится в диапазоне 3,2%, а именно $[-0,9\% \div 2,3\%]$.

Для снижения разрывности функции $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ в процессе смены формул (П2.15) и (П2.16) предлагается применять следующую зависимость:

$$\overline{Re}_1(\bar{\Delta}) = 580 + \frac{425,3}{\bar{\Delta}^{0,25}} + \frac{44}{\bar{\Delta}^{0,5}} - \frac{4,01}{\bar{\Delta}}. \quad (\text{П2.22})$$

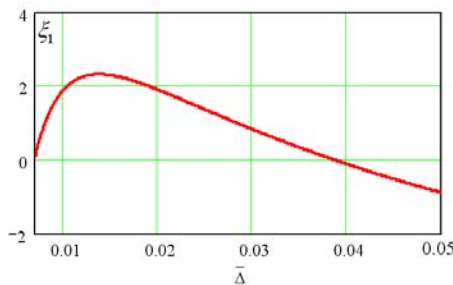


Рис. П2.10. Разрывности функции $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ на множестве точек $Re_1(\bar{\Delta})$ ($\bar{\Delta} > 0,007$), [%]

Скачок параметра λ на множестве точек $Re_1(\bar{\Delta})$ при переходе между использова-

нием формул (П2.15) и (П2.16) в этом случае будет находиться в окрестности $\pm 0,1\%$. Если характеризовать данное свойство в виде

$$\bar{\varepsilon}_1(\bar{\Delta}) = \frac{\lambda_{\text{Самойленко}}(\overline{\text{Re}}_1(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) - \lambda_{\text{Самойленко},2}(\overline{\text{Re}}_1(\bar{\Delta}), \bar{\Delta})}{0,5 \cdot (\lambda_{\text{Самойленко}}(\overline{\text{Re}}_1(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) + \lambda_{\text{Самойленко},2}(\overline{\text{Re}}_1(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}))} \cdot 100\%, \quad (\text{П2.23})$$

то графически эта функция будет иметь вид, представленный на рис. П2.11.

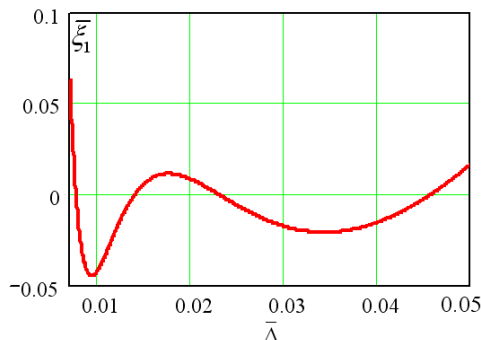


Рис. П2.11. Разрывность функции $\lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ на множестве точек $\overline{\text{Re}}_1(\bar{\Delta})$ ($\bar{\Delta} > 0,007$), [%]

Перейдем к вопросу выявления границы между областями применимости формул для гидравлически гладких труб и труб с неравномерной шероховатостью стенок (в данном случае рассматривается диапазон $\text{Re} < \text{Re}_2$). Как уже отмечалось ранее, в работе [66] напрямую о данной границе ничего не говорится. По этой причине попробуем установить ее, исходя из косвенных соображений.

В работе [66] указано (см. выше), что для вычисления значения Re_2 можно воспользоваться формулой (П2.14), причем она справедлива для любого значения относительной шероховатости $\bar{\Delta}$. Распространяя понятие «любое значение относительной шероховатости» на диапазон $\bar{\Delta} > 0$, построим ряд графиков $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$, соответствующих зависимости (П2.16) при некоторых фиксированных значениях $\bar{\Delta}$ и $\text{Re} \in [\text{Re}'_1, \text{Re}_2]$ (см. рис. П2.12). Здесь

$$\text{Re}'_1(\bar{\Delta}) = \begin{cases} \overline{\text{Re}}_1(\bar{\Delta}), & \text{если } \bar{\Delta} \geq 0,007; \\ \overline{\text{Re}}_{0,1}(\bar{\Delta}), & \text{если } \bar{\Delta} < 0,007. \end{cases} \quad (\text{П2.24})$$

Как видно из рис. П2.12, начиная с некоторого значения $\bar{\Delta}$ ($\bar{\Delta} \approx 0,00135$), кривые $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ располагаются ниже кусочно-линейной зависимости, соответствующей гидравлически гладким трубам, что противоречит физической сути¹. Заметим также, что

¹ Согласно справочнику [66], высота выступов шероховатости для гидравлически гладких труб меньше толщины вязкого подслоя, которым они целиком покрываются. При малых скоростях, характерных для вязкого подслоя, поток плавно обтекает неровности, и они не оказывают заметного влияния на характер потока. По данной причине, для всех значений относительной шероховатости, соответствующих гидравлически гладким трубам, зависимость коэффициента гидравлического сопротивления трения должна выглядеть одинаково. Т.е. для любого значения относительной шероховатости график, воспроизводящий зависимость гидравлического сопротивления трения, не может лежать ниже аналогичной кривой для гидравлически гладких труб.

для некоторого диапазона $\bar{\Delta}$ кривые ведут себя неверно даже качественно (имеют «впадину» вместо «возвышенности»).

Анализируя представленную выше информацию, можно сделать вывод о том, что значение $\bar{\Delta} = 0,00135$ целесообразно положить в качестве границы между гидравлически гладкими трубами и трубами с неравномерной шероховатостью стенок с точки зрения описания зависимости $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ в диапазоне $\text{Re} \in [\text{Re}'_1, \text{Re}_2]$. Т.е. при переходном режиме течения до значения $\text{Re} = \text{Re}_2$ трубы можно считать гидравлически гладкими, если $\bar{\Delta} \leq 0,00135$.

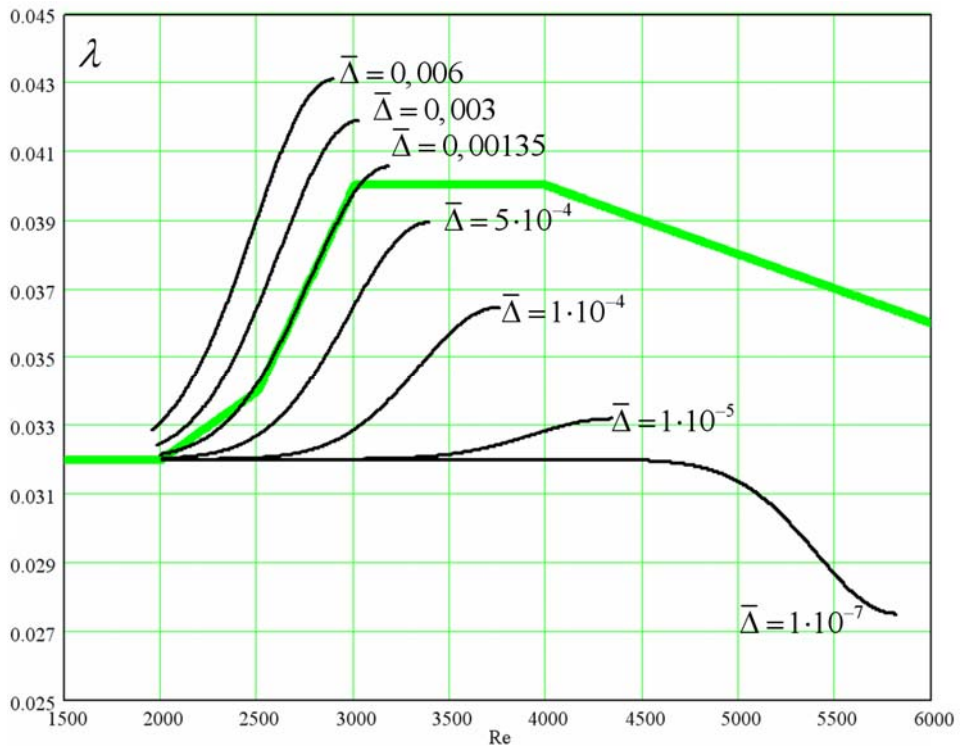


Рис. П2.12. Графическое представление кусочно-линейной интерполяции табличной зависимости $\lambda(\text{Re})$ диаграммы 2-1 [66] для гидравлически гладких труб (жирная светлая линия), а также зависимости (П2.16) для различных значений относительной шероховатости $\bar{\Delta}$

Рассмотрим теперь способы расчета коэффициента гидравлического сопротивления трения λ в области $\text{Re} > \text{Re}_2$. Здесь нас интересует область относительной шероховатости $\bar{\Delta} > 0,00135$ (поскольку при $\bar{\Delta} \leq 0,00135$ можно воспользоваться формулами, приведенными выше для расчета параметра λ применительно к гидравлически гладким трубам).

Согласно [66] (см. выше), коэффициенты гидравлического сопротивления трения λ всех технических труб¹ (с неравномерной шероховатостью стенок) круглого сечения,

¹ Включая также стальные, бетонные и железобетонные напорные водоводы.

кроме специальных, для которых значения λ даны отдельно, при стабилизированном течении и на участке $Re > Re_2$ можно определить по ЗКУ (П2.7). С другой стороны, там же отмечено, что (см. выше) до области применимости ЗКУ существует зона, в пределах которой трубы можно считать гидравлически гладкими. Параметр λ в этой области (при $Re > 4000$) подчиняется ЗФА (П2.4). Оценкой правой границы этой области, согласно [66], может служить (с точностью до $3 \div 4\%$) число $Re'_{пред} = 15/\bar{\Delta}$ (см. (П2.8)). Выше была получена более точная оценка данной границы: $\overline{Re}_3(\bar{\Delta})$ (см. (П2.10)).

Из представленных рассуждений следует, что на участке $Re > Re_2$ параметр λ следует находить по формулам:

- 1) если $4000 < Re \leq \overline{Re}_3(\bar{\Delta})$, то по ЗФА (П2.4);
- 2) если $Re > \overline{Re}_3(\bar{\Delta})$, то по ЗКУ (П2.7).

Однако приведенный список и материалы работы [66] оставляют открытым вопрос о формулах расчета гидравлического сопротивления трения на участке $Re_2 < Re \leq 4000$.

Отметим, что при увеличении относительной шероховатости $\bar{\Delta}$ диапазон $[4000, \overline{Re}_3(\bar{\Delta})]$ уменьшается. При значении $\bar{\Delta}$, равном

$$\bar{\Delta}_{пред, ЗФА} \approx 0,002789, \quad (П2.25)$$

рассматриваемый диапазон вырождается в точку (при данном значении $\bar{\Delta}$ $\overline{Re}_3 = 4000$). При $\bar{\Delta} > \bar{\Delta}_{пред, ЗФА}$ диапазон перестает существовать.

Поскольку (как было отмечено ранее) информация о зависимости $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$ в диапазоне $[Re_2, 4000]$ отсутствует, будем условно считать, что при $\bar{\Delta} > \bar{\Delta}_{пред, ЗФА}$ справедлива ЗКУ (П2.7).

Подводя итог представленным рассуждениям, приведем список формул для расчета коэффициента гидравлического сопротивления трения λ в области $Re > Re_2$ при $\bar{\Delta} > 0,00135$.

1. $\bar{\Delta}: 0,00135 \div 0,002789$.

$$Re_2(\bar{\Delta}) \leq Re < 4000: \lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta}) - \text{неизвестно};$$

$$4000 \leq Re < \overline{Re}_3(\bar{\Delta}): \lambda = \lambda(Re) \text{ по ЗФА (П2.4);}$$

$$Re \geq \overline{Re}_3(\bar{\Delta}): \lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta}) \text{ по ЗКУ (П2.7).} \quad (П2.26a)$$

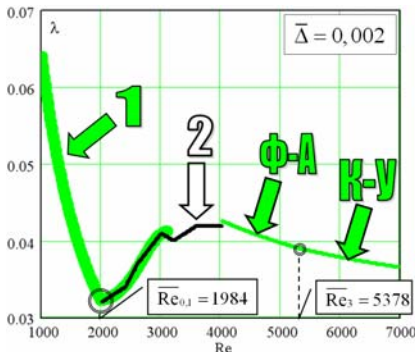
2. $\bar{\Delta} > 0,002789$:

$$Re \geq Re_2(\bar{\Delta}): \lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta}) \text{ по ЗКУ (П2.7).} \quad (П2.26б)$$

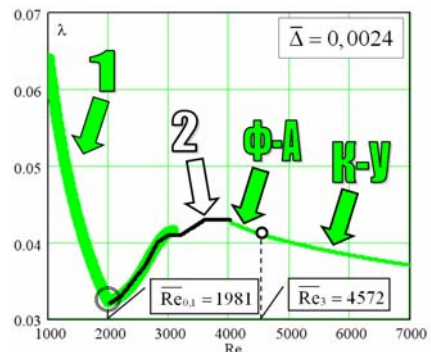
На рис. П2.13 представлен набор графиков $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$, соответствующих различным значениям $\bar{\Delta}$. Здесь, по возможности, охвачен весь диапазон параметра $\bar{\Delta}$, для ко-

того информация по зависимостям $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ представлена на диаграмме 2-3 [66].

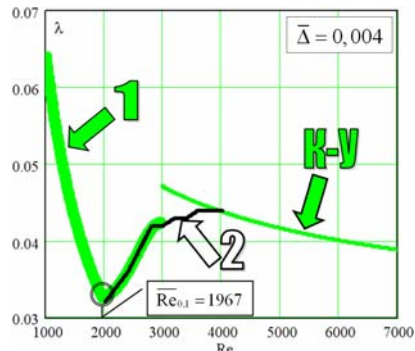
Как видно из рис. П2.13, во всем рассмотренном диапазоне $\bar{\Delta}$ расчетный параметр λ для диапазона $\text{Re}_2 < \text{Re} < 4000$ описан недостаточно корректно. Здесь наблюдается не только количественное, но и качественное отклонение от табличной функции. Так, например, при описании $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ в данном диапазоне с помощью ЗКУ (П2.7) получается нисходящая кривая, хотя табличная функция – возрастающая.



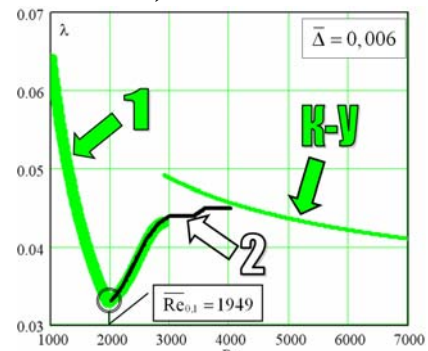
а) $\bar{\Delta} = 0,002$



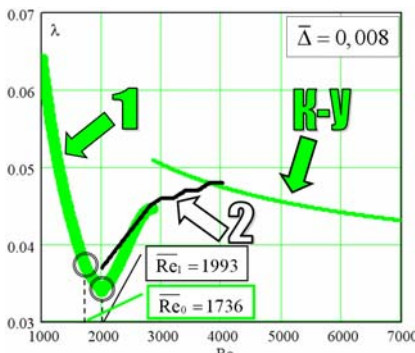
б) $\bar{\Delta} = 0,0024$



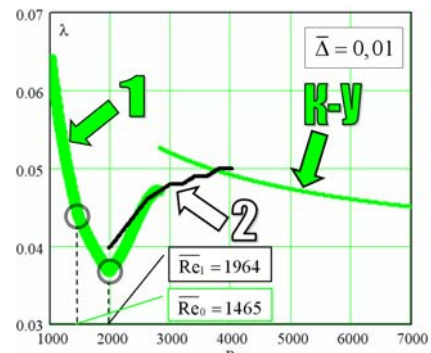
в) $\bar{\Delta} = 0,004$



г) $\bar{\Delta} = 0,006$



д) $\bar{\Delta} = 0,008$



е) $\bar{\Delta} = 0,01$

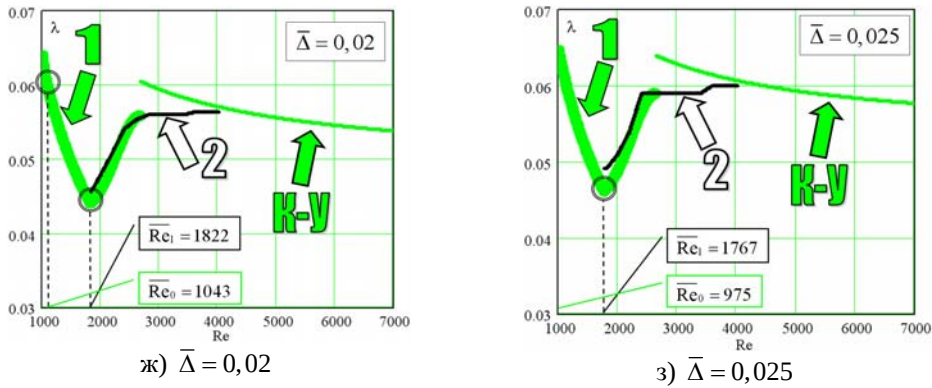


Рис. П2.13. Зависимость $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$ при переходном режиме течения. Символом «1» обозначена модификация формул для расчета $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$ в области $Re \leq Re_2$; символом «2» – табличная функция $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$ из диаграммы 2-3 [66] для диапазона $Re \in [Re'_1, Re_2]$; символами «Ф-А» и «К-У» соответственно – ЗФА (П2.4) и ЗКУ (П2.7). В случае присутствия ЗФА ее левая граница соответствует $Re = 4000$; при ее отсутствии левая граница ЗКУ соответствует $Re = Re_2$.

Для наглядного изложения дальнейшего материала обозначим рассмотренную выше и представленную на рис. П2.13 модификацию формул $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$ для расчета параметра λ области $Re'_1 < Re < Re_2$ через: $\lambda_{<Re_2}(Re, \bar{\Delta})$. Набор формул для расчета параметра λ в области $Re > 4000$, описанный с помощью (П2.26), обозначим через $\lambda_{>4000}(Re, \bar{\Delta})$.

Из анализа рис. П2.13 можно сделать вывод о том, что для всех рассмотренных значений $\bar{\Delta}$ табличная функция из диаграммы 2-3 [66] в диапазоне $Re_2 < Re < 4000$ близка к прямой, соединяющей точки $\{Re_2(\bar{\Delta}), \lambda_{<Re_2}(Re_2(\bar{\Delta}), \bar{\Delta})\}$ и $\{Re = 4000, \lambda_{>4000}(4000, \bar{\Delta})\}$. Таким образом, для рассматриваемого диапазона можно предложить следующую аппроксимацию зависимости $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$:

$$\lambda(Re, \bar{\Delta}) = \lambda_{<Re_2}(Re_2(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) \cdot \frac{4000 - Re}{4000 - Re_2(\bar{\Delta})} + \lambda_{>4000}(4000, \bar{\Delta}) \cdot \frac{Re - Re_2(\bar{\Delta})}{4000 - Re_2(\bar{\Delta})}. \quad (\text{П2.27})$$

Для сравнения на рис. П2.14а приведены графики модификации формул расчета параметра λ для диапазона числа Re от 1000 до 4200 и аналогичные графики (см. рис.П2.14б) из диаграммы 2-3 [66]. На оригинале рис. П2.14б из [66], по-видимому, содержатся опечатки, т.е. значения относительной шероховатости $\bar{\Delta}$, меньшие или равные 0,080, при чтении следует уменьшать в 10 раз по сравнению с напечатанными величинами.

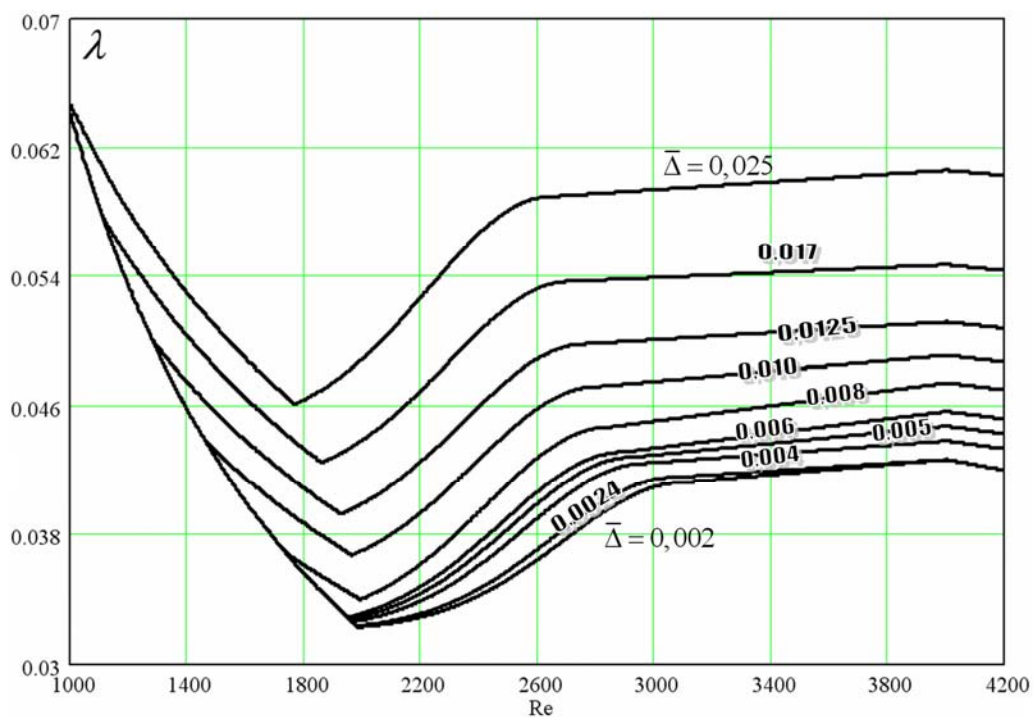


Рис. П2.14а. Предложенная модификация зависимости $\lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$

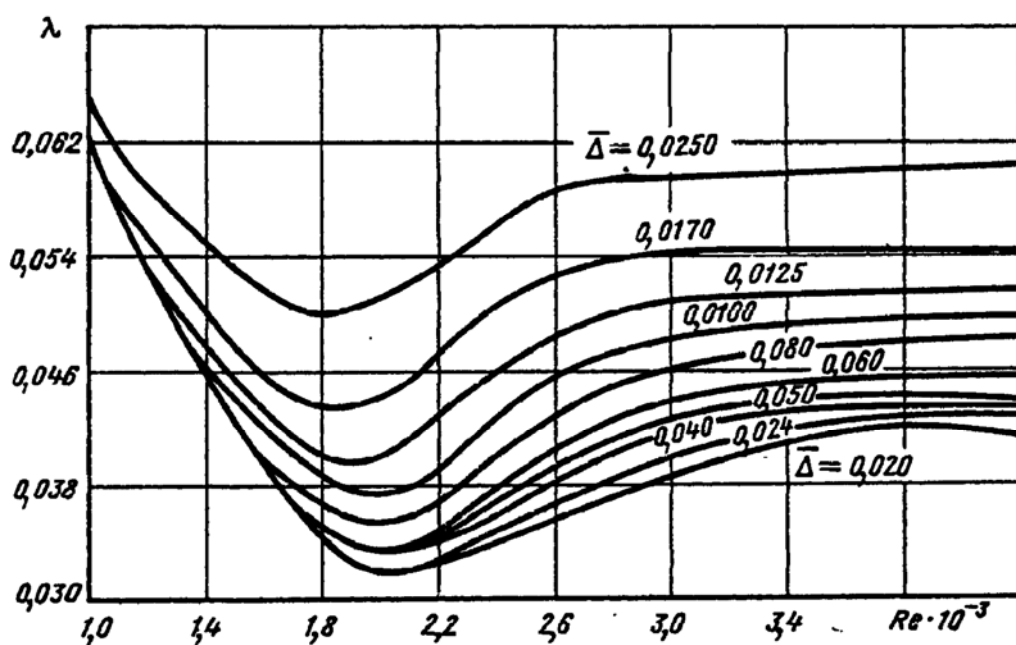
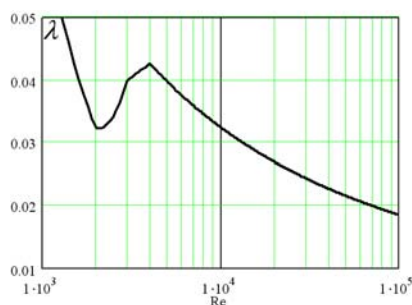


Рис. П2.14б. Графики $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ из диаграммы 2-3 (воспроизведен оригинал рисунка из [66])

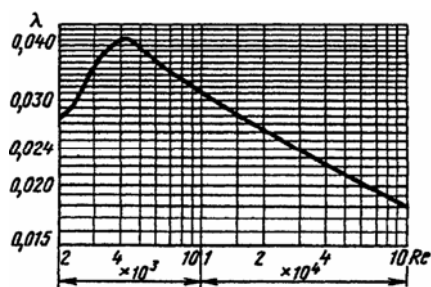
Анализ рис. П2.14а и рис. П2.14б показывает, что остаются вопросы к качеству зависимостей, предложенных в работе [66], для расчета параметра λ в рассматриваемой области чисел Рейнольдса. В частности, минимумы функции $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta} = 0,025)$ на данных рисунках (примерно 0,046 и 0,05) отличаются более чем на 8%.

Необходимо также отметить, что проведенная модификация зависимостей позволяет получить универсальные формулы для расчета гидравлического сопротивления трения при переходном режиме как для труб с неравномерной шероховатостью стенок, так и для гидравлически гладких труб¹. В этом случае для значений относительной шероховатости $\bar{\Delta} < 0,00135$ достаточно рассчитывать параметр λ по формулам, соответствующим шероховатости $\bar{\Delta} = 0,00135$ (вместо зависимостей, применяющихся совместно с (П2.5)).

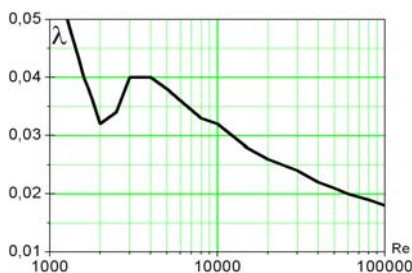
На рис. П2.15 приведены новая аппроксимация зависимости $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ для труб с гидравлически гладкими стенками. Для сравнения на этом рисунке также воспроизведены диаграмма 2-1 [66] и первый вариант аппроксимации данной кривой, соответствующий формуле (П2.5).



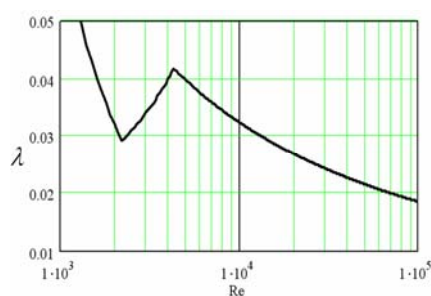
а) новая аппроксимация



б) график из работы [66]



в) кусочно-линейная интерполяция табличной зависимости [66].



г) первое предложение по аппроксимации зависимости

Рис. П2.15. Зависимость $\lambda = \lambda(\text{Re})$ для труб круглого сечения с гидравлически гладкими стенками при переходном режиме

Как было отмечено ранее, начиная с некоторого значения числа Re , осуществляется переход к квадратичному режиму течения, для которого справедлива формула Прандтля (П2.3). Действительно, если устремить $\text{Re} \rightarrow \infty$, то ЗКУ (П2.7) асимптотически устре-

¹ Данная модификация была предложена С.Н. Пряловым.

мится к формуле Прандтля (П2.3):

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \lambda = \lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[2 \cdot \lg \left(\frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{\bar{\Delta}}{3,7} \right) \right]^2} = \frac{1}{\left(2 \cdot \lg \left(\frac{\bar{\Delta}}{3,7} \right) \right)^2} = \frac{1}{\left(2 \cdot \lg \left(\frac{3,7}{\bar{\Delta}} \right) \right)^2}. \quad (\text{П2.28})$$

В справочнике [66] предлагается оценка значения числа Re , для которого можно считать, что режим течения является квадратичным. В частности, в данной работе указано, что для неравномерной шероховатости предельное значение числа Рейнольдса, при котором начинает действовать квадратичный закон сопротивления, можно с точностью до 3÷4% принять

$$Re''_{пред} \approx 560/\bar{\Delta}. \quad (\text{П2.29})$$

Формализуем разрывность функции $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$ на множестве точек $Re''_{пред}$ (в процессе смены ЗКУ (П2.7) на формулу Прандтля (П2.3)) через

$$\xi''(\bar{\Delta}) = \frac{\lambda_{ЗКУ}(Re''_{пред}(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) - \lambda_{Прандтль}(\bar{\Delta})}{0,5 \cdot (\lambda_{ЗКУ}(Re''_{пред}(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) + \lambda_{Прандтль}(\bar{\Delta}))} \cdot 100\%, \quad (\text{П2.30})$$

где $\lambda_{Прандтль}(\bar{\Delta})$ рассчитывается по формуле Прандтля (П2.3). График функции $\xi''(\bar{\Delta})$ представлен на рис. П2.16.

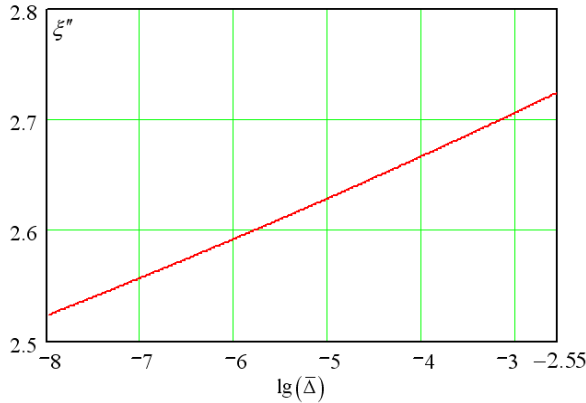


Рис. П2.16. Разрывность функции $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$ на множестве точек $Re''_{пред}(\bar{\Delta})$, [%]

Как видно из рис. П2.16, скачок параметра λ (в процессе смены ЗКУ (П2.7) на формулу Прандтля (П2.3)) на рассматриваемом множестве точек $Re''_{пред}(\bar{\Delta})$ может превышать 2,7%. Для уменьшения разрывности функции $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$ предлагается изменить рассматриваемое множество точек. В частности, для обеспечения разрывности параметра λ не более 0,1% предлагается использовать множество точек:

$$\overline{Re}_4(\bar{\Delta}) = \frac{16100}{\bar{\Delta}}. \quad (\text{П2.31})$$

Формализуем разрывность функции $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$ на множестве точек $\overline{Re}_4(\bar{\Delta})$ (в

процессе смены ЗКУ (П2.7) на формулу Прандтля (П2.3)) через

$$\bar{\xi}_4(\bar{\Delta}) = \frac{\lambda_{ЗКУ}(\bar{Re}_4(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) - \lambda_{Прандтль}(\bar{\Delta})}{0,5 \cdot (\lambda_{ЗКУ}(\bar{Re}_4(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) + \lambda_{Прандтль}(\bar{\Delta}))} \cdot 100\%. \quad (\text{П2.32})$$

Графический вид данной функции представлен на рис. П2.17.

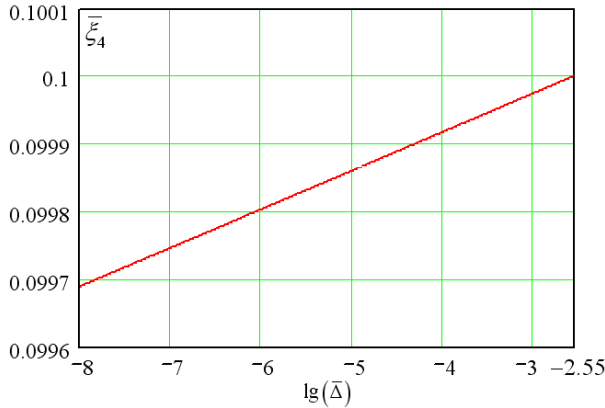


Рис. П2.17. Разрывность функции $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ на множестве точек $\bar{Re}_4(\bar{\Delta})$, [%]

Множество точек $\widetilde{Re}_4(\bar{\Delta})$, для которых разрывность функции $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ (в процессе смены ЗКУ (П2.7) на формулу Прандтля (П2.3)) составляет 0,1%, и его аппроксимация с помощью (П2.31) представлена на рис. П2.18.

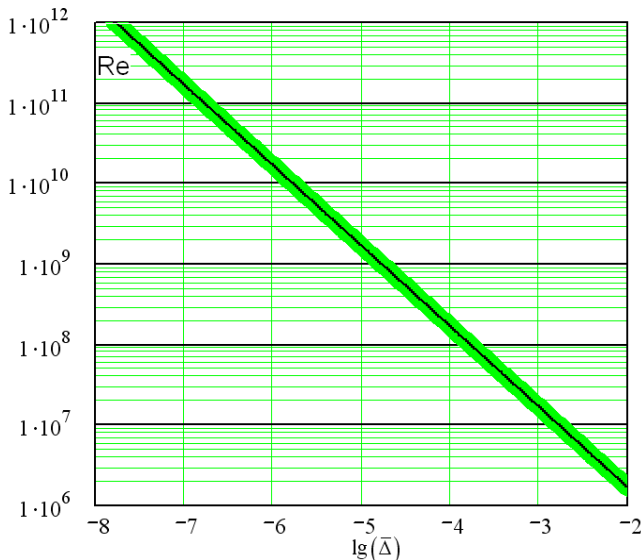


Рис. П2.18. Множество точек $\widetilde{Re}_4(\bar{\Delta})$ (толстая светлая линия) и его аппроксимация с помощью (П2.31) (тонкая темная линия)

Обобщим приведенную информацию в виде составной (из разных, частично модифицированных, формул) расчетной зависимости для оценки гидравлического сопротивления трения $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$:

$$\overline{\text{Re}}_0(\bar{\Delta}) = 742,9 \cdot \exp\left(\frac{0,00679}{\bar{\Delta}}\right); \quad (\text{П2.33а})$$

$$\overline{\text{Re}}_{0,1}(\bar{\Delta}) = 2002,2 - 8889 \cdot \bar{\Delta}; \quad (\text{П2.33б})$$

$$\overline{\text{Re}}_1(\bar{\Delta}) = 580 + \frac{425,3}{\bar{\Delta}^{0,25}} + \frac{44}{\bar{\Delta}^{0,5}} - \frac{4,01}{\bar{\Delta}}; \quad (\text{П2.33в})$$

$$\text{Re}_2(\bar{\Delta}) = 2090 \cdot \left(\frac{1}{\bar{\Delta}}\right)^{0,0635}; \quad (\text{П2.33г})$$

$$\overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta}) = \begin{cases} 2 \cdot 10^5 - \frac{9,4}{\bar{\Delta}} + \frac{1,17}{\bar{\Delta}^{1,25}} - \frac{0,0017}{\bar{\Delta}^{1,5}}, & \text{если } \bar{\Delta} \in [10^{-8}, 10^{-5}]; \\ \frac{20,8}{\bar{\Delta}} - \frac{3,7}{\bar{\Delta}^{1,25}} + \frac{0,501}{\bar{\Delta}^{1,5}} - \frac{0,0678}{\bar{\Delta}^{1,65}} + \frac{0,0002}{\bar{\Delta}^2}, & \text{если } \bar{\Delta} \in [10^{-5}, 10^{-2}]; \end{cases} \quad (\text{П2.33д})$$

$$\overline{\text{Re}}_4(\bar{\Delta}) = \frac{16100}{\bar{\Delta}}; \quad (\text{П2.33е})$$

и

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}; \quad (\text{П2.34а})$$

$$\lambda = 4,4 \cdot \text{Re}^{-0,595} \cdot \exp\left(-\frac{0,00275}{\bar{\Delta}}\right); \quad (\text{П2.34б})$$

$$\lambda = (\lambda_2 - \lambda^*) \cdot \exp\left\{-\left[0,0017 \cdot (\text{Re}_2 - \text{Re})\right]^2\right\} + \lambda^*,$$

$$\lambda^* = \lambda_1 - 0,0017, \quad \lambda_1 = 0,0775 - \frac{0,0109}{\bar{\Delta}^{0,286}}, \quad \lambda_2 = \frac{0,145}{\bar{\Delta}^{-0,244}}; \quad (\text{П2.34в})$$

$$\lambda = (\lambda_2 - \lambda^*) \cdot \exp\left\{-\left[0,0017 \cdot (\text{Re}_2 - \text{Re})\right]^2\right\} + \lambda^*,$$

$$\lambda^* = \lambda_1 = 0,032, \quad \lambda_2 = 7,244 \cdot (\text{Re}_2)^{-0,643}; \quad (\text{П2.34г})$$

$$\lambda = 0,008547 \cdot \exp\left\{-\left[0,0017 \cdot (3179,58 - \text{Re})\right]^2\right\} + 0,032; \quad (\text{П2.34д})$$

$$\lambda = \lambda_{<\text{Re}_2}(\text{Re}_2(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) \frac{4000 - \text{Re}}{4000 - \text{Re}_2(\bar{\Delta})} + \lambda_{>4000}(4000, \bar{\Delta}) \frac{\text{Re} - \text{Re}_2(\bar{\Delta})}{4000 - \text{Re}_2(\bar{\Delta})}; \quad (\text{П2.34е})$$

$$\lambda = 2,53042 \cdot 10^{-6} \cdot \text{Re} + 0,0325013; \quad (\text{П2.34ж})$$

$$\lambda = \frac{1}{(1,8 \cdot \lg \text{Re} - 1,64)^2}; \quad (\text{П2.34з})$$

$$\lambda = \frac{1}{\left[2 \cdot \lg\left(\frac{2,51}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{\bar{\Delta}}{3,7}\right)\right]^2}; \quad (\text{П2.34и})$$

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \cdot \lg \frac{3,7}{\bar{\Delta}}\right)^2}, \quad (\text{П2.34к})$$

с учетом следующих рекомендаций по применению зависимостей:

1) для $\bar{\Delta} \leq 0,00135$:

- 1.1) $0 \leq \text{Re} \leq 1990,2$: по (П2.34а);
- 1.2) $1990,2 < \text{Re} \leq 3179,582$: по (П2.34д);
- 1.3) $3179,582 < \text{Re} \leq 4000$: по (П2.34ж);
- 1.4) $4000 < \text{Re} \leq \overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta})$: по (П2.34з);
- 1.5) $\overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta}) < \text{Re} \leq \overline{\text{Re}}_4(\bar{\Delta})$: по (П2.34и);
- 1.6) $\overline{\text{Re}}_4(\bar{\Delta}) < \text{Re}$: по (П2.34к);

2) для $0,00135 < \bar{\Delta} \leq 0,002789$:

- 2.1) $0 \leq \text{Re} \leq \overline{\text{Re}}_{0,1}(\bar{\Delta})$: по (П2.34а);
- 2.2) $\overline{\text{Re}}_{0,1}(\bar{\Delta}) < \text{Re} \leq \text{Re}_2(\bar{\Delta})$: по (П2.34г);
- 2.3) $\text{Re}_2(\bar{\Delta}) < \text{Re} \leq 4000$: по (П2.34е),
 где $\lambda_{<\text{Re}_2}(\text{Re}_2(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) = \lambda(\text{Re}_2(\bar{\Delta}), \bar{\Delta})$ по (П2.34г),
 $\lambda_{>4000}(4000, \bar{\Delta}) = \lambda(4000)$ по (П2.34з);
- 2.4) $4000 < \text{Re} \leq \overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta})$: по (П2.34з);
- 2.5) $\overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta}) < \text{Re} \leq \overline{\text{Re}}_4(\bar{\Delta})$: по (П2.34и);
- 2.6) $\overline{\text{Re}}_4(\bar{\Delta}) < \text{Re}$: по (П2.34к);

3) для $0,002789 < \bar{\Delta} \leq 0,007$:

- 3.1) $0 \leq \text{Re} \leq \overline{\text{Re}}_{0,1}(\bar{\Delta})$: по (П2.34а);
- 3.2) $\overline{\text{Re}}_{0,1}(\bar{\Delta}) < \text{Re} \leq \text{Re}_2(\bar{\Delta})$: по (П2.34г);
- 3.3) $\text{Re}_2(\bar{\Delta}) < \text{Re} \leq 4000$: по (П2.34е),
 где $\lambda_{<\text{Re}_2}(\text{Re}_2(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) = \lambda(\text{Re}_2(\bar{\Delta}), \bar{\Delta})$ по (П2.34г),
 $\lambda_{>4000}(4000, \bar{\Delta}) = \lambda(4000, \bar{\Delta})$ по (П2.34и);
- 3.4) $4000 < \text{Re} \leq \overline{\text{Re}}_4(\bar{\Delta})$: по (П2.34и);
- 3.5) $\overline{\text{Re}}_4(\bar{\Delta}) < \text{Re}$: по (П2.34к);

4) для $\bar{\Delta} > 0,007$:

- 4.1) $0 \leq \text{Re} \leq \overline{\text{Re}}_0(\bar{\Delta})$: по (П2.34а);

$$4.2) \overline{\text{Re}}_0(\bar{\Delta}) < \text{Re} \leq \overline{\text{Re}}_1(\bar{\Delta}) : \quad \text{по (П2.34б);}$$

$$4.3) \overline{\text{Re}}_1(\bar{\Delta}) < \text{Re} \leq \text{Re}_2(\bar{\Delta}) : \quad \text{по (П2.34в);}$$

$$4.4) \text{Re}_2(\bar{\Delta}) < \text{Re} \leq 4000 : \quad \text{по (П2.34е),}$$

$$\text{где } \lambda_{<\text{Re}_2}(\text{Re}_2(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) = \lambda(\text{Re}_2(\bar{\Delta}), \bar{\Delta}) \text{ по (П2.34в),}$$

$$\lambda_{>4000}(4000, \bar{\Delta}) = \lambda(4000, \bar{\Delta}) \text{ по (П2.34и);}$$

$$4.5) 4000 < \text{Re} \leq \overline{\text{Re}}_4(\bar{\Delta}) : \quad \text{по (П2.34и);}$$

$$4.6) \overline{\text{Re}}_4(\bar{\Delta}) < \text{Re} : \quad \text{по (П2.34к).}$$

Представленная выше модифицированная составная расчетная зависимость для $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ (П2.33, П2.34) была впервые предложена С.Н. Пряловым. Она справедлива для диапазона $\bar{\Delta} \in [10^{-8}, 5 \cdot 10^{-2}]$ и любого значения числа Re ; разрывность функции $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ при смене формул не превышает 0,1%. Ее графический вид для некоторых значений относительной шероховатости изображен на рис. П2.19а. Для сравнения на рис. П2.19б показаны графики аналогичных зависимостей из диаграммы 2-4 [66].

Рассмотрим теперь один из главных недостатков модифицированной составной расчетной зависимости (П2.33, П2.34) и способы его устранения. Этим недостатком является сложность расчета параметра $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ с помощью формулы Кольбрука – Уайта (П2.34и) (см. ЗКУ (П2.7)). Эта формула является неявной, поэтому параметр λ по ней можно вычислить только численно, что заметно замедляет работу алгоритмов высокоточного анализа параметров течения газов (жидкостей) по трубопроводам.

Область применимости данной формулы сверху ограничивается параметром $\text{Re} = \overline{\text{Re}}_4(\bar{\Delta})$, снизу – максимумом из $\text{Re} = \overline{\text{Re}}_3$ и $\text{Re} = 4000$. В справочнике [66] указывается, что для этой области можно рассчитывать параметр λ по приближенной формуле, предложенной А.Д. Альтшулем (ПФА):

$$\lambda = 0,11 \cdot \left(\bar{\Delta} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}. \quad (\text{П2.35})$$

Графики ЗКУ (П2.7) и ПФА (П2.35), построенные для рассматриваемой области для некоторых значений относительной шероховатости $\bar{\Delta}$, представлены на рис. П2.20.

Введем функцию $\zeta(\text{Re}, \bar{\Delta})$, определяющую относительную погрешность ПФА (П2.35) по сравнению с ЗКУ (П2.7) для области применимости ЗКУ:

$$\zeta(\text{Re}, \bar{\Delta}) = \begin{cases} \frac{\lambda_{\text{ЗКУ}}(\text{Re}, \bar{\Delta}) - \lambda_{\text{ПФА}}(\text{Re}, \bar{\Delta})}{\lambda_{\text{ЗКУ}}(\text{Re}, \bar{\Delta})} \cdot 100\%, & \text{если } \max(\overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta}), 4000) \leq \text{Re} \leq \overline{\text{Re}}_4(\bar{\Delta}); \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (\text{П2.36})$$

где $\lambda_{\text{ПФА}}(\text{Re}, \bar{\Delta})$ – ПФА (П2.35); $\max(\dots)$ – функция определения максимума из множества. Графический вид зависимости $\zeta(\text{Re}, \bar{\Delta})$ представлен на рис. П2.21.

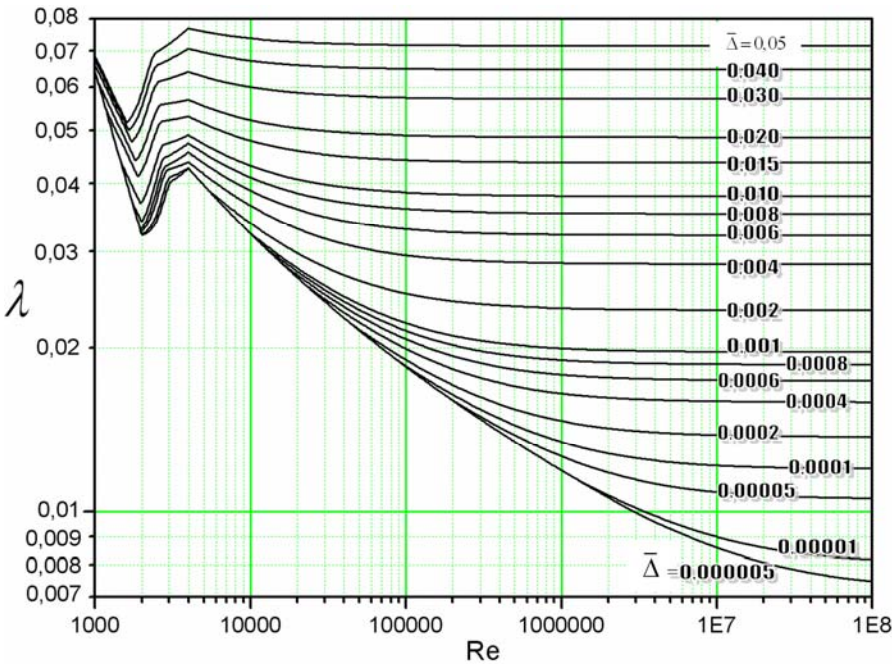


Рис. П2.19а. Графический вид модифицированной составной расчетной зависимости для $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$

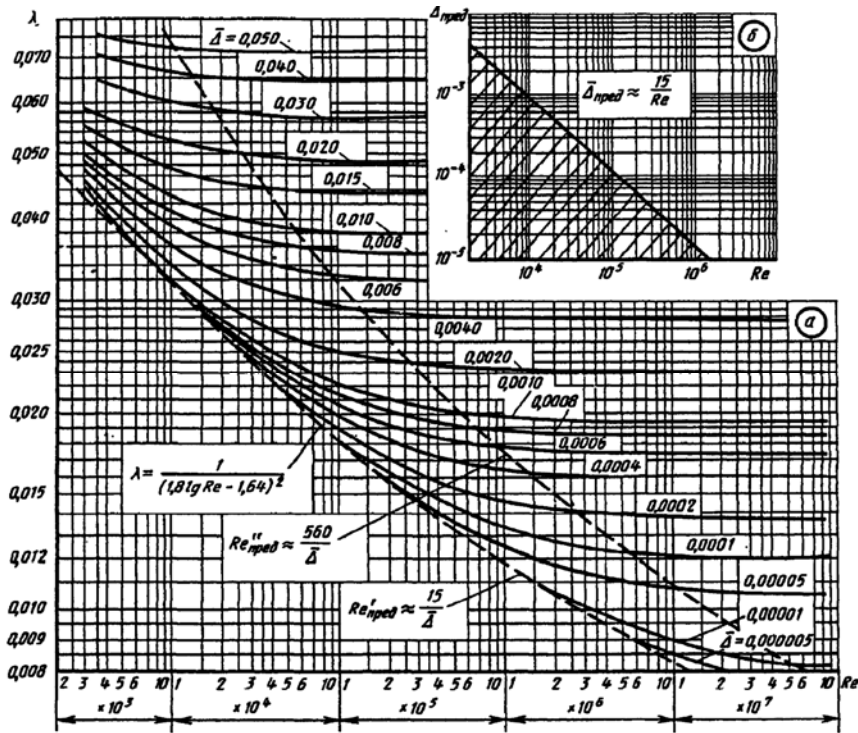


Рис. П2.19б. Графики зависимости $\lambda(Re, \bar{\Delta})$ из диаграммы 2-4 [66]

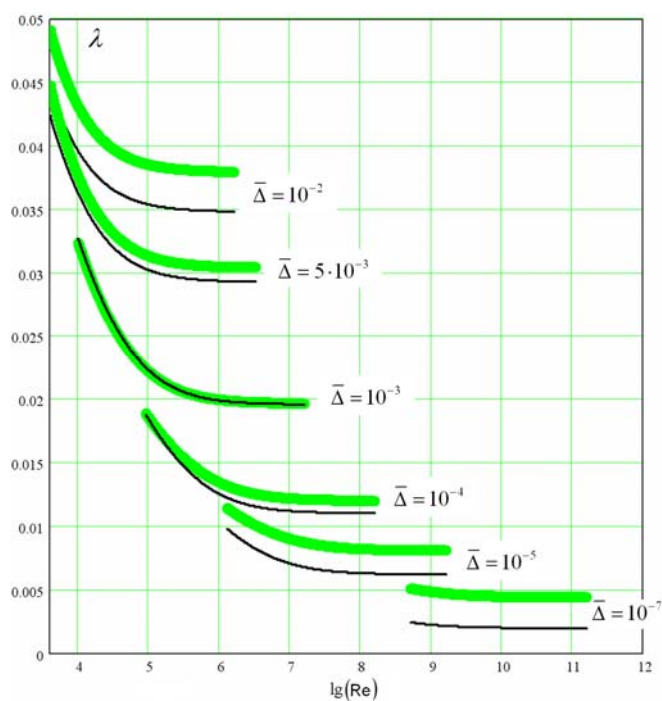


Рис. П2.20. Зависимости $\lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ в области действия ЗКУ (П2.7) (жирные светлые линии соответствуют ЗКУ, тонкие темные – ПФА (П2.35))

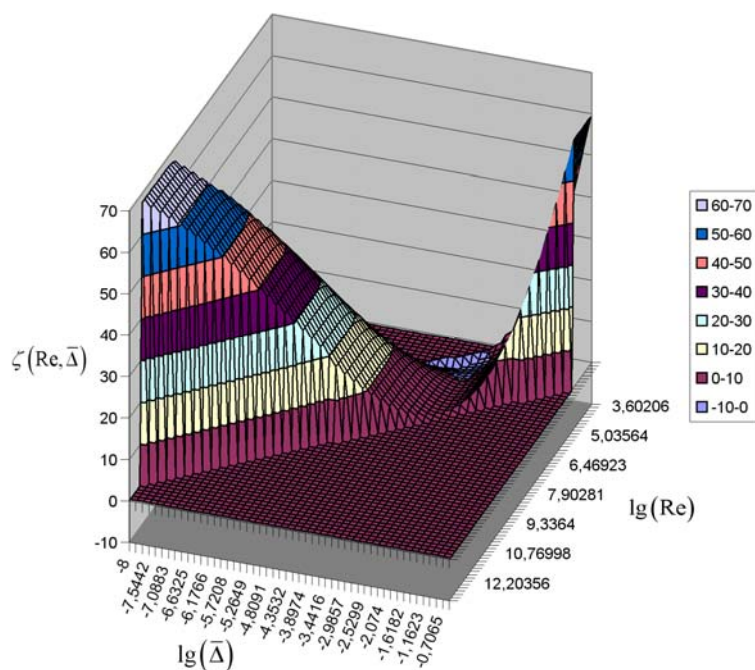


Рис. П2.21. Относительная погрешность ПФА (П2.35) по сравнению с ЗКУ (П2.7), [%]

Как видно из рис. П2.20 и рис. П2.21, наиболее приемлемые результаты применения ПФА (П2.35) получаются при значении относительной шероховатости $\bar{\Delta} \approx 0,001$. Вероятно, данная формула была выведена именно для этого значения параметра $\bar{\Delta}$. При отходе от указанной величины погрешность указанной формулы существенно возрастает. Например, для часто используемого при моделировании магистральных трубопроводов значения $\bar{\Delta} = 10^{-4}$ погрешность формулы для некоторого диапазона чисел Re превышает 8%.

Остановимся на зависимости (П2.35) более подробно. Данная формула является одной из самых распространенных в технических приложениях (см., например, [8, 65, 66, 86, 254, 320–323]). Вывод формулы (П2.35) представлен в [65]. В этой работе показано, что (П2.35) получается из теоретически обоснованной формулы (подобной формуле Кольбрука – Уайта) за счет нескольких шагов последовательного упрощения. Там же отмечено, что, согласно исследованиям Г.А. Адамова, «в интервале относительной шероховатости $\bar{\Delta}$ от $1,6 \cdot 10^{-4}$ до $2,5 \cdot 10^{-2}$ и при любых числах Рейнольдса (т.е. при всех возможных в практике расчета трубопроводов значениях Re и $\bar{\Delta}$) значения коэффициента гидравлического трения, определенного по приближенной формуле (П2.35), отклоняются от найденных по исходной формуле не более чем на 5%». Данная цитата соответствует сделанному выше замечанию о точности ПФА (П2.35). Необходимо также заметить, что приведенный в цитате диапазон относительной шероховатости $\bar{\Delta}$ является достаточно зауженным. В настоящее время в промышленности встречаются трубы со значением $\bar{\Delta}$ до 10^{-5} , и, как видно из рис. П2.21, расширение диапазона по параметру $\bar{\Delta}$ еще больше ухудшает точность ПФА (П2.35).

Отметим, что ПФА (П2.35) была получена в середине прошлого века для удовлетворения требований текущего развития науки и техники. Применение в инженерных приложениях ЗКУ (П2.7) осложнялось ее неявностью, что приводило к необходимости использования малодоступной на тот момент времени вычислительной техники. В свою очередь ПФА (П2.35) «удобна для расчетов, так как вычисления по ней сводятся к элементарным алгебраическим действиям» [65]. Указанная же выше погрешность в то время была вполне приемлемой. После выхода в свет работы [65] ПФА (П2.35) стала приводиться практически во всех публикациях соответствующего профиля как вполне адекватная, но, как правило, без указания области ее применимости и оценки погрешности.

Следует обратить особое внимание на тот факт, что, с точки зрения современного состояния трубопроводных сетей и уровня развития вычислительной техники, численное определение параметров транспортирования газа или жидкости по трубопроводным системам с подобной точностью является излишне приближенным. Формулы, подобные ПФА (П2.35), перестают удовлетворять современным требованиям к точности проводимых расчетов (это подробно обосновано в [1, 6, 26])). Проведенные выше исследования ПФА (П2.35) убедительно показывают ее ограниченность с точки зрения современных требований к точности и адекватности. По данной причине формула (П2.35) не позволяет получить высокоточные оценки параметров течения газов (жидкостей) по магистральным трубопроводам (это также можно отнести к большинству формул, применяемых в настоящее время для расчета параметра λ).

К сожалению, остается проблема, связанная со сложностью расчета функции $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$ в области $\max(\overline{Re}_3(\bar{\Delta}), 4000) \leq Re \leq \overline{Re}_4(\bar{\Delta})$ по неявной ЗКУ (П2.7) (см. также (П2.34и)). Однако в данном случае можно предложить перед моделированием течения газов (жидкостей) по трубопроводам строить табличную зависимость на базе (П2.7) для указанной области. Этот подход позволит существенно сократить временные затраты при моделировании, не снижая точности получаемых результатов.

Перейдем к анализу других формул справочника [66] для расчета гидравлического сопротивления трения при переходном режиме течения.

Согласно данной работе, для зоны смены режимов стабилизированного течения в технических трубах может быть применена единая формула Л.А. Адамовича:

$$\lambda = \lambda_{\text{Л}} \cdot (1 - p) + \lambda_T \cdot p, \quad (\text{П2.37})$$

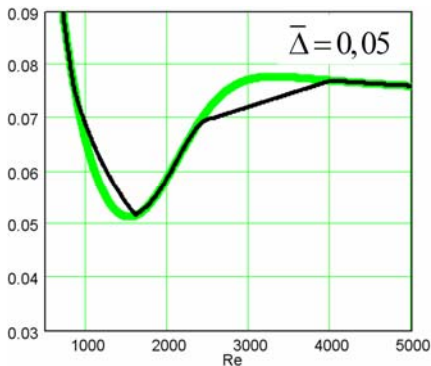
где $\lambda_{\text{Л}}$ принимается по (П2.2), λ_T – по ЗКУ (П2.7), а

$$p = \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\operatorname{Re} - \operatorname{Re}_0}{\sqrt{2} \sigma} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\operatorname{Re}_0}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right], \quad (\text{П2.38})$$

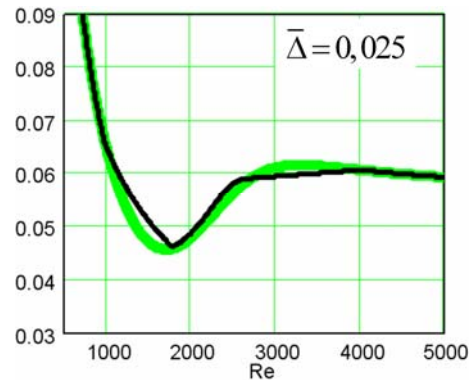
в которой $\operatorname{Re}_0 = 1530 \cdot (\bar{\Delta})^{-0,08}$ и $\sigma = 540$. При этом используют табулированную функцию ошибок вида:

$$\operatorname{erf}(Z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Z \exp(-t^2) dt. \quad (\text{П2.39})$$

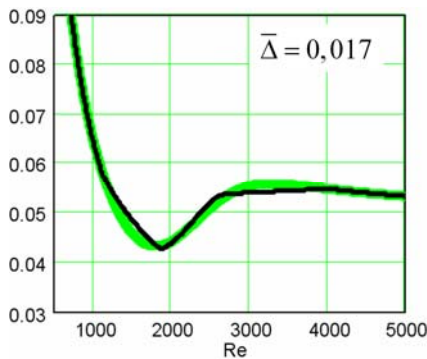
Графический вид зависимости (П2.37) для достаточно широкого диапазона значений относительной шероховатости $\bar{\Delta}$ представлен на рис. П2.22.



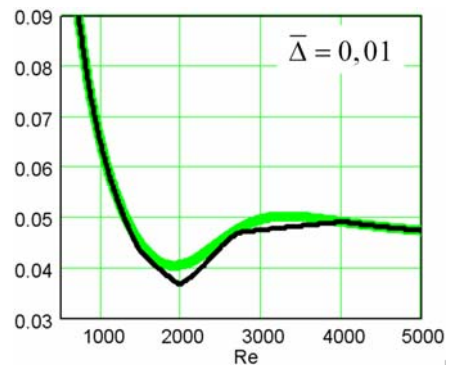
а) $\bar{\Delta} = 0,05$



б) $\bar{\Delta} = 0,025$



в) $\bar{\Delta} = 0,017$



г) $\bar{\Delta} = 0,01$

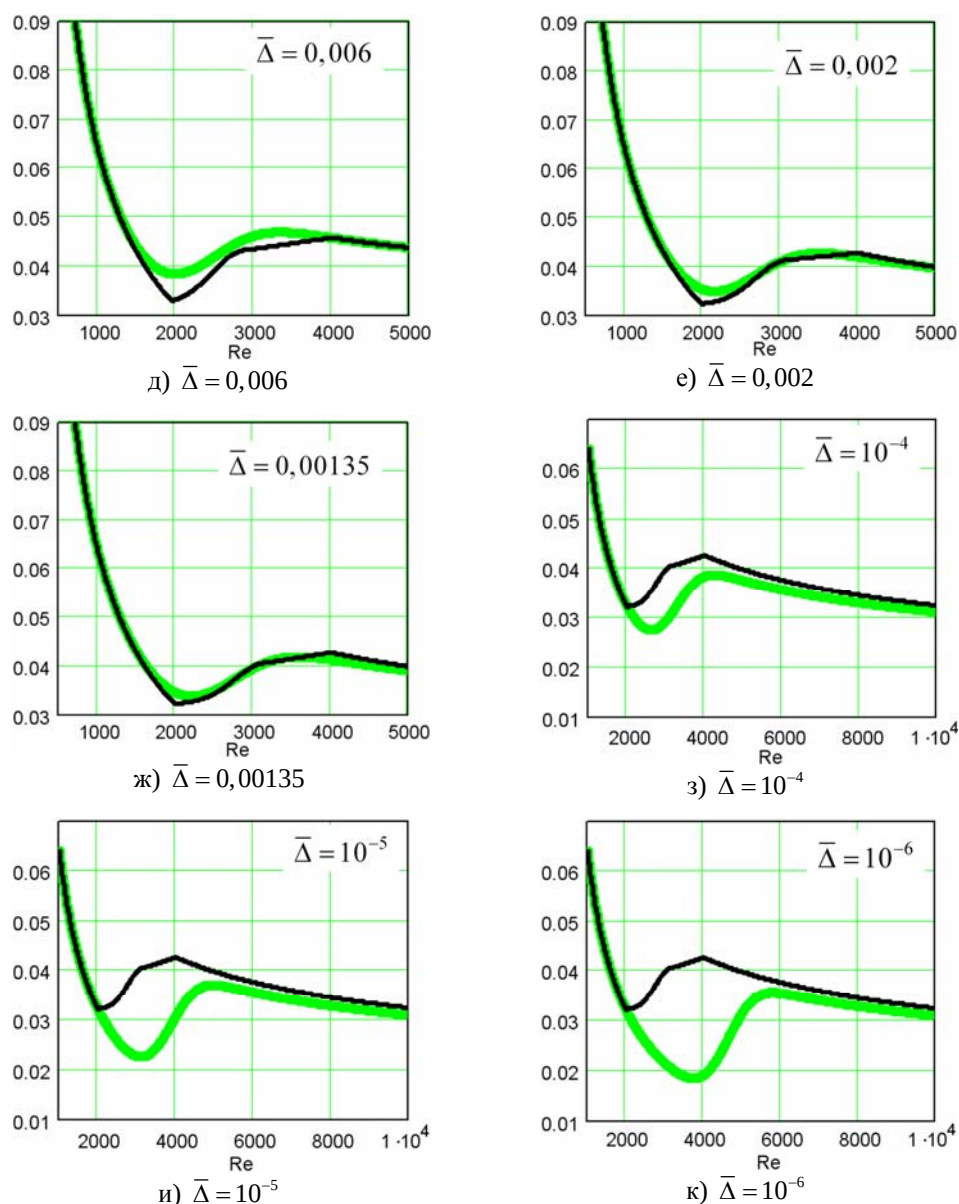


Рис. П2.22. Графический вид модифицированной составной расчетной зависимости С.Н. Прялова для гидравлического сопротивления трения (тонкая темная линия) и единой зависимости Адамовича (П2.37) (жирная светлая линия)

Для сравнения на рис. П2.22 также воспроизведен графический вид модифицированной составной расчетной зависимости С.Н. Прялова для $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ (П2.33, П2.34).

Необходимо отметить, что одним из достоинств зависимости (П2.33, П2.34) является возможность рассчитывать непрерывную функцию гидравлического сопротивления трения не только для зоны смены режимов течения. Для ламинарного и квадратичного режима, а также для подобласти переходного режима течения (начиная с некоторого значения числа Re), зависимость Адамовича совпадает с зависимостью (П2.33, П2.34).

Это объясняется тем, что формула Адамовича, с математической точки зрения, образована взвешенной суммой зависимости Гагена – Пуайзея (П2.2) и ЗКУ (П2.7) с весами, определяемыми функцией ошибки (П2.39).

Отметим также, что качественно поведение кривых, построенных по формуле Адамовича (П2.37), подобно зависимости (П2.33, П2.34). Для малых значений чисел Рейнольдса функция $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ подчиняется закону Гагена – Пуайзея (П2.2). При увеличении параметра Re наблюдается уменьшение величины λ до некоторого значения, после которого существует участок, где функция $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ возрастает. После данного участка параметр λ уменьшается, асимптотически приближаясь к кривой, построенной по ЗКУ (П2.7).

Наиболее точно (по сравнению с зависимостью (П2.33, П2.34)) формула Адамовича описывает функцию гидравлического сопротивления трения для окрестностей значений относительной шероховатости $\bar{\Delta} = 0,017$ и $\bar{\Delta} = 0,00135$ (второе значение соответствует границе, ниже которой трубы можно считать гидравлически гладкими при описании параметра λ для $\text{Re} < 4000$). За пределами данных окрестностей погрешность возрастает, при этом даже качественное поведение кривых $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ иногда не соответствует характерному поведению кривых гидравлического сопротивления трения, рассмотренному ранее. Так, например (см. выше), кривые, соответствующие зависимостям гидравлического сопротивления трения технических труб с относительной шероховатостью $\bar{\Delta} > 0,007$, при некотором значении Re отклоняются от закона Гагена – Пуайзея в сторону увеличения λ , и чем больше относительная шероховатость, тем раньше наступает это отклонение. Анализ рис. П2.22 показывает, что при уменьшении параметра $\bar{\Delta}$ до значения $\bar{\Delta} = 0,017$ отклонение кривых Адамовича от закона Гагена – Пуайзея в сторону увеличения λ запаздывает по сравнению с зависимостью (П2.33, П2.34)¹. После указанного значения отклонение кривых Адамовича от закона Гагена – Пуайзея начинает опережать зависимость (П2.33, П2.34). При значении $\bar{\Delta} = 0,007$ разница значений λ , полученных по (П2.33, П2.34) и формулам Адамовича (П2.37) в точках минимума функций ($\text{Re} \approx 2000$), превышает 20% (зависимость (П2.33, П2.34) дает оценку, равную 0,0323, а формула Адамовича: 0,0389).

Рис. П2.22з–П2.22к показывают, что формула Адамовича (П2.37) не описывает адекватно зависимость гидравлического сопротивления трения в зоне смены режимов течения для гидравлически гладких труб. При уменьшении относительной шероховатости $\bar{\Delta}$, начиная со значения $\bar{\Delta} \approx 0,00135$, кривая $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta} = \text{const})$ не должна меняться в области $\text{Re} < 4000$. Формула Адамовича не учитывает такую особенность зависимости $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$. Например, если сравнивать значения параметра λ в точках минимума кривых, построенных по зависимости (П2.33, П2.34) и формулам Адамовича (П2.37), для широко распространенных в газовой промышленности труб со значением шероховатости $\bar{\Delta} = 10^{-4}$ ($\lambda(\text{Re} \approx 2000, \bar{\Delta}) \approx 0,0322$ и $\lambda(\text{Re} \approx 2600, \bar{\Delta}) \approx 0,0274$ соответственно), то погрешность формулы Адамовича (П2.37) по сравнению с (П2.33, П2.34) будет превышать 14%.

Наконец, одним из главных недостатков формулы Адамовича (П2.37) является использование неявной ЗКУ (П2.7). Неявность последней формулы требует применения

¹ На этом участке модифицированная составная расчетная зависимость (П2.33, П2.34) соответствует формулам Самойленко.

численных методов для нахождения параметра λ , что заметно замедляет компьютерный анализ параметров течения газов или жидкостей по трубопроводным системам. Данная проблема существует также и для составной зависимости (П2.33, П2.34), но, в отличие от формулы Адамовича, рассмотренная проблема проявляется лишь для ограниченного диапазона чисел Рейнольдса: $\max(\overline{\text{Re}}_3(\bar{\Delta}), 4000) \leq \text{Re} \leq \overline{\text{Re}}_4(\bar{\Delta})$.

Следует отметить, что авторы монографии, к сожалению, не имели возможности проведения натурных экспериментов для проверки корректности применения той или иной формулы расчета функции $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$. Отличие значений параметра λ , вычисленных по формуле Адамовича, от значений, полученных по формулам Самойленко, возможно, объясняется погрешностями опытных данных Л.А. Самойленко и/или неточностью их аппроксимации. Поэтому, с этой точки зрения, модифицированная составная расчетная зависимость (П2.33, П2.34) и единая формула Адамовича равноправны. **Однако формула Адамовича обладает двумя главными недостатками с точки зрения ее возможного применения при численном моделировании трубопроводов, а именно:**

- 1) *использование неявной ЗКУ (П2.7) на всем диапазоне значений числа Re;*
- 2) *отсутствие адекватного описания функции $\lambda = \lambda(\text{Re}, \bar{\Delta})$ при переходном режиме течения (в зоне смены режимов течения) для гидравлически гладких труб.*

Если первый недостаток можно преодолеть построением табличной функции до проведения расчетов, то исправить второй недостаток существенно сложнее. **По данной причине модифицированная составная расчетная зависимость (П2.33, П2.34) для оценок значений гидравлического сопротивления трения в трубах ТЭК является предпочтительной по сравнению с единой формулой Л.А. Адамовича (П2.37).**

Перейдем к рассмотрению очередной формулы справочника [66] для расчета коэффициента гидравлического сопротивления трения. Согласно [66], единая формула расчета коэффициента гидравлического сопротивления трения в зоне смены режимов была предложена также П.М. Слиским:

$$\lambda = \lambda_L \cdot (1 - \gamma) + \lambda_T \cdot \gamma, \quad (\text{П2.40})$$

где γ – так называемый коэффициент перемежаемости;

$$\gamma = \sin^{3/2} \left(\pi/2 \frac{\text{Re} - \text{Re}_H}{\text{Re}_B - \text{Re}_H} \right); \quad (\text{П2.41})$$

$$\text{Re}_H = 1000 \cdot \exp \left(\frac{0,00465}{\bar{\Delta}} \right); \quad (\text{П2.42})$$

$$\text{Re}_B = 1600 \cdot (\bar{\Delta})^{-0,16}. \quad (\text{П2.43})$$

Здесь Re_H и Re_B – нижняя и верхняя границы зоны смены режимов течения. Коэффициенты λ_L и λ_T вычисляют соответственно по (П2.2) и по формуле А.В. Теплового [66]:

$$\lambda_T = \left(1,8 \cdot \lg \frac{8,25}{56/\text{Re} + \bar{\Delta}} \right)^{-2}. \quad (\text{П2.44})$$

Следует сразу отметить, что диапазон $[Re_H, Re_B]$ уменьшается с уменьшением значения относительной шероховатости $\bar{\Delta}$. Численно получено предельное значение этой величины: $\bar{\Delta}_{\text{Слиссский}}^{\text{лимит}} = 0,0033671$, для которой $Re_H(\bar{\Delta}_{\text{Слиссский}}^{\text{лимит}}) = Re_B(\bar{\Delta}_{\text{Слиссский}}^{\text{лимит}})$. *Из данного анализа вытекает, что даже по введенным П.М. Слиссским границам применимости формулы (П2.40) (не говоря еще о точности формулы) следует ограничение возможности ее применения неравенством $\bar{\Delta} > 0,0033671$. Это является достаточно сильным ограничением.*

Графический вид зависимости (П2.40) для широкого диапазона значений относительной шероховатости $\bar{\Delta}$ представлен на рис. П2.23. Для сравнения на рис. П2.23 также приведен графический вид модифицированной зависимости (П2.33, П2.34).

Анализ рис. П2.23 показывает следующее: если рассматривать точку перехода между использованием формулы Гагена – Пуазейля (П2.2) и формулы Слиссского (П2.40), то скачок параметра λ на множестве точек $Re_H(\bar{\Delta})$ практически отсутствует.

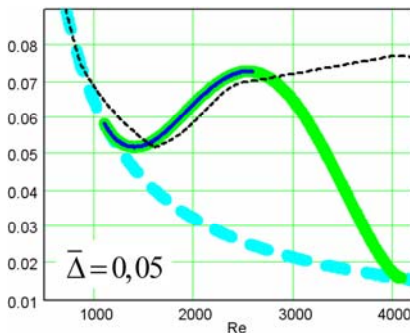
Что касается верхней границы диапазона $[Re_H, Re_B]$, *то остается открытым вопрос о том, какая функция сменяет зависимость Слиссского. Если в качестве такой функции рассматривать зависимость (П2.33, П2.34), то на данной границе будет наблюдаться скачок параметра λ (см. рис. П2.23).*

Графическое сравнение зависимости (П2.33, П2.34) и формулы Слиссского показывает, что для диапазона $0,008 \leq \bar{\Delta} \leq 0,03$ кривая Слиссского (П2.40) близка к кривой, построенной по зависимости (П2.33, П2.34) (см. рис. П2.23). При выходе из данного диапазона наблюдается увеличивающееся отклонение кривых друг от друга.

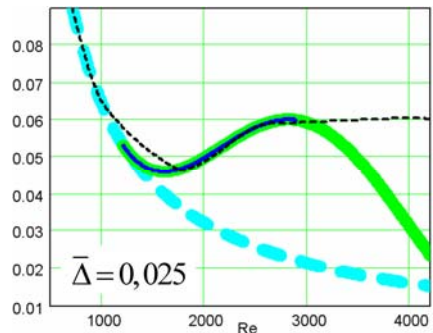
Если для $\bar{\Delta} > 0,03$ кривая Слиссского сохраняет характерное поведение (поэтому в качестве объяснения отклонения может быть предложен недостаток качества аппроксимирующих кривых Самойленко), то для диапазона $\bar{\Delta} < 0,008$ кривые Слиссского начинают «вести» себя физически неверно. В частности, при стремлении $\bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}_{\text{Слиссский}}^{\text{лимит}} = 0,0033671$ кривые Слиссского (для диапазона $[Re_H, Re_B]$) стремятся к вертикальной прямой, что не физично.

В заключение анализа формулы П.М. Слиссского (П2.40) можно сделать вывод, что *главными недостатками данной формулы являются узкий диапазон применимости (для относительной шероховатости $\bar{\Delta}$) и отсутствие соседней зависимости на правой границе диапазона $[Re_H, Re_B]$, обеспечивающей непрерывность $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$.*

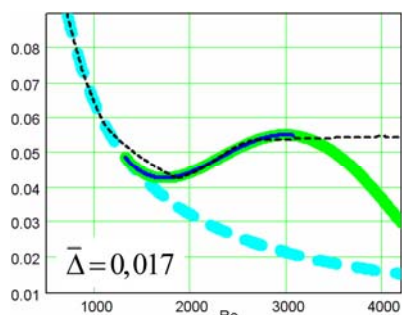
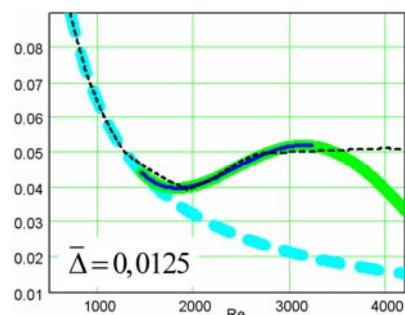
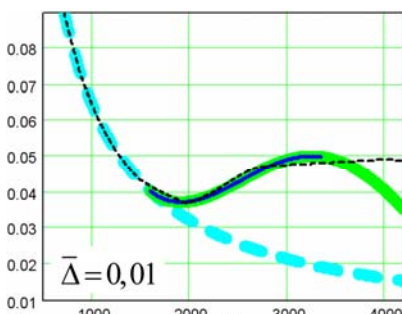
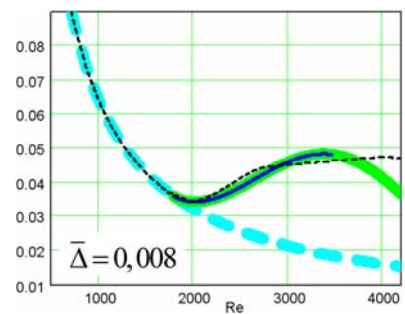
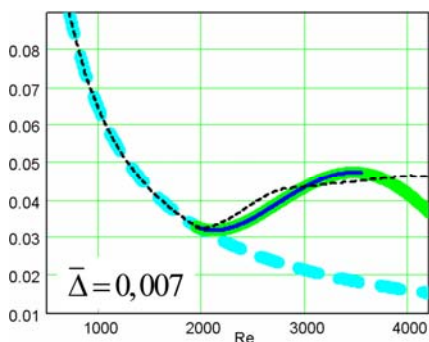
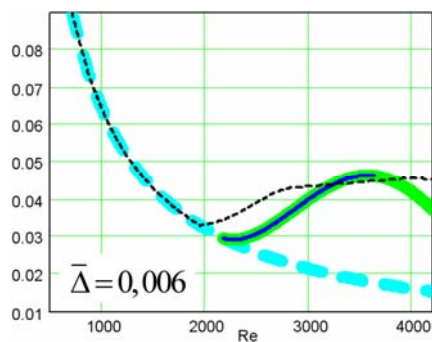
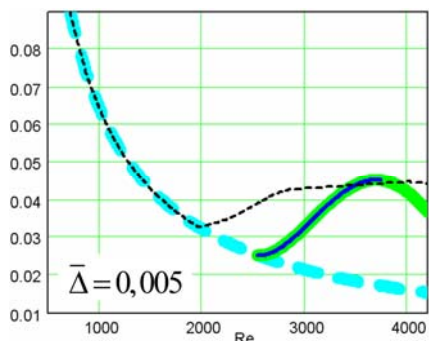
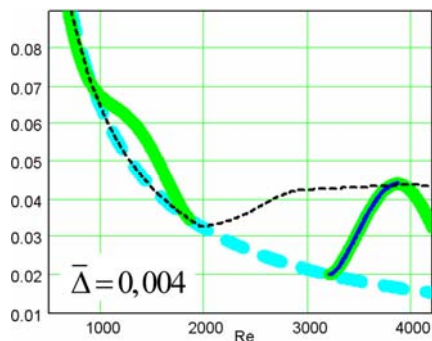
Исходя из этого, по мнению авторов монографии, предпочтительной является модифицированная составная расчетная зависимость (П2.33, П2.34).



а) $\bar{\Delta} = 0,05$



б) $\bar{\Delta} = 0,025$

в) $\bar{\Delta} = 0,017$ г) $\bar{\Delta} = 0,0125$ д) $\bar{\Delta} = 0,01$ е) $\bar{\Delta} = 0,008$ ж) $\bar{\Delta} = 0,007$ з) $\bar{\Delta} = 0,006$ и) $\bar{\Delta} = 0,005$ к) $\bar{\Delta} = 0,004$

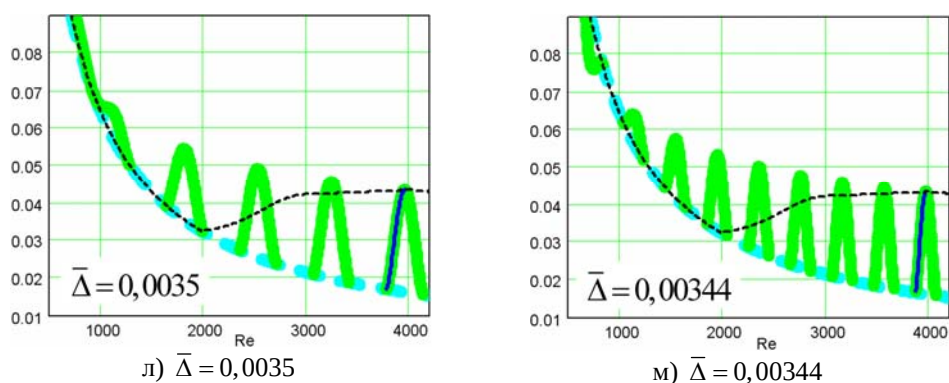


Рис. П2.23. Графический вид модифицированной составной расчетной зависимости (П2.33, П2.34) (тонкая темная штриховая линия), закона Гагена – Пуазейля (П2.2) (толстая светлая штриховая линия), единой зависимости Слисского (П2.40) (жирная светлая сплошная линия) и участка зависимости Слисского (П2.40) на диапазоне $[Re_H, Re_B]$ (тонкая темная сплошная линия)

Приложение 3

Определение параметров инженерных моделей взаимодействия трубопровода с грунтом по результатам численного моделирования

Алешин В.В.

Согласно представленным в Разделе 3.4 методам и алгоритмам, численный анализ сложного нелинейного НДС подземных участков **магистральных** трубопроводных систем проводится поэтапно, с последовательным использованием балочных, оболочечных и объемных моделей труб. На первом этапе для моделирования нелинейного взаимодействия трубопровода с окружающим его грунтом используются полуэмпирические (инженерные) расчетные модели грунтов (см. Раздел 3.3.2.1), построенные на основании результатов экспериментальных исследований.

Проведение таких экспериментов было необходимо для выявления качественных закономерностей сопротивления грунтов смещениям трубопроводов и выбора соответствующих математических моделей для описания поведения грунтов. В то же время следует отметить, что проведение полномасштабных экспериментов с подземными трубами большого диаметра всегда сопряжено со значительными техническими трудностями, а следовательно, количество их достаточно ограничено. Кроме того, определяемые в ходе экспериментов количественные характеристики сопротивления грунта содержат погрешности измерений. Поэтому полученные по результатам экспериментов параметры для инженерных математических моделей являются оценочными средними значениями для конкретных типов грунтов, с которыми были проведены эксперименты. Эти обстоятельства отмечают также и сами авторы экспериментов, принимавшие активное участие в разработке базовых инженерных моделей взаимодействия подземного трубопровода с грунтом как в Российской Федерации [138, 143], так и за рубежом [142].

Приведенные в [137, 138, 140–144] значения средних количественных характеристик взаимодействия трубопроводов с грунтами приемлемы при проектировании стандартных участков новых трубопроводных систем, так как нормативные коэффициенты запаса прочности конструкций позволяют исключить влияние возможных неточностей. В то же время при расчете на прочность особо ответственных участков проектируемых, а также при анализе состояния всех критических участков эксплуатирующихся трубопроводных систем, необходимы как можно более точные значения параметров инженерных моделей для конкретного типа грунта в районе прокладки подземного участка.

Рассмотрим эффективный¹ способ уточнения значений параметров инженерных моделей взаимодействия трубопровода с грунтом по результатам численного анализа трехмерных модельных задач о смещении трубы в грунте.

Характеристиками физико-механических свойств (материальными параметрами), определяющими упруго-пластические свойства грунта и влияющими на величину сил сопротивления смещению подземного трубопровода, являются: E – модуль деформации, ν – коэффициент Пуассона, ρ – объемная плотность, φ – угол внутреннего трения, c – удельное сцепление. Эти параметры могут быть определены только в результате экспериментов с образцами грунтов. Наличия точных значений данных

¹ Под эффективностью рассматриваемого здесь способа подразумевается его широкая доступность и отсутствие необходимости в дополнительных затратах.

параметров по конкретному участку трубопровода достаточно для описания сложного нелинейного НДС грунта и моделирования взаимодействия грунта с трубопроводом.

Основными параметрами инженерных математических моделей взаимодействия трубопровода с грунтом являются обобщенные коэффициенты касательного и нормального сопротивлений c_{x0} , c_{y0} , предельное сопротивление сдвигу τ_{np} , предельное нормальное сопротивление q_{np} (см. Раздел 3.3.2.1). Данные параметры зависят от характеристик физико-механических свойств грунта и в традиционной практике расчетов на прочность подземных трубопроводов также определяются из экспериментов¹ [137, 138, 143].

В частности, в работе [138], на основании результатов экспериментов получены и рекомендованы для практического использования полуэмпирические зависимости всех параметров инженерных моделей от материальных параметров грунтов, за исключением одного из самых важных – c_{x0} . Для данного параметра в [138] приведены табличные значения, зависящие уже не от характеристик физико-механических свойств грунтов, а от показателей их состава и строения (тип, консистенция и коэффициент пористости). Причем в представленной таблице даны только средние значения для достаточно широких диапазонов изменения определяющих показателей. Для получения результатов численного моделирования требуемой точности нужно знать конкретное значение c_{x0} для каждого типа грунта в районе прокладки трубопровода.

Вторым недостатком использования данных, приведенных в [138], для практического анализа НДС подземных участков трубопроводов является следующее. Чтобы построить соответствующие расчетные модели, необходимо знать не только материальные параметры грунта, но и показатели его состава и строения. Это обстоятельство существенно увеличивает объем работ при проведении инженерных изысканий в целях сбора и обработки исходных данных, необходимых для численного анализа подземных участков **магистральных** трубопроводных систем.

Так как осевые смещения подземного трубопровода в грунте существенно влияют на его сложное НДС, то практический способ более точного определения значения параметра c_{x0} для конкретного грунта в районе прокладки был бы, безусловно, полезным. При известных значениях материальных параметров грунта таким способом является численный анализ сложного нелинейного НДС грунта, возникающего вследствие осевого смещения участка трубопровода.

Процедура определения значения c_{x0} сводится к выполнению серии вычислительных экспериментов по анализу трехмерного нелинейного НДС грунта, окружающего отрезок прямого горизонтального трубопровода, при постепенном (с выбранным шагом) увеличении осевых смещений данного участка. Численное моделирование выполняется МКЭ с использованием оболочечных КЭ-моделей трубопроводов и объемных КЭ-моделей окружающего грунта по технологии, описанной в Разделе 3.4.2.2.

При осевом смещении трубопровода максимальные касательные напряжения возникают в слое грунта, примыкающего к поверхности труб. Распределение этих напряжений по периметру поперечного сечения трубы неравномерно и зависит от величины сил давления грунта на трубопровод. Сила давления, в свою очередь, зависит от глубины заложения, веса трубопровода с транспортируемым продуктом и материальных параметров грунта. Все эти факторы необходимо учитывать при моделировании. Кроме того, необходимо учитывать также, что окружающий трубопровод грунт вследствие действия силы тяжести находится в начальном НДС, характеристики которого возрастают в зависимости от глубины.

¹ Аналогичный подход к решению данной задачи применяется и в других странах (см. [140–142], а также Раздел 3.3.2.1).

После получения расчетной картины распределения касательных напряжений на поверхности трубопровода проводится их усреднение по цилиндрической поверхности трубы с площадью S :

$$\tau_x = \frac{1}{S} \cdot \int_S \tau_{rz} ds, \quad (\text{ПЗ.1})$$

где τ_{rz} – компонента тензора напряжения в связанной с трубой цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Сила сопротивления грунта осевым смещениям трубопровода t (см. рис. 3.1) вычисляется через полученное среднее касательное напряжение τ_x как

$$t = \pi \cdot D \cdot \tau_x, \quad (\text{ПЗ.2})$$

где D – наружный диаметр отрезка трубы. Цилиндрическую поверхность S , по которой производится интегрирование в (ПЗ.1), следует выбирать в середине рассматриваемого отрезка трубы на достаточном (для исключения влияния граничных условий) удалении от концов трубы. Далее строится график зависимости τ_x (или t) от осевого смещения трубы u_x , начальный участок (до проявлений заметной нелинейности) которого аппроксимируется прямой линией. Тангенс угла наклона этой прямой к горизонтальной оси ($\text{tg} \beta$ на рис. 3.1) и есть искомое значение c_{x0} .

Продолжая пошагово увеличивать смещение трубы, получаем выход графика $\tau_x(u_x)$ (или $t(u_x)$) на горизонтальную асимптоту, ордината которой является верхней оценкой предельного сопротивления грунта сдвигу τ_{np} (или t_{np} (см. рис. 3.1)).

В качестве наглядного примера рассмотрим результаты численного моделирования для грунта с известным значением c_{x0} . Вычислительные эксперименты проводились с подземным горизонтальным участком ЛЧМГ, имеющим следующие параметры: наружный диаметр $D = 1220 \text{ мм}$; толщина стенки $\delta = 15 \text{ мм}$; высота засыпки $h = 1,2 \text{ м}$. Характеристики физико-механических свойств материала трубы: модуль упругости $E = 206 \text{ ГПа}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; плотность $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$. Избыточное давление природного газа в трубопроводе $p = 7,5 \text{ МПа}$.

Для анализа осевых смещений трубопровода, ввиду симметрии конструкции и действующих нагрузок, достаточно выполнить расчет НДС половины рассматриваемого участка трубопровода с окружающим его грунтом. Расчетная модель приведена на рис. ПЗ.1. Влияние отброшенной части конструкции учитывается заданием соответствующих граничных условий в плоскости симметрии КЭ-модели.

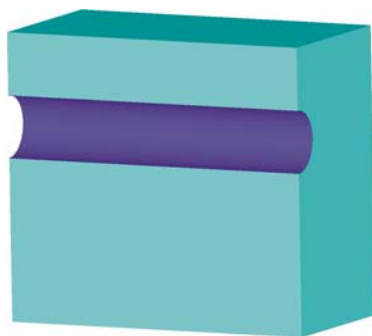


Рис. ПЗ.1. Модель трубопровода с грунтом

Материальные параметры моделируемого грунта брались из расчетного примера, приведенного в работе [138]: тип грунта – суглинок, $\rho = 1430 \text{ кг/м}^3$; $\varphi = 11^\circ$; $c = 10 \text{ кПа}$. Показатель консистенции и коэффициент пористости для рассматриваемого грунта в [138] не приводятся, а сразу дается значение обобщенного коэффициента касательного сопротивления $c_{x0} = 2,6 \text{ МПа/м}$. Значения модуля деформации и коэффициента Пуассона подбирались по справочной литературе [137, 138, 143] наиболее соответствующими для грунта с заданными выше свойствами: $E = 6 \text{ МПа}$, $\nu = 0,37$.

Нелинейное поведение грунта при нагрузке моделировалось с использованием модели упруго-пластического материала, имеющего поверхность текучести Друккера – Прагера с оптимальными параметрами (см. Раздел 3.3.2.2).

В качестве нагрузок, действующих на трубопровод, задавались ускорение свободного падения (для учета веса трубопровода с газом и веса грунта) и осевые смещения трубы в грунте, начиная с 1 мм .

На рис. ПЗ.2 приведено распределение интенсивности напряжений в окружающем трубопровод грунте (для средней части модели, изображенной на рис. ПЗ.1) при осевом смещении трубопровода в грунте на 1 мм . Картина распределения осевых смещений (в направлении оси Oz в связанной с трубой цилиндрической системе координат) грунта представлена на рис. ПЗ.3. Как видно из этих рисунков, при равномерном смещении подземного трубопровода в направлении его оси картина распределения напряжений в грунте неоднородна. Это обусловлено тем, что вследствие действия силы тяжести начальные напряжения в грунте возрастают с ростом глубины, а на свободной поверхности грунта происходит разгрузка напряжений (см. рис. ПЗ.2).

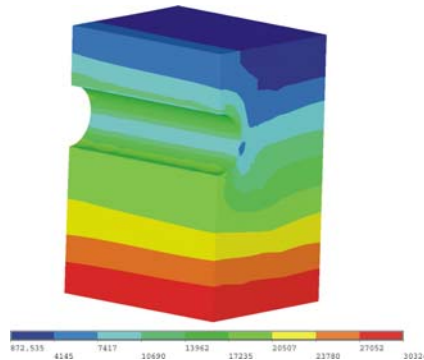


Рис. ПЗ.2. Распределение интенсивности напряжений $[\text{Па}]$ в окружающем трубопровод грунте при его осевом смещении

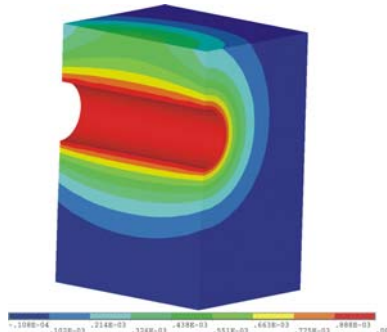


Рис. ПЗ.3. Осевые смещения $[\text{м}]$ грунта, окружающего трубопровод

Вследствие действия силы тяжести распределение давления грунта по периметру трубы также неравномерно. На рис. ПЗ.4 представлено расчетное распределение давления для тонкого кольцевого слоя, окружающего средний участок рассматриваемого трубопровода. Диаграмма распределения давления по периметру поперечного сечения трубы изображена на рис. ПЗ.5.

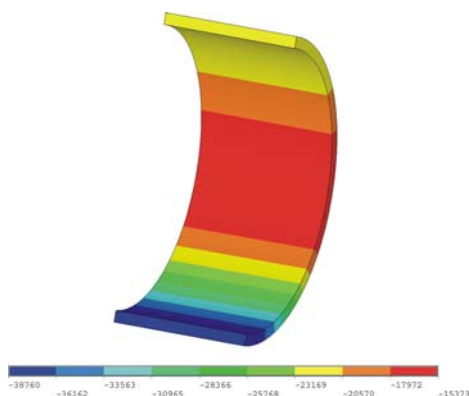


Рис. ПЗ.4. Поле давлений $[Pa]$ в ближайшем к трубопроводу слое грунта

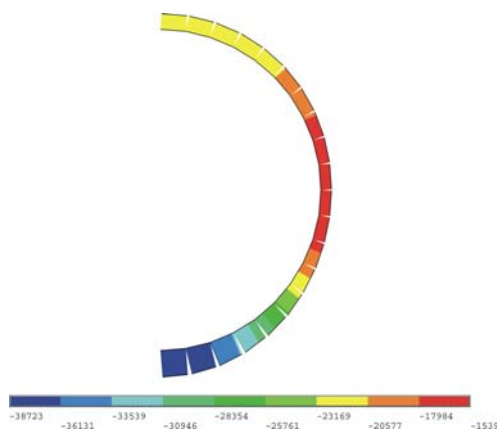


Рис. ПЗ.5. Диаграмма распределения давления $[Pa]$ по периметру поперечного сечения трубы

Полученная в результате численного моделирования качественная картина распределения давления по периметру трубы (см. рис. ПЗ.4, ПЗ.5) полностью подтверждается данными экспериментальных измерений на реальных трубопроводах [143].

В свою очередь, касательные напряжения τ_{rz} , возникающие на поверхности трубы вследствие ее смещения в грунте, зависят от давления (см. Раздел 3.3.2.2) и, следовательно, также неравномерно распределены как во всем грунтовом массиве, так и по периметру трубы (см. рис. ПЗ.6). Сопротивление грунта осевым смещениям трубопровода определяется касательными напряжениями, возникающими на поверхности трубы. Поэтому расчетное значение силы такого сопротивления можно получить в результате интегрирования касательных напряжений по цилиндрической поверхности грунта, охватывающего участок трубопровода. Среднее касательное напряжение, которое необходимо для определения значения c_{x0} , рассчитывается по выражению (ПЗ.1).

На рис. ПЗ.7 представлено распределение интенсивности напряжений в ближайшем к поверхности трубы слое грунта. Как видно из рис. ПЗ.4, ПЗ.6, ПЗ.7, изменения общей картины НДС на рассматриваемом участке прилегающего к трубе слоя грунта в направлении оси Oz практически отсутствуют. Следовательно, выбранные размеры модели (см. рис. ПЗ.1) достаточны для исключения влияния граничных условий на НДС центральной области.

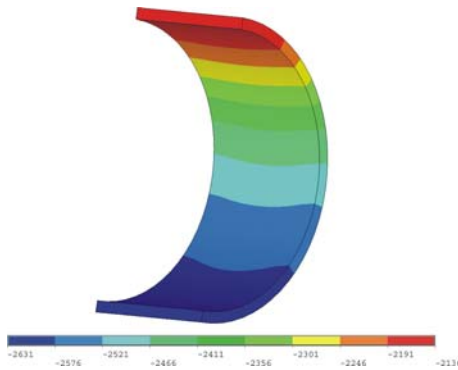


Рис. ПЗ.6. Распределение касательных напряжений τ_{rz} [Па] в ближайшем к трубе слое грунта

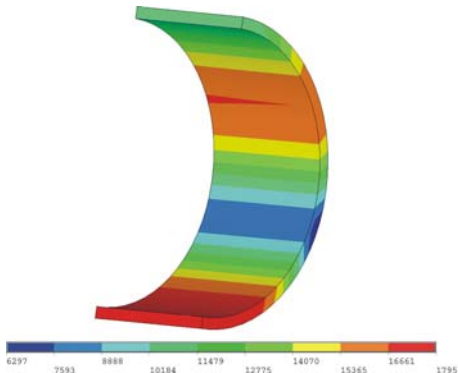


Рис. ПЗ.7. Распределение интенсивности напряжений [Па] в ближайшем к трубе слое грунта

Таким образом, построенная КЭ-модель удовлетворяла всем сформулированным выше требованиям и была использована в серии вычислительных экспериментов для расчетного определения c_{x0} .

На рис. ПЗ.8 приведен построенный по результатам вычислительных экспериментов график зависимости среднего касательного напряжения от величины осевого смещения трубопровода в грунте. Представленная на рис. ПЗ.8 расчетная зависимость хорошо отражает поведение реальных грунтов при осевых смещениях трубопровода [137, 138, 143]. При небольших деформациях грунта эта зависимость практически строго линейна. С появлением и развитием зон пластического течения в грунте вокруг трубы эта линейность нарушается (в данном случае при $u_x \approx 5 \text{ мм}$). При охвате пластическими зонами всего периметра трубы дальнейшее увеличение смещения ($u_x > 10 \text{ мм}$) не приводит к росту касательных напряжений – устанавливается состояние предельного равновесия.

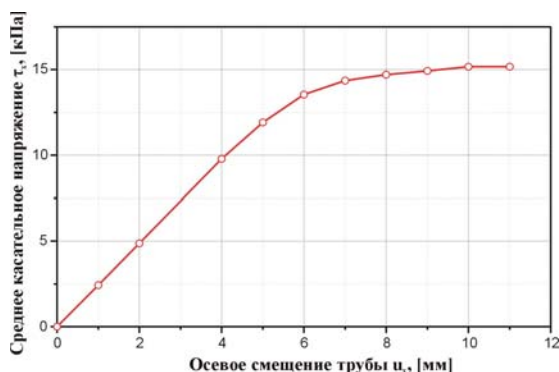


Рис. ПЗ.8. Расчетная зависимость сопротивления грунта от осевых смещений трубопровода

На рис. ПЗ.9 приведена конфигурация зоны пластической деформации на участке прилегающего к трубе грунта в состоянии, близком к предельному равновесию.

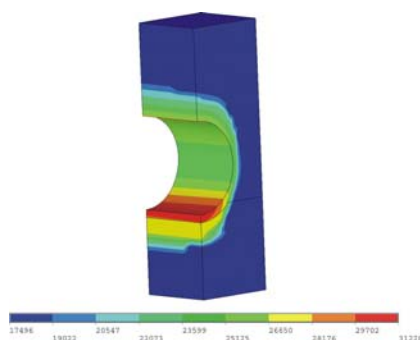


Рис. ПЗ.9. Распределение эквивалентных пластических напряжений [Па] при осевом смещении трубы $u_x = 9 \text{ мм}$

Расчетное значение c_{x0} можно найти теперь как тангенс угла наклона начального прямолинейного участка кривой, представленной на рис. ПЗ.8. Заметим, что, в отличие от процесса обработки экспериментальных результатов, численный анализ проводится уже с идеализированной упруго-идеальнопластической моделью грунта. Поэтому начальный участок диаграммы (см. рис. ПЗ.8) не нуждается в дополнительной аппроксимации прямой линией и дает однозначный результат. Производя необходимые вычисления, получаем $c_{x0} = 2,44 \text{ МПа/м}$. Найденная в результате вычислительных экспериментов величина c_{x0} немного отличается от значения, приведенного в [138] для данного грунта. Это объясняется тем, что для выполнения численного моделирования требуется знать точные значения модуля деформации и коэффициента Пуассона рассматриваемого грунта, которые, ввиду отсутствия таких данных в [138], были определены приблизительно, по справочной литературе.

Таким образом, использование численного моделирования позволяет находить достаточно точные значения параметра c_{x0} для анализа общего НДС подземного участка трубопровода на первом этапе применения балочных моделей, не используя приближенные значения данного параметра из [138]. Конечно, применять этот подход можно

только при наличии достоверных данных по характеристикам физико-механическим свойств грунта.

Рассмотрим второй, важный для моделирования на первом этапе, параметр – предельное сопротивление грунта сдвигу. По результатам проведенного численного моделирования его расчетное значение составляет¹ $\tau_{np} = 15,171 \text{ кПа}$. Выполняя для рассмотренного выше грунта вычисления по инженерным формулам, имеем $\tau_{np} = 12,794 \text{ кПа}$, значение которого на 16% ниже полученного в результате численных экспериментов. Таким образом, результаты численного анализа сложного НДС грунта позволяют оценить сверху также другой важный параметр, необходимый для моделирования подземного трубопровода на первом этапе, – предельное сопротивление сдвигу.

Применяя описанный выше способ, по результатам соответствующих вычислительных экспериментов можно также определять расчетное значение обобщенного коэффициента нормального сопротивления грунта смещениям (вертикальным и горизонтальным) трубопровода c_{y0} и оценить предельное нормальное сопротивление q_{np} . В этих случаях достаточно рассмотреть задачу о смещении бесконечного горизонтального трубопровода в грунтовом массиве перпендикулярно образующей трубы (вверх, вниз и в горизонтальной плоскости) в условиях плоского деформированного состояния грунта. На рис. ПЗ.10 приведен один из примеров такого моделирования.

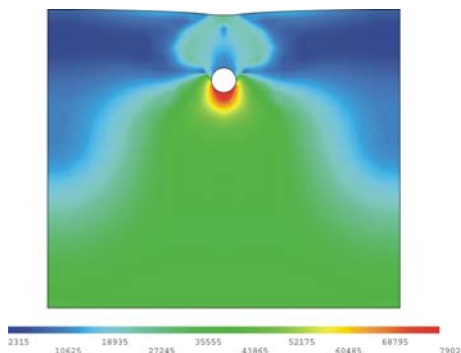


Рис. ПЗ.10. Распределение интенсивности напряжений [Па] в массиве грунта при вертикальном смещении трубопровода вниз

Результаты практического применения представленного выше способа определения параметров инженерных моделей взаимодействия трубопровода с грунтом при анализе прочности подземных участков **магистральных** трубопроводных систем приведены в работах [1, 3–6]. В том числе, в работе [6] представлена технология оценки параметров инженерных моделей взаимодействия трубопровода с грунтом в случаях неполной засыпки траншеи грунтом после экскавации подземных участков МТ (см. Раздел 3.4.5).

¹ С погрешностью вычислений $<<1\%$.

Приложение 4

Критерий пластичности грунтов с оптимальной поверхностью текучести

Алешин В.В.

Рассмотрим предложенную в [150] для моделирования упруго-пластического НДС грунтов поверхность текучести Друккера – Прагера, задаваемую в пространстве главных напряжений уравнением (см. (3.36)):

$$\alpha \cdot I_1 + \sqrt{J_2} = k. \quad (\text{П4.1})$$

Классифицируем вид поверхности (П4.1) и определим ее расположение относительно главных осей тензора напряжения.

Производя последовательную свертку тензорного произведения в выражении второго инварианта девиатора тензора напряжений для главных напряжений, запишем (П4.1) в виде:

$$\alpha \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = k. \quad (\text{П4.2})$$

Возводя левую и правую части (П4.2) в квадрат и группируя члены, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} \cdot \sigma_1^2 + \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} \cdot \sigma_2^2 + \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} \cdot \sigma_3^2 + \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{3} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \\ & + \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{3} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{3} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 - 2 \cdot k \cdot \alpha \cdot \sigma_1 - 2 \cdot k \cdot \alpha \cdot \sigma_2 - 2 \cdot k \cdot \alpha \cdot \sigma_3 + k^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{П4.3})$$

Уравнение (П4.3) является однородным многочленом второй степени (квадратичной формой) относительно переменных $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, следовательно, поверхность текучести Друккера – Прагера представляет собой поверхность второго порядка в трехмерном евклидовом пространстве главных осей тензора напряжений.

Согласно [89], классификация поверхностей второго порядка производится на основании анализа инвариантов квадратичной формы (П4.3), матрица коэффициентов которой имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} & \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} & \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} & -k \cdot \alpha \\ \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} & \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} & \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} & -k \cdot \alpha \\ \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} & \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} & \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} & -k \cdot \alpha \\ -k \cdot \alpha & -k \cdot \alpha & -k \cdot \alpha & k^2 \end{bmatrix}.$$

Дискриминант $|A| = 0$, следовательно, поверхность, описываемая уравнением (П4.3), является вырожденной. Третий инвариант квадратичной формы равен:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} & \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} & \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \\ \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} & \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} & \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \\ \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} & \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} & \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \cdot \alpha^2.$$

Так как $D \neq 0$, то исследуемая поверхность является центральной. Первый и второй инварианты квадратичной формы (П4.3) соответственно равны:

$$I = \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} + \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} + \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} = 3 \cdot \alpha^2 - 1; \quad J = 3 \cdot \begin{vmatrix} \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} & \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \\ \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} & \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} \end{vmatrix} = -3 \cdot \alpha^2 + \frac{1}{4}.$$

Тогда произведение третьего и первого инвариантов имеет вид:

$$D \cdot I = \frac{9}{4} \cdot \left(\alpha^4 - \frac{1}{3} \cdot \alpha^2 \right).$$

Так как $J \geq 0$ только при $\alpha \in [-1/\sqrt{12}; 1/\sqrt{12}]$, а $D \cdot I \leq 0$ при $\alpha \in [-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}]$, то для любого значения параметра α значения J и $(D \cdot I)$ не оба больше нуля. Это означает, что уравнение (П4.3) описывает поверхность действительного конуса [89]. Изменение нумерации главных осей не приводит к изменению определяющего уравнения, следовательно, данный конус является круговым.

Далее определим расположение конической поверхности текучести Друккера – Прагера относительно главных осей. Координаты центра конуса (вершины) находятся из решения следующей системы уравнений [89]:

$$\begin{cases} \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} \cdot \sigma_1^0 + \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \cdot \sigma_2^0 + \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \cdot \sigma_3^0 - k \cdot \alpha = 0; \\ \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \cdot \sigma_1^0 + \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} \cdot \sigma_2^0 + \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \cdot \sigma_3^0 - k \cdot \alpha = 0; \\ \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \cdot \sigma_1^0 + \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \cdot \sigma_2^0 + \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} \cdot \sigma_3^0 - k \cdot \alpha = 0, \end{cases} \quad (\text{П4.4})$$

откуда

$$\sigma_1^0 = -\frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} -k \cdot \alpha & \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} & \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \\ -k \cdot \alpha & \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} & \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \\ -k \cdot \alpha & \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} & \frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} \end{vmatrix} = \frac{k}{3 \cdot \alpha}.$$

Аналогично находятся и значения двух других координат центра конуса $\sigma_2^0 = \sigma_3^0 = k/(3 \cdot \alpha)$.

Для определения направлений главных осей конуса рассмотрим характеристическое уравнение квадратичной формы (П4.3):

$$\lambda^3 - I \cdot \lambda^2 + J \cdot \lambda - D = 0. \quad (\text{П4.5})$$

Подставляя полученные ранее выражения, имеем:

$$\lambda^3 - (3 \cdot \alpha^2 - 1) \cdot \lambda^2 + \left(-3 \cdot \alpha^2 + \frac{1}{4} \right) \cdot \lambda - \frac{3}{4} \cdot \alpha^2 = 0. \quad (\text{П4.6})$$

Уравнение (П4.6) имеет корень $\lambda_{1,2} = 1/2$ кратности 2 и корень $\lambda_3 = 3 \cdot \alpha^2$. Так как круговой конус является поверхностью вращения, то его ориентация в трехмерном пространстве полностью определяется направлением одной главной оси (оси симметрии конуса). Направление этой оси совпадает с направлением собственного вектора, соответствующего единственному некрайнему собственному значению характеристической матрицы квадратичной формы (П4.3).

Направляющие косинусы (l_1, l_2, l_3) главных осей поверхности, задаваемой уравнением (П4.3), определяются следующей системой уравнений [89]:

$$\begin{cases} \left(\frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} - \lambda \right) \cdot l_1 + \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \cdot l_2 + \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \cdot l_3 = 0; \\ \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \cdot l_1 + \left(\frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} - \lambda \right) \cdot l_2 + \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \cdot l_3 = 0; \\ \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \cdot l_1 + \frac{6 \cdot \alpha^2 + 1}{6} \cdot l_2 + \left(\frac{3 \cdot \alpha^2 - 1}{3} - \lambda \right) \cdot l_3 = 0. \end{cases} \quad (\text{П4.7})$$

Подставляя в (П4.7) собственное значение $\lambda_3 = 3 \cdot \alpha^2$, получаем:

$$\begin{cases} -l_1 + \frac{l_2}{2} + \frac{l_3}{2} = 0; \\ \frac{l_1}{2} - l_2 + \frac{l_3}{2} = 0; \\ \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} - l_3 = 0. \end{cases} \quad (\text{П4.8})$$

Составим из коэффициентов системы уравнений (П4.8) матрицу:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Так как дискриминант матрицы B (размерности 3×3) $|B| = 0$, а ранг этой матрицы $\text{rank}[B] = 2$, то система линейных однородных уравнений (П4.8) имеет единственное нетривиальное решение. Последовательно вычитая из первого уравнения системы (П4.8) второе, из второго третье и из первого третье, можно убедиться, что решение данной

системы удовлетворяет условию ($l_1 = l_2 = l_3$). Добавляя соотношение для направляющих косинусов

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1,$$

получаем $l_1 = l_2 = l_3 = 1/\sqrt{3}$. Следовательно, ось симметрии конической поверхности текучести Друккера – Прагера равнонаклонена к главным осям тензора напряжений и совпадает с прямой, задаваемой в пространстве главных напряжений уравнением $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Такая прямая называется гидростатической осью.

Далее определим угол раскрытия исследуемого конуса. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник, образующийся в результате взаимного пересечения поверхности (П4.1) и трех плоскостей: девиаторной плоскости¹, проходящей через начало координат пространства главных напряжений, и двух взаимоперпендикулярных плоскостей, проходящих через гидростатическую ось². Данный треугольник изображен на рис. П4.1.

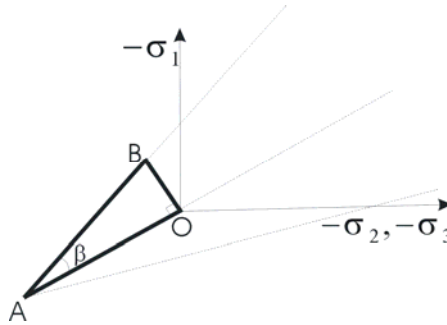


Рис. П4.1. Сечение конической поверхности Друккера – Прагера

Угол β равен половине угла раскрытия исследуемой конической поверхности. Длина отрезка $[OA]$ равна длине радиус-вектора вершины конуса с координатами $\left\{ \frac{k}{3 \cdot \alpha}; \frac{k}{3 \cdot \alpha}; \frac{k}{3 \cdot \alpha} \right\}$, и, следовательно,

$$|OA| = \frac{k}{\sqrt{3} \cdot \alpha}. \quad (\text{П4.9})$$

Отрезок $[OB]$ является радиусом окружности, образующейся в результате сечения конической поверхности девиаторной плоскостью, проходящей через начало координат. Уравнение этой плоскости $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. Добавляя к данному уравнению уравнение конической поверхности (П4.2), получим систему, определяющую искомую окружность:

$$\begin{cases} \alpha \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = k; \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \end{cases} \quad (\text{П4.10})$$

¹ Девиаторной называется плоскость, перпендикулярная гидростатической оси.

² Плоскости, проходящие через гидростатическую ось, называются меридиональными, а их пересечения с поверхностями второго порядка – меридиональными сечениями.

Замечая, что в соответствии со вторым уравнением, выражение в первых скобках первого уравнения системы (П4.10) равно нулю при любых значениях α и k , возводя оба уравнения в квадрат, раскрывая скобки и группируя члены, получим:

$$\begin{cases} 2 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \sigma_3^2 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - 2 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 = 6 \cdot k^2; \\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = -2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - 2 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 - 2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3. \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 2 \cdot k^2. \quad (\text{П4.11})$$

Выражение в левой части (П4.11) является ничем иным, как определением квадрата длины радиус-вектора точек с координатами $\{\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3\}$, лежащих на искомой окружности, то есть квадратом длины радиуса этой окружности. Следовательно, длина отрезка $|OB| = \sqrt{2} \cdot k$. Тогда тангенс угла β (см. рис. П4.1 и выражение (П4.9)) равен:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|OB|}{|OA|} = \sqrt{6} \cdot \alpha. \quad (\text{П4.12})$$

Таким образом, показано, что поверхность текучести Друккера – Прагера (П4.1) является поверхностью прямого кругового конуса, ось симметрии которого равнонаклонена к главным осям тензора напряжений, его вершина находится в положительном октанте и имеет координаты $\left\{ \frac{k}{3 \cdot \alpha}; \frac{k}{3 \cdot \alpha}; \frac{k}{3 \cdot \alpha} \right\}$, а тангенс половины угла раскрытия равен $\sqrt{6} \cdot \alpha$.

Очевидно, что поверхность текучести Мора – Кулона (см. (3.33)) может быть аппроксимирована конической поверхностью Друккера – Прагера, если вершины этих двух поверхностей находятся в одной точке пространства главных напряжений. В общем случае вариантов таких аппроксимаций может быть бесконечное множество, в зависимости от выбора параметра α , определяющего угол раскрытия конуса Друккера – Прагера. Из элементарных геометрических соображений ясно, что все эти варианты лежат между двумя предельными случаями: коническая поверхность вписана в пирамиду; коническая поверхность описана вокруг пирамиды.

Установим связь между определяющими параметрами поверхности Друккера – Прагера (k, α) и характеристиками физико-механических свойств грунтов (c, φ) , определяющими пирамиду Мора – Кулона, в указанных выше предельных случаях.

В первом случае рассмотрим сечение пирамиды Мора – Кулона октаэдрической плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. В сечении образуется шестиугольник (см. рис. 3.2) со стороной

$$a = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot c \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}{9 - \sin^2 \varphi}$$

и радиусом вписанной окружности

$$r = \frac{\sqrt{6} \cdot c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}, \quad (\text{П4.13})$$

которая и является окружностью, получающейся в результате сечения вписанного в пирамиду конуса Друккера – Прагера.

Рассматривая далее прямоугольный треугольник, образующийся при взаимном пересечении конической поверхности с тремя плоскостями, аналогичными выбранным ранее (см. рис. П4.1), определим:

$$|OB| = r; \quad |OA| = \sqrt{3} \cdot c \cdot \operatorname{ctg} \varphi. \quad (\text{П4.14})$$

Учитывая (П4.13), для тангенса половины угла раскрытия конуса имеем:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}. \quad (\text{П4.15})$$

И тогда, из (П4.12) и (П4.15) определяем:

$$\alpha = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}. \quad (\text{П4.16})$$

Определяющее соотношение для k теперь может быть получено из двух выражений для $|OA|$ (П4.9) и (П4.14):

$$k = \frac{\sqrt{3} \cdot c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}. \quad (\text{П4.17})$$

Рассмотрим второй случай, когда аппроксимирующая коническая поверхность Друккера – Прагера описывается вокруг пирамиды Мора – Кулона. Заметим, что пересечение пирамиды Мора – Кулона с любой девиаторной плоскостью дает в сечении равносильный, но не являющийся правильным, шестиугольник (см. рис. 3.2). Поэтому, в отличие от вписанного кругового конуса, имеющего параметры, определяемые соотношениями (П4.16), (П4.17), и касающегося всех шести граней пирамиды Мора – Кулона, описать круговой конус, касающийся всех шести ребер данной пирамиды, нельзя.

В этом случае, аппроксимирующий конус Друккера – Прагера можно построить таким образом, чтобы он касался только трех ребер пирамиды, максимально отстоящих от гидростатической оси, а вся пирамида находилась внутри конуса. Определим связь параметров конической поверхности текучести Друккера – Прагера с физико-механическими характеристиками грунта для данного варианта аппроксимации. Максимально отстоящими от гидростатической оси ребрами пирамиды Мора – Кулона являются три ребра, пересекающие соответственно отрицательные направления трех координатных осей пространства главных напряжений и отсекающие на них отрезки, длина которых равна $|\sigma_c|$ – абсолютному значению предела прочности упруго-идеальнопластичного грунта на одноосное сжатие.

Рассмотрим прямоугольный треугольник, изображенный на рис. П4.2. Он образуется в результате взаимного пересечения пирамиды Мора – Кулона и трех плоскостей: девиаторной плоскости $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_c$, проходящей через три точки с координатами $\{\sigma_c; 0; 0\}$, $\{0; \sigma_c; 0\}$, $\{0; 0; \sigma_c\}$; двух взаимоперпендикулярных меридиональных плоскостей, одна из которых проходит также через точку пересечения пирамиды с отрицательным направлением какой-либо из координатных осей (для определенности выбрана ось σ_1). Таким образом, последняя плоскость проходит через соответствующее ребро пирамиды Мора – Кулона и совпадающую с ним образующую описываемого ко-

нуса Друккера – Прагера.

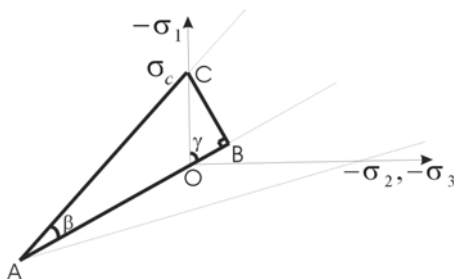


Рис. П4.2. Сечение пирамиды Мора – Кулона

Из первого уравнения (3.33), учитывая то, что сжимающие напряжения отрицательны, определяем абсолютное значение предельного сжимающего напряжения:

$$|\sigma_c| = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (\text{П4.18})$$

Тогда, зная, что $\cos \gamma = 1/\sqrt{3}$, из соотношений элементарной геометрии получаем (см. рис. П4.2):

$$|AB| = |OA| + |OB| = \sqrt{3} \cdot c \cdot \operatorname{ctg} \varphi + |\sigma_c| \cdot \cos \gamma = \sqrt{3} \cdot c \cdot \operatorname{ctg} \varphi + \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3} \cdot (1 - \sin \varphi)};$$

$$|BC| = |\sigma_c| \cdot \sin \gamma = |\sigma_c| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3} \cdot (1 - \sin \varphi)},$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \varphi}{3 \cdot \operatorname{ctg} \varphi - \cos \varphi}. \quad (\text{П4.19})$$

Умножая числитель и знаменатель в (П4.19) на $\operatorname{tg} \varphi$ и используя полученные ранее выражения, находим:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \sin \varphi}{\sqrt{3} \cdot (3 - \sin \varphi)}; \quad (\text{П4.20})$$

$$k = \frac{6 \cdot c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3} \cdot (3 - \sin \varphi)}. \quad (\text{П4.21})$$

Полученные выражения являются соотношениями связи между определяющими параметрами поверхности текучести Друккера – Прагера (k, α) и характеристиками физико-механических свойств грунтов (c, φ) в случаях аппроксимации пирамиды Мора – Кулона вписанным (соотношения (П4.16), (П4.17)) или описанным (соотношения (П4.20), (П4.21)) конусом Друккера – Прагера. Естественно, они могут быть непосредственно использованы для реализации соответствующих упруго-пластических моделей грунта при решении (в том числе и численными методами) практических задач.

Здесь необходимо добавить следующие замечания. В работе [150] условие текучести (П4.1) определяется как одна из форм обобщения уравнения Кулона (3.32) на трехмер-

ный случай в виде критерия пластичности Мизеса – Шлейхера [136]. Далее, для иллюстрации корректности этого утверждения, авторы [150] показывают, что условие (П4.1) сводится к уравнению (3.32)¹ в случае плоского деформированного состояния² при выборе соответствующих зависимостей между (k, α) и (c, φ) . В [150] эти зависимости даны в неявном виде, но после некоторых преобразований из них можно получить точно такие же выражения, как (П4.16) и (П4.17), которые выведены выше для вписанного в пирамиду Мора – Кулона конуса Друккера – Прагера. Затем, в [150] рассматривается только плоское деформированное состояние грунта, и вопрос о том, подходят ли данные соотношения для более общего случая трехмерного НДС, остается открытым.

Представленные выше выкладки демонстрируют, что, во-первых, получить связующие соотношения определяющих параметров поверхности текучести Друккера – Прагера с характеристиками физико-механических свойств сплошной среды, для которой выбрана данная модель пластичности, можно для общего случая трехмерного НДС. Во-вторых, соотношения в форме (П4.16), (П4.17) определяют связь параметров поверхности Друккера – Прагера с характеристиками физико-механических свойств грунта в общем случае трехмерного НДС только для одного из вариантов аппроксимации, а именно – для вписанного в пирамиду Мора – Кулона конуса Друккера – Прагера. При выборе другого варианта аппроксимации связующие соотношения будут иметь иной вид, как это и показано выше для случая описанного вокруг пирамиды конуса (выражения (П4.20), (П4.21)).

Как уже отмечалось выше, существует бесконечное множество вариантов аппроксимации поверхности текучести Мора – Кулона конической поверхностью Друккера – Прагера. Например, в работе [146] предложен один из таких вариантов, построенный исходя из предположения равенства углов раскрытия пирамиды и аппроксимирующего конуса. В результате, критерий текучести, предложенный в [146], выглядит следующим образом³:

$$\tau_{oct} = (c \cdot ctg\varphi + \sigma_{oct}) \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right), \quad (\text{П4.22})$$

где $\tau_{oct} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ – касательное напряжение на октаэдрической площадке⁴; $\sigma_{oct} = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ – нормальное напряжение на октаэдрической площадке; α – угол между положительным (в данном случае) направлением главной оси и соответствующим ребром пирамиды, пересекающим эту ось в точке σ_c ; β – угол между плоскостью, проходящую через две главные оси, и ребром пирамиды, пересекающим эту плоскость в точке, не лежащей на главной оси. Углы α и β , входящие в выражение (П4.22), определяются по формулам [146]:

$$tg\alpha = \frac{\sqrt{2} \cdot c \cdot ctg\varphi}{\sigma_c + c \cdot ctg\varphi}; \quad tg\beta = \frac{c \cdot ctg\varphi}{\sqrt{2} \cdot (\sigma_c + c \cdot ctg\varphi)}. \quad (\text{П4.23})$$

¹ Чтобы это показать, надо входящие в (3.32) касательную и нормальную составляющие напряжения на элементарной площадке выразить через компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат.

² При плоском деформированном состоянии $\varepsilon_{ij} \neq 0$ только для $i, j = \{1, 2\} \vee \{2, 3\} \vee \{1, 3\}$.

³ Сжимающие напряжения здесь считаются положительными.

⁴ Октаэдрической называется площадка, равнонаклоненная к трем главным осям тензора напряжений, и, следовательно, принадлежащая девиаторной плоскости.

Для определения положительного значения σ_c , входящего в выражения (П4.23), можно использовать полученную ранее формулу (П4.18), имеющую более простой вид, чем формула, предложенная в работе [146]. Анализ выражений (П4.22), (П4.23) показывает, что угол раскрытия пирамиды в данном случае означает угол между ее двумя противолежащими ребрами.

Следует заметить, что, исходя из тех или иных предположений, можно предложить и формализовать в математической форме достаточно много вариантов подобных аппроксимаций. Например, строить коническую поверхность таким образом, чтобы площадь шестиугольника, полученного в результате сечения пирамиды Мора – Кулона произвольной девиаторной плоскостью, равнялась площади круга, образующегося в результате сечения конуса Друккера – Прагера той же плоскостью. Всем этим вариантам свойственен один существенный недостаток. Они никаким образом не опираются на механические закономерности поведения реальных грунтов при сложном НДС, а являются, по сути, лишь способами приближения идеализированной математической формы.

Очевидно, что единственным объективным доказательством приемлемости того или иного варианта аппроксимации поверхности текучести Мора – Кулона, как и всех других гипотетических критериев прочности и пластичности твердых деформируемых тел, для практического применения является лучшая его согласованность с результатами соответствующих всесторонних экспериментов. Но, так как экспериментальная верификация критериев – это тема отдельной длительной и объемной работы, то в данной ситуации можно предложить следующий, наиболее оправданный, подход к выбору и математической формализации соответствующего критерия текучести грунтов. Следует сразу отметить, что предлагаемый ниже критерий предназначен, прежде всего, для анализа НДС подземных трубопроводов, но возможности его практического применения, естественно, не ограничиваются только этим приложением.

Итак, при выборе подходящего условия текучести необходимо исходить из объективного факта, что для произвольного трехмерного НДС, возникающего в грунте при действии умеренных статических нагрузок, лучшее совпадение с данными экспериментов показывает критерий Мора – Кулона. Под лучшим совпадением здесь подразумевается минимальность интегральной ошибки для всех возможных (равновероятных) НДС и всего диапазона характеристик физико-механических свойств грунтов. Общей теоретической предпосылкой для этого служит то, что критерий Мора – Кулона построен как прямое обобщение на трехмерный случай условия (3.32), рассматриваемого сегодня как физический закон Кулона для грунтов [148].

Частными подтверждениями этого факта могут служить опубликованные результаты различных экспериментов. Например, достаточно объемный экспериментальный материал по данному вопросу представлен в сборнике [147]. Рассмотрим только одну из работ, опубликованных в [147]. В этой работе (см. [324]) приводится сравнение результатов широких экспериментальных исследований характеристик предельных состояний при различных видах сложного НДС образцов плотного песчаного грунта с расчетными значениями, полученными по различным критериям. Как свидетельствует иллюстративный материал, представленный в [324] (рис. П4.3), и заключает сам автор этой работы, наилучшее соответствие расчетных оценок и экспериментальных данных в общем случае наблюдается при использовании критерия Мора – Кулона. Все другие рассмотренные в этой работе критерии¹ дают удовлетворительные результаты лишь в очень узких пределах изменения параметров, определяющих вид предельного НДС грунта (см. рис. П4.3). В [324] и других работах сборника [147] также показано, что условие Мора – Кулона правильно предсказывает разрушение в глинистых грунтах.

¹ Среди этих критериев был и вариант аппроксимации пирамиды Мора – Кулона описанной конической поверхностью Друккера – Прагера, который в [324] назван «обобщенным условием Мизеса».

С другой стороны, в МДТТ теория течения с кусочно-линейной поверхностью нагружения рассматривается как аппроксимация более реальной в механическом смысле теории с гладкой поверхностью нагружения, позволяющей значительно лучше описать поведение реального материала [123]. Показательным историческим примером может служить классический критерий Губера – Мизеса, предложенный в качестве приближенной формулировки классического критерия Треска, но показавший впоследствии лучшее совпадение с экспериментами для поликристаллических тел. Таким образом, на самом деле для поликристаллических материалов кусочно-линейная поверхность текучести Треска (шестигранная призма) является аппроксимацией гладкой поверхности текучести Губера – Мизеса (цилиндр). В настоящее время имеется также и физическое объяснение этого феномена [325].

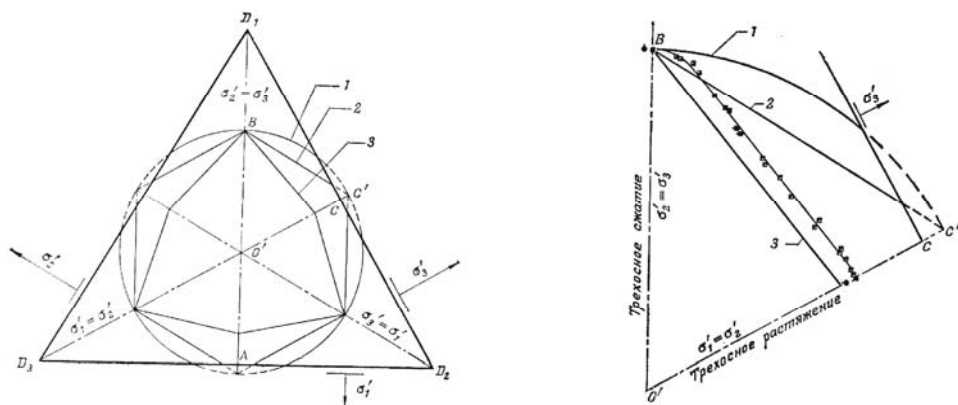


Рис. П4.3. Экспериментальная верификация критериев пластичности грунтов в условиях сложного НДС (рисунок заимствован из работы [324]).

(Диаграммы девиаторных сечений поверхностей текучести для: 1 – обобщенного условия Мизеса; 2 – обобщенного условия Треска; 3 – условия Мора – Кулона)

Учитывая близость основных принципов построения кусочно-линейных поверхностей Треска и Мора – Кулона, а также проводя (в первом приближении) аналогию между строением поликристаллических тел и грунтов¹, на основании приведенных выше замечаний можно сформулировать следующее предположение. Поверхность текучести Мора – Кулона является кусочно-линейной аппроксимацией истинной гладкой поверхности текучести реального сыпучего материала (в частности, грунта), точная форма которой неизвестна. Причем аппроксимацией достаточно близкой, о чем свидетельствуют многочисленные экспериментальные данные.

Отсюда следует следующий критерий выбора оптимальных определяющих параметров конической поверхности текучести Друккера – Прагера для получения максимально близких к реальным результатов в общем случае равной вероятности любого из сложных НДС грунта (критерий В.В. Алешина [1]):

величина расхождения объемов, ограниченных в пространстве главных напряжений поверхностями текучести Друккера – Прагера и Мора – Кулона, должна быть минимальной.

Учитывая расположение в пространстве главных напряжений этих двух поверхно-

¹ И поликристаллические тела, и грунты можно рассматривать как статически неопределимые системы, образованные множеством разноориентированных анизотропных элементов.

стей, можно показать, что задача определения оптимальных параметров, удовлетворяющих сформулированному выше критерию, сводится к нахождению значения угла раскрытия конуса, минимизирующего площадь области расхождения шестиугольника и круга, полученных сечением октаэдрической плоскостью поверхностей текучести Мора – Кулона и Друккера – Прагера.

На рис. П4.4 приведено изображение девиаторного сечения пирамиды Мора – Кулона. Там же показаны три окружности, образующиеся в результате пересечения девиаторной плоскости с тремя коническими поверхностями Друккера – Прагера. Пунктирной линией обозначена окружность, соответствующая оптимальному конусу, угол раскрытия которого необходимо найти в результате решения указанной выше задачи минимизации. Остальные две окружности соответствуют вписанному в пирамиду Мора – Кулона и описанному вокруг нее конусам Друккера – Прагера, углы раскрытия которых в данном случае являются ограничениями области допустимых значений минимизационной задачи. Из условий симметрии очевидно, что при решении данной задачи достаточно минимизировать площадь области расхождения только на одной шестой части рассматриваемых плоских фигур, а именно, в секторе между двумя линиями проекции на девиаторную плоскость смежных ребер пирамиды.

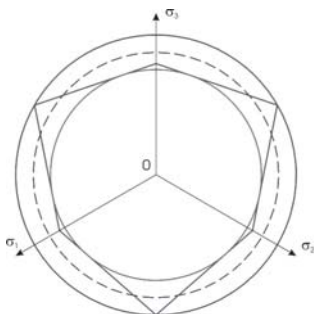


Рис. П4.4. Девиаторные сечения пирамиды Мора-Кулона и конусов Друккера – Прагера

Анализ возможного расположения искомой окружности относительно шестиугольника в девиаторной плоскости показывает, что, в зависимости от радиуса этой окружности, существуют два варианта топологической конфигурации области расхождения рассматриваемых плоских фигур. Эти варианты для одной шестой части фигур, изображенных на рис. П4.4, представлены на рис. П4.5, где площади областей расхождения показаны заливкой.

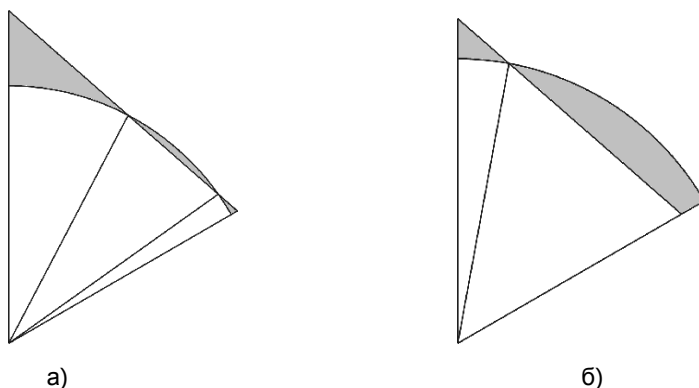


Рис. П4.5. Топология областей расхождения шестиугольника и круга

Обозначая величины площадей расхождения, изображенных на рис. П4.5а и рис. П4.5б, соответственно S_1 и S_2 , а радиус искомой окружности (соответствующей конусу с оптимальными параметрами) ρ_{opt} , можно записать формулировку рассматриваемой минимизационной задачи в виде:

$$\rho_{opt} = \min \left\{ S_1(\rho) \rightarrow \min \left| \rho \in [r, b], S_2(\rho) \rightarrow \min \left| \rho \in [b, R] \right. \right\}, \quad (\text{П4.24})$$

где r , R – радиусы вписанной в шестиугольник и описанной вокруг него окружностей соответственно; b – половина меньшей центральной диагонали шестиугольника.

Полученное в результате решения задачи (П4.24) значение ρ_{opt} позволяет, используя выведенные ранее соотношения, определить значение параметра α оптимальной конической поверхности текучести Друккера – Прагера, удовлетворяющей сформулированному выше критерию.

Очевидно, что наиболее удобной для практического применения формой решения (П4.24) является нахождение явных аналитических выражений определяющих параметров оптимальной конической поверхности через характеристики физико-механических свойств грунта. В данном случае такие выражения можно получить.

Введем дополнительно еще один параметр a , обозначающий длину стороны шестиугольника в девиаторной плоскости. На рис. П4.6 представлена геометрия одной шестой части рассматриваемых плоских фигур и обозначены отрезки, соответствующие введенным параметрам (для параметра ρ приведены сразу оба варианта рис. П4.5).

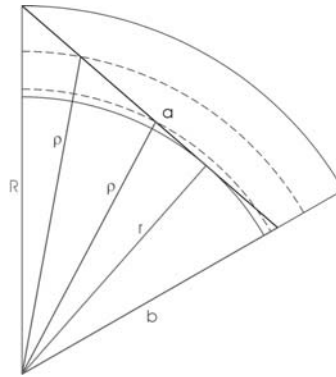


Рис. П4.6. Геометрические параметры шестиугольника и окружностей в девиаторной плоскости

Тогда площади областей расхождения шестиугольника и круга (см. рис. П4.5) можно выразить через параметры, указанные на рис. П4.6, как

$$S_1(\rho) = \rho^2 \cdot \left(2 \cdot \arccos\left(\frac{r}{\rho}\right) - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{a \cdot r}{2} - 2 \cdot r \cdot \sqrt{\rho^2 - r^2}, \quad \rho \in [r, b]; \quad (\text{П4.25a})$$

$$S_2(\rho) = \rho^2 \cdot \left(\arccos\left(\frac{r}{\rho}\right) + \arccos\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{a \cdot r}{2} - r \cdot \sqrt{\rho^2 - r^2} - r \cdot \sqrt{b^2 - r^2}, \quad \rho \in [b, R]. \quad (\text{П4.25б})$$

Отметим, что в граничной точке значения выражений (П4.25а) и (П4.25б) совпадают, то есть $S_1(b) = S_2(b)$. Первые производные функций $S_1(\rho)$, $S_2(\rho)$ соответственно равны:

$$\frac{dS_1(\rho)}{d\rho} = 2 \cdot \rho \cdot \left(2 \cdot \arccos\left(\frac{r}{\rho}\right) - \frac{\pi}{6} \right); \quad (\text{П4.26a})$$

$$\frac{dS_2(\rho)}{d\rho} = 2 \cdot \rho \cdot \left(\arccos\left(\frac{r}{\rho}\right) + \arccos\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{\pi}{6} \right). \quad (\text{П4.26б})$$

Приравнявая выражения (П4.26) к нулю, находим, что на заданных областях определения функции $S_1(\rho)$, $S_2(\rho)$ имеют стационарные значения соответственно в точках:

$$\rho_1 = 2 \cdot r \cdot \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}; \quad (\text{П4.27a})$$

$$\rho_2 = 2 \cdot b \cdot \frac{r}{\sqrt{3} \cdot r + \sqrt{b^2 - r^2}}. \quad (\text{П4.27б})$$

Вторые производные функций $S_1(\rho)$, $S_2(\rho)$ соответственно равны:

$$\frac{d^2 S_1(\rho)}{d\rho^2} = 4 \cdot \arccos\left(\frac{r}{\rho}\right) - \frac{\pi}{3} + \frac{4 \cdot r}{\rho \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{\rho^2}}}; \quad (\text{П4.28a})$$

$$\frac{d^2 S_2(\rho)}{d\rho^2} = 2 \cdot \arccos\left(\frac{r}{\rho}\right) + 2 \cdot \arccos\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{\pi}{3} + \frac{2 \cdot r}{\rho \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{\rho^2}}}. \quad (\text{П4.28б})$$

В стационарных точках ρ_1 , ρ_2 соответствующие значения вторых производных функций $S_1(\rho)$, $S_2(\rho)$ положительны. В первом случае это можно показать прямой подстановкой (П4.27a) в (П4.28a). Тогда, проводя необходимые преобразования, получим:

$$\frac{d^2 S_1(\rho_1)}{d\rho^2} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot (1 + \sqrt{3})}{\sqrt{16 - 2 \cdot (1 + \sqrt{3})^2}} \approx 14,93 > 0. \quad (\text{П4.29a})$$

Во втором случае, из условий, что $\rho > 0$, $r > 0$ (по определению), $\rho > r$ (в данном случае) и значение ρ_2 (П4.27б) обращает в ноль выражение (П4.26б), следует:

$$\frac{d^2 S_2(\rho_2)}{d\rho^2} = 2 \cdot r \cdot \left(\rho_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{\rho_2^2}} \right)^{-1} > 0. \quad (\text{П4.29б})$$

Таким образом, (П4.29) означает, что функции площадей областей расхождения рассматриваемых шестиугольника и круга $S_1(\rho)$, $S_2(\rho)$ в своих стационарных точках ρ_1 , ρ_2 (П4.27) достигают локальных минимумов.

Параметры r и b , входящие в соотношения (П4.27), можно выразить через характеристики физико-механических свойств грунта, если рассмотреть девиаторную

плоскость, проходящую через точку начала координат пространства главных напряжений. Тогда r рассчитывается по формуле (П4.13). Выражение для b можно получить из элементарной геометрии (см. рис. П4.6), используя имеющиеся соотношения для R , r и a :

$$b = \frac{2 \cdot \sqrt{6} \cdot c \cdot \cos \varphi}{3 + \sin \varphi}. \quad (\text{П4.30})$$

Учитывая, что для радиуса окружности, образующейся в девiatorной плоскости, проходящей через начало координат, справедлива формула

$$\rho = \sqrt{3} \cdot c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \beta, \quad (\text{П4.31})$$

определяющий параметр $\alpha_{\text{онм}}$ оптимальной конической поверхности текучести Друккера – Прагера находится из выражений (П4.12), (П4.13), (П4.27), (П4.30), (П4.31). Анализ получающихся в итоге соотношений показывает, что $\alpha_{\text{онм}}$ является функцией только одной характеристики материала φ , причем – монотонно возрастающей. Решая соответствующие **трансцендентные** уравнения, можно определить также точную границу, разделяющую области применения выражений, соответствующих (П4.27а) и (П4.27б), которая равна $\varphi_z = \arcsin(2 \cdot \sqrt{3} - 3)$. В итоге, для $\alpha_{\text{онм}}$ имеем следующие аналитические зависимости:

$$\alpha_{\text{онм}} = \begin{cases} \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}, & 0 < \varphi \leq \arcsin(2 \cdot \sqrt{3} - 3); \\ \frac{\sin \varphi}{3}, & \arcsin(2 \cdot \sqrt{3} - 3) \leq \varphi. \end{cases} \quad (\text{П4.32})$$

Нетрудно убедиться, что для граничного значения φ_z результаты вычислений по обоим выражениям (П4.32) также совпадают. Соотношение (П4.32) определяет параметр $\alpha_{\text{онм}}$ как непрерывную монотонно возрастающую функцию угла внутреннего трения грунта φ .

Связующие соотношения для второго определяющего параметра $k_{\text{онм}}$ оптимальной поверхности текучести Друккера – Прагера можно найти из полученных ранее выражений для координат вершин конуса и пирамиды Мора – Кулона.

Кроме того, учитывая некоторое неудобство использования (П4.32) для практических вычислений, а также то, что в нормативных документах угол внутреннего трения реальных грунтов определяется с точностью не выше одной десятой градуса, для граничного значения в (П4.32) можно положить $\varphi_z = \arcsin(2 \cdot \sqrt{3} - 3) \approx 27,65^\circ$.

Таким образом, связующие соотношения определяющих параметров поверхности текучести Друккера – Прагера, удовлетворяющей критерию минимального расхождения с поверхностью текучести Мора – Кулона, с характеристиками физико-механических свойств грунта имеют вид:

$$\alpha_{\text{онм}} = \begin{cases} \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}, & 0 < \varphi \leq 27,65^\circ; \\ \frac{\sin \varphi}{3}, & 27,65^\circ \leq \varphi; \end{cases} \quad (\text{П4.33})$$

$$k_{omn} = \begin{cases} \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}, & 0 < \varphi \leq 27,65^\circ; \\ c \cdot \cos \varphi, & 27,65^\circ \leq \varphi. \end{cases} \quad (\text{П4.34})$$

На рис. П4.7 приведено изображение конической поверхности текучести Друккера – Прагера (для грунта с характеристиками $\varphi = 20^\circ$, $c = 5 \text{ кПа}$), определяющие параметры которой рассчитаны по формулам (П4.33) и (П4.34) соответственно. Рис. П4.7 наглядно демонстрирует, что все качественные закономерности трехмерного НДС грунтов, отмеченные для поверхности текучести Мора – Кулона, сохраняются и для конической поверхности текучести Друккера – Прагера.

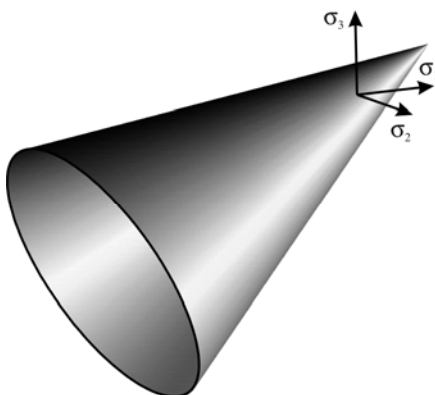


Рис. П4.7. Поверхность текучести Друккера – Прагера

Таким образом, использование в вычислительной технологии анализа прочности подземных участков **магистральных** трубопроводов упруго-пластической модели грунта с поверхностью текучести Друккера – Прагера, определяющие параметры которой задаются в соответствии с (П4.33), (П4.34), позволяет точно отразить все качественные особенности сложного НДС грунта, окружающего подземные участки трубопроводов, и при минимальных в общем случае погрешностях количественных параметров построить высокоэффективные численные алгоритмы анализа.

Следует также заметить, что выработка критерия пластичности грунта с гладкой поверхностью текучести, имеющей более сложную, чем круговой конус, форму в большинстве случаев требует включения в определяющие уравнения дополнительных (ненормативных) материальных параметров (см. Раздел 3.3.2.2), что затрудняет широкое практическое использование данных критериев при недостатке исходных данных.

Приложение 5

К вопросу о численном моделировании подземных участков протяженных трубопроводных систем

Алешин В.В.

Как правило, промышленные трубопроводные системы имеют большую протяженность. В этом ряду особенно выделяются конструкции магистральных трубопроводов, протяженность подземных «пролетов»¹ которых может составлять десятки километров.

Очевидно, что на первом этапе технологии численного анализа НДС трубопроводов (см. Раздел 3.4.2.1) для учета температурных деформаций конструкции наиболее адекватным подходом является построение балочной КЭ-модели всего пролета трубопроводной системы и жесткая заделка концов модели. Однако в случае анализа протяженных подземных пролетов МТ такая модель будет содержать большое количество нелинейных КЭ², что существенно затрудняет получение численного решения без применения высокопроизводительной компьютерной техники.

С другой стороны, пространственная геометрия осевой линии протяженного подземного участка МТ повторяет рельеф местности, в которой проложен трубопровод. Максимальные температурные деформации любого пролета реального МТ сосредоточены на участках с минимальной поперечной жесткостью – вертикальных и горизонтальных изгибах осевой линии трубопроводной конструкции. В связи с этим обстоятельством для протяженных подземных пролетов трубопроводов результаты требуемой точности можно получить, исследуя балочные КЭ-модели их отдельных участков, построенных с соблюдением следующих правил.

При анализе общего НДС подземного участка, являющегося только частью протяженного пролета МТ, для получения корректных результатов и исключения влияния граничных условий необходимо моделировать также примыкающие к нему смежные (условно прямые³) участки. Граничные условия следует задавать на концах смежных участков, исходя из объективного условия «зашемления» в грунте отдаленных от рассматриваемого сегмента участков трубопровода [138]. Необходимо помнить, что выбор длины моделируемых смежных участков существенным образом зависит как от геометрических параметров и условий нагружения трубопровода, так и от характеристик физико-механических свойств окружающего грунта. Продемонстрируем вышесказанное на примере.

Рассмотрим конструкцию модельного участка подземного МТ, изображенную на рис. П5.1. Трубопровод имеет изогнутый участок длиной 120 м, угол наклона которого к горизонту составляет 10°. Для большей наглядности результатов предположим, что изогнутый участок не окружен грунтом и может деформироваться свободно. Примыкающие к нему прямые участки трубопровода находятся в грунте на глубине 2 м. В качестве нагрузки приложен температурный перепад (разность температур стенок трубопровода в момент его прокладки и функционирования в рабочем режиме) $\Delta T = 60^\circ$. Также, в целях наглядности результатов, нагрузка от внутреннего давления здесь не учитывается.

¹ Под термином «пролет» здесь подразумевается участок трубопровода между элементами жесткого крепления его конструкции.

² Для моделирования взаимодействия трубопровода с окружающим грунтом.

³ Участки с меньшей, чем у рассматриваемого сегмента трубопровода, кривизной осевой линии.

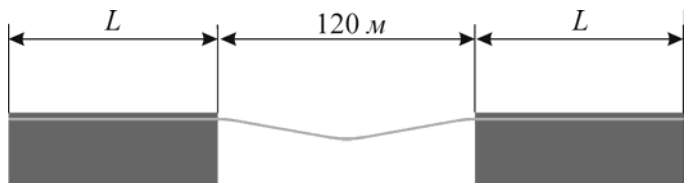


Рис. П5.1. Схема модельного участка магистрального трубопровода

Диаметр труб – $D = 1220 \text{ мм}$, толщина стенок труб – $13,5 \text{ мм}$. Характеристики физико-механических свойств материала труб: $E = 206 \text{ ГПа}$; $\nu = 0,3$; $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$.

Серия вычислительных экспериментов по анализу НДС с использованием балочных КЭ-моделей участка трубопровода, изображенного на рис. П5.1, проводилась для различных значений длины подземных участков ($L = 100 \text{ м}$, 200 м , 400 м) и характеристик физико-механических свойств грунта. Рассматривались два варианта грунтов. Грунт №1 имел характеристики: $E = 10 \text{ МПа}$; $\nu = 0,4$; $\gamma = 18000 \text{ Н/м}^3$; $\varphi = 16^\circ$; $c = 40 \text{ кПа}$; $c_{x0} = 3,5 \text{ МПа/м}$. Грунт №2 отличался от грунта №1 только следующими характеристиками: $\varphi = 10^\circ$; $c = 10 \text{ кПа}$. Во всех случаях ГУ являлись жесткие заделки (нулевые смещения по всем степеням свободы) концов подземных участков трубопровода.

Сравнение результатов расчетов проводилось по следующим характеристикам НДС изогнутого участка трубопровода: u – модуль вектора максимального смещения трубопровода (в центре изогнутого участка), u_x – модуль максимального осевого смещения трубопровода (в точках сопряжения прямого и изогнутого участков), σ_x – максимальное осевое растягивающее напряжение и σ_i – максимальная интенсивность напряжений (оба параметра в центре изогнутого участка). Результаты вычислительных экспериментов представлены в табл. П5.1 и П5.2. Погрешность представленных в таблицах результатов вычислялась относительно соответствующих характеристик НДС, полученных при $L = 400 \text{ м}$. Как видно из табл. П5.1 и П5.2, для получения достаточно точных значений параметров НДС изогнутого участка (с погрешностью не более 1%) и исключения влияния на результаты граничных условий, в первом случае (грунт №1 с высоким сопротивлением смещению трубопровода) достаточно включить в расчетную модель подземные участки длиной $L = 100 \text{ м}$. Во втором случае (грунт №2 с более низким сопротивлением) длина моделируемых подземных участков должна быть не менее $L = 200 \text{ м}$.

Таблица П5.1

Результаты расчетов НДС модельного участка подземного трубопровода для грунта №1

Характеристики НДС трубопровода	Длина участков $L, \text{ м}$		
	100	200	400
$u, \text{ мм}$	404,15	404,97	404,97
Погрешность, %	0,2	0	–
$u_x, \text{ мм}$	26,46	26,585	26,587
Погрешность, %	0,5	0,008	–

$\sigma_x, \text{МПа}$	59,6	59,7	59,7
Погрешность, %	0,2	0	–
$\sigma_i, \text{МПа}$	67,7	67,9	67,9
Погрешность, %	0,1	0	–

Таблица П5.2

Результаты расчетов НДС модельного участка подземного
трубопровода для грунта №2

Характеристики НДС трубопровода	Длина участков $L, \text{м}$		
	100	200	400
$u, \text{мм}$	568	674	678
Погрешность, %	16	0,6	–
$u_x, \text{мм}$	53,6	71,1	71,7
Погрешность, %	25	0,8	–
$\sigma_x, \text{МПа}$	84,2	99,9	101
Погрешность, %	17	1	–
$\sigma_i, \text{МПа}$	95,7	113,5	114
Погрешность, %	16	0,4	–

Таким образом, результаты проведенных вычислительных экспериментов свидетельствуют, что при надлежащем выборе на первом этапе технологии численного анализа длины моделируемого участка протяженного трубопровода можно исключить влияние граничных условий на его НДС и получить результаты требуемой точности. Следовательно, точная информация о характеристиках физико-механических свойств грунтов в районе прокладки исследуемых участков подземных трубопроводов необходима не только для адекватного моделирования сопротивления грунта смещениям трубопровода (что очевидно), но и для корректного формирования и построения самих балочных КЭ-моделей данных участков.

Приложение 6

Точное решение МКЭ задачи об осевом смещении трубопровода в грунте

Алешин В.В.

Утверждение: применение вариационного метода (см. Раздел 3.2) построения балочной КЭ-модели позволяет получить точные значения осевых узловых смещений прямого подземного участка трубопровода в упруго-идеальнопластичном грунте независимо от количества КЭ, дискретизирующих участок.

В Разделе 3.3.2.1 показано, что сопротивление грунта осевым смещениям подземного трубопровода можно представить в виде идеализированной диаграммы Прандтля, имеющей линейный и постоянный участки (см. рис. 3.1). Поэтому для доказательства сформулированного выше утверждения рассмотрим решение эквивалентной¹ задачи о прямолинейном линейно-упругом стержне постоянного сечения, нагруженном постоянной и линейно изменяющейся осевыми распределенными нагрузками.

Сначала рассмотрим расчетную схему с постоянной осевой распределенной нагрузкой q , изображенную на рис. П6.1. Один конец стержня жестко заделан, другой свободен. Длина стержня l , площадь поперечного сечения A , модуль упругости материала стержня E .

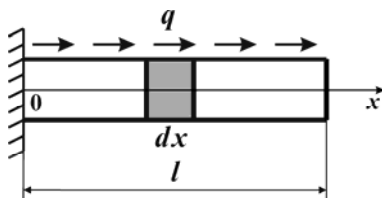


Рис. П6.1. Стержень, нагруженный постоянной распределенной осевой нагрузкой

Найдем точное аналитическое выражение для осевых смещений стержня в этом случае. Составим уравнение равновесия бесконечно малого элемента стержня длиной dx :

$$A \cdot d\sigma_x + q \cdot dx = 0. \quad (\text{П6.1})$$

Обозначая смещение точек стержня вдоль оси Ox как $u(x)$ и используя очевидные для данного случая выражения $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$ и $\varepsilon_x = du/dx$, представим уравнение равновесия (П6.1) в перемещениях:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{q}{A \cdot E} = 0. \quad (\text{П6.2})$$

Интегрируя (П6.2), получаем:

$$u(x) = -\frac{q \cdot x^2}{2 \cdot A \cdot E} + C_1 \cdot x + C_2. \quad (\text{П6.3})$$

Учитывая граничные условия

¹ В МДГТ задачи о растяжении стержня осевой нагрузкой и о сопротивлении такому растяжению решаются эквивалентными методами.

$$u(0) = 0, \quad \sigma_x(l) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx}(l) = 0,$$

находим константы C_1 , C_2 и получаем аналитическое решение (П6.2):

$$u(x) = \frac{q}{E \cdot A} \cdot \left(l \cdot x - \frac{x^2}{2} \right). \quad (\text{П6.4})$$

Теперь рассмотрим решение данной задачи с помощью МКЭ. Для максимального упрощения выкладок используем дискретизацию стержня всего двумя одномерными изопараметрическими конечными элементами первого порядка одинаковой длины L , как изображено на рис. П6.2. Узлы 1, 2 определяют положение первого КЭ, узлы 2, 3 – положение второго КЭ.

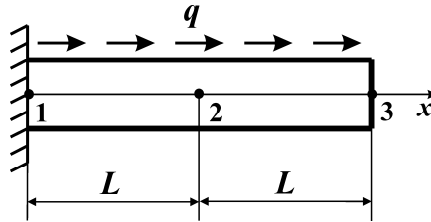


Рис. П6.2. КЭ-модель стержня

В рассматриваемой постановке задачи в каждом из узлов КЭ-модели имеется всего одна степень свободы – смещение вдоль оси Ox . Поэтому в аппроксимационную формулу (3.13) будут входить функции формы, зависящие от одной параметрической координаты:

$$u(x) = \frac{1}{2} \cdot (u_i \cdot (1 - \xi) + u_j \cdot (1 + \xi)), \quad (\text{П6.5})$$

где u_i , u_j – смещения вдоль оси Ox узловых точек КЭ.

Для определения явного вида выражения (П6.5) необходимо задать связь параметрической координаты ξ с физической координатой x . Задавая эту связь в виде

$$\xi = \frac{2 \cdot x}{L} - 1,$$

получаем выражение для определения смещений внутри КЭ через смещения его узловых точек в естественных (безразмерных) координатах:

$$u = \left(1 - \frac{x}{L} \right) \cdot u_i + \frac{x}{L} \cdot u_j. \quad (\text{П6.6})$$

Таким образом, матрица функций формы КЭ в данном случае представляется вектором-строкой:

$$[N] = [N_1 \quad N_2],$$

где $N_1 = 1 - x/L$; $N_2 = x/L$.

Конечно-элементную формулировку рассматриваемой задачи построим, используя матричную форму МКЭ (3.14), полученную вариационным методом. Так как на конструкцию действует единственная поверхностная нагрузка, а модель конструкции состоит

из двух КЭ, матричное уравнение МКЭ будет иметь вид:

$$\sum_{m=1}^2 \left([K_e] \{u\} - \{F_e^{pr}\} \right)_m = 0. \quad (\text{П6.7})$$

Матрица $[B]$ в данном случае тоже является вектором-строкой:

$$[B] = \left[\frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right] = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right]. \quad (\text{П6.8})$$

Матрица $[D] = E$, а вектор $\{P\} = q$.

Теперь можно вычислить все матрицы, входящие в уравнение (П6.7). Матрица жесткости элемента:

$$[K_e] = \int_{V_m} [B]^T [D] [B] dv = \int_A \int_0^L \begin{Bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{Bmatrix} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} da dx. \quad (\text{П6.9})$$

Выполняя интегрирование в (П6.9), имеем:

$$[K_e] = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{П6.10})$$

Вектор распределенных поверхностных¹ сил определяется как

$$\{F_e^{pr}\} = \int_0^L [N]^T \{P\} dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1-x/L \\ x/L \end{Bmatrix} \cdot q dx = \begin{Bmatrix} q \cdot L/2 \\ q \cdot L/2 \end{Bmatrix}. \quad (\text{П6.11})$$

Подставляя выражения (П6.10), (П6.11) в (П6.7), выполняя суммирование с учетом соединения конечных элементов в узле 2, а также исключая степень свободы в жестко заделанном узле 1, получаем конечно-элементную формулировку исходной задачи в виде:

$$\frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q \cdot L \\ q \cdot L/2 \end{Bmatrix} = 0. \quad (\text{П6.12})$$

Решая (П6.12), получаем:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q \cdot L \\ q \cdot L/2 \end{Bmatrix}. \quad (\text{П6.13})$$

Из (П6.13) следует, что осевые смещения узловых точек КЭ-модели стержня равны:

$$u_2 = \frac{3 \cdot q \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot A}, \quad u_3 = \frac{2 \cdot q \cdot L^2}{E \cdot A}. \quad (\text{П6.14})$$

Физические координаты узлов 2, 3 КЭ-модели (см. рис. П6.1, П6.2) равны $x_2 = l/2$, $x_3 = l$. Учитывая, что $l = 2 \cdot L$, из аналитической формулы (П6.4) получаем точные значения смещений для точек стержня, совпадающих с узлами КЭ-модели:

$$u(l/2) = \frac{3 \cdot q \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot A}; \quad u(l) = \frac{2 \cdot q \cdot L^2}{E \cdot A},$$

¹ В рассматриваемой постановке задачи поверхностью расчетной области является прямая линия.

которые полностью аналогичны (П6.14).

Таким образом, показано, что при действии на прямолинейный стержень постоянной распределенной осевой нагрузки вариационная формулировка МКЭ дает точное решение для осевых смещений узловых точек КЭ-модели. Покажем это также для случая действия осевой распределенной нагрузки, изменяющейся по линейному закону. Схема рассматриваемой в этом случае задачи представлена на рис. П6.3.

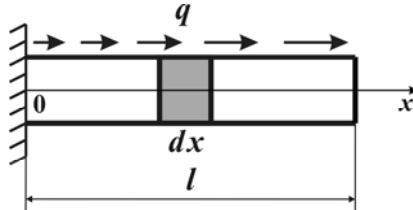


Рис. П6.3. Стержень, нагруженный линейно возрастающей распределенной осевой нагрузкой

Закон изменения нагрузки по длине стержня представим как $q = a \cdot x$ (линейно возрастающая нагрузка). Уравнение равновесия бесконечно малого элемента dx в этом случае имеет вид:

$$A \cdot d\sigma_x + \int_x^{x+dx} a \cdot s \, ds = 0. \quad (\text{П6.15})$$

Производя в (П6.15) интегрирование и пренебрегая членом второго порядка малости $(dx)^2$, получаем дифференциальное уравнение равновесия стержня:

$$A \cdot d\sigma_x + a \cdot x \cdot dx = 0. \quad (\text{П6.16})$$

Используя выражения, введенные в предыдущем случае, представим уравнение равновесия (П6.16) в перемещениях:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{a \cdot x}{E \cdot A} = 0. \quad (\text{П6.17})$$

Решением (П6.17), удовлетворяющим граничным условиям, будет:

$$u(x) = \frac{a}{E \cdot A} \cdot \left(\frac{l^2 \cdot x}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (\text{П6.18})$$

Решение данной задачи МКЭ будем рассматривать в аналогичной предыдущему случаю постановке (рис. П6.4). Тогда матричное уравнение МКЭ имеет вид (П6.7), а матрицы жесткости конечных элементов определяются по (П6.10).

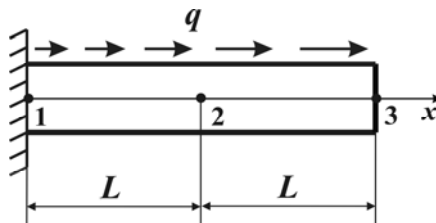


Рис. П6.4. КЭ-модель стержня

Вектор $\{P\}$ для первого КЭ имеет вид $\{P_1\} = a \cdot x$, а для второго КЭ – $\{P_2\} = a \cdot (x + L)$. Тогда для первого КЭ:

$$\{F_1^{pr}\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1-x/L \\ x/L \end{Bmatrix} \cdot a \cdot x \, dx = \begin{Bmatrix} a \cdot L^2/6 \\ a \cdot L^2/3 \end{Bmatrix}, \quad (\text{П6.19})$$

для второго КЭ:

$$\{F_2^{pr}\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1-x/L \\ x/L \end{Bmatrix} \cdot a \cdot (x + L) \, dx = \begin{Bmatrix} 2 \cdot a \cdot L^2/3 \\ 5 \cdot a \cdot L^2/6 \end{Bmatrix}. \quad (\text{П6.20})$$

Подставляя выражения (П6.10), (П6.19), (П6.20) в уравнение (П6.7), как и в первом случае, проводим суммирование с учетом топологии КЭ-модели и исключаем степень свободы в узле 1. В результате получаем конечно-элементную формулировку рассматриваемой задачи, решая которую относительно узловых перемещений, имеем:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a \cdot L^2 \\ 5 \cdot a \cdot L^2/6 \end{Bmatrix}. \quad (\text{П6.21})$$

Из (П6.21) следует, что осевые смещения узловых точек КЭ-модели стержня равны:

$$u_2 = \frac{11 \cdot a \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot A}; \quad u_3 = \frac{8 \cdot a \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot A}. \quad (\text{П6.22})$$

Нетрудно убедиться, что вычисление осевых смещений по аналитической формуле (П6.18) для точек стержня, совпадающих с узлами КЭ-модели, имеющими физические координаты $x_2 = l/2$, $x_3 = l$, с учетом равенства ($l = 2 \cdot L$) приводит к точно таким же выражениям, как (П6.22).

Таким образом, сформулированное в начале данного Приложения утверждение полностью доказано.

Приложение 7

Предельное равновесие откосов «идеальных» грунтов

Алешин В.В.

Для введения некоторых понятий и установления оценок, необходимых для изложения моделей в Разделе 3.4.5, рассмотрим известные решения двух модельных задач механики грунтов [148]:

- 1) устойчивость откоса идеально сыпучего грунта (угол внутреннего трения $\varphi \neq 0$, сцепление $c = 0$);
- 2) устойчивость массива идеально связанного грунта ($\varphi = 0$, $c \neq 0$).

Пусть для первого случая имеем откос идеально сыпучего грунта, на котором свободно лежит твердая частица M (рис. П7.1). Разложим вес частицы P на нормальную N и касательную T к линии откоса (AB) составляющие. Сила T стремится сдвинуть частицу к подножию откоса, но ей противодействует сила трения $T' = f \cdot N$ (где f – коэффициент трения).

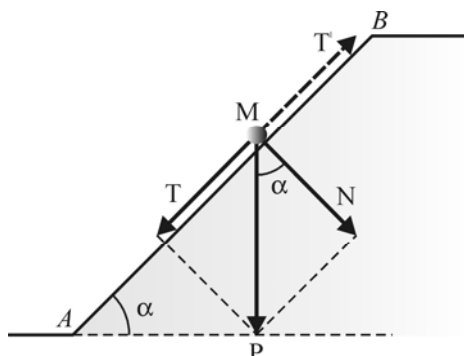


Рис. П7.1. Схема сил, действующих на частицу откоса идеально сыпучего грунта

Проектируя все силы на наклонную грань откоса (AB), получим:

$$P \cdot \sin \alpha - f \cdot P \cdot \cos \alpha = 0, \quad (\text{П7.1})$$

откуда $\operatorname{tg} \alpha = f$. Так как для идеально сыпучего грунта $f = \operatorname{tg} \varphi$, окончательно имеем:

$$\alpha = \varphi. \quad (\text{П7.2})$$

Таким образом, предельный угол откоса сыпучих грунтов равен углу внутреннего трения грунта. Этот угол называется **углом естественного откоса** [148]. Понятие об угле естественного откоса относится только к сухим сыпучим грунтам. У связанных (глинистых) грунтов угол откоса может меняться в зависимости от их характеристик¹ в широких пределах (от 0° до 90°) и зависит также от высоты откоса.

¹ Состав, консистенции, увлажненности, сил сцепления и т.д.

Рассмотрим второй случай – предельное равновесие вертикального массива идеально связанного грунта. Примем приближенно, что нарушение равновесия¹ при некоторой предельной высоте h произойдет по плоской поверхности скольжения (AD), наклоненной под углом α к горизонту (рис. П7.2).

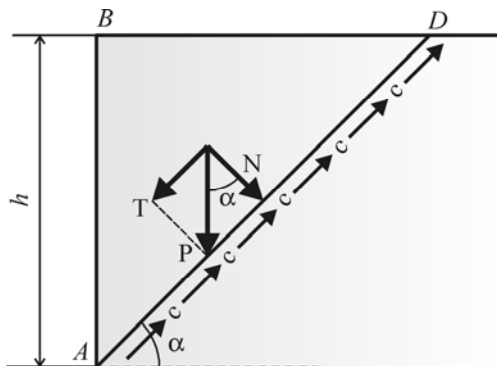


Рис. П7.2. Схема сил, действующих на вертикальный массив идеально связанного грунта

Составим уравнение равновесия всех сил, действующих на массив грунта, ограниченного призмой ABD с шириной, равной единице, в момент нарушения равновесия. Активной силой является P – вес призмы ABD (см. рис. П7.2):

$$P = \frac{\gamma \cdot h^2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{2} \quad (\text{П7.3})$$

где γ – объемный вес грунта.

Силу P разложим на нормальную N и касательную T к поверхности скольжения (AD) составляющие. Силами, сопротивляющимися скольжению, будут лишь силы сцепления c , распределенные по плоскости скольжения $|AD| = h/\sin \alpha$ (см. рис. П7.2).

Так как в верхней точке D призмы ABD давление будет равным нулю, а в нижней точке A – максимальным, то, в среднем, следует учитывать только половину сил сцепления².

Составим уравнение равновесия массива грунта ABD , проецируя все силы на направление (AD):

$$\frac{\gamma \cdot h^2}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha - \frac{c \cdot h}{2 \cdot \sin \alpha} = 0, \quad (\text{П7.4})$$

откуда

$$c = \frac{\gamma \cdot h}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha). \quad (\text{П7.5})$$

Определим значение высоты $h = h_{90}$, соответствующей максимальному использованию сил сцепления грунта. Очевидно, что при этом $\sin(2 \cdot \alpha) = 1$ в выражении (П7.5) и, следовательно:

¹ Оползание массива грунта, ограниченного призмой ABD .

² Такой прием позволяет элементарным путем прийти к решению, совпадающему для рассматриваемого случая со строгим решением теории предельного равновесия [148].

$$h_{90} = 2 \cdot c / \gamma. \quad (\text{П7.6})$$

Таким образом, массив идеально связанного грунта может иметь **вертикальный откос** h_{90} определенной высоты. При высоте вертикального откоса $h > h_{90}$ равновесие нарушится и произойдет оползание грунта.

В завершение данного Приложения остается отметить, что большинство типов реальных грунтов обладают и сцеплением, и трением. Поэтому задача определения их устойчивого состояния является более сложной, чем в рассмотренных выше элементарных примерах.

Приложение 8

Краткий обзор патентов в области обнаружения разрывов газопроводов

Бойченко А.Л., Селезнев В.Е.

На основании анализа патентов Российской Федерации, Японии, Франции, Германии, США и других стран (индекс F17D) существующие подходы к мониторингу разрывов действующих газопроводов можно условно разделить на две основные группы:

- способы обнаружения разрывов, основанные на анализе воздействия разрыва газопровода на окружающую среду;
- способы обнаружения разрывов, базирующиеся на анализе воздействия разрыва газопровода на параметры транспортирования газа.

К первой группе относятся как способы, контролирующие состояние атмосферы в районе прокладки газопровода, так и способы, реагирующие на разрушения вблизи места аварии, возникающие при разрыве газопровода.

Во второй группе можно выделить способы, основанные на анализе газодинамических параметров течения транспортируемой среды, и способы, базирующиеся на фиксации различных возмущений, возникающих в потоке газа в момент разрыва.

Различные подходы к обнаружению разрывов газопроводов характеризуются своими достоинствами и недостатками, такими как: точность, надежность, протяженность контролируемого участка газопровода, стоимость реализации и т.д.

Рассмотрим известные способы обнаружения разрывов газопроводов в соответствии с приведенной классификацией, ограничившись лишь теми из них, которые применяются или могут быть применены для обнаружения разрывов на МГ, и оценим возможность их реализации с использованием ГДС (см. Главы 1 и 2).

Способы обнаружения разрывов, основанные на анализе воздействия разрыва магистрального газопровода на окружающую среду

Способы, основанные на анализе газового состава атмосферы. При разрыве МГ происходит выброс большого количества природного газа (в основном состоящего из метана) в атмосферу. Повышенное содержание метана в атмосфере на участке газопровода свидетельствует о значительной утечке или о разрыве одной из ниток.

Известен **патент Японии №62-9799 от 02.03.87 «Телевизионная система централизованного контроля газовой опасности»**. В этой системе предлагается сравнивать выходные сигналы газоанализирующих датчиков, расположенных в различных местах контролируемой зоны, с заданной эталонной величиной, соответствующей нормальному (в отсутствии разрыва МГ) состоянию атмосферы. В случае отрицательного результата сравнения выдается предупредительный сигнал и на схеме расположения датчиков выделяется датчик, который является причиной возникновения этого сигнала. Для получения более полной информации предлагается совместно с газоанализирующими датчиками устанавливать датчики направления и силы ветра.

Средства контроля газового состава атмосферы могут размещаться не только стационарно, но и входить в состав специальных мобильных комплексов, как, например, предложено в **патенте WO №9641097 от 07.06.96 «Система самолетного контроля**

утечки из трубопровода». В соответствии с этим патентом, утечку из трубопровода определяют из пролетающего над этим трубопроводом самолета с коллекторной трубой, непрерывно забирающей пробу воздуха снаружи самолета. Эта проба поступает в анализатор для определения высоких концентраций при наличии утечки в трубопроводе. Из анализатора выходной сигнал поступает в компьютер, в который одновременно приходит сигнал из глобальной системы местоопределения, после чего коррелируют их и определяют место утечки.

Подобный способ определения утечек предлагается в *патенте WO №9720167 от 29.11.96 «Способ и устройство для обнаружения утечки из трубопровода»*, отличающийся от предыдущего тем, что анализатор выполнен в виде инфракрасных передатчика и приемника, а все устройство размещено на платформе на воздушной подушке или на вертолете.

Рассмотренные выше способы ориентированы на обнаружение любых утечек из МГ. К их *недостаткам* следует отнести:

- невозможность определения поврежденной нитки многониточных ЛЧМГ;
- существенная зависимость от вида местности и погодных условий в месте утечки в момент ее возникновения;
- высокая стоимость систем контроля (так как в случае реализации стационарной системы для контроля над МГ необходима организация большого числа постов, оборудованных дорогостоящими газоанализаторами, а в случае мобильной системы, не обеспечивающей постоянного во времени контроля, в ее стоимость будут входить затраты на эксплуатацию дорогостоящих транспортных средств).

Для облегчения процесса анализа атмосферного воздуха применяют введение в транспортируемый газ специальных, легко обнаруживаемых добавок. Применение таких добавок позволяет заменить газоанализирующие датчики, реагирующие на повышенное содержание метана, другими, более дешевыми или вообще отказаться от них. Так, например, в *патенте Франции №2217685 от 11.10.74 «Способ обнаружения утечек в подземных трубопроводах»* предлагается вводить в транспортируемый газ радиоактивный газ-индикатор, например изотоп аргон-41, что позволит определять утечки методами радиационного контроля.

Известен также *патент США №3523771 от 11.08.76 «Способ визуального определения утечки газа»*, в котором предлагается к транспортируемым газам подмешивать индицирующий агент, который в случае выделения или утечки газа в атмосферу подавал бы видимый сигнал или образовывал бы дым в тех местах, где эта утечка происходит. Дым образуется в результате реакции индицирующего агента с кислородом или влагой атмосферы. Предлагаются химические формулы подобных индицирующих агентов. В этом случае можно вообще отказаться от анализа химического состава атмосферного воздуха, заменив газоанализирующие датчики, например, фотооптическими элементами, расположенными вдоль трассы МГ.

Приведенные способы обладают такими же *недостатками*, что и способы, основанные на регистрации наличия метана в атмосфере вблизи места утечки. Кроме того, они приводят к попаданию в атмосферу (наряду с метаном) дополнительно введенного компонента, что усугубляет экологическую ситуацию в районе аварии.

Способы, основанные на учете взрывоподобного характера процесса разрыва магистрального газопровода. Способы, реагирующие на барическое воздействие процесса разрыва МГ, лишены недостатков перечисленных выше подходов, базирующихся на химическом анализе атмосферного воздуха в районе аварии. Например, такой подход приводится в описании *изобретения №496441 от 16.07.73 (публикация 25.12.75, бюллетень №47) «Устройство для дистанционного контроля разрыва магистрального*

газопровода» авторов Г.П. Великанова и Г.П. Дегтярева.

В нем предлагается устройство, представляющее собой контрольный проводник 2 (рис. П8.1), расположенный параллельно газопроводу 1 в одной траншее с ним и подключенный в местах установки аварийных отсекателей (линейных кранов) к источникам электрической энергии. Электродвижущая сила источников возрастает на одну и ту же величину по мере удаления от диспетчерского пункта. В случае разрыва газопровода (в результате его взрывного характера) будет нарушен контрольный проводник. Поэтому на диспетчерском пункте будет зафиксирована электродвижущая сила последнего источника, находящегося перед разрушенным участком трубопровода. Это позволит четко зафиксировать поврежденный участок и запустить в работу отсекающий аварийного участка.

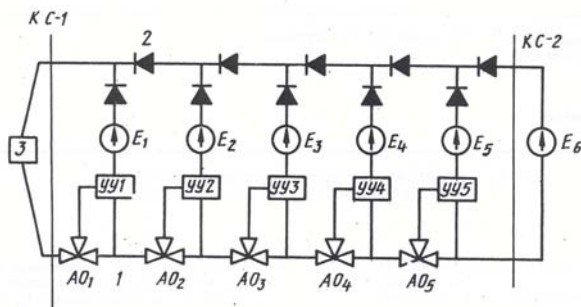


Рис. П8.1. Пример схемы из описания изобретения №496441 от 16.07.73 (ксерокопия)

Похожий подход изложен в *патенте Германии №3930530 от 21.03.91 «Устройство для контроля утечек в трубопроводах»*. В нем предлагается контрольные проводники встроить в теплоизолирующую оболочку, разместив их между влагонепроницаемыми слоями и подсоединив к контрольному прибору для измерения обрыва провода, короткого замыкания провода, а также комплексного электрического сопротивления между контрольными проводниками.

Главным **недостатком** подобных подходов к обнаружению разрывов газопроводов является неоднозначное соответствие между разрывом проводника (замыканием проводников в случае патента Германии) и разрывом газопровода.

Другой способ, основанный на внешних проявлениях процесса разрыва, предложен в *российской заявке на изобретение №99119393/06 от 06.09.99 «Способ контроля состояния магистральных трубопроводов»* авторов Н.Н. Карнаухова, И.А. Каменских, В.Г. Гришина. Способ заключается в визуальном осмотре трубопровода с помощью тепловизионной аппаратуры, включающей тепловизионные камеры и радиопередатчики, установленные на опорах линий электропередач катодной защиты магистральных газопроводов. При этом способе можно зафиксировать разрыв трубопровода как по понижению температуры в месте разрыва при сверхкритическом истечении без возгорания выброшенного газа, так и по температурным параметрам факела при возгорании газозооушной смеси.

Недостатком этого способа, кроме высокой стоимости системы, является невозможность определения аварийной нитки ЛЧМГ в случае аварии на многониточном трубопроводе.

Интересный способ приводится в описании *изобретения №1733837 от 29.06.89 (публикация 15.05.92, бюллетень №18) «Способ обнаружения места разрыва трубопровода»* автора Н.П. Шоромова. Способ заключается в пропускании электромагнитных волн через трубопровод. Электромагнитные волны с длиной волны менее критической для данного диаметра трубопровода возбуждают в начале трубопровода или в атмосфере

ре. Прием волн ведут, соответственно, в атмосфере или в начале трубопровода (рис. П8.2). Место совпадения точки излучения улавливаемых волн с местом расположения трубопровода считают местом разрыва. Место нахождения данного разрыва локализуют пеленгацией.

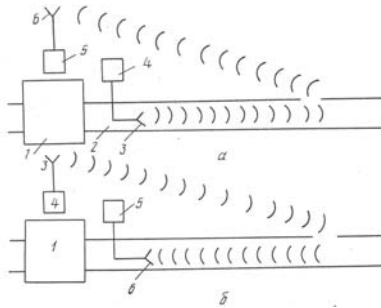


Рис. П8.2. Пример схемы из описания изобретения №1733837 от 29.06.89 (ксерокопия)

Основными **недостатками** всех способов обнаружения разрывов, основанных на анализе воздействия разрыва газопровода на окружающую среду, являются:

- невозможность определения поврежденной нитки ЛЧМГ в случае многониточного газопровода;
- высокая стоимость контролирующей системы.

В ситуации, когда аварийная нитка многониточной ЛЧМГ не идентифицирована, перекрытие линейных кранов на крановых площадках ЛЧМГ может привести к каскадному развитию аварии.

Данные способы **не могут быть применены** в ГДС, т.к. в них не рассматриваются параметры транспортируемого газа. С этой точки зрения, интерес представляет вторая группа способов, описанная ниже.

Способы обнаружения разрывов, основанные на анализе воздействия разрыва газопровода на параметры транспортируемого газа

Способы, основанные на регистрации возмущений в транспортируемой среде.

Как при разрушении газопровода, имеющем взрывообразный характер, так и при образовании утечек возникают возмущения газодинамических параметров режимов транспортирования газа. На регистрации этих возмущений и основываются некоторые из подходов к обнаружению разрывов МГ.

Известен, например, **европейский патент №0042212 от 23.12.81 «Определение местоположения течи в трубопроводе»**, в котором предлагается местоположение утечки определять путем измерения амплитуды волн разрежения, распространяющихся в жидкости или газе, по меньшей мере, в двух контрольных точках, одна из которых находится выше по потоку, а другая ниже места утечки (рис. П8.3). Расстояние до места утечки рассчитывается по приводимой в патенте формуле, включающей расстояние между контрольными точками, отношение амплитуд волн разрежения, регистрируемых в контрольных точках, и коэффициент затухания с расстоянием при распространении волн разрежения в данной среде.

Аналогичный метод предлагается в **патенте Японии №59-24319 от 08.06.84 «Устройство для определения места утечки трубопровода»**, отличающийся от предыдущего способом обработки зарегистрированных сигналов и формулой определе-

ния расстояния до места утечки.

В методе, предлагаемом в **патенте ФРГ №3240136 от 24.05.84 «Устройство для быстрого обнаружения и определения положения мест течей в трубопроводах»**, используется устройство, определяющее местоположение течи по пульсациям давления только на одной стороне трубопровода по отношению к месту утечки.

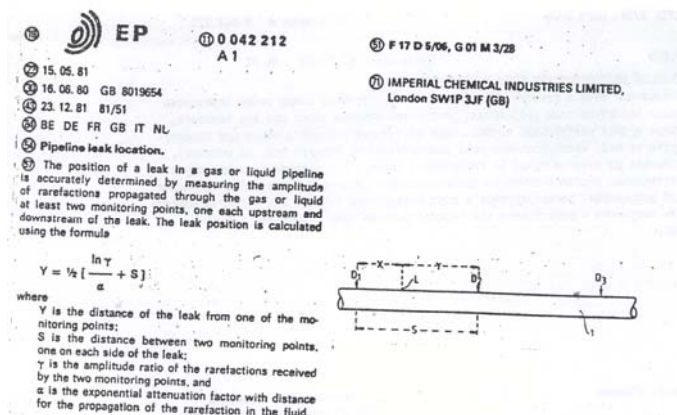


Рис. П8.3. Фрагмент публикации европейского патента №0042212 от 23.12.81 (ксерокопия)

Способ обнаружения места разрыва для многониточной системы трубопроводов предлагается в **патенте ФРГ №3047570 от 11.10.83 «Способ определения местоположения повреждений в напорной трубопроводной сети»**. Он заключается в том, что на участках трубопроводной сети как минимум в трех точках устанавливаются датчики, чувствительные к волне перемещаемой среды, возникающей в месте повреждения и распространяющейся в трубопроводной сети. Место повреждения определяется путем совмещения различных возможных мест повреждения, прогнозируемых различными параметрами датчиков.

Поскольку волновые возмущения возникают не только в транспортируемом газе, но и в стенках трубопровода, существуют подходы, основанные на регистрации подобных эффектов. Известно, например, описание **изобретения №1710930 от 18.07.89 (публикация 07.02.92, бюллетень №5) «Способ определения места утечки в трубопроводе»** авторов Р.М. Шакирова, А.И. Григорова, Л.В. Ахмедова, в котором предлагается определять местоположение утечки по характеристикам шума утечки (акустических колебаний). Вначале выявляется наличие шума утечки (акустических колебаний) в каком-либо месте на контролируемом участке трубопровода. Затем производятся замеры амплитуд акустических колебаний на двух частотах в двух точках, расположенных на расстоянии 3÷5 метров друг от друга (см. рис. П8.4). По полученным результатам с помощью предлагаемой формулы определяется расстояние до места утечки.

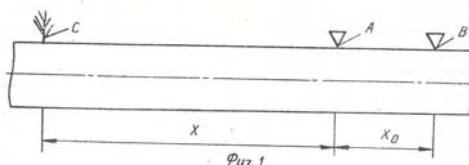


Рис. П8.4. Пример схемы из описания изобретения №1710930 от 18.07.89 (ксерокопия)

Общим и наиболее значительным **недостатком** всех способов, приведенных в этом подразделе Приложения, является малый эффективный радиус действия. Как в случаях волны падения давления, так и в случае с акустическими волнами эффективный радиус действия не превышает 150÷200м, что в сотни раз меньше реально необходимых величин. Для постоянного контроля газопроводов потребовалось бы очень большое количество подобных систем, что вызвало бы неоправданное повышение стоимости всей контролирующей системы. **Данный недостаток делает маловероятной практическую реализацию указанных способов на реальных МГ и, соответственно, применение их с использованием ГДС.**

Способы, основанные на анализе изменения температуры транспортируемого газа. Существует способ, изложенный в **патенте Франции №2244124 от 16.05.75 «Способ обнаружения трещин, случайно появляющихся в газокolleкторах, и соответствующий обнаружитель»**. Этот способ был запатентован также в ФРГ (**патент ФРГ №2443904 от 11.05.78 «Способ обнаружения утечек в газопроводах и устройство его обнаружения»**). Он заключается в том, что замеряют температуру газа и, в зависимости от этого, определяют логарифмическую производную давления по времени с использованием производной замеренной температуры газа. При этом процесс считается адиабатическим. Утечку в газопроводе определяют в зависимости от превышения этой производной некоторого порогового значения.

Эффективность и надежность данного способа определяется выполнением допущения о подчинении режима течения газа адиабатическому закону. Такое предположение справедливо для коротких трубопроводов. Для ЛЧМГ, где расстояния между крановыми площадками, на которых устанавливаются подобные датчики, составляют 25÷30км, такое допущение искажает физику процессов транспортирования газа по МГ. Как свидетельствует анализ показаний датчиков SCADA-систем, течение газа в длинных трубопроводах, уложенных в грунте, является неизотермическим (с существенным теплообменом между транспортируемым газом и окружающим трубопровод грунтом). **В таком случае надежно зафиксировать разрыв многониточного газопровода с использованием представленного выше метода практически невозможно.**

Способы, основанные на анализе изменения расхода транспортируемого газа. Еще одним параметром потока транспортируемого газа, информация об изменении которого может свидетельствовать о разрыве магистрального газопровода, является расход транспортируемого газа.

В описании **изобретения №1705667 от 12.04.88 (публикация 15.05.92, бюллетень №2) «Способ автоматического определения возникновения аварии в магистральном газопроводе»** авторов Ю.С. Зинина, А.С. Тахтеева, Ю.В. Назаревского для установления наличия аварии на участке МГ осуществляется контроль по каждому участку МГ при помощи датчиков давления газа. При этом на первом участке МГ измеряют дополнительно расход входного потока газа с помощью датчика расхода, а на последующих – в контролируемых узлах отбора (рис. П8.5). Сигналы, используемые для контроля участков газопровода, преобразуют так, чтобы удовлетворить уравнению баланса расходов газа. Предлагается устройство, осуществляющее преобразование и суммирование оценок расходов газа на аппаратном уровне. По величине отклонения выходного сигнала от нулевого значения судят об отсутствии или наличии аварийной ситуации на трубопроводе.

Следующий способ определения аварии на магистральном газопроводе, где также используется комплексный анализ изменения давления и расхода транспортируемого газа, предложен в **патенте ФРГ №1775046 от 8.07.77 «Устройство для контроля трубопроводов, в частности, магистральных»**. Контроль осуществляется путем постоянного измерения давления и расхода газа с целью обнаружения утечек. Устройство

имеет, по меньшей мере, один измеритель расхода газа, регистрирующий временную тенденцию изменения расхода газа через трубопровод, и один измеритель давления газа, определяющий временную тенденцию изменения давления газа. Анализ тенденции изменения указанных параметров проводится таким образом, что выдача сигнала об аварии происходит только тогда, когда в трубопроводе при нарастании расхода отмечается падение давления газа.

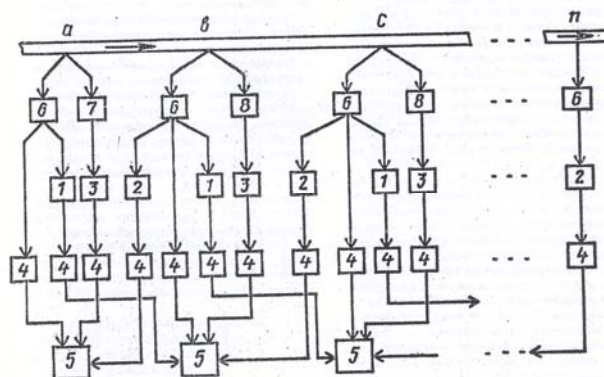


Рис. П8.5. Пример схемы из описания изобретения № 1705667 от 12.04.88 (ксерокопия)

Для случая двухниточного газопровода можно ограничиться анализом изменения только значений расхода газа, как в способе, предлагаемом в описании **изобретения №1645750 от 30.05.88 (публикация 30.04.91, бюллетень №16) «Способ обнаружения утечки газа в трубопроводе»** авторов С.Ф. Кацалапа и А.И. Яценко. Предлагаемый способ применим при транспортировании газа по двухтрубной системе параллельных трубопроводов, работающих в одном режиме. На концах контролируемых участков вблизи мест соединения труб измеряют расходы газа (см. рис. П8.6). Величину утечки определяют путем сравнения разности расходов газа для обоих участков двухтрубного газопровода и по результатам сравнения определяют поврежденный участок. Расстояние от начала контролируемого участка до места утечки определяют путем деления длины контролируемого участка на увеличенное на единицу отношение разностей расхода газа в соответствующих границах контролируемых участков.

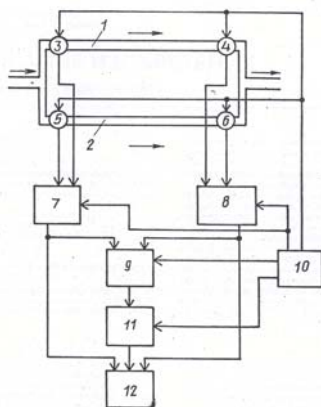
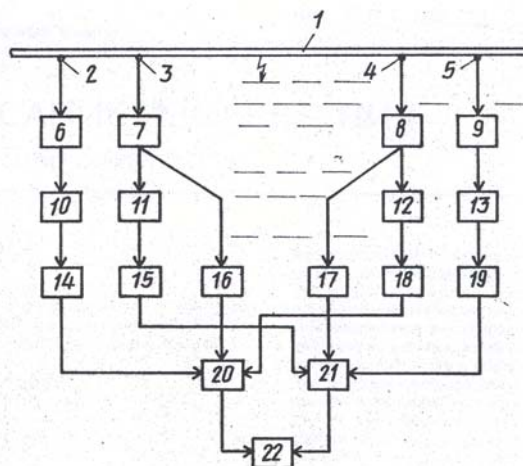


Рис. П8.6. Пример схемы из описания изобретения №1645750 от 30.05.88 (ксерокопия)

Следует отметить, что при реализации любых методов, связанных с анализом изменения расхода транспортируемого газа, возникает вопрос о точности измерения контролируемых величин. Существующие на сегодня расходомеры для газопроводов имеют значительную погрешность измерений. Кроме того, точность измерений таких приборов снижается при длительной эксплуатации. *Все это не позволяет в полной мере реализовать на практике изложенные выше методы обнаружения разрывов газопроводов и, соответственно, применять их с использованием ГДС.*

В описании *изобретения №1645749 от 07.01.88 (публикация 30.04.91, бюллетень №16) «Способ дистанционного определения места повреждения газопровода»* автора Ю.С. Зинина предлагается способ и схема соответствующего устройства, повышающие надежность определения аварии на контролируемом участке газопровода, например, при периодическом включении и выключении компрессорных установок. Способ заключается в установке четырех датчиков давления газа (по два на каждом из концов контролируемого участка) и обработке сигналов групп из трех последовательно установленных датчиков (рис. П8.7).



© В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прялов, 2007–2009

Обработка сигналов заключается в преобразовании гармонических составляющих сигналов крайних датчиков каждой группы по фазе и амплитуде, а также в сопоставлении суммы данных сигналов с сигналом среднего датчика. Это позволяет отфильтровать и выделить плавно изменяющуюся составляющую сигнала и повысить надежность определения аварии. Известны и другие способы, основанные на анализе показаний датчиков давления газа. Например, способ, предлагаемый в **патенте Японии №59-24320 от 08.06.84 «Устройство для обнаружения утечки продукта из трубопровода»**. Устройство содержит датчики, установленные на разных концах контролируемого участка трубопровода и регистрирующие падение давления по длине трубопровода (рис. П8.8). По разности показаний датчиков и определяется наличие утечки.

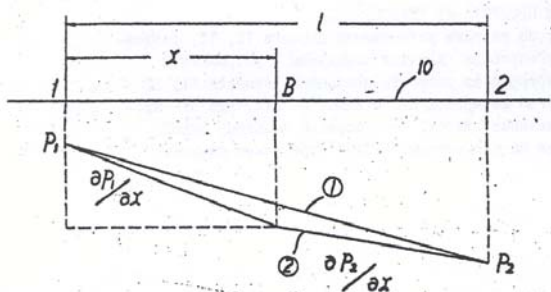


Рис. П8.8. Пример схемы патента Японии №59-24320 от 08.06.84 (ксерокопия)

Подобный способ приводится в **патенте ФРГ №2603715 от 19.07.79 «Способ обнаружения и определения места утечки для трубопроводов»**. Он заключается в том, что замеряют градиенты давлений в начале и в конце контролируемого участка трубопровода. Отличается способ тем, что дополнительно измеряют общую разность давлений, причем эту величину вычитают из значений градиентов давлений. Получаемые сигналы интегрируют по времени и далее по предлагаемым формулам (рис. П8.9) определяют место утечки.

F 17 D - 5/02

26 03 715

31.1.76 - 11.8.77 - 19.7.79.

B: Verfahren zur Leckerkennung und Leckortung bei Rohrleitungen.

A/E: Isermann, Rolf, Prof. Dr.-Ing., 6100 Darmstadt; Siebert, Helmut, Dipl.-Ing., 7000 Stuttgart.

Verfahren zur Leckerkennung und Leckortung bei Fluidleitungen, wobei in dem zu überwachenden Rohrabschnitt die Druckgradienten p_{x1} und p_{x2} am Anfang bzw. am Ende des Abschnitts gemessen werden, dadurch gekennzeichnet, daß zusätzlich der Gesamtdifferenzdruck Δp_{ges} gemessen wird, daß $\Delta p_{ges}/l$ ermittelt wird, daß dieser Wert von den Druckgradienten subtrahiert wird, daß anschließend von den sich ergebenden Signalen x und y die Kreuzkorrelationsfunktion

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt; \quad \text{I}$$

bzw.

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)y(k+\tau); \quad \text{II}$$

$$\tau = -M, \dots, -1, 0, 1, \dots, M; \\ k = t/T_0$$

gebildet wird, daß zur Leckortung die Signale x und y über der Zeit integriert bzw. aufsummiert werden und daß der Leckort mit

$$x_L = \frac{\int y dt}{\int y dt - \int x dt} l; \quad \text{III}$$

bzw.

$$x_L = \frac{\sum y}{\sum y - \sum x} l; \quad \text{IV}$$

ermittelt wird.

Рис. П8.9. Фрагмент публикации патента ФРГ №2603715 от 19.07.79 (ксерокопия)

Еще один способ предложен в **патенте ФРГ №2162708 от 07.02.80 «Способ обнаружения трещины или разрыва в трубопроводе, содержащем газ под давлением, и устройство для его обнаружения»**. Данный способ предусматривает измерение давления в точках, расположенных на некотором расстоянии одна от другой. Одна из точек расположена ближе к источнику изменения давления, чем другая точка. В точках измерения формируются соответствующие электрические сигналы. Электрический сигнал, формируемый в одной точке, вследствие изменения давления задерживается относительно электрического сигнала, формируемого в другой точке, на такой промежуток времени, который равен расстоянию между обеими точками измерения, разделенному на скорость звука в газе. Разность между задержанным и незадержанным электрическим сигналом служит для индикации существования трещины или разрыва.

Перечисленные методы должны хорошо работать на однопунктном трубопроводе в стационарном режиме. В случае многопунктного трубопровода или при штатной смене режима работы газопровода подобные устройства очень сложно настроить. **Это является недостатком всех перечисленных методов, основанных на анализе изменения давления транспортируемого газа.**

В качестве **общего недостатка** всех методов, связанных с измерением параметров транспортируемого газа, можно указать **существенную зависимость от точности и надежности работы измерительной аппаратуры**. При неполадках в работе SCADA-системы может быть пропущен возникший разрыв или получен ложный сигнал о возникновении аварии. И то и другое недопустимо. В первом случае увеличивается продолжительность аварийного истечения газа и возрастает вероятность каскадного развития аварии. Во втором – действия по локализации ложного разрыва могут привести к созданию реальной аварийной ситуации. Указанный недостаток можно устранить, сравнивая результаты измерения с результатами высокоточного численного моделирования нестационарных неизотермических процессов транспортирования газа. Это становится возможным при применении ГДС, адекватно моделирующих транспортирование природного газа по трубопроводным сетям газотранспортных предприятий (см. Главу 4).

Приложение 9

Моделирование аварий в газотранспортных системах, связанных с неустойчивой работой газоперекачивающего оборудования

Комиссаров А.С., Прялов С.Н., Селезнев В.Е.

Рассматривается модельная газопроводная система, в которой присутствует один работающий нагнетатель. Основные параметры ее технологических газопроводов указаны на рис. П9.1.

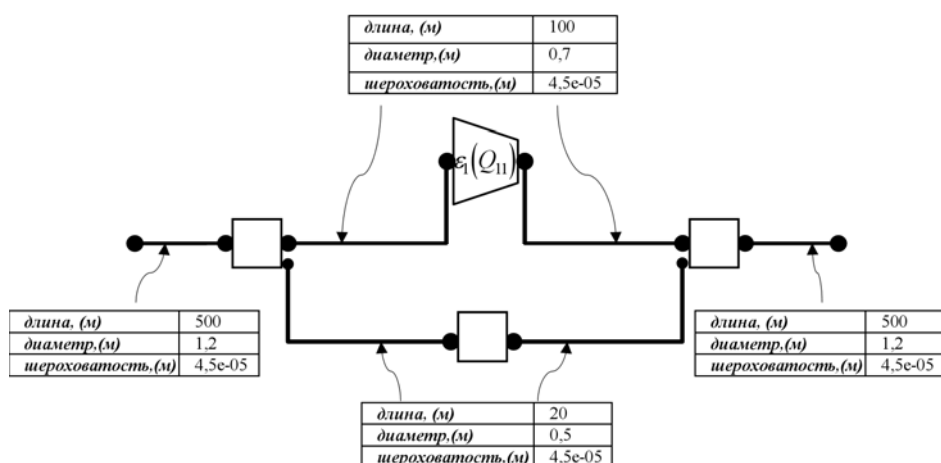


Рис. П9.1. Основные параметры газопроводов модельной системы

Представленные на рис. П9.1 значения шероховатостей технологических трубопроводов будут необходимы для оценки начального состояния (исходного режима транспортирования газа) модельной системы.

В качестве эффективного коэффициента гидравлического сопротивления λ взята зависимость (см. Раздел 4.7):

$$\lambda = \zeta_{\text{сум}} \cdot \frac{D}{l},$$

где D – диаметр трубопровода, содержащего модельный дроссель (кран); l – длина модельного дросселя (крана) ($l = 1$ м). Для описания функции $\zeta_{\text{сум}}$ использована формула:

$$\zeta_{\text{сум}}(k_{\text{дроссель}}) = 783,989536 \cdot \left(\frac{1}{20000} \right)^{k_{\text{дроссель}}}, \quad (\text{П9.1})$$

где $k_{\text{дроссель}}$ – коэффициент сужения поперечного сечения модельного дросселя (см. Раздел 4.7). Формула (П9.1) приближенно аппроксимирует табличную функцию $\zeta_{\text{сум}}(k_{\text{дроссель}})$ (табл. П9.1) для цилиндрического крана [66].

Таблица П9.1

$k_{оросель}$	0,11	0,19	0,35	0,52	0,69	0,85	0,93
$\zeta_{сум}$	275	95,3	20,7	6,15	1,84	0,31	0,05

В качестве нагнетателя в модельной трубопроводной системе (см. рис. П9.1) взят нагнетатель центробежного типа ЦН-650-22-2 [111]. Основные параметры, необходимые для моделирования данного ЦН, представлены в табл. П9.2 и П9.3.

Таблица П9.2

Параметры приведения	Значение
газовая постоянная, ($\kappa\Gamma \cdot \text{м} / \kappa\text{г} \cdot \text{К}$)	51,8
температура газа на входе, (К)	288
коэффициент сжимаемости	0,888
номинальная частота вращения, (мин^{-1})	3700

Таблица П9.3

Технологические ограничения	
минимальная допустимая приведенная объемная производительность, ($\text{м}^3 / \text{мин}$)	450
максимальная допустимая приведенная объемная производительность, ($\text{м}^3 / \text{мин}$)	810
минимальная допустимая частота вращения вала нагнетателя, (мин^{-1})	2590
максимальная допустимая частота вращения вала нагнетателя, (мин^{-1})	4070

Характеристики степени сжатия и политропического коэффициента полезного действия в зависимости от приведенной объемной производительности представлены на рис. П9.2 и П9.3.

Пример устойчивого состояния модельной трубопроводной системы

Начальные условия (см. (4.150)) для решения СОДУ, описанной в Разделе 4.7, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 Q_{ю1}(0) &= 10,6558 \text{ м}^3 / \text{с}; & P_{к01}(0) &= 5059300,95 \text{ Па}; & Q_{11}(0) &= 10,7086 \text{ м}^3 / \text{с}; \\
 P_{ю2}(0) &= 7315382,5 \text{ Па}; & Q_{к02}(0) &= 8,47188 \text{ м}^3 / \text{с}; & Q_{p1}(0) &= 0 \text{ м}^3 / \text{с}; \\
 P_{ю3}(0) &= 7315382,5 \text{ Па}; & Q_{p2}(0) &= 0 \text{ м}^3 / \text{с}; & P_{к03}(0) &= 5059300,95 \text{ Па}.
 \end{aligned}
 \tag{П9.2}$$

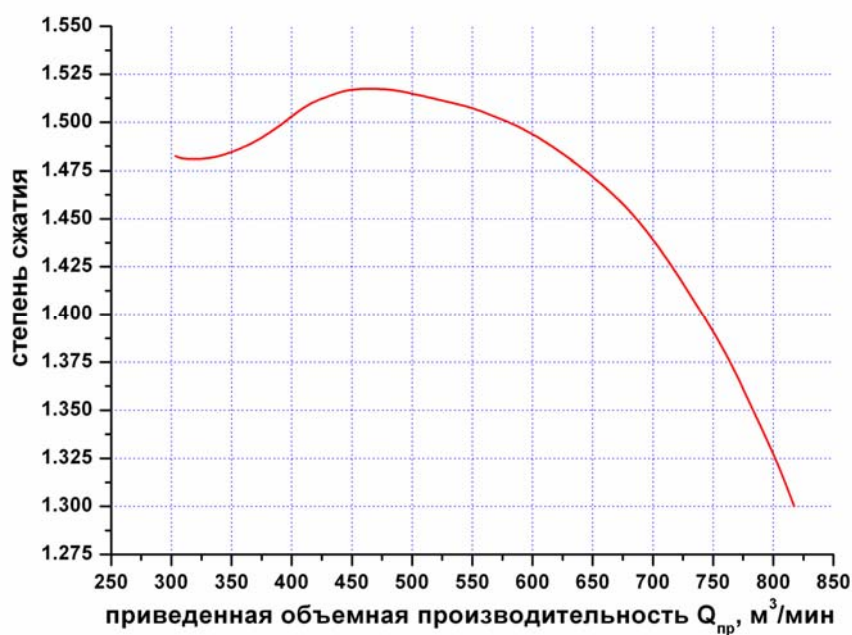


Рис. П9.2. Характеристика степени сжатия от приведенной объемной производительности ЦН-650-22-2

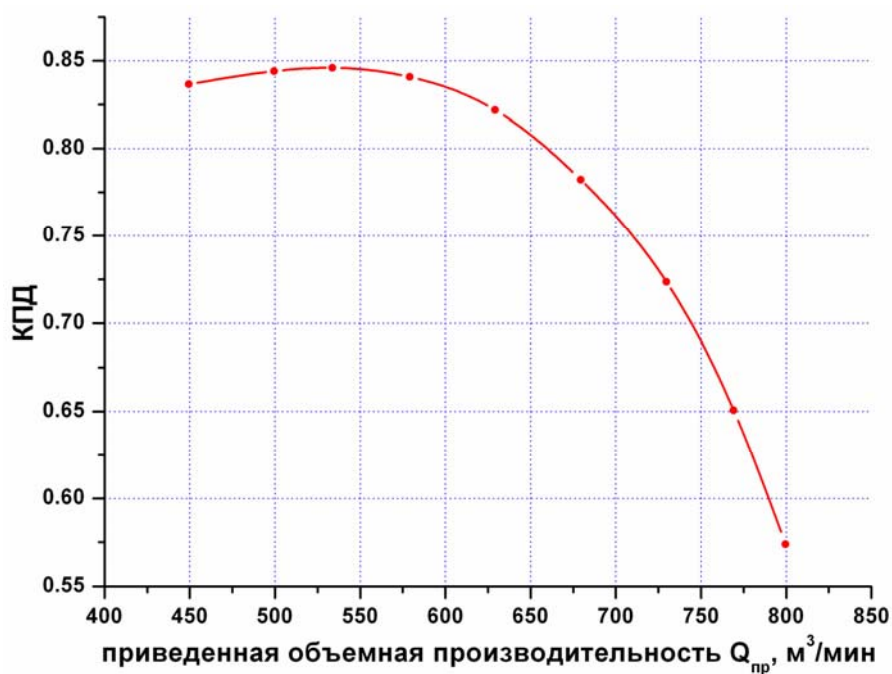


Рис. П9.3. Характеристика коэффициента полезного действия (КПД) от приведенной объемной производительности ЦН-650-22-2

Граничными условиями системы являются следующие величины:

$$P_H = 5066250,0 \text{ Па}; \quad T_H = 288,15 \text{ К}; \quad P_K = 7309851,0 \text{ Па}. \quad (\text{П9.3})$$

Рабочая частота вращения вала ЦН $n = 3700 \text{ мин}^{-1}$. Коэффициенты сужения поперечного сечения модельных дросселей определяются следующим образом: $k_{o1}(t) = 1$; $k_{o2}(t) = 0,43$; $k_{o3}(t) = 0$ для $t \in [0, \infty]$.

Результаты решения, представленные на рис. П9.4 – П9.6, демонстрируют, что получено устойчивое положение равновесия, характерная рабочая точка которого находится на ниспадающей части характеристики ЦН в допустимой области. Самовозбуждение колебаний газодинамических параметров не наблюдается, следовательно, явление помпажа в данном случае маловероятно.

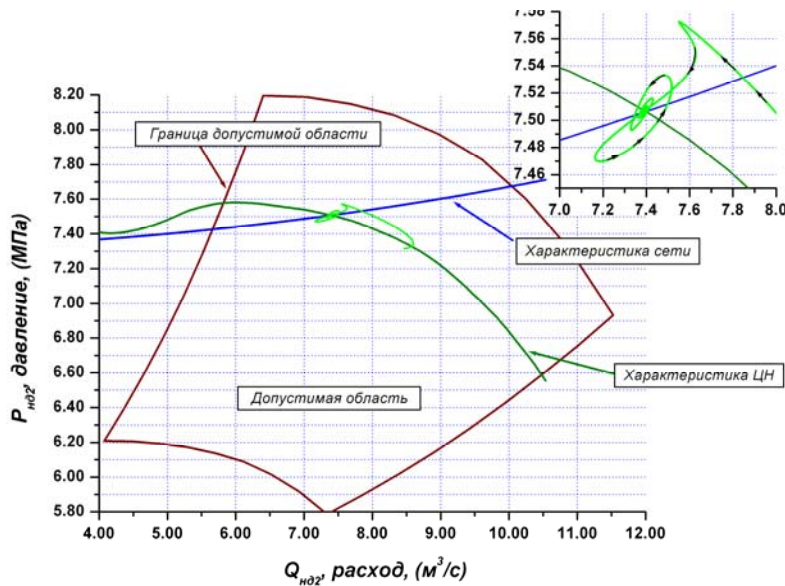


Рис. П9.4. Результаты расчета на фазовой плоскости «давление газа – расход газа» в точке перед дросселем №2

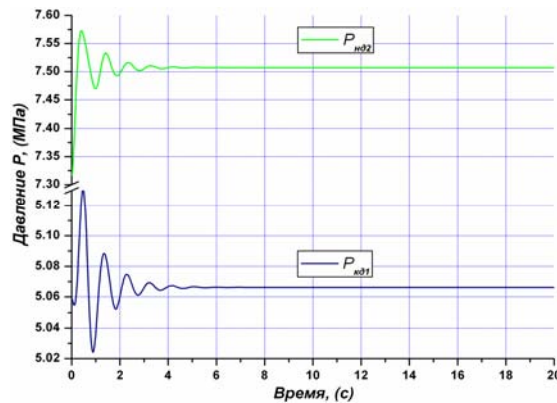


Рис. П9.5. Результаты расчета: давление газа в расчетных точках в зависимости от времени

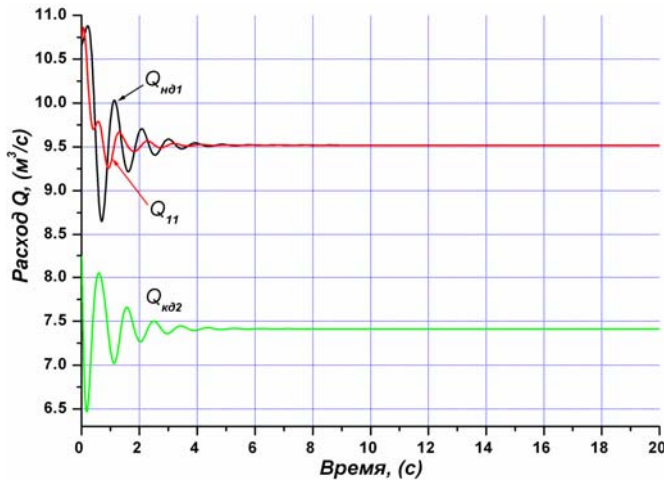


Рис. П9.6. Результаты расчета: расход газа в расчетных точках в зависимости от времени

Пример неустойчивого состояния модельной трубопроводной системы

Начальные условия (см. (4.150)) для решения СОДУ (4.148а–е, 4.153), описанной в Разделе 4.7, имеют вид:

$$\begin{aligned} Q_{нд1}(0) &= 9,98799 \text{ м}^3/\text{с}; & P_{к01}(0) &= 5060142,94 \text{ Па}; & Q_{т1}(0) &= 10,03144 \text{ м}^3/\text{с}; \\ P_{нд2}(0) &= 7406926,63 \text{ Па}; & Q_{к02}(0) &= 7,84571 \text{ м}^3/\text{с}; & Q_{р1}(0) &= 0 \text{ м}^3/\text{с}; \\ P_{нд3}(0) &= 7406926,63 \text{ Па}; & Q_{р2}(0) &= 0 \text{ м}^3/\text{с}; & P_{к03}(0) &= 5060142,94 \text{ Па}. \end{aligned} \quad (\text{П9.4})$$

Граничными условиями для этой СОДУ являются следующие величины:

$$P_H = 5066250,0 \text{ Па}; \quad T_H = 288,15 \text{ К}; \quad P_K = 7402124,4 \text{ Па}. \quad (\text{П9.5})$$

Рабочая частота вращения вала ЦН – $n = 3700 \text{ мин}^{-1}$. Коэффициенты сужения поперечного сечения модельных дросселей №1 и №3 определяются следующим образом: $k_{01}(t) = 1$, $k_{03}(t) = 0$ для $t \in [0, \infty]$. Процесс дросселирования (для модельного дросселя №2) задан линейной зависимостью (рис. П9.7), где диапазон изменения имеет вид: $[0,409; 0,574]$:

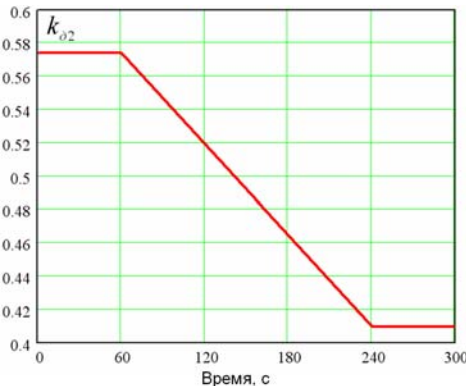


Рис. П9.7. Изменение коэффициента сужения поперечного сечения модельного дросселя №2

Результаты расчета представлены на рис. П9.8 – П9.10.

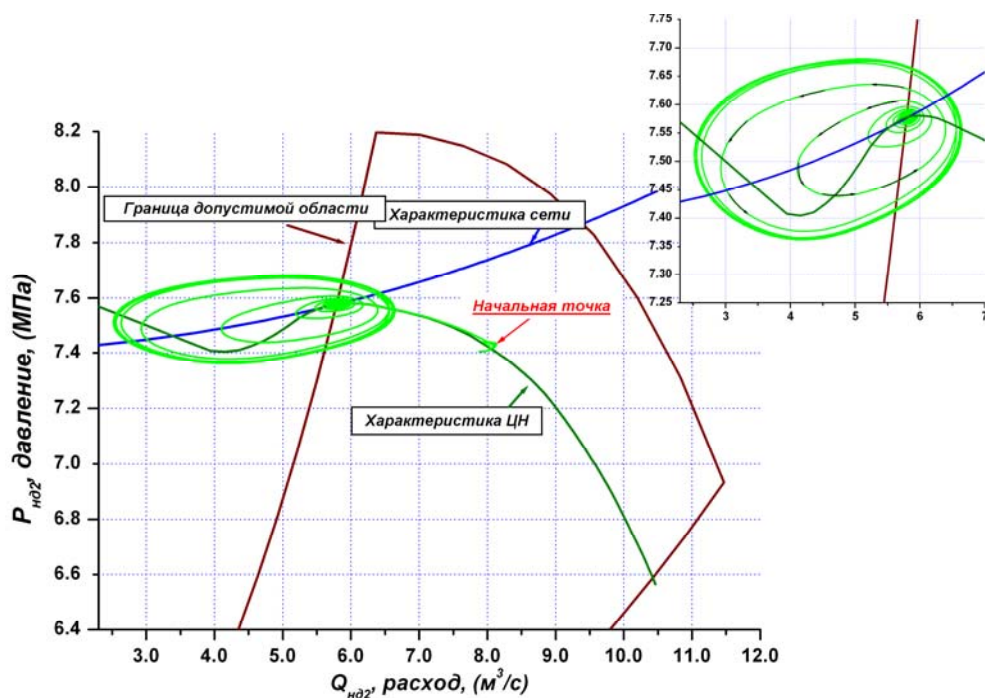


Рис. П9.8. Результаты расчета на фазовой плоскости «давление газа – расход газа» в точке перед дросселем №2

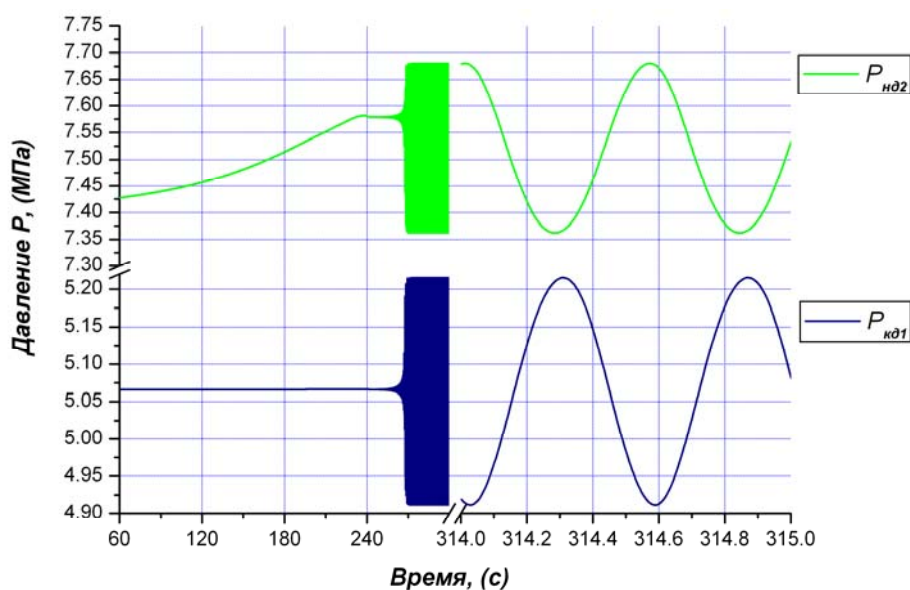


Рис. П9.9. Результаты расчета: давление газа в расчетных точках в зависимости от времени

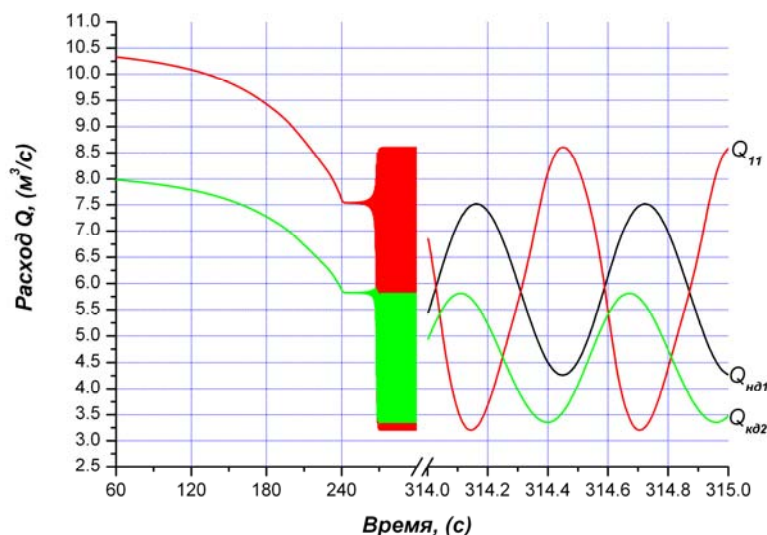


Рис. П9.10. Результаты расчета: расход газа в расчетных точках в зависимости от времени

Из рис. П9.8 видно, что рабочая точка ЦН при дросселировании перемещается от равновесного состояния вверх вдоль кривой напорной характеристики за пределы допустимой области. Результаты решения в этом примере показывают, что на момент времени, когда рабочая точка достигает восходящего участка характеристики, состояние модельной трубопроводной системы становится неустойчивым и траектория рабочей точки ЦН на фазовой плоскости переходит в некоторый предельный цикл. Таким образом, в модельной системе возникают незатухающие колебания газодинамических параметров (см. рис. П9.9, П9.10), что соответствует моменту возникновения помпажа. Как видно из перечисленных рисунков, частота колебаний в данном примере приблизительно равна $1,8\Gamma_{\text{ц}}$, что в большей степени обусловлено наличием достаточно большого объема транспортируемого газа ($38,5 \text{ м}^3$) в напорном газопроводе.

Способ преодоления неустойчивости состояния модельной трубопроводной системы методом перепуска газа за нагнетателем

Одним из известных способов предотвращения помпажа является метод перепуска транспортируемого газа за нагнетателем, т.е. включение в систему антипомпажного рециркуляционного газопровода. СОДУ (4.148а–е, 4.153) позволяет численно моделировать и анализировать такой вид управляющего воздействия.

Вернемся к рассмотрению приведенного выше примера, соответствующего крайним условиями (П9.4, П9.5). Рабочая частота вращения вала ЦН – $n = 3700 \text{ мин}^{-1}$. Модельный дроссель №1 всегда открыт, поэтому:

$$k_{01}(t) = 1 \text{ для } t \in [0, \infty].$$

Управление модельным дросселем №2 описывается законом, представленным на рис. П9.7. Включение антипомпажного рециркуляционного газопровода производится с помощью открытия модельного дросселя №3 на 28%, которое описывается линейной зависимостью, представленной на рис. П9.11.

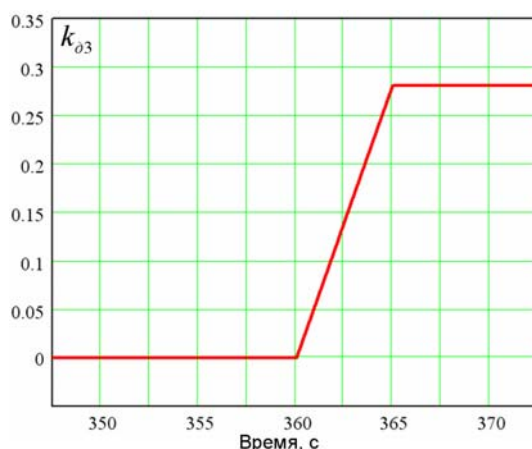


Рис. П9.11. Изменение коэффициента сужения поперечного сечения модельного дросселя №3

Численно полученное решение СОДУ представлено на рис. П9.12 – П9.16. Результаты численных экспериментов показывают, что напор, создаваемый нагнетателем при возникновении перепуска газа, уменьшается при увеличении объемного расхода, вследствие чего рабочая точка возвращается в допустимую область на ниспадающий участок характеристики ЦН. При этом конечное положение рабочей точки ЦН соответствует устойчивому состоянию модельной трубопроводной системы (колебания давления и расхода транспортируемого газа затухают и прекращаются). На рис. П9.12 – П9.16 представлен переходный процесс, связанный с началом функционирования антипомпажного рециркуляционного газопровода.

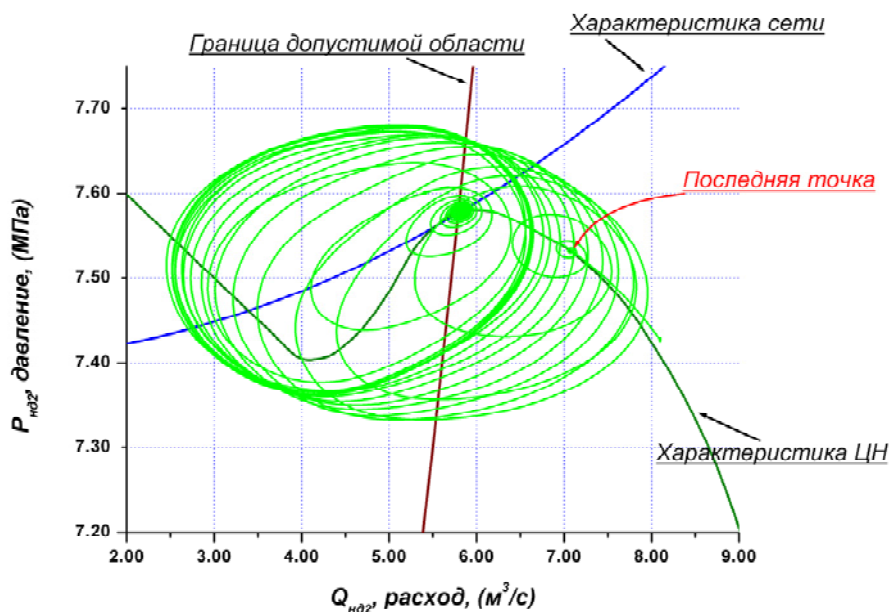


Рис. П9.12. Результаты расчета на фазовой плоскости «давление газа – расход газа» в точке перед модельным дросселем №2

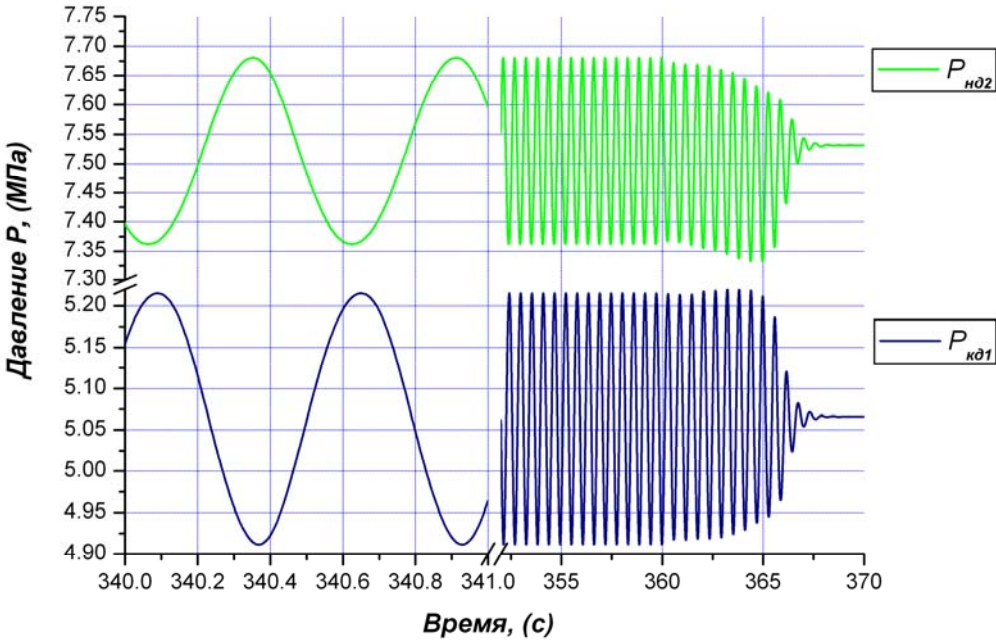


Рис. П9.13. Результаты расчета: давление газа в расчетных точках в зависимости от времени

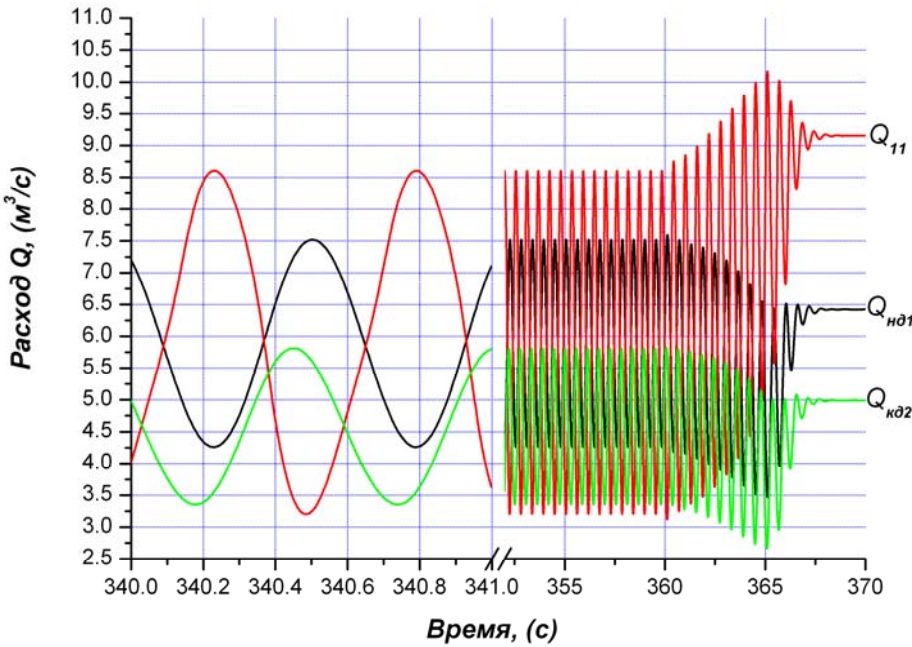


Рис. П9.14. Результаты расчета: расход газа в расчетных точках в зависимости от времени

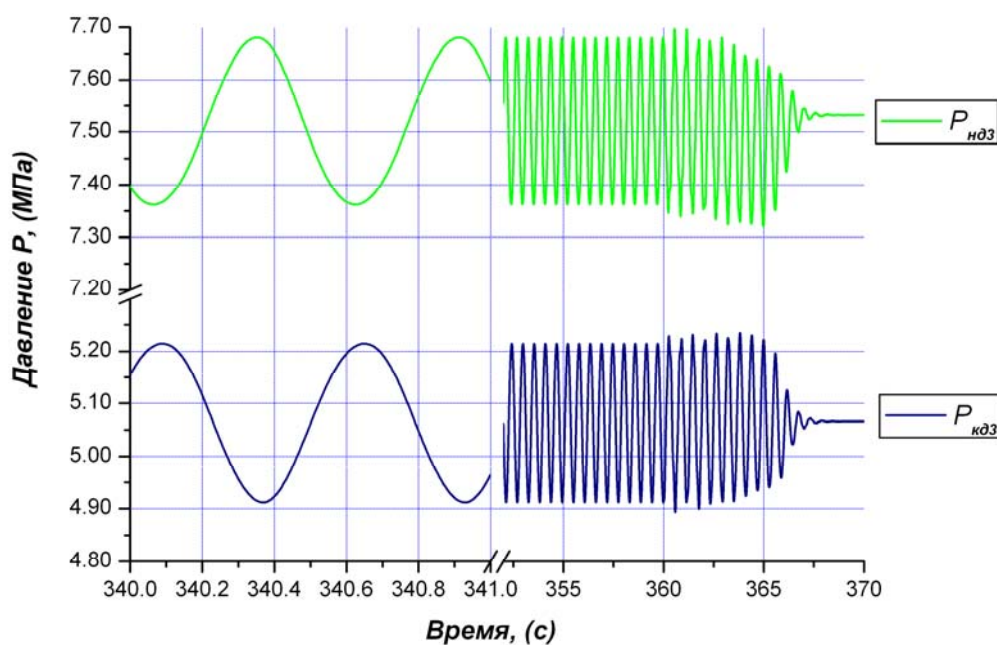


Рис. П9.15. Результаты расчета: давление газа в расчетных точках модельного дросселя №3 в зависимости от времени

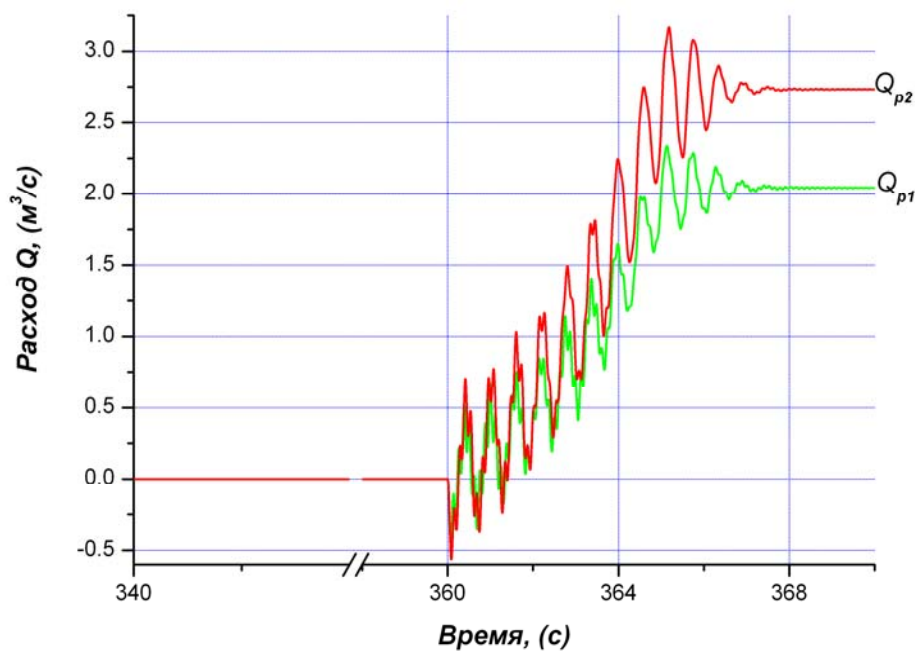


Рис. П9.16. Результаты расчета: расход газа в расчетных точках антипомпажного рециркуляционного газопровода в зависимости от времени

Здесь особый интерес представляют результаты, полученные в расчетных точках на антипомпажном рециркуляционном газопроводе (см. рис. П9.15, П9.16). Давление газа в примыкающих к модельному дросселю №3 технологических газопроводах (подводящем и отводящем) до момента открытия дросселя №3 колеблется вместе с колебанием давления, соответственно, в точках: входа модельного дросселя №2 и выхода модельного дросселя №1. На рис. П9.16 можно наблюдать увеличение расхода газа через модельный дроссель №3 во время его открытия, что подтверждает соответствие полученного решения сути происходящего физического процесса.

Вывод: Построенную в Разделе 4.7 СОДУ (4.148а–е, 4.153) в первом приближении можно использовать для оценки возможности развития процессов срыва потока газа в системах «ЦН (группа ЦН) – прилегающие ТГ» и прогнозирования возникновения аварийной ситуации, вызванной появлением помпажа. Полученные результаты численных экспериментов подтверждают теоретические исследования, подробно изложенные в монографиях [258, 260]. Перечисленные в работе [260] факторы, влияющие на характер самовозбуждения колебаний и область устойчивости работы нагнетателей, сохраняют свою справедливость для СОДУ (4.148а–е, 4.153).

Приложение 10

К вопросу о расчетных оценках значений коэффициента Шези

Прялов С.Н., Юлин А.В.

В настоящем Приложении рассмотрены некоторые формулы для расчета коэффициента Шези (см. Главу 5). Основная часть изложенной теории заимствована из работы [264]. Также проведен анализ по способам вычисления рассматриваемого параметра в научно-технической литературе, которая была доступна авторам монографии.

Как правило, при расчете потерь напора на трение при **равномерном** течении воды в открытых руслах (реках, каналах) вместо формулы Дарси – Вейсбаха (см. Приложение 2) используют формулу Шези (см., например, [86, 264, 326–328]):

$$w = C \cdot \sqrt{r \cdot J_e}, \quad (\text{П10.1})$$

где w – модуль средней скорости потока; C – коэффициент Шези; r – гидравлический радиус; $J_e = h_l / l$ – гидравлический уклон; h_l – потери напора на участке канала (реки) длины l . Эта формула была предложена в начале XIX века на основе исследований французского инженера А. Шези, связанных с водоснабжением г. Парижа [86].

Введем некоторые определения, известные из общего курса гидравлики (см. также [264]). **Установившимся** движением жидкости называется такое движение, при котором скорость и давление в данной точке потока не изменяются с течением времени. Установившееся движение может быть равномерным и неравномерным.

Равномерным движением жидкости называется такое движение, при котором гидравлические элементы потока – живое сечение, глубина потока, средняя скорость течения и пр. – не изменяются по его длине (рис. П10.1а). При равномерном движении жидкости в открытом русле гидравлический уклон J_e , пьезометрический уклон J (уклон свободной поверхности потока) и уклон i дна водотока¹ равны между собой, т.е.:

$$J_e = J = i.$$

Следовательно, при равномерном движении линия удельной энергии (линия «Е–Е» на рис. П10.1), пьезометрическая линия (линия свободной поверхности потока – линия «Р–Р» рис. П10.1) и линия дна водотока есть параллельные прямые.

Неравномерным движением жидкости называется такое движение, при котором: 1) либо изменяется живое сечение по длине потока; 2) либо при постоянном живом сечении изменяются распределения скоростей и ускорений в соответствующих точках разных живых сечений; 3) либо изменяется и то и другое. При неравномерном движении (рис. П10.1б) три вышеуказанные уклона – J_e , J и i – отличны друг от друга, т.е.:

$$J_e \neq J \neq i.$$

Установившееся неравномерное движение будем называть **медленно изменяющимся**, если оно удовлетворяет следующим условиям: 1) кривизна элементарных струек настолько незначительна, что их можно считать прямолинейными; 2) угол расхождения элементарных струек весьма мал.

¹ Уклон i водотока определяется так: $i = \sin \Theta$, где Θ – угол наклона линии дна водотока к горизонту.

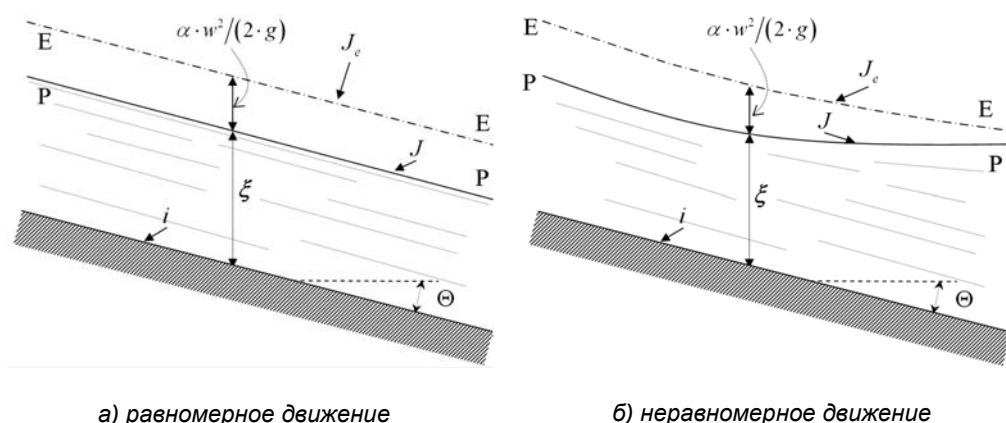


Рис. П10.1. Схематичное представление равномерного и неравномерного движения жидкости по каналу с открытым руслом¹

При этих условиях живое сечение потока можно считать плоским, а изменение величины площади живого сечения по длине потока – малым. Помимо того, представляется возможным пренебрегать составляющими скоростей и ускорений в плоскости живого сечения, т.е. считать, что скорости и ускорения направлены перпендикулярно к плоскости живого сечения.

Отметим еще одно весьма важное обстоятельство. При соблюдении сформулированных выше условий распределение давления p по живому сечению потока подчиняется гидростатическому закону, т.е. в случае медленно изменяющегося движения потенциальная энергия, отнесенная к некоторой горизонтальной плоскости сравнения, для всех точек данного живого сечения потока остается одинаковой.

Поясним более детально рис. П10.1. На данном рисунке схематично представлены характеристики потока жидкости в канале с открытым руслом. В частности, средняя удельная энергия потока в конкретном сечении² по отношению к некоторой горизонтальной плоскости сравнения представима в виде:

$$E = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha \cdot w^2}{2 \cdot g},$$

где z – координата какой-либо точки потока в данном сечении (вертикальное расстояние от указанной точки до некоторой горизонтальной плоскости); p – давление жидкости в данной точке; γ – вес единицы объема жидкости; g – модуль ускорения свободного падения; α – коэффициент, учитывающий влияние неравномерности распределения скоростей по живому сечению потока на его живую силу (первый корректив скорости) [264]. В Главе 5 при построении модели течения жидкости по каналу с открытым руслом данный коэффициент полагался равным единице. На рис. П10.1 величина ξ является глубиной потока (глубиной наполнения).

Умножим данное уравнение на γ , учитывая, что $\gamma = \rho \cdot g$, где ρ – плотность жидкости:

¹ Рисунок выполнен по материалам работы [264].

² Это энергия, отнесенная к единице веса жидкости, протекающей через данное сечение потока в единицу времени.

$$\rho \cdot g \cdot E = \rho \cdot g \cdot z + p + \frac{\alpha \cdot \rho \cdot w^2}{2}.$$

Величина $(\rho \cdot g \cdot E)$ является удельной энергией потока (в конкретном сечении), отнесенной к единице объема жидкости, протекающей через данное сечение потока в единицу времени.

Пусть h – глубина погружения произвольной точки объема жидкости (измеряется по вертикали вниз от свободной поверхности). Учитывая, что давление на свободной поверхности равно атмосферному давлению $p_{атм}$, а давление внутри потока подчиняется гидростатическому закону (в случае медленно изменяющегося движения), для выбранной точки имеем:

$$p = p_{атм} + \rho \cdot g \cdot h.$$

Пусть $H(x, t)$ в каждом произвольном сечении потока равно $z(x, t)$ для свободной поверхности жидкости (см. Главу 5). Напомним также, что давление $p_{атм}$ на свободной поверхности считается постоянным по длине канала. Учитывая способ введения параметра h и зависимости H , определяющей положение свободной поверхности жидкости, для произвольной точки потока имеем (см. (5.17)):

$$h = H - z.$$

Отсюда получаем, что для рассматриваемой точки потока в данном сечении справедливо равенство:

$$\rho \cdot g \cdot z + p = \rho \cdot g \cdot H + p_{атм}.$$

Используя данное соотношение, удельную энергию потока можно найти по формуле

$$\rho \cdot g \cdot E = \rho \cdot g \cdot H + p_{атм} + \frac{\alpha \cdot \rho \cdot w^2}{2}$$

или

$$E = H + \frac{p_{атм}}{\gamma} + \frac{\alpha \cdot w^2}{2 \cdot g}.$$

Для пояснения физической сущности данных величин приведем уравнение движения жидкости по каналу с открытым руслом в недивергентной форме. Для получения этого уравнения необходимо из (5.31б) вычесть (5.31а), умноженное на w , деля слагаемые окончательного соотношения на величину f :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^2}{2} \right) = -g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r} \right).$$

Принимая во внимание то, что величины $p_{атм}$ и ρ являются постоянными, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \cdot g \cdot H + p_{атм} + \frac{\rho \cdot w^2}{2} \right) &= -\frac{\rho \cdot g \cdot w \cdot |w|}{C^2 \cdot r}; \\ \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H + \frac{p_{атм}}{g \cdot \rho} + \frac{w^2}{2 \cdot g} \right) &= -\frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r} \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot g \cdot E)}{\partial x} = -\frac{\rho \cdot g \cdot w \cdot |w|}{C^2 \cdot r};$$

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{w \cdot |w|}{C^2 \cdot r}.$$

Из данных уравнений видно, что удельная энергия потока¹ (на единицу объема и единицу веса жидкости) в произвольном сечении канала при установившемся режиме течения изменяется только за счет действия диссипативных сил (сил трения). Напомним также, что при получении уравнения движения жидкости по каналу с открытым руслом считалось, что $\alpha = 1$.

Вернемся к изложению способов расчета коэффициента Шези. Как известно [86], для большинства открытых потоков значение гидравлического радиуса r мало отличается от глубины потока ξ .

Установим формальную связь между коэффициентом Шези C и коэффициентом гидравлического трения λ (см. Приложение 2). Для этого преобразуем формулу (П10.1) к виду:

$$h_l = \frac{l}{C^2 \cdot r} \cdot w^2. \quad (\text{П10.1a})$$

Примем $D = 4 \cdot r$, где D – гидравлический диаметр. Выделив скоростной напор, получим:

$$h_l = \frac{8 \cdot g}{C^2} \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{w^2}{2 \cdot g}. \quad (\text{П10.1б})$$

Сравнивая (П10.1б) и формулу Дарси – Вейсбаха [86]

$$h_l = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{w^2}{2 \cdot g}, \quad (\text{П10.1в})$$

найдем

$$\lambda = \frac{8 \cdot g}{C^2}. \quad (\text{П10.1г})$$

Полученная связь между λ и C , на первый взгляд, указывает на полную эквивалентность формул Шези и Дарси – Вейсбаха. Однако формулы и таблицы, применяемые для определения численного значения C , не позволяют учесть влияния числа Рейнольдса Re на потери напора [86]. Если принять во внимание приведенный выше анализ зависимости коэффициента гидравлического трения λ (см. Приложение 2), то станет очевидно, что область применения формулы Шези – это область квадратичного сопротивления, в которой λ зависит от шероховатости и не зависит от числа Рейнольдса Re .

Коэффициент C , входящий в вышеописанные формулы, играет весьма важную роль в практических расчетах, в силу чего его значение следует определять, по возможности, точно. Величина коэффициента C зависит от шероховатости стенок и дна русла, а также от формы и размеров русла.

Для определения коэффициента C предложено значительное число эмпирических формул, достаточно полные сведения о которых можно найти в общих курсах гидравлики. Мы приведем здесь некоторые из этих формул², причем отметим, что большинство

¹ Данная величина включает в себя кинетическую энергию и потенциальную энергию потока.

² Большая часть информации заимствована из [264]

из них даны для метровых мер¹ (если некоторые формулы приведены не для метровых мер, то об этом будет отмечено особо).

А) Формулы одночленного вида.

Из класса формул одночленного (показательного) вида приведем, прежде всего, полную формулу Н.Н. Павловского, предложенную в результате обработки весьма обширного экспериментального материала, относящегося к каналам различных размеров и с различной шероховатостью.

Эта формула выглядит так [264]:

$$C = \frac{1}{n} \cdot r^y, \quad (\text{П10.2})$$

где n – коэффициент, зависящий от шероховатости стенок и дна русла; y – показатель степени, зависящий от r и n , определяемый по формуле [264]:

$$y = 2,5 \cdot \sqrt{n} - 0,75 \cdot \sqrt{r} \cdot (\sqrt{n} - 0,1) - 0,13. \quad (\text{П10.2*})$$

Формулу (П10.2) Н.Н. Павловский рекомендовал для расчета открытых русел при $0,1 \text{ м} \leq r \leq 3 \text{ м}$. Для приближенных расчетов формула (П10.2) упрощается [264]:

при $0,1 \text{ м} \leq r \leq 1 \text{ м}$

$$y = 1,5 \cdot \sqrt{n}, \quad (\text{П10.3})$$

при $1 \text{ м} < r \leq 3 \text{ м}$

$$y = 1,3 \cdot \sqrt{n}. \quad (\text{П10.4})$$

В инженерной практике часто применяются одночленные формулы, в которых показатель y имеет постоянное значение.

Полагая в формуле (П10.2) $y = 1/6$, получим формулу Маннинга [264]:

$$C = \frac{1}{n} \cdot r^{1/6}. \quad (\text{П10.5})$$

Принимая в формуле (П10.2) $y = 1/5$, придем к формуле Форхгеймера [264]:

$$C = \frac{1}{n} \cdot r^{1/5}. \quad (\text{П10.6})$$

Б) Формулы многочленного вида.

Рассмотрение данного класса формул начнем с формулы Базена [264]:

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{r}}}, \quad (\text{П10.7})$$

¹ Все эмпирические формулы, приведенные здесь, даны в предположении, что движущейся жидкостью является вода.

где γ – коэффициент, зависящий от шероховатости стенок и дна русла.

Другая формула, а именно, Формула Гангилье – Куттера [264] имеет вид:

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{i}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{i} \right) \cdot \frac{n}{\sqrt{r}}}. \quad (\text{П10.8})$$

Согласно [264], коэффициенты n и γ следует брать из таблиц П10.1 и П10.2.

Таблица П10.1

Значения коэффициента шероховатости¹ n

№	Род стенки	n
1	Поверхности, покрытые эмалью или глазурью. Весьма тщательно остроганные доски, хорошо пригнанные.	0,009
2	Строганные доски. Штукатурка из чистого цемента.	0,01
3	Цементная штукатурка (1/3 песка). Чистые (новые) гончарные, чугунные и железные трубы, хорошо уложенные и соединенные.	0,011
4	Нестроганные доски, хорошо пригнанные. Водопроводные трубы в нормальных условиях, без заметной инкрустации; весьма чистые водосточные трубы, весьма хорошая бетонировка.	0,012
5	Тесовая кладка, весьма хорошая кирпичная кладка. Водосточные трубы в нормальных условиях; несколько загрязненные водопроводные трубы. Нестроганные доски, не вполне тщательно пригнанные.	0,013
6	«Загрязненные» трубы (водопроводные и водосточные); средняя кирпичная кладка; бетонировка каналов в средних условиях.	0,014
7	Грубая кирпичная кладка; каменная кладка (не тесовая) с чистой отделкой поверхностей, при ровном постелистом камне. Чрезвычайно загрязненные водостоки. Брезент по деревянным рейкам.	0,015
8	Обыкновенная бутовая кладка в удовлетворительном состоянии; старая (расстроенная) кирпичная кладка; сравнительно грубая бетонировка. Гладкая, весьма хорошо разработанная скала.	0,017
9	Каналы, покрытые толстым, устойчивым илистым слоем; каналы в плотном лессе и в плотном мелком гравии, затянутые сплошной илистой пленкой (при всем том – в безукоризненном состоянии).	0,018

¹ Таблица заимствована из работы [264].

10	Очень грубая бутовая кладка; сухая кладка из крупных камней; булыжная мостовая. Каналы, чисто высеченные в скале. Каналы в лессе, плотном гравии, плотной земле, затянутые илистой пленкой (в нормальном состоянии).	0,02
11	Мостовая из крупного рваного камня, с резко выступающими углами; каналы в скале при посредственной обработке поверхности; каналы в плотной глине. Каналы в лессе, гравии, земле, затянутые несплошной (местами прерываемой) илистой пленкой. Большие земляные каналы, находящиеся в условиях содержания и ремонта выше средних.	0,0225
12	Большие земляные каналы в средних условиях содержания и ремонта и малые – в хороших. Реки и ручьи в благоприятных условиях (со свободным течением, без засорения и значительных водорослей).	0,025
13	Земляные каналы: большие – в условиях ниже среднего, малые – в средних.	0,0275
14	Каналы и реки в сравнительно плохих условиях (например, местами с водорослями и булыжником или заметно заросшие травой с местными обвалами откосов и т.д.).	0,03
15	Каналы и реки, находящиеся в весьма плохих условиях, с неправильным профилем, значительно засоренные камнями и водорослями и пр.	0,035
16	То же – в исключительно плохих условиях (обломки скалы и крупные камни по руслу, густые корни, значительные промоины и обвалы, заросли камыша).	0,04

Таблица П10.2

Значения коэффициента шероховатости¹ γ

№	Род стенки	γ
1	Очень гладкие стенки (цементная штукатурка, строганные доски)	0,06
2	Гладкие стенки (доски, кирпич, тесовая кладка).	0,16
3	Бутовая (чистая) кладка.	0,46
4	Промежуточная категория, грубая бутовая кладка, очень правильные стенки в плотном земляном грунте (замощенные стенки).	0,85
5	Земляные стенки в обычном состоянии.	1,3

¹ Таблица заимствована из работы [264].

6	Земляные стенки, представляющие исключительное сопротивление.	1,75

В качестве основной расчетной зависимости для определения коэффициента C автор [264] рекомендует формулу Н.Н. Павловского (П10.2, П10.2*). Эта формула может применяться в руслах с различной шероховатостью и различных размеров. Однако, при этом, обратим внимание читателей на рекомендуемый им диапазон параметра r (см. выше).

Согласно [264], в том случае, когда расчетное значение коэффициента шероховатости выбирается достаточно произвольно, а также в случае предварительных расчетов вполне уместно применение упрощенных формул Н.Н. Павловского, а равно и тех формул, в которых показатель γ имеет постоянную величину, но при этом область применения каждой из этих формул должна быть ограничена соответствующей категорией русел, характеризующихся определенным диапазоном определения коэффициента шероховатости и гидравлического радиуса.

Формула Базена находит применение при расчете естественных водотоков [264]. В случае исключительно больших каналов, характеризующихся малым уклоном дна $i < 0,0005$, уместно применение формулы Гангилие – Куттера [264].

Несмотря на то, что приведенные формулы были описаны в работе [264], изданной в середине прошлого века, они остаются актуальными и в настоящее время. Современные публикации по данному вопросу продолжают приводить эти же зависимости. Например, в работе [326] (издание 1963 года) отмечено¹: «для коэффициента C различными авторами предложено много разнообразных формул. Не останавливаясь на их обзоре, отметим, что у нас в Союзе наибольшее распространение, а в области гидротехнического строительства и регламентацию, получила формула Н.Н. Павловского (П10.2). Числовые значения коэффициента шероховатости n , показателя γ , а также коэффициента C приводятся в специальной литературе.

На практике очень часто для обычных чугунных и железных трубопроводов независимо от их диаметров принимают: $\gamma = 1/6$ и $\gamma = 1/5$. В этом случае будем иметь формулу Маннинга (П10.5) и формулу Форхгеймера (П10.6). Очевидно, обе эти формулы являются частными случаями формулы Н.Н. Павловского (по времени опубликования эти формулы являются более ранними)».

В книге [327] (издание 1991 года) сказано: «Наиболее распространенной формулой для определения коэффициента Шези при гидравлически шероховатых стенках является формула акад. Н.Н. Павловского (П10.2)». Для вычисления параметра γ в [327] предлагается формула (П10.2*).

В публикации [86] (издание 1999 года) сказано: «зависимость коэффициента Шези была достаточно хорошо изучена... Рекомендованы зависимости и таблицы для определения C . Наиболее распространение, связанное с ее простотой, получила формула Маннинга» (П10.5).

Остановимся на работе [328] (издание 2004 года). Согласно данному учебному пособию, коэффициент Шези можно определить по ряду эмпирических формул. Широкое распространение для определения данного коэффициента получила формула Н.Н. Павловского (П10.2), где показатель степени γ находится по формуле (П10.2*). Формула (П10.2) основана на большом опытном материале и хорошо подтверждается на практике. В ряде случаев для подсчета коэффициента Шези C применяют приближенную формулу Маннинга (П10.5).

¹ Далее для обозначения цитаты может использоваться курсив.

В формуле (П10.2) коэффициент Шези зависит от гидравлического радиуса и коэффициента шероховатости. Но и показатель степени y зависит от этих же параметров (см. формулу (П10.2*)). Поэтому и возникло предположение о том, что показатель степени y зависит от коэффициента Шези. Обработка опытов это подтвердила. В итоге была получена формула¹ [328]:

$$y = 0,29 - 0,0021 \cdot C, \quad (\text{П10.9})$$

которая рекомендуется для расчета канализационных сетей.

При расчете ирригационных каналов рекомендуется пользоваться формулой И.И. Агроскина [328]:

$$C = \frac{1}{n} + 17,72 \cdot \lg(r). \quad (\text{П10.10})$$

Расчет каналов и лотков, имеющих сравнительно гладкие стенки, рекомендуется производить по формуле А.Д. Альтицуля [328]:

$$C = 20 \cdot \lg \left(\frac{r}{\varepsilon + 0,004 / \sqrt{r \cdot i}} \right), \quad (\text{П10.11})$$

где r – гидравлический радиус, мм; ε – приведенная линейная шероховатость, мм (табл. П10.3).

Согласно [328], формула (П10.11) представляет собой обобщенную зависимость, справедливую для всей области турбулентного режима движения.

Таблица П10.3

Значения приведенной линейной шероховатости² ε

№	Характеристика русла	ε
1	Исключительно гладкие поверхности (эмалированные, глазурованные и т.д.)	0 (до 0,02)
2	Чистая цементная штукатурка	0,04 (0,02÷0,06)
3	Металлические гладкие лотки	0,1 (0,02-0,10)
4	Деревянные лотки, бетонировка	0,3 (0,03÷1,50)
5	Кирпичная кладка	0,5 (0,08÷1,25)
6	Тесаный камень	0,5 (0,12÷1,25)

Таким образом, в настоящем Приложении проведен анализ способов расчета коэффициента Шези C , встречающихся в работах по рассматриваемому вопросу. Многооб-

¹ Калицун В.И., Орлова В.В. Гидравлическое сопротивление самотечных трубопроводов водоотводящих сетей. Исследования по интенсификации методов очистки сточных вод // Сб. научн. трудов МИСИ. – М., 1987.

² Таблица заимствована из работы [328].

разие соответствующих формул требует аккуратности в выборе той или иной зависимости, позволяющей оценивать рассматриваемый параметр. Это объясняется тем, что коэффициент Шези C зависит не только от размеров русла, но и от характеристик его стенок. При этом одним и тем же типам русел соответствуют различные формулы расчета параметра C . Из вышесказанного следует, что *для адекватного анализа параметров течения жидкости по разветвленным системам каналов с открытым руслом вид зависимости для вычисления коэффициента Шези нужно подбирать в каждом конкретном случае*. Такой подбор целесообразно проводить на стадии настройки гидравлического симулятора конкретной системы каналов на ее реальные параметры (т.е. при определении эффективных значений шероховатости внутренней поверхности стенок русел (см. также Главу 2)).

Об авторах

СЕЛЕЗНЕВ Вадим Евгеньевич

Доктор технических наук, профессор. Основатель научной школы высокоточного численного моделирования промышленных энергетических систем для повышения их безопасности и эффективности. Научная специализация: разработка теоретических основ математического моделирования и численного анализа физических процессов жизненных циклов промышленных энергетических систем. Профессиональные интересы: вычислительная механика и математическая оптимизация. Автор и соавтор многочисленных научных трудов, посвященных повышению безопасности, экологичности и эффективности сложных технических систем и технологических процессов методами вычислительной механики и математической оптимизации.



АЛЕШИН Владимир Васильевич

Доктор технических наук. Научная специализация: разработка математических моделей и вычислительных технологий для анализа сложных технических систем и повышения их безопасности. Профессиональные интересы: вычислительная механика. Автор и соавтор более 130 научных трудов (из них 9 монографий), посвященных повышению промышленной и пожарной безопасности энергетических систем и комплексов методами вычислительной механики.



ПРЯЛОВ Сергей Николаевич

Кандидат технических наук. Научная специализация: разработка математических моделей, методов численного анализа и программно-математического обеспечения для решения задач повышения безопасности и эффективности объектов топливно-энергетического комплекса. Профессиональные интересы: модели и методы вычислительной механики жидкостей и газов. Автор и соавтор 4 научных монографий и более 90 научных статей, посвященных проблемам комплексного анализа технических и технологических систем методами численного моделирования.



Научное издание

СЕЛЕЗНЕВ Вадим Евгеньевич
АЛЕШИН Владимир Васильевич
ПРЯЛОВ Сергей Николаевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТРУБОПРОВОДНЫХ СЕТЕЙ И СИСТЕМ КАНАЛОВ

Методы, модели и алгоритмы

Напечатано с готового оригинал-макета

Издательство ООО "МАКС Пресс"

Лицензия ИД № 00510 от 01.12.99 г.

Подписано к печати 18.06.2007 г.

Формат 70х100 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 43,5. Тираж 500 экз. Заказ 341.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,

2-й учебный корпус, 627 к.

Тел. (495) 939-3890, (495) 939-3891. Тел./Факс (495) 939-3891.